مدیریت تولید و عملیات، دوره چهارم، پیاپی(٦)، شماره (١)، بهار و تابستان ١٣٩٢
دریافت: ٩٠/١/١٤ پذیرش: ٩١/١٠/١٢
صص: ٦٨– ٦١

بهینه‌سازی استوار سبد مالی با رویکرد CAPM

محسن قره خانی*[1]، سیدجعفر سجادی[2]، احرام صفری[3]
١- استادیار دانشکده مهندسی گروه مهندسی صنایع دانشگاه قم
٢- استاد دانشکده مهندسی صنایع گروه مهندسی صنایع دانشگاه علم و صنعت
٣- دانشجوی دکتری مهندسی صنایع دانشکده مهندسی صنایع دانشگاه علم و صنعت

چکیده

در این تحقیق، رویکرد بهینه سازی استوار برای حل مسأله انتخاب سبد مالی چند دوره‌ای پیشنهاد شده است. چنانکه می‌دانیم، بازده مربوط به هریک از دارایی‌های موجود در سبد سهام غیر قطعی است، از این‌رو درنظرگیری یک مقدار قطعی در مدل‌ها به جای بازده هریک از دارایی‌ها، باعث خواهد شد تا انتخاب‌های ما از اعتبار لازم برخوردار نباشد. برای غلبه بر این مشکل، در این مقاله از روش بهینه‌سازی استوار استفاده می‌شود. مدل‌های بهینه سازی استوار، بازدهی آینده دارایی‌ها را به صورت ضرایب غیر قطعی در مسأله بهینه سازی در نظر می‌گیرند و درجه ریسک گریزی سرمایه گذاری را به درجه تحمل در مقابل کل خطای حاصل تخمین بازدهی‌ها تصویر می‌کنند. در این تحقیق، به منظور تخمین بازدهی انتظاری دارایی از مدل قیمت گذاری دارایی سرمایه‌ای استفاده شده است. با توجه به مدل خطی استفاده شده برای تخمین بازدهی و رویکرد بهینه سازی استوار خطی استفاده شده، مدل پیشنهادی حاصله، خطی است که از نظر محاسباتی کارایی قابل قبولی دارد. خطی بودن مدل حاصله در زمانی که محدودیت‌های پیچیده، از قبیل: مالیات به ساختار مسأله اضافه شود، مزیت مهمی به حساب می‌آید.

واژه‌های کلیدی: بهینه سازی استوار، انتخاب سبد مالی، مدل قیمت گذاری دارایی سرمایه‌ای، سرمایه‌گذاری

---

* نویسنده مسؤول: gharakhani@iust.ac.ir

مقدمه

مسأله انتخاب سبد مالی[1] یکی از مهمترین مسائل علم مالی است که همواره از اهمیت بالایی برخوردار بوده است. هر سال سرمایه گذاری بیشتری در صندوق‌های مشارکتی و شرکت‌های سرمایه گذاری انجام می‌شود و مدیران سبد مالی همواره به دنبال راه حل‌های کاراتر و با ریسک کمتر در این رویه هستند.

نخستین رویکرد سیتماتیک به مسأله انتخاب سبد مالی توسط هری مارکویتز[2] در سال ١٩٥٢ مطرح شد. در مسأله انتخاب سبد مالی، سرمایه‌گذار با M دارایی مواجه است که هر یک در طول دوره سرمایه‌گذاری بازدهی تصادفی دارد. مسأله تخصیص بودجه معینی میان کلیه دارایی‌هاست؛ به طوری که در عین حصول بازدهی معین، کل ریسک سرمایه گذاری کمینه شود. این مسأله دارای دو هدف است: یکی حداکثر کردن بازدهی و دیگری کمینه کردن ریسک سرمایه گذاری. به سادگی می‌توان با قرار دادن ضریبی که حساسیت سرمایه گذار به ریسک را نشان می‌دهد، هر دو هدف را در یک تابع هدف با یکدیگر جمع کرد. رویکرد پیشنهادی مارکویتز (١٩٥٢) ایجاد تعادل میان ریسک و بازدهی سبد مالی را مورد خطاب قرار داده است. مدل پیشنهادی وی که به مدل میانگین _ واریانس معروف شده، به شرح زیر است:

$$\begin{aligned} & max\ R.X - \lambda\ X\Sigma X \\ & s.t: \\ & X^T.e = 1 \end{aligned} \qquad (١)$$

که درآن X برداری M عضوی است که وزن هر دارایی را در سبد مالی نشان می‌دهد. بردار R بازدهی انتظاری هر دارایی و ماتریس Σ مقادیر کوواریانس هر زوج دارایی را نشان می‌دهد. ضریب λ پارامتر جریمه مرتبط با تمایل به رسیک سرمایه گذار است و e بردار عناصر واحد است. محدودیت اول مسأله نشان می‌دهد که کل بودجه باید به دارایی‌های مختلف تخصیص یابد و امکان استفاده از بودجه اضافی منتفی است. محدودیت سوم یا محدودیت علامت بیانگر عدم امکان استفاده از فروش استقراضی[3] است.

مشکل اساسی مدل میانگین _ واریانس ماهیت تک دوره‌ای آن است. انتخاب نادرست طول افق زمانی سرمایه گذاری ممکن است به تصمیم‌های سرمایه گذاری غیر بهینه منجر گردد. مارکویتز (١٩٩٠) مسأله سرمایه گذاری بلند مدت را با استفاده از تابع مطلوبیت بر پایه مصرف در قالب برنامه ریزی پویا فرموله کرد. حل تحلیلی مسأله بهینه سازی سرمایه گذاری پیوسته برای انواع خاصی از توابع مطلوبیت و فرآیندهای قیمت دارایی در کارهای مرتون[4](١٩٩٠،١٩٧١)، ساموئلسون[5](١٩٦٩) و کاکس[6](١٩٨٩) بررسی شده است، اما به طور مشخص جواب‌های فرم بسته برای این مسائل تنها تحت فرضیات قوی روی رفتار سرمایه گذار و ساختار فرآیند قیمت دارایی میسر است و به سادگی نمی‌توان محدودیت‌های بازار، نظیر: هزینه معاملات و مالیات را در آنها گنجاند. پیشرفت‌های اخیر در حوزه فناوری اطلاعات باعث شده است که حل مسأله بهینه سازی سبد مالی در زمان گسسته آسانتر شود.

یکی از مشکلات اصلی در تصمیم گیری در مورد انتخاب سبد مالی، غیر قطعی بودن بازدهی‌های آینده است. این در حالی است که فرض اساسی در برنامه‌ریزی ریاضی این است که مقدار داده‌های

ورودی دقیقاً معلوم است و معادل مقادیر اسمی آنهاست. این فرض اثر عدم قطعیت در پارامترهای مسأله را بر کیفیت و شدنی بودن مسأله در نظر نمی‌گیرد. بنابراین در صورتیکه پارامترهای مسأله بهینه سازی مقادیری غیر از مقدار اسمی بگیرند، ممکن است برخی محدودیت‌ها رعایت نشود و جواب بهینه‌ای که با استفاده از داده‌های اسمی به دست آمده، دیگر بهینه و یا حتی شدنی هم نباشد. این مسأله باعث شد محققان روی روش‌های بهینه سازی کارکنند که نسبت به عدم قطعیت مصون باشند که در ادبیات به این روش‌ها بهینه سازی استوار[۷] گویند.

نخستین گام در طراحی روش‌های استوار توسط سویستر[۸] (۱۹۷۳) برداشته شد. وی مدلی پیشنهاد کرد که به ازای کلیه مقادیر که به مجموعه محدبی تعلق داشت، جواب بهینه شدنی باقی بماند. مدل حاصل جواب‌هایی تولید می‌کرد که بسیار محافظه کارانه بود؛ به طوری‌که تا حد زیادی از جواب بهینه مسأله اسمی فاصله می‌گرفت. در واقع، رویکرد پیشنهادی سویستر(۱۹۷۳) بسیار سخت گیرانه و برای بدترین حالت بود. بن تال و نمیروفسکی[۹] (۲۰۰۰ و ۱۹۹۹، ۱۹۹۸) و همچنین آلگوی[۱۰] (۱۹۹۹، ۱۹۹۸) قدم‌های موثر تری در زمینه بهینه سازی استوار برداشتند. رویکرد پیشنهادی این نویسندگان کمتر از سویستر(۱۹۷۳) محافظه کارانه بود و شامل حل نظیر استوار[۱۱] می‌شد. در مدل‌های پیشنهادی آنها عدم قطعیت به صورت بیضوی در نظر گرفته می‌شد. مشکل روش آنها این است که یک مسأله برنامه ریزی خطی را به فرم برنامه ریزی درجه دوم یا مخروطی در می‌آورد.

سجادی[۱۲] و همکاران (۲۰۰۸) با استفاده از رویکرد بهینه سازی استوار، مسأله تحلیل پوششی داده‌ها را حل و رویکرد بر تسیماس و بن تال را مقایسه کردند و تفاوت چشمگیری میان نتایج آنها گزارش نکردند. قره خانی[۱۳] و همکاران (۲۰۱۰) رویکرد بهینه سازی چند هدفی استواری برای حل مسأله برنامه ریزی تولید پیشنهاد کردند. مسأله بهینه سازی استوار کاربردهای زیادی پیدا کرده است، ولی در این میان، کاربرد این رویکرد در مسأله تعیین سبد مالی از اهمیت بالایی برخودار است، زیرا در این مسأله فرض عدم قطعیت در مورد پارامترهای مدل فرض بدیهی به نظر می‌رسد.

برتسیماس و همکاران (۲۰۰۸) یک رویکرد مدیریت سبد مالی چند دوره‌ای استواری پیشنهاد کردند که در آن براساس D نرم عمل کرده اند. ایراد این روش تعداد زیاد محدودیت‌هایی است که به خاطر کثرت پارامترهای غیر قطعی به مسأله تحمیل می‌شود. گلدفارب وهمکاران(۲۰۰۳) یک رویکرد استوار برای حل مسأله انتخاب سبد سهام تک دوره‌ای با استفاده از مدل عاملی برای بازدهی سهام پیشنهاد کردند که مدل حاصله آنها از نوع برنامه ریزی مخروطی بود. برتسیماس (۲۰۰۴) رویکرد بهینه سازی استواری پیشنهاد کرد که خطی بودن مدل را حفظ می‌کند. در رویکرد پیشنهادی وی از نرم جدیدی تحت عنوان D نرم به جای نرم اقلیدسی استفاده شده است.

۱ -مسأله بهینه سازی سبد مالی چند دوره‌ای

مسأله انتخاب سبد چند دوره را می‌توان به شرح زیر فرموله کرد(دانتزینگ، ۱۹۹۳): M دارایی خطرپذیر $(R_1,R_2,\ldots,R_M)$ و یک دارایی بدون ریسک R_0 و N دوره خرید و فروش $(T=0\ldots\ldots N-1)$ وجود دارد. در دوره زمانی آخر(N) سرمایه گذار کل دارایی‌اش را جمع می‌زند. هدف این سرمایه گذار مدیریت بهینه

مالی در این دوره‌های زمانی است؛ به طوری‌که مطلوبیت انتظاری نهایی‌اش $U(W_N)$ را بیشینه کند.

میزان پول سرمایه گذار در ابتدای دوره t در دارایی i را با X_t^i نمایش می‌دهیم. اگر او از دارایی i ام در دروه t ام مقدار u_t^i بفروشد و یا مقدار v_t^i بخرد، باعث ایجاد هزینه معاملاتی به ترتیب $C_{sell}.u_t^i$ و $v_t^i\ C_{buy}$ می‌شود. در آمد حاصل از فروش به حساب نقدی (دارایی صفر) اضافه و هزینه‌ها از آن کم می‌شود. در زمان $t+1$ میزان دارایی سرمایه گذار بر اساس بازدهی بوقوع پیوسته در دوره $(t,t+1)$ به روز می‌شود. در اینجا بازدهی غیر قطعی دارایی i ام در طول دوره زمانی $(t,t+1)$ را با $\tilde{R}_t^i$ نشان می‌دهیم. برای ساده کردن مدل فرض می‌کنیم بازدهی تک دوره‌ای دارایی ریسک R_t^o، ثابت و قطعی باشد. مدل هینه سازی سبد مالی چند دوره‌ای به شرح زیر فرموله می‌شود:

$$max\ \cup\left(\sum_{i=0}^{m} X_N^i\right)$$

$$S.T:$$

$$X_t^i = \left(1+\tilde{R}_{t-1}^i\right)\left(X_t^i - u_{t-1}^i - v_{t-1}^i\right)$$

$$X_t^0 = (1+R_{t-1}^0)(X_{t-1}^0 + \textstyle\sum_{i=1}^{m}(1+C_{sell})u_{t-1}^i - \sum_{i=1}^{m}(1+C_{buy})v_{t-1}^i) \qquad (٢)$$

$$X_t^i \geq 0\ \ t=1,\dots,N, i=0,\dots,M$$

$$u_t^i \geq 0\ v_t^i \geq 0\ \ t=1\dots N, i=1,\dots,M$$

اگر سرمایه گذار بتواند بازدهی غیر قطعی $\tilde{R}_t^i$ را تخمین بزند، سیاست بهینه‌اش با حل مسأله بهینه سازی فوق به دست می‌آید. در واقعیت، بازدهی آینده در زمان صفر معلوم نیست. در عمل، سرمایه گذار پس از به دست آوردن اطلاعات اضافی در دوره $(t,t+1)$، برای درود $t+1$ تصمیم گیری می‌کند.

در اینجا فرض می‌شود که درهر مرحله سرمایه‌گذار تنها با استفاده از اطلاعات موجود تا آن دوره، گام اول سیاست بهینه تخصیص را بر می‌دارد. بنابراین، وی مسائل بهینه سازی مکرری را حل می‌کند و هر دفعه افق زمانی کوتاهتر می‌شود. در ادبیات کلاسیک سرمایه گذاری تابع مطلوبیت $\cup\ (W_N)$ مقعر فرض می‌شود تا عدم تمایل به ریسک را منعکس کند. بنابراین، در اینجا به صورت خطی و به فرم عبارت (٣) در نظر گرفته می‌شود:

$$\cup\left(\sum_{i=0}^{m} X_N^i\right) = \sum_{i=0}^{m} X_N^i \qquad (٣)$$

مدل قیمت گذاری دارایی سرمایه‌ای: *(CAPM)*

مدل قیمت گذاری دارایی سرمایه‌ای[١٤] توسط ولیام شارپ (١٩٦٤) مطرح شد که وی به خاطر ارائه این مدل موفق به اخذ جایزه نوبل اقتصاد شد. مدل *CAPM* روش ساده‌ای است که به کمک آن می‌توان میزان بازدهی دارایی‌های مختلف را با استفاده از شاخص بازار برآورد کرد. مدل *CAPM* بازدهی دارایی‌های مختلف را به شرح زیر تخمین می‌زند:

$$R^i = R^0 + \beta^i(R^{Market} - R^0) \qquad (٤)$$

که در آن R^i بازدهی دارایی ریسک پذیر i ام، R^0 نرخ بازدهی بدون ریسک و R^{Market} بازدهی شاخص بازار است. β ضریب همبستگی میان بازدهی هر دارایی و شاخص بازار است که به آن ریسک سیستماتیک گویند و به شرح زیر محاسبه می‌شود:

$$\beta = \frac{Cov(R^i, R^{Market})}{\sigma_M^2} \qquad (٥)$$

که در آن σ_M^2 واریانس بازدهی بازار است. صرف نظر از میزان تنوع موجود در سبد مالی، حذف کلید ریسک‌ها امکان پذیر نیست. هر سرمایه گذار در هنگام انتخاب سبد مالی دو نوع ریسک تحمل می‌کند: اول نرخ ریسک سیستماتیک که مربوط به بازار است و چاره‌ای برای حذف آن نیست؛ مثل نوسان‌های نرخ بهره، تورم، رکورد اقتصادی و جنگ و دوم ریسک غیر سیستماتیک است که به یک دارایی خاص مربوط است و با افزایش تنوع سبد مالی می‌توان آن را حذف کرد. تئوری مدرن سبد مالی نشان می‌دهد که ریسک غیر سیستماتیک را می‌توان حذف کرد ولی ریسک سیستماتیک را حتی با تشکیل سبد مالی به بزرگی بازار نیز نمی‌توان حذف کرد. در این تحقیق، پیشنهاد می‌شود به منظور برآورد بازدهی غیر قطعی دارایی‌ها در هر دوره زمانی از مدل *CAPM* استفاده شود. بدین ترتیب تعداد پارامترهای غیر قطعی مسأله کمتر شده، کار مدل سازی استوار مسأله به سادگی صورت می‌گیرد.

۲-رویکرد استوار پیشنهادی برای حل مسأله بهینه سازی سبد مالی چند دوره‌ای

در فرآیند مدل سازی مسأله انتخاب سبد مالی چند دوره‌ای، پارامتر بازدهی در هر دوره برای دارایی‌های ریسک پذیر، غیر قطعی در نظر گرفته می‌شود. در این تحقیق پیشنهاد می‌شود به منظور مدل سازی بازده‌های انتظاری از مدل CAPM استفاده شود. با توجه به فرم کلی مدل CAPM می‌توان بازدهی غیرقطعی دارایی ریسک پذیر i ام در دوره زمانی t ام را به شرح عبارت ٦ مدل کرد.

$$R_t^i = \beta^i \tilde{R}_t^{market} + (1 - \beta i) R_t^0 \qquad (٦)$$

که در آن $\tilde{R}_t^{market}$ بازدهی غیر منطقی شاخص ازار در دوره t ام و R_t^i بازدهی دارایی بدون ریسک ر دوره زمانی t ام است. با جای‌گذاری برآورد بازدهی نتظاری بر پایه CAPM در مدل بهینه سازی سبد هام چند دوره‌ای به مدل ۷ خواهیم رسید.

$$\max \sum_{i=0}^{M} X_N^i$$

s.t.

$$X_t^i - \left(1 + \beta^i \tilde{R}_t^{market} + (1 - \beta^i) R_t^0\right)$$

$$\left(x_{t-1}^i - u_{t-1}^i + v_{t-1}^i\right) \le 0$$

$$X_t^0 = (1 + R_{t-1}^0) \times$$

$$\left(\begin{array}{l} X_{t-1}^0 + \sum_{i=1}^{m} (1 + C_{sell}) u_{t-1}^i \\ \quad - \sum_{i=1}^{m} (1 + C_{buy}) v_{t-1}^i \end{array} \right) \qquad (٧)$$

$$X_t^i \ge 0 \quad t = 1, \dots, N, i = 0, \dots, M$$

$$u_t^i \ge 0 \; v_t^i \ge 0 \quad t = 1 \dots N, i = 1, \dots, M$$

برتسیماس و همکاران (۲۰۰۸) نشان دادند که مسأله برنامه ریزی خطی به فرم کلی مدل ۸ را که در آن برخی از عناصر ماتریس A غیر قطعی‌اند، می‌توان با استفاده از نرم پیشنهادی وی به صورت مدل ۹ فرموله کرد.

$$\begin{aligned} &\max C^t X \\ &S.T. \; AX \le b \\ &L \le X \le \mathrm{U} \end{aligned} \qquad (٨)$$

$$\max \sum_{J} a_{ij} X_j + Z_i \Gamma_i + \sum_{J \in J_i} P_{ij} \le bi \quad \forall i$$

$$Z_i + P_{ij} \ge \hat{a}_{ij} \quad yj \quad \forall i, J \in J_i \qquad (٩)$$

$$-y_j \le x_j \le y_j \quad \forall J$$

$$l_j \le X_j \le u_j \quad \forall J$$

$$P_{ij} \ge 0 \qquad \forall i, j \in J_i \qquad (٩)$$

$$y_j \ge 0 \quad \forall J$$

$$Z_i \ge 0 \quad \forall i$$

در این فرموله بندی پیشنهادی J_i نشان دهنده تعداد ضرایب غیر قطعی در سطر i ام ماتریس A است. فرض می‌شود ضریب غیر قطعی $\hat{a}_{ij}$، عدد تصادفی یکنواخت در بازه $[a_{ij} - \hat{a}_{ij}, a_{ij} + \hat{a}_{ij}]$ باشد. در این صورت، اگر Γ_i تا از ضرایب غیر قطعی در سطر i ام تغییر کند، قطعاً جواب هنوز شدنی است و اگر بیش از Γ_i تا از ضریب تغییر کند، احتمال رد شدن محدودیت را به دست می‌آوریم.

پارامتر Γ_i لزوماً صحیح نیست و می‌تواند در بازه $[0, |J_i|]$ مقدار بگیرد. توجیه این روش این است که در طبیعت کمتر پیش می‌آید که همه ضرایب غیر قطعی بدترین مقدار به خود را اختیار کنند و معمولاً برخی از آنها تغییر می‌کند. با استفاده از رویکرد پیشنهادی برتسیماس مسأله بهینه سازی سبد مالی چند دوره‌ای با در نظر گرفتن CAPM به عنوان مدل برآورد کننده بازدهی انتظاری به شرح مدل ١٠ فرموله می‌شود.

$$X_t^i - (1 + \beta_i R_t^{market} + (1 + \beta_i) R_t^0) \times$$
$$(X_{t-1}^i - u_{t-1}^i + V_{t-1}^i) + Z_t^i + \Gamma_t^i + P_t^i \le 0$$

$$X_i = (1 + R_{t-1}^0)(X_{t-1}^0 + \qquad (١٠)$$
$$\sum_{i=1}^{m}(1 + C_{sell}) u_{t-1}^i - \sum_{i=1}^{m}(1 + C_{buy}) v_{t-1}^i)$$

$$Z_t^i + P_t^i \ge \Delta R_t^M y^t$$

$$-y^t \le X_{t-1}^i - u_{t-1}^i + V_{t-1}^i \le y^t$$

$$P_t^i \ge 0 \quad Z_t^i \ge 0 \; t = 1, \dots, N, i = 0, \dots, M$$

$$y^t \ge 0 \quad t = 1, \dots, N$$

$$X_t^i \ge 0 \; t = 1, \dots, N, i = 0, \dots, M$$

$$u_t^i \ge 0 \; v_t^i \ge 0 \; t = 1 \dots N, i = 1, \dots, M$$

چنانکه مشاهده می‌شود، در این فرموله بندی به جای کلیه بازدهی‌های غیر قطعی $\tilde{R}_t^i$ فقط بازدهی شاخص بازار غیر قطعی است که مقدار اسمی آن در دوره استفاده می‌شود.

٣- حل مثال عددی

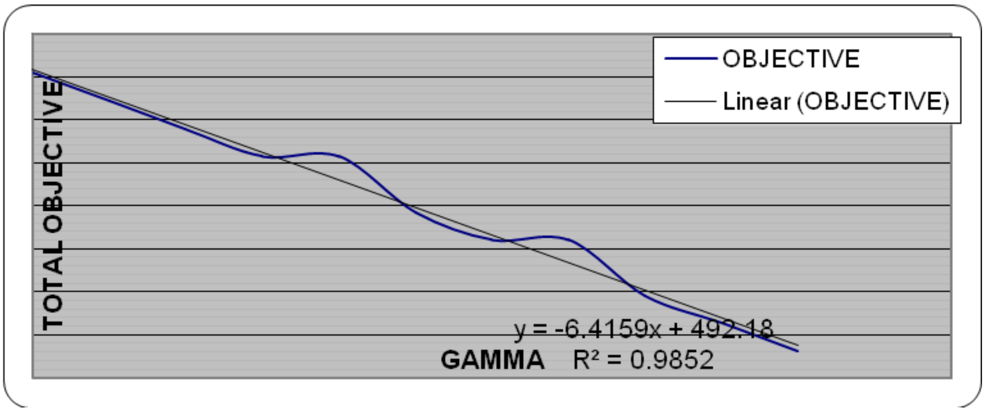
به منظور بررسی کارایی مدل پیشنهادی یک مثال عدد با استفاده از اعداد شبیه سازی شده حل می‌شود. در این مثال، $N=4$,$M=3$ در نظر گرفته می‌شود. به منظور به دست آوردن جواب بهینه، مدل پیشنهادی در نرم افزار Lingo کد نویسی و حل شده است. این مسأله را به ازای مقادیر مختلف Γ حل کرده‌ایم. به پارامتر Γ بودجه استواری نیز گفته می‌شود. نتایج محاسباتی به شرح جدول ١ خلاصه شده است. همان طور که در شکل ١ مشاهده می‌شود، با افزایش مقدار Γ، مقدار کل تابع هدف؛ یعنی میزان دارایی کل سرمایه گذار در دوره آخر، کم می‌شود. با توجه به وجود تنها یک پارامتر قطعی در هر محدودیت مدل پیشنهادی، می‌توان نتیجه گرفت که در صورت افزایش Γ تا مقدار یک، قطعاً کلیه محدودیت‌های مسأله رعایت می‌شود، ولی در صورت افزایش $1 < \Gamma$ نمی‌توان بطور قطع از ارضای محدودیت‌ها اطمینان حاصل کرد. تنها می‌توان احتمال رد شدن محدودیت‌ها را بررسی کرد.

٤- نتیجه‌گیری

در این تحقیق، مسأله بهینه سازی انتخاب سبد مالی چند دوره‌ای با استفاده از رویکرد بهینه سازی استوار حل شده است. به منظور تخمین بازدهی غیر قطعی آینده دارایی‌ها از مدل قیمت گذاری دارایی سرمایه‌ای استفاده شده است. این مدل به ما کمک می‌کند تا تعداد پارامترهای غیر قطعی در محدودیت‌های مسأله بهینه سازی را کمتر کنیم که از نظر حل مسأله نظیر استوار نقش بسزایی دارد. همچنین، ماهیت مسأله سرمایه گذاری با عدم قطعیت نسبت به آینده همراه است که می‌توان برای پاسخ به چنین عدم قطعیتی از رویکردهای شبیه سازی استوار استفاده کرد. در این تحقیق از رویکرد بهینه سازی استوار برتسیماس (٢٠٠٤) استفاده شده است که خطی بودن مدل را حفظ می‌کند. مثال عددی حل شده نشان می‌دهد که مدل سازی صورت گرفته به خوبی می‌تواند برای مقابله با عدم قطعیت در مسأله تعیین سبد مالی به کار رود.

جدول ١- نتایج محاسباتی به ازای مقادیر مختلف بودجه استواری

گاما	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
تابع هدف	492.1	491.4	490.8	490.2	490.2	488.9	488.2	488.2	486.9	486.3	485.6



شکل ١- نمودار تابع هدف دوره هایی بر اساس مقادیر مختلف بودجه استواری

منابع:

Ben-Tal, A, Nemirovski, A. (1998). "Robust convex optimization", *Math.Oper, Res*, 23: 769–805.

Ben-Tal, A. , Nemirovski, A. (2000). "Robust solutions of linear programming problems contaminated with uncertain data", *Math. Programming*, 88: 411–424.

Ben-Tal, A., Nemirovski, A. (1999). "Robust solutions to uncertain programs", *Oper, Res, Lett*, 25, 1–13.

Bertsimas, D., Pachamanova, D. (2008). "Robust multiperiod portfolio management in the presence of transaction costs", *Computers & Operations Research*, 35: 3 – 17.

Bertsimas, D., Sim, M. (2004). "The Price of *efficient diversification of investments*, 2nd ed., Cambridge, MA: Basil Blackwell.

Merton, R. (1990). *Continuous–time finance*, Cambridge, MA: Blackwell Publishers.

Merton, R. (1971). "Optimum consumption and portfolio rules in a continuous time model", *Journal of Economic Theory*, 3:373–413.

Sadjadi, S.J., Omrani, H. (2008). "Data envelopment analysis with uncertcuin data: An application for Iranian electricity distribution companies", *Energy policy*, 36: 4247-4254.

Samuelson, P.A. (1969). "Lifetime portfolio selection by dynamic stochastic programming", *Review of Economics and Statistics*, 51: 239–46.

Sharpe, W.F. (1964). "Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk", *Journal of finance*, 19: 425-42.

Soyster, A.L. (1973). "Convex programming with set-inclusive constraints and applications to inexact linear programming",*Oper, Res*, 21: 1154–1157.

Robustness", *Operations Research*, 52: 1, 35–53.

Cox, J., Huang, C.F. (1989). "Optimal consumption and portfolio choices when asset prices follow a diffusion process", *Journal of Economic Theory*, 49: 33–83.

Dantzig, G.B, Infanger, G. (1993). "Multi-stage stochastic linear programs for portfolio optimization", *Annals of Operations Research*, 45: 59–76.

El-Ghaoui, L., Oustry, F., Lebret, H. (1998). "Robust solutions to uncertain semi definite programs", *SIAM J. Optima*, 9: 33–52.

El-Ghaoui, L, Lebret, H. (1997). "Robust solutions to least-square problems to uncertain data matrices", *SIAM J. Matrix Anal*, Appl. 18: 1035–1064.

Gharakhani, M., Taghipar, T., Jalali, K.F. (2010). "A robust multi-objective production planning" , *International Journal of Industrial Engineering computations*,1:.73-78.

Goldfarb, D., Iyengar, G. (2003). "robust portfolio selection problems" , *Mathematics Of Operations Research*, 28: 1: 1–38.

Markowitz, H.M. (1952). "Portfolio selection", *Journal of Finance*, 7: 77–91.

Markowitz, H.M. (1991). *Portfolio selection:*

پی‌نوشت:

1 Portfolio selection
2 Markowitz
3 Short selling
4 Merton
5 Samuelson
6 Cox
7 Robust optimization
8 Soyster
9 Ben-Tal & Nemirovski
10 El-Ghaoui
11 Robust counterpart
12 Sadjadi
13 Gharakhani
14 Capital Asset Pricing modem