

بهبود عملکرد واحدهای تصمیم گیرنده کارا با استفاده از روش تقاطع ابرصفحه‌های سازای مجموعه امکان تولید در تحلیل پوششی داده‌ها

اکبر مرادی مجد***، علیرضا امیر تیموری***، سهراب کردرستمی***، محسن واعظ
قاسمی*****

تاریخ دریافت: ۹۸/۵/۱ - تاریخ پذیرش: ۹۸/۱۱/۶

چکیده

تحلیل پوششی داده‌ها یک تخمین گر است. این تخمین گر سعی می کند که یک ارتباط بین ورودی‌های متعدد و خروجی‌های متعدد و همچنین تکنولوژی تولید را تخمین بزند. تحلیل پوششی داده‌ها واحدهای تصمیم گیرنده را به دو بخش واحدهای کارا و واحدهای ناکارا تقسیم بندی می کند. در این صورت واحدهای کارا مرجعی برای واحدهای ناکارا خواهد بود. در مدل‌های سنتی تحلیل پوششی داده‌ها بهبود کارایی تنها برای واحدهای ناکارا صورت می گیرد و واحدهای کارا بدون تغییر باقی می ماند. اما از آنجا که تکنولوژی تخمین زده شده همواره از تکنولوژی واقعی کوچک تر است یا به عبارت دیگر این تکنولوژی تخمین زده شده همواره زیرمجموعه‌ای از تکنولوژی واقعی می باشد بنابراین می توان آن را به میزان بسیار کمی آن را گسترش داد. در نتیجه می توان راهکاری برای بهبود واحدهای کارا نیز پیشنهادی ارائه کرد. در این مقاله الگوریتمی جهت گسترش مجموعه امکان تولید با توجه به خواص هندسی آن و همچنین بهبود واحدهای کارا ارائه می - شود. این کار به وسیله‌ی ساختن واحدهای مجازی خارج از مجموعه امکان تولید انجام می شود. همچنین به منظور تشریح روش مطرح شده مثال‌های عددی و کاربردی ارائه می شود. کلمات کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، واحدهای تصمیم گیرنده، مجموعه امکان تولید، ابرصفحه سازا، تکنولوژی واقعی

* دانشجوی دکتری گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد رشت، رشت، ایران (علوم و تحقیقات گیلان)

** گروه ریاضی، پردیس علوم و تحقیقات گیلان، دانشگاه آزاد اسلامی، رشت، ایران

*** استاد گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد رشت، رشت، ایران

**** استاد گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد لاهیجان، لاهیجان، ایران (نویسنده مسئول)

kordrostami@liau.ac.ir

***** استادیار گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد رشت، رشت، ایران

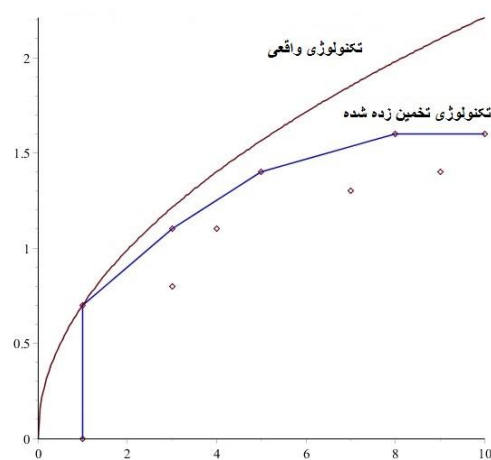
مقدمه

از آنجا که روابط بین ورودی‌ها و خروجی‌ها در تعیین تابع تولید نامعلوم است از این رو باید به ناچار تقریبی از تابع تولید را تخمین بزنیم. بدست آوردن تقریب تابع تولید به دو صورت روش‌های پارامتریک و روش‌های غیرپارامتریک امکان‌پذیر است. روش‌های پارامتریک یکی از روش‌های شناخته شده است که از زمان‌های قدیم مورد استفاده قرار می‌گرفته است. از این روش می‌توان برای تخمین تابع تولید استفاده نمود. در واقع تا قبل از سال ۱۹۵۷ که فارل روش غیرپارامتریک را پیشنهاد نمود تنها روش شناخته شده محسوب می‌شد. در روش پارامتریک یک شکل خاص از یک تابع را برای تخمین تابع تولید در نظر می‌گیرند، سپس با استفاده از روش‌های ریاضی پارامترهای تابع را مشخص می‌کنند. روش‌های پارامتریک و غیرپارامتریک به دو دسته قطعی و تصادفی طبقه بندی می‌شوند. در جدول (۱) بعضی از این روش‌ها آورده شده است (بوگتف و اتو^۱ (۲۰۱۱)).

جدول ۱: طبقه بندی روش‌های مرزی.

	تصادفی	قطعی
پارامتریک	تحلیل مرز تصادفی	حداقل مربعات معمولی تصحیح شده
	آگنر و همکاران (۱۹۷۷)، باتیس و کویلی (۱۹۹۲)، کویلی و همکاران (۱۹۹۸)	آگنر و چو (۱۹۶۸)، لاول (۱۹۹۳)، گرین (۱۹۹۰ و ۲۰۰۸)
غیر پارامتریک	تحلیل پوششی داده‌های تصادفی	تحلیل پوششی داده‌ها
	لند و همکاران (۱۹۹۳)، اولسن و پیترسن (۱۹۹۵)، فتی و همکاران (۲۰۰۱)	چارنز و همکاران (۱۹۷۸)، دپرین و همکاران (۱۹۸۴)

^۱ P. Bogetoft and L. Otto



شکل ۱: تکنولوژی واقعی و تکنولوژی تخمین زده شده

در این مقاله ما از تخمین گر تحلیل پوششی داده‌ها^۱ (DEA) استفاده می‌کنیم. DEA یک روش برنامه‌ریزی ریاضی غیرپارامتریک جهت ارزیابی عملکرد واحدهای متجانس می‌باشد. این روش در سال ۱۹۷۸ توسط کوپر، چارنزو رودز^۲ ارایه گردید. برای ارزیابی واحدهای تصمیم گیرنده با استفاده از تحلیل پوششی داده‌ها، واحدها به دو دسته واحدهای کارا و واحدهای ناکارا تقسیم بندی می‌شوند. سپس با مرجع قرار دادن واحدهای کارا، پیشنهادی در جهت بهبود کارایی واحدهای ناکارا ارایه می‌شود. اما واحدهای کارا همچنان بدون هیچ تغییری باقی می‌مانند و هیچگونه بهبودی برای آنها وجود ندارد. همان‌گونه در شکل (۱) نیز پیداست تکنولوژی که توسط DEA تخمین زده می‌شود همواره زیرمجموعه تکنولوژی واقعی است، بنابراین می‌توانیم تکنولوژی تخمین زده شده را کمی گسترش دهیم و برای واحدهای کارا نیز پیشنهادی جهت بهبود ارایه نماییم.

در مورد گسترش مجموعه امکان تولید^۳ (PPS) مطالعات کمی صورت گرفته است. صولتی و پارادی^۴ (۲۰۰۴) با استفاده از ضریب بهبودی که توسط مدیر مشخص می‌شود مدلی

1. Data Envelopment Analysis
2. Charnes, Cooper and Rhodes
3. Production Possibility Set
4. Sowlati and Paradi

ارایه نمودند که توسط آن کارایی واحدهای کارا به اندازه ضریب بهبود افزایش پیدا می‌کرد. کریونوزکو و همکاران^۱ (۲۰۱۵) به مساله گسترش مرز مجموعه امکان تولید پرداختند در مقاله‌ای دیگر، کریونوزکو و همکاران (۲۰۱۶) الگوریتمی مبتنی بر واحدهای ترمینال برای بهبود مرز مجموعه امکان تولید ارایه کردند. امیرتیموری و همکاران (۲۰۱۷) با استفاده از مفاهیم آماری و ساختن واحدهای مجازی مجموعه PPS را گسترش دادند. همچنین حسین دیده‌خانی و همکاران (۲۰۱۹) روشی برای گسترش مجموعه امکان تولید در شرایط عملی^۲ (PPPS) با استفاده از تولید واحدهای مجازی ارایه نمودند.

در این مقاله ما با استفاده از خواص هندسی PPS واحدهای کارا را ارتقاء می‌دهیم. برای این منظور ابتدا ابرصفحه‌های سازای PPS را بدست می‌آوریم. سپس ابرصفحه‌های مجاور هر کدام ابرصفحه‌های سازای کارای قوی را نیز با روشی که در ادامه بیان می‌شود، تعیین می‌کنیم. در نهایت با اشتراک ابرصفحه‌های مجاور هر کدام از ابرصفحه‌های سازای کارای قوی، واحدهای مجازی مورد نظر را تولید می‌کنیم. حال با افزودن این واحدهای مجازی به واحدهای تصمیم‌گیرنده^۳ (DMU) قبلی واحدهای کارای قبلی از کارایی می‌افتند و واحدهای مجازی جدید کارا می‌شوند. با این تکنیک PPS گسترش می‌یابد.

ساختار این مقاله بدین صورت است که ابتدا در بخش دوم مفاهیم و مقدمات ریاضی لازم را تعریف می‌کنیم، سپس در بخش سوم توسط یک مثال ساده الگوریتم پیشنهادی را توضیح می‌دهیم. در بخش چهارم یک مثال کاربردی با بعد بزرگتر را ارایه می‌دهیم و در نهایت در بخش پنجم نتیجه‌گیری بیان می‌شود.

1. Krivonozhko et al.

2. Practical Production Possibility Set

3. Decision Making Unit

مفاهیم و مقدمات ریاضی

فرض کنید n DMU با m ورودی و s خروجی داریم. برای هر DMU_0 بردار ورودی و خروجی را به صورت $(x_{10}, \dots, x_{m0}, y_{10}, \dots, y_{s0}) \in R_{\geq}^{m+s}$ نشان می-دهیم. تکنولوژی با بازده به مقیاس متغیر به صورت زیر تعریف می شود:

$$T_v = \{(x, y) | x \geq X\lambda, y \leq Y\lambda, e\lambda = 1, \lambda \geq 0\} \quad (1)$$

که در آن $X = (x_i) \in R^m$ و $Y = (y_r) \in R^s$ می باشد. کوپر، چارنز و بنکر^۱ در سال ۱۹۸۴ مدل BCC را ارایه نمودند. اگر DMU_0 واحد تحت ارزیابی باشد در این صورت مدل پوششی BCC ورودی محور جهت ارزیابی کارایی آن به صورت زیر خواهد بود:

$$\min \theta \quad (2)$$

$$s.t. \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + s_i^- = \theta x_{i0} \quad i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{r0} \quad r = 1, \dots, s$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n$$

در مدل بالا، DMU_0 کارا است اگر و تنها اگر $\theta^* = 1$ باشد و همچنین تمامی متغیرهای کمکی نیز صفر باشند. دوال مدل فوق که مدل مضربی BCC ورودی محور گفته می شود بصورت زیر می باشد:

1. Banker, Charnes and Cooper

$$\begin{aligned}
 & \max \sum_{r=1}^s u_r y_{ro} + k & (۳) \\
 & \text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^m v_i x_{io} = 1 \\
 & \quad \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} + k + s_j = 0 \quad j = 1, \dots, n \\
 & \quad u_r, v_i, s_j \geq 0 \quad r = 1, \dots, s, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n \\
 & \quad k \text{ free}
 \end{aligned}$$

در صورتی که جواب بهینه مدل بالا یک باشد و $u_r^* > 0, v_i^* > 0$ باشند، در آن صورت به DMU_0 کارای قوی گفته می‌شود، همچنین (U^*, V^*) ضرایب ابرصفحه سازی PPS است که DMU_0 روی آن قرار گرفته است.

مدل پوششی BCC خروجی محور و مدل مضربی BCC خروجی محور به ترتیب به صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned}
 & \max \phi & (۴) \\
 & \text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + s_i^- = x_{io} \quad i = 1, \dots, m \\
 & \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = \phi y_{ro} \quad r = 1, \dots, s \\
 & \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\
 & \quad \lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \min \sum_{i=1}^m v_i x_{io} - k & (5) \\
 & s.t. \sum_{r=1}^s u_r y_{ro} = 1 \\
 & - \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} + \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} - k - s_j = 0 \quad j = 1, \dots, n \\
 & u_r, v_i, s_j \geq 0 \quad r = 1, \dots, s, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n \\
 & k \text{ free}
 \end{aligned}$$

تعریف ۱: فرض کنید $H = \{(x, y) | u^T(y - \bar{y}) - v^T(x - \bar{x}) = 0\} \cap T_c$ ابر صفحه سازای PPS باشد. آنگاه به H ابر صفحه سازای قوی PPS که از نقطه (\bar{x}, \bar{y}) گذشته گفته می شود. اگر و تنها اگر $u, v > 0$ باشد.

تعریف ۲ (کارایی پاراتو- کوپمنز): به یک واحد تصمیم گیرنده، کارای قوی گفته می شود اگر و تنها اگر امکان نداشته باشد که هر ورودی یا خروجی را بهتر کنیم بدون آنکه سایر ورودی ها یا خروجی ها بدتر شوند.

تعریف ۳ (سطح مرجع سازا): برای DMU_o یک سطح سازا از T_v سطح مرجع سازا گفته می شود، اگر شامل تمامی DMU های مرجع DMU_o باشد.

صولتی و پارادی (۲۰۰۴) با استفاده از ضریب بهبود δ که توسط مدیر تعیین می شود، یک فرایند سه مرحله ای جهت بهبود واحدهای کارا ارایه نمودند که بطور خلاصه می توان به صورت زیر بیان کرد:

مرحله ۱- با استفاده از مدل مضربی BCC واحدهای کارا و ناکارا را مشخص می کنیم.
 مرحله ۲- برای واحد کارای DMU_o دامنه تغییرات ورودی ها و خروجی ها که توسط مدیر تعیین می گردند را در نظر می گیریم. فرض کنید $i = 1, \dots, m$ و $r = 1, \dots, s$ و $L_{x_{io}} \leq x_{io} \leq U_{x_{io}}$ و $L_{y_{ro}} \leq y_{ro} \leq U_{y_{ro}}$ و پایین ورودی ها و خروجی ها باشند. در صورتی که ورودی و خروجی واحد مجازی را با \tilde{x}_{io} و \tilde{y}_{ro} نشان دهیم، خواهیم داشت $L_{x_{io}} \leq \tilde{x}_{io} \leq U_{x_{io}}$ ، $i = 1, \dots, m$ و $L_{y_{ro}} \leq \tilde{y}_{ro} \leq U_{y_{ro}}$ ، $r = 1, \dots, s$

$S, \dots, 1$. حال با در نظر گرفتن تغییر متغیر $q_i = \tilde{x}_{io} v_i$ و $p_r = \tilde{y}_{ro} u_r$ خواهیم داشت
 $v_i L_{x_{io}} \leq q_i \leq v_i U_{x_{io}}$ و $u_r L_{y_{ro}} \leq p_r \leq u_r U_{y_{ro}}$ که در آن v_i و u_r متغیر
 هستند. سپس مدل پیشنهادی P-DEA را به صورت زیر برای تمامی واحدهای کارا با در نظر
 گرفتن ضریب بهبود δ که توسط مدیریت مشخص می شود حل می کنیم.

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{r=1}^s p_r + u_o \quad (6) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^m q_i = 1 \\ & \sum_{r=1}^s y_{rj} u_r + u_o - \sum_{i=1}^m x_{ij} v_i \leq 0, \quad \forall j \\ & \sum_{r=1}^s p_r + u_o - \sum_{i=1}^m q_i \geq 0 \\ & \sum_{r=1}^s p_r + u_o - \sum_{i=1}^m q_i (1 + \delta) \leq 0 \\ & u_r L_{y_{ro}} \leq p_r \leq u_r U_{y_{ro}}, \quad \forall r \\ & v_i L_{x_{io}} \leq q_i \leq v_i U_{x_{io}}, \quad \forall i \\ & u_r, v_i \geq \varepsilon, \quad \forall r, i \\ & u_o \text{ free} \end{aligned}$$

با حل مدل بالا، $\tilde{x}_{io}^* = q_i^*/v_i^*$ و $\tilde{y}_{ro}^* = p_r^*/u_r^*$ یعنی ورودی ها و خروجی های واحد
 مجازی بدست می آید. با حل مدل P-DEA برای تمامی واحدهای کارا، تمامی واحدهای
 مجازی را بدست می آوریم.

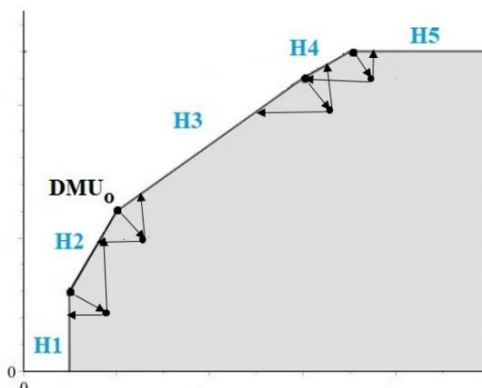
مرحله ۳- با استفاده از مدل های سنتی DEA برای DMU های مجازی و DMU های واقعی
 بطور یکجا PPS جدید را تعریف می کنیم.

بهبود واحدهای کارا

برای تخمین ارتباط بین ورودی و خروجی ها و همچنین تقریب تابع تولید و تکنولوژی که
 ناشناخته است از تخمین گرهایی نظیر DEA استفاده می کنیم. اساس تفکر بهبود عملکرد
 واحدهای کارا و گسترش PPS از این مطلب نشأت می گیرد که همیشه تکنولوژی تخمین
 زده شده زیر مجموعه تکنولوژی واقعی است. بنابراین ما می توانیم به میزان بسیار کمی

تکنولوژی تخمین زده شده را گسترش دهیم تا الگویی برای پیشرفت واحدهایی که قبلاً کارا بودند به وجود آید.

در این مقاله ما می‌خواهیم تکنولوژی تخمین زده شده توسط مدل BCC را بهبود بخشیم. بنابراین ابتدا باید کارایی DMUها و ضرایب ابرصفحه‌های سازای PPS را بدست آوریم، برای این منظور مدل مضربی ورودی محور BCC یعنی مدل‌های (۲) و (۳) را اجرا می‌کنیم. با اجرای این مدل‌ها مجموعه تمام DMUها را به دو مجموعه E و NE افزای می‌کنیم. بطوریکه E مجموعه تمام DMUهای کارای قوی و NE مجموعه تمام DMUهای ناکارا باشد. فرض کنید $DMU_o (X_o, Y_o) \in E$ باشد، با توجه به بازه تغییرات ورودی‌ها و خروجی‌های داده‌ها، یک ε مناسب انتخاب می‌کنیم و در نظر می‌گیریم $(x_o, y_o) = (X_o + \varepsilon, Y_o - \varepsilon)$. با اجرای مدل (۳) برای (x_o, y_o) و بدست آوردن جواب بهینه مدل، ضرایب ابرصفحه سازایی از PPS بدست می‌آید که نقطه تصویر (x_o, y_o) روی آن قرار گرفته. ابرصفحه بدست آمده را $H_k, k \in \mathbb{N}$ می‌نامیم. همچنین اگر در جواب بهینه مدل (۳) متغیر کمکی $s_i^* = 0$ باشد، آنگاه DMU_i روی ابرصفحه بدست آمده قرار دارد. مجموعه اندیس تمامی DMUهای کارای قوی واقع بر ابرصفحه بدست آمده H_k را با $\bar{E}(H_k)$ نشان می‌دهیم. همچنین برای $DMU_o = (X_o, Y_o) \in E$ ، بطور مشابه، فرآیندی که برای مدل (۳) انجام دادیم برای مدل (۵) نیز تکرار می‌کنیم. در شکل (۲) نقطه تصویر (x_o, y_o) تحت مدل مضربی BCC ورودی محور و خروجی محور نشان داده شده است.



شکل ۱: نقطه تصویر واحدهای مجازی ساخته شده تحت مدل‌های ورودی محور و خروجی محور

بعد از بدست آوردن تمامی ابرصفحه‌های سازای PPS، ابرصفحه‌های تکراری را حذف می‌کنیم و آنها را در مجموعه‌ای به نام H قرار می‌دهیم همچنین تمام ابرصفحه‌های سازای قوی PPS را در مجموعه \bar{H} قرار می‌دهیم.

بعد از تعیین کارایی DMU ها و یافتن ابرصفحه‌های سازای PPS باید ابرصفحه‌های مجاور هر کدام از ابرصفحه‌های سازای کارای قوی PPS را بدست آوریم. سپس ابرصفحه‌های مجاور هر کدام از آنها را با هم تقاطع می‌دهیم تا یک DMU مجازی تولید شود. با استفاده از الگوریتم زیر برای ابرصفحه مورد ارزیابی $H_0 \in \bar{H}$ واحدهای مجازی حاصل از تقاطع ابرصفحه‌های مجاور را بدست می‌آوریم.

$$1. H_0 \in \bar{H} \text{ را انتخاب می‌کنیم}$$

$$2. P_0 = \{H_i | \bar{E}(H_0) \cap \bar{E}(H_i)\} - \{H_0\}$$

$$3. \text{اگر } card(P_0) < m + s \text{ باشد به مرحله بعد می‌رویم در غیر این صورت هر}$$

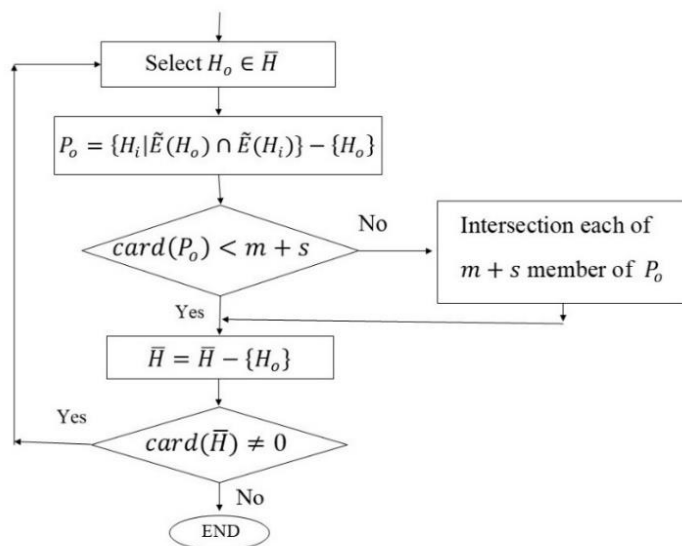
$m + s$ عضو از P_0 را با هم تقاطع می‌دهیم و یک DMU مجازی می‌سازیم که آن

را با D_k^{\wedge} نشان می‌دهیم.

$$4. H_0 \text{ را از مجموعه } \bar{H} \text{ حذف می‌کنیم یعنی: } \bar{H} = \bar{H} - \{H_0\}$$

$$5. \text{اگر } card(\bar{H}) \neq 0 \text{ آنگاه به مرحله ۱ باز می‌گردیم.}$$

نمودار گردش عملیات الگوریتم پیشنهادی در شکل ۳ نشان داده شده است.



شکل ۳: نمودار گردش عملیات الگوریتم پیشنهادی

بعد از بدست آوردن تمامی *DMU* های مجازی، آنها را به مجموعه *DMU* واقعی اضافه می کنیم. با بدست آوردن کارایی *DMU* های مجموعه جدید، دیده می شود که بیشتر واحدهای کارای قبلی از کارایی می افتند و *PPS* گسترش می یابد. بنابراین واحدهای مجازی جدید به عنوان الگویی برای واحدهای کارای قبلی در نظر گرفته می شوند.

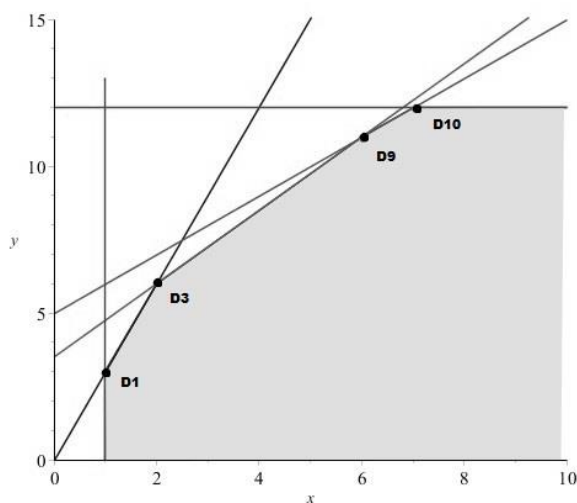
البته باید توجه داشت که منظور ما، از بین بردن کارایی تمامی واحدهای کارا نیست. زیرا در این صورت این خطر وجود دارد که مجموعه امکان تولید خیلی بزرگتر از مجموعه امکان تولید واقعی شود. در پایان این بخش، با استفاده از یک مثال ساده الگوریتم پیشنهادی را توضیح می دهیم.

داده های مربوط به ۱۲ *DMU* با یک ورودی و یک خروجی در ستون های ۱-۳ از جدول (۲) نشان داده شده است. ابتدا جهت بدست آوردن کارایی *DMU* ها، مدل (۳) را اجرا می کنیم. نمره کارایی در ستون چهارم جدول (۲) نشان داده شده است. همانگونه که مشاهده می شود

چهار DMU D1، D3، D9 و D10 کارا هستند، بنابراین $E = \{D1, D3, D9, D10\}$ خواهد بود. مجموعه امکان تولید در شکل (۳) نشان داده شده. با انتخاب $\varepsilon = 0.25$ مدل‌های (۳) و (۵) برای $DMU_0 \in E$ اجرا می‌کنیم و ضرایب ابرصفحه‌های سازای PPS و همچنین $\bar{E}(H_0)$ را بدست می‌آوریم. ضرایب ابرصفحه‌های سازای PPS و همچنین $\bar{E}(H_0)$ بدست آمده در جدول (۳) نشان داده شده است.

جدول ۲: داده‌های مربوط به واحدهای تصمیم‌گیرنده و نتیجه کارایی آنها

واحدها	ورودی	خروجی	نمره کارایی
D1	۱	۳	۱
D2	۲	۴	۰,۶۶۶۷
D3	۲	۶	۱
D4	۳	۵	۰,۵۵۵۶
D5	۳	۶	۰,۶۶۶۷
D6	۴	۷	۰,۷
D7	۵	۱	۰,۲
D8	۵	۷	۰,۵۶
D9	۶	۱۱	۱
D10	۷	۱۲	۱
D11	۸	۹	۰,۵۵
D12	۸	۱۰	۰,۶۵

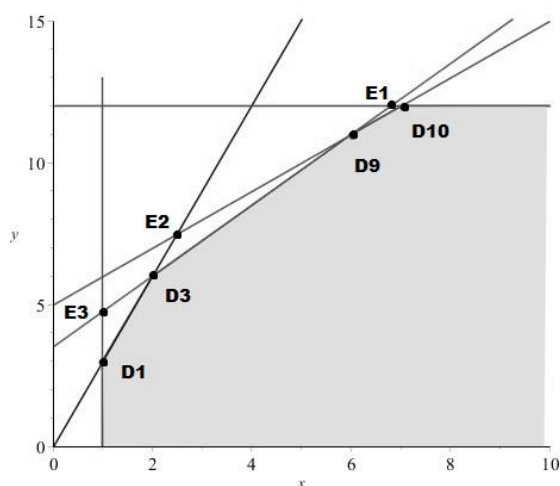


شکل ۴: مجموعه امکان تولید و ابرصفحه‌های سازی آن

با توجه به ستون‌های ۳ تا ۵ از جدول (۳) مشاهده می‌شود که سه ابرصفحه H_3, H_4, H_5 و H_6 ابرصفحه‌های کارای قوی هستند، بنابراین $\bar{H} = \{H_3, H_4, H_5\}$ می‌باشد. در این مرحله باید ابرصفحه‌های مجاور هر کدام از ابرصفحه‌های کارای قوی را پیدا کنیم. برای مثال $\bar{E}(H_4) = \{9, 10\}$ (۲) با توجه به ستون دوم از جدول (۲) را انتخاب می‌کنیم. با توجه به همین ستون از جدول ابرصفحه‌هایی را پیدا می‌کنیم که حداقل یکی از اندیس‌های ۹ یا ۱۰ را داشته باشند. بنابراین خواهیم داشت $P_0 = \{H_3, H_5\}$. با تلاقی این دو ابرصفحه یعنی $y = 1.25x + 3.5$ و $y = 12$ واحد مجازی $E_1 = (6.8, 12)$ را می‌سازیم. با دنبال کردن فرآیند الگوریتم پیشنهادی DMU ‌های مجازی $E_2 = (2.5, 7.5)$ و $E_3 = (1, 4.75)$ را بدست می‌آوریم. شکل (۴) را مشاهده کنید.

جدول ۳: ضرایب ابرصفحه‌های سازای مجموعه امکان تولید.

ابر صفحه	$\tilde{E}(H_0)$	V	U	K	$y=mx+h$
H1	۱	۰,۶۶۶۷	۰	۰,۶۶۶۷	$x=1$
H2	۳ و ۱	۰,۶۶۶۷	۰,۲۲۲۲	۰	$y=3x$
H3	۹ و ۳	۰,۱۸۸۷	۰,۱۵۰۹	۰,۵۲۸۳	$y=1.25x+3.5$
H4	۱۰ و ۹	۰,۰۸۷۰	۰,۰۸۷۰	۰,۴۳۴۸	$y=x+5$
H5	۱۰	۰	۰,۰۸۳۳	۱	$y=12$



شکل ۵: واحدهای مجازی تولید شده خارج از مجموعه امکان تولید

با اضافه کردن DMU های مجازی تولید شده به DMU های واقعی، PPS گسترش پیدا می‌کند. نمره کارایی قبل و بعد از اضافه کردن DMU های مجازی $E2$, $E1$ و $E3$ در ستون-های چهارم و پنجم از جدول (۴) نشان داده شده است. این جدول نشان می‌دهد کارایی واحدهای $D10$ و $D1$, $D3$, $D9$ در PPS جدید از بین رفته و در عوض نمره کارایی واحدهای مجازی $E2$, $E1$ و $E3$ برابر یک شده است. البته توجه داشته باشید که نمره کارایی

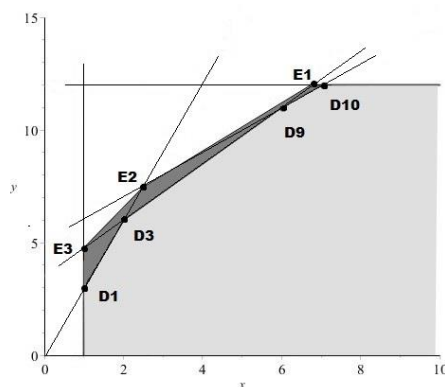
D1 در PPS جدید برابر یک است اما از آنجا که مقدار متغیرهای کمکی برای D1 مخالف صفر است، بنابراین D1 در PPS جدید ناکارا است. همچنین نقطه تصویر DMUها در مجموعه امکان تولید جدید در ستون‌های ششم و هفتم از جدول (۴) نشان داده شده است. همانگونه که مشاهده می‌شود، علاوه بر واحدهای ناکارا برای واحدهای کارای قبلی نیز در PPS جدید پیشنهادی برای ارتقاء وجود دارد.

در شکل (۵) PPS قدیمی با رنگ روشن و مقدار اضافه شده به آن با رنگ تیره مشخص شده است. در واقع PPS جدید اجتماع دو ناحیه مشخص شده با رنگ‌های روشن و تیره می‌باشد.

جدول ۴: نمره کارایی واحدها در مجموعه امکان تولید سنتی و جدید

واحدها	ورودی	خروجی	نمره کارایی جدید	نمره کارایی سنتی	ورودی (نقطه تصویر)	خروجی (نقطه تصویر)
D1	۱	۳	۱	۱	۱	۴,۷۵
D2	۲	۴	۰,۵	۰,۶۶۶۶۶۷	۱	۴,۷۵
D3	۲	۶	۰,۸۴۰۹۱	۱	۱,۶۸	۶
D4	۳	۵	۰,۳۷۸۷۸۸	۰,۵۵۵۵۵۶	۱,۱۴	۵
D5	۳	۶	۰,۵۶۰۶۰۶	۰,۶۶۶۶۶۷	۱,۶۸	۶
D6	۴	۷	۰,۵۵۶۸۱۸	۰,۷	۲,۲۳	۷
D7	۵	۱	۰,۲	۰,۲	۱	۴,۷۵
D8	۵	۷	۰,۴۴۵۴۵۵	۰,۵۶	۲,۲۳	۷
D9	۶	۱۱	۰,۹۷۴۰۷۴	۱	۵,۸۴	۱۱
D10	۷	۱۲	۰,۹۷۱۴۲۹	۱	۶,۸	۱۲
D11	۸	۹	۰,۴۹۱۶۶۷	۰,۵۵	۳,۹۳	۹
D12	۸	۱۰	۰,۶۱۱۱۱۱	۰,۶۵	۴,۸۹	۱۰
E1	۶,۸	۱۲	۱		۶,۸	۱۲
E2	۲,۵	۷,۵	۱		۲,۵	۷,۵
E3	۱	۴,۷۵	۱		۱	۴,۷۵

همان گونه که در شکل (۶) مشخص است، واحدهای مجازی E1, E2, E3 و کارایی واحدهای کارایی قبلی را از بین برده‌اند و خود بجای آنها کارا شده‌اند. بنابراین این واحدهای مجازی می‌توانند به عنوان مرجعی برای واحدهای کارا در PPS سنتی قرار گیرند.



شکل ۶: مجموعه امکان تولید سنتی و جدید

مثال کاربردی

در این بخش از مقاله از مثال کاربردی زیر را که توسط ساکستون و همکاران^۱ (۱۹۸۶) مورد استفاده قرار گرفت کمک می‌گیریم و الگوریتم پیشنهادی را برای آن بکار می‌بریم. خانه سالمندانی با شش *DMU* شامل دو ورودی، ساعت کارکنان در روز (*HSD*) و تجهیزات مورد استفاده روزانه (*EUD*) و دو خروجی، کل روزهای مراقبت‌های پزشکی و مراقبت‌های ثانویه پزشکی (*MCD*) و کل روزهای مراقبت ویژه (*SCD*) مطابق جدول شماره (۵) در نظر بگیرید. نمره کارایی آنها با اجرای مدل پوششی *BCC* در ستون ششم جدول (۵) مشخص شده است. همان گونه که از این ستون جدول مشاهده می‌شود تنها واحد *F* ناکارا می‌باشد. و نمره کارایی بقیه واحدها یک است یعنی بقیه واحدها کارا می‌باشند.

1. Sexton et al.

جدول ۵: مثال خانه سالمندان

واحد‌ها	HSD	EUD	MCD	SCD	نمره کارایی
A	۱۵۰	۰,۲	۱۴۰۰۰	۳۵۰۰	۱
B	۴۰۰	۰,۷	۱۴۰۰۰	۲۱۰۰۰	۱
C	۳۲۰	۱,۲	۴۲۰۰۰	۱۰۵۰۰	۱
D	۵۲۰	۲	۲۸۰۰۰	۴۲۰۰۰	۱
E	۳۵۰	۱,۲	۱۹۰۰۰	۲۵۰۰۰	۱
F	۳۲۰	۰,۷	۱۴۰۰۰	۱۵۰۰۰	۰,۸۹۶

بنابراین $E = \{A, B, C, D, E\}$ و $NE = \{F\}$ خواهد بود. با اجرای مدل‌های (۳) و (۵) به ازای $DMU_0 \in E$ ضرایب ابرصفحه‌های سازای PPS و همچنین $\tilde{E}(H_0)$ را بدست آورده و در جدول (۶) نشان داده‌ایم.

جدول ۶: ضرایب ابرصفحه‌های سازای مجموعه امکان تولید

اب‌صفحه	$\tilde{E}(H_0)$	V_1	V_2	U_1	U_2	K
H1	۱و۲	۰	۵	۰	۰,۰۰۰۱۴	۰,۵
H2	۱و۲و۵	۰,۰۰۱۷	۰,۴۶۷۳	۰	۰,۰۰۰۰۴	۰,۲۱۵
H3	۱و۳و۴	۰,۰۰۳۱	۰	۰,۰۰۰۰۱۳	۰,۰۰۰۰۳	۰,۲۰۳۱
H4	۴و۵	۰,۰۰۱۹	۰	۰	۰,۰۰۰۰۲	۰,۱۹۲۳
H5	۱و۳	۰	۲	۰,۰۰۰۰۷۱	۰	-۰,۶
H6	۲و۴و۵	۰,۰۰۱	۰,۲۹۱۴	۰	۰,۰۰۰۰۲	۰,۱۰۷۸
H7	۱و۲و۴و۵	۰,۰۰۱۶	۰,۴۹۴۶	۰,۰۰۰۰۰۵	۰,۰۰۰۰۰۴	۰,۱۴۱۸

بعد از بدست آوردن ضرایب ابرصفحه‌های سازای مجموعه امکان تولید و $\tilde{E}(H_0)$ ، الگوریتم پیشنهادی را جهت تولید DMUهای مجازی بکار می‌گیریم و آنها را به DMUهای قبلی اضافه می‌کنیم. DMUهای مجازی تولید شده و نمره کارایی DMUها، قبل و بعد از اضافه کردن DMUهای مجازی در جدول (۷) نشان داده شده‌است.

جدول ۷: نمره کارایی واحدها در مجموعه امکان تولید سنتی و جدید

واحدها	HSD	EUD	MCD	SCD	نمره کارایی سنتی	نمره کارایی جدید
A	۱۵۰	۰,۲	۱۴۰۰۰	۳۵۰۰	۱	۱
B	۴۰۰	۰,۷	۱۴۰۰۰	۲۱۰۰۰	۱	۰,۹۹۹۵
C	۳۲۰	۱,۲	۴۲۰۰۰	۱۰۵۰۰	۱	۱
D	۵۲۰	۲	۲۸۰۰۰	۴۲۰۰۰	۱	۱
E	۳۵۰	۱,۲	۱۹۰۰۰	۲۵۰۰۰	۱	۰,۹۹۸۴
F	۳۲۰	۰,۷	۱۴۰۰۰	۱۵۰۰۰	۰,۸۹۶	۰,۸۹۵۷
E1	۵۲۰,۷۵	۲	۲۸۰۳۵,۴۲	۴۲۰۷۴,۸۵	-	۱
E2	۴۰۸,۴۲	۰,۷۲	۲۸۴۳۹,۵۵	۲۱۵۴۹,۴۶	-	۱
E3	۱۵۱,۶۱	۰,۲	۱۴۰۷۷,۳۶	۳۵۹۶,۷۰	-	۱
E4	۳۵۵,۹۳	۱,۲۳	۴۲۷۸۱,۵۲	۲۵۵۹۳,۵۳	-	۱
E5	۱۲۷,۶۷	۰,۲۲	۱۴۶۲۹,۲۱	۲۷۶۷,۰۳	-	۱
E6	۱۵۰,۴۰	۰,۲	۱۴۰۷۶,۸۲	۳۵۱۲,۱۹	-	۱

همان گونه که در جدول (۷) مشاهده می شود، کارایی *DMU* های B و E در PPS جدید از بین رفته و واحدهای مجازی تولید شده کارا شده اند. این نشان می دهد که PPS گسترش پیدا کرده و واحدهای مجازی جدید الگویی برای واحدهای کارای قبلی که اکنون از کارایی افتاده اند می باشند. همچنین با مقایسه نمره کارایی سنتی واحدهای B، E و F با نمره کارایی جدید آنها، متوجه می شویم که کاهش نمره کارایی در مجموعه امکان تولید جدید بسیار اندک می باشد و این بدان معنا است که میزان ارتقاء مجموعه امکان تولید بسیار کم است و مطلوب می باشد. در جدول (۸) داده های اصلی و نقاط تصویر *DMU* ها در PPS گسترش یافته نشان داده شده است.

جدول ۸: داده‌های اصلی و نقطه تصویر واحدها در مجموعه امکان تولید جدید

واحدها	HSD	EUD	MCD	SCD	نقطه تصویر			
					HSD	EUD	MCD	SCD
A	۱۵۰	۰,۲	۱۴۰۰۰	۳۵۰۰	۱۵۰	۰,۲	۱۴۰۰۰	۳۵۰۰
B	۴۰۰	۰,۷	۱۴۰۰۰	۲۱۰۰۰	۳۹۹,۸۱	۰,۷	۲۸۰۱۸,۱۵	۲۱۰۰۰
C	۳۲۰	۱,۲	۴۲۰۰۰	۱۰۵۰۰	۳۲۰	۱,۲	۴۲۰۰۰	۱۰۵۰۰
D	۵۲۰	۲	۲۸۰۰۰	۴۲۰۰۰	۵۲۰	۲	۲۸۰۰۰	۴۲۰۰۰
E	۳۵۰	۱,۲	۱۹۰۰۰	۲۵۰۰۰	۳۴۹,۴۴	۱,۲	۴۲۰۲۳,۷۸	۲۵۰۰۰
F	۳۲۰	۰,۷	۱۴۰۰۰	۱۵۰۰۰	۲۸۶,۶۴	۰,۶۳	۲۵۹۷۹,۹۱	۱۵۰۰۰

همانگونه که مشاهده می‌شود، برای نقاط B و E که قبلاً در PPS سنتی کارا بوده‌اند، در PPS جدید نقطه تصویری برای قرار گرفتن روی مرز کارایی ارایه شده است. همچنین برای نقطه F که در هر دو PPS ناکارا بود، نقطه تصویر جدیدی در PPS جدید داده شده است.

نتیجه‌گیری

تحلیل پوششی داده‌ها DMU را به دو بخش واحدهای کارا و واحدهای ناکارا تقسیم بندی می‌کند. در این صورت واحدهای کارا مرجعی برای واحدهای ناکارا خواهد بود. در مدل‌های سنتی DEA بهبود کارایی تنها برای واحدهای ناکارا صورت می‌گیرد و واحدهای کارا بدون تغییر باقی می‌مانند. اما از آنجا که تکنولوژی تخمین زده شده همواره زیرمجموعه تکنولوژی واقعی است بنابراین می‌توان به میزان بسیار کمی آن را گسترش داد. در این صورت می‌توانیم پیشنهادی برای بهبود واحدهای کارا نیز داشته باشیم. در این مقاله بر خلاف روش پیشنهادی صولتی و پارادی (۲۰۰۴) که ضریب بهبود از خارج سیستم توسط مدیر تعیین می‌گردید، روشی پیشنهاد نمودیم که با استفاده از ویژگی‌های هندسی PPS میزان بهبود توسط خود سیستم تعیین گردد. در روش پیشنهادی توانستیم DMUهای مجازی بسازیم که با اضافه کردن آنها به DMUهای واقعی PPS گسترش پیدا نمود. روش پیشنهادی نیز روی یک مثال کاربردی اجرا شد.

به عنوان کار آتی پیشنهاد می‌شود از این مبحث جهت رتبه بندی واحدهای کارا استفاده شود. همچنین روش‌هایی ارایه شوند که از نظر محاسباتی پیچیدگی کمتری داشته باشند. علاوه بر این بسط راهکار بهبود واحدهای کارا با در نظر گرفتن مرزهای چندسطحی موضوع جالبی برای تحقیقات آتی است.

منابع

Aigner ,D.J. and Chu, S.F .(۱۹۶۸) .*On Estimating the Industry Production Function* .American Economic Review, 58, 826-839.

Aigner, D., Lovell, C. K. and Schmidt, P .(۱۹۷۷) .Formulation and estimation of stochastic frontier production function models .*Journal of Econometrics*. ۳۷-۲۱ , (۱)۶ ,

Amirteimoori, A ,Kordrostami, S. and Nasrollahian, P .A .(۲۰۱۷) . Method for solving super-Efficiency infeasibility by adding virtual DMUs with mean values .*Iranian journal of management studies* ,(۴)۱۰ , ۹۱۶-۹۰۵

Banker, R. D., Charnes, A. and Cooper, W. W. (1984) .(Some models for estimating technical and scale inefficiency in data envelopment analysis .*Management Science*. ۱۰۹۲-۱۰۷۸ , ۳۰ ,

Battese, G. and Coelli, T. (1992). Frontier production functions, technical efficiency and panel data :With application to paddy farmers in India .*Journal of Productivity Analysis*. ۱۶۹-۱۵۳ , ۳ ,

Charnes ,A., Cooper ,W.W. and Rhodes ,E .(۱۹۷۸) .Measuring the efficiency of decision making units .*European Journal of Operational Research*. ۴۴۴-۴۲۹ ,(۶)۲ ,

Coelli, T., Rao, D.S.P. and Battese, G.E .(۱۹۹۸) .*An introduction to efficiency and productivity analysis* .Boston: Kluwer Academic.

Deprins, D., Simar, L., and Tulkens, H. (1984) .(*Measuring labor-efficiency in post office*. In *North Holland ,editor, The Performance of Public Enterprises* .Amsterdam :M. Marchand and P. Pestieau and H. Tulkens.

Didekhani, H., Hosseinzadeh Lotfi, F. and Sadi-Nezhad, S. (2019). Practical benchmarking in DEA using artificial DMUs .*Journal of Industrial Engineering International*. ۳۰۱-۲۹۳ , ۱۵ ,

Fethi, M., Jackson, P. M. and Weyman-Jones, T. G .(۲۰۰۱) . *European airlines: a stochastic DEA study of efficiency with market liberalization* .Tech. rep., University of Leicester Efficiency and Productivity Research Unit

Farrell, M. J. (1957). The measurement of productive efficiency . *Journal of the Royal Statistical Society*. ۲۸۱-۲۵۳, (۳) ۱۲۰ ,

Greene, W. H. (1980). Maximum likelihood estimation of econometric frontier functions . *Journal of Econometrics* . ۵۶-۲۷, (۱) ۱۳ ,

Greene, W. H. (1990). A Gamma-distributed stochastic frontier model . *Journal of Econometrics* . ۱۶۳-۱۴۱ , ۴۶ ,

Greene, W. H. (2008) . *Econometric Analysis, sixth edition* . Pearson Prentice Hall.

Krivosozhko, V. E., Forsund, F. R. and Lychev ,A. V. (2017) .(On comparison of different sets of units used for improving the frontier in DEA models . *Ann. Operat. Res* . ۲۰-۵ , ۲۵۰ ,

Krivosozhko, V. E., Forsund, F. R. and Lychev ,A. V. (2016). Improving the Frontier in DEA Models . *Doklady Mathematics* ,(۳) ۹۴ , ۷۱۹-۷۱۵ .

Land, K. C., Lovell CAK and Thore, S. (1993) .(Chance-constrained data envelopment analysis . *Managerial and Decision Economics* , ۱۴ , ۵۵۴-۵۴۱

Lovell CAK (1993) . *(Production Frontiers and Productive Efficiency* . In: Fried H, Lovell CAK ,and Schmidt S (eds (.the Measurement of Productive Efficiency .New York :Techniques and Applications, Oxford University Press.

Olesen, O. B. and Petersen, N.C. (1995) .(Chance Constrained Efficiency Evaluation . *Management Science*. ۴۵۷-۴۴۲ , ۴۱ ,

Bogetoft, P & ,Otto ,L .(۲۰۱۱) . *Benchmarking with DEA, SFA, and R* .New York :Springer.

Sexton, T.R., Silkman, R.H. and Hogan, A.J .) ۱۹۸۶) . *Data envelopment analysis: Critique and extensions* .In: Silkman, R.H. (Ed.), *Measuring Efficiency: An Assessment of Data Envelopment Analysis*. Jossey-Bass, San Francisco, CA, 73-105.

Sowlati, T. and Paradi, J. C. (2004) .(Establishing the “practical frontier” in data envelopment analysis . *Omega*. ۲۷۲-۲۶۱ , ۳۲ ,