

مدیریت تولید و عملیات، دوره هفتم شماره (۱)، پیاپی (۱۲)، بهار و تابستان ۱۳۹۵

دریافت: ۹۱/۸/۳۰ پذیرش: ۹۲/۶/۵

صص: ۱۹۰-۱۷۹

i

ترکیب تحلیل پوششی داده‌ها با شرایط لنگی مکمل قوی در حالت فازی

علیرضا علی نژاد^{۱*}، نوید ترابی^۲

۱- استادیار دانشکده مهندسی صنایع و مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد قزوین، قزوین، ایران

۲- کارشناس ارشد مهندسی صنایع، دانشکده مهندسی صنایع و مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، قزوین، ایران

چکیده

در این مقاله، به بررسی ترکیب تحلیل پوششی داده‌ها با شرایط لنگی مکمل قوی در حالت فازی پرداخته می‌شود. در مطالعات پیشین، از تحلیل پوششی داده‌ها برای ارزیابی واحد‌ها استفاده شده است، ولی روش تحلیل پوششی داده‌ها روش کاملی نیست، چون از تمام اطلاعات ورودی و خروجی به نحو کامل بهره نمی‌برد. به همین علت، ترکیب این روش با سایر روش‌ها باعث بهتر شدن دقت و کیفیت این روش خواهد شد. ترکیب تحلیل پوششی داده‌ها با شرایط لنگی مکمل قوی روشی ایجاد خواهد نمود که در تصمیم‌گیری و ارزیابی واحد‌های تصمیم‌گیرنده بسیار مفید خواهد بود. در این تحقیق، این مدل ترکیبی در حالت فازی به کار گرفته خواهد شد و مدلی جدید پیشنهاد خواهد شد که کاربردی تر و به شرایط واقعی نزدیک تر باشد.

واژه های کلیدی: روش تحلیل پوششی داده‌ها، شرایط فازی، شرایط لنگی مکمل قوی^۱

۱- مقدمه

قبلی ندارد و این خود عامل بسیار مهمی است که در کاربردی تر شدن مدل بسیار مفید خواهد بود. علیرغم این حسن مفید، کاربرد شرایط لنگی مکمل قوی^۱ تضمینی نخواهد داد که تعداد واحد های کارا کمتر گردد (سویوشی و گوتو، ۲۰۰۹). با توجه به این که این مدل در شرایط قطعی استفاده می گردد؛ ایجاد مدلی که در شرایط عدم قطعیت نیز مفید واقع گردد ناگزیر است، تا این که مدلی پدید آید که به شرایط واقعی نزدیک تر باشد و از آن بتوان در سطح گسترده تری استفاده نمود. در این قسمت به پژوهش ها پیشین اشاره می گردد.

تحلیل پوششی داده ها: این دسته پژوهش ها ابتدا تنها از داده های قطعی استفاده می نمود که این کار محدودیت هایی را برای این روش پدید می آورد که از جمله این محدودیت ها: دوری از شرایط واقعی و طبیعی مسائل و همچنین، کاربرد کمتر اینگونه مدل ها بود که از جمله آن پژوهش ها می توان به چن^۲ (۲۰۰۴) که بررسی رتبه بندی واحدها با استفاده از تحلیل پوششی داده ها پرداخته است که البته همانطور که ذکر شد؛ این تحقیق در حالی که داده های مساله قطعی باشند انجام گرفته است.

تحلیلی پوششی داده ها در حالت عدم قطعیت: دسته بعدی را می توان پژوهش های مهمی نامید که تحلیل پوششی داده ها را در حالی که داده های غیر قطعی موجود است، همچون داده های احتمالی و فازی، استفاده کردند که از آن جمله می توان به پژوهش های نخستین در این موضوع، همچون تحقیق سنگوپتا^۳ (۱۹۹۲) که شروع کننده پژوهش های تحلیل پوششی داده ها در حالت فازی بود و همچنین،

تحلیل پوششی داده ها^۲ ابزار بسیار مناسبی برای ارزیابی عملکرد شرکت ها و سازمان های مختلف است که با توجه به دریافت ورودی ها و خروجی های مورد نظر می تواند به ارزیابی و بررسی دقیق پردازد (سویوشی^۳، ۲۰۰۱). این روش با توجه به توانایی بالایی که دارد می تواند به بررسی واحدهای تصمیم گیرنده ای که خروجی را به ورودی تبدیل می نمایند، پردازد. برای استفاده از این روش باید وزن مناسبی برای هر یک از ورودی ها و خروجی ها یافت تا این داده ها به بهترین صورت استفاده شوند (چارنز و همکاران^۴، ۱۹۸۹). این روش مناسب، در مواردی با مشکلاتی مواجه می گردد که از جمله می توان به اعلام درصد بالای کارایی در شرکت های تحت بررسی اشاره نمود، بطوری که تعداد زیادی شرکت را کارا اعلام نماید و تنها تعداد کمی از شرکت ها ناکارا اعلام گردد. این مشکل در مواردی رخ می دهد که تقویت کننده های تحلیل پوششی داده ها صفر گردد و این مساله باعث تاثیر منفی در بررسی های تحلیل پوششی داده ها می گردد (سویوشی و گوتو^۵، ۲۰۰۹). در گذشته گونه هایی برای محدودیت های تقویت کننده (متغیر های ثانویه) ارائه شد (تامپسون و همکاران^۶، ۱۹۸۶). ولی این روش ها به علت نیاز داشتن به اطلاعات قبلی و تجربیات گذشته چندان مفید واقع نشدند. تا این که در مقالات سویوشی و سکیتانی^۷ (۲۰۰۷) و سویوشی و گوتو (۲۰۰۹) با استفاده از ترکیب تحلیل پوششی داده ها و شرایط لنگی مکمل قوی موفق به ایجاد روشی شدند که در بررسی های نیاز به اطلاعات

به کار برده شود تا مدلی کاربردی تر و در عین حال به شرایط واقعی نزدیک تر ایجاد گردد.

در این تحقیق و در قسمت دوم مبانی اولیه موضوع (ترکیب تحلیل پوششی داده ها با شرایط لنگی مکمل قوی) و دیگر مبانی اولیه مورد استفاده در این مقاله بررسی خواهد شد. در قسمت سوم به مدل پیشنهادی ترکیب تحلیل پوششی داده ها با شرایط لنگی مکمل قوی در حالت فازی پرداخته می شود. همچنین، در قسمت چهارم مثالی عددی در رابطه با مدل پیشنهادی آورده شده است و به مقایسه عددی مدل جدید با دیگر مدل های موجود پرداخته خواهد شد. همچنین، در قسمت پنجم به نتیجه گیری پرداخته می شود.

۲- مبانی اولیه موضوع

در این بخش به مبانی اولیه موضوع و الگوهای نظری آن پرداخته می شود.

۲-۱- شرایط لنگی مکمل قوی

شرایط لنگی مکمل قوی ارتباطی بین مدل اولیه و ثانویه است. در ارتباط با این موضوع است را باید ارتباطاتی که بین مدل اولیه و ثانویه برقرار است را توضیح داد.

تعداد متغیرها در مدل ثانویه برابر با تعداد محدودیت ها در مدل اولیه است و همین طور تعداد محدودیت ها در مدل ثانویه برابر با تعداد متغیرها در مدل اولیه است. شرایط لنگی مکمل قوی ارتباطی خاص بین محدودیت های مدل اولیه با کمبود (مقدار مثبت) متغیرهای کمبود در مدل ثانویه است (سویوشی و سکیتانی، ۲۰۰۷).

پژوهش های کوپر و همکاران^{۱۱} (۲۰۰۲) که نظریه هایی را مبنی بر در نظرگیری محدودیت های احتمالی در مدل، هنگامی که ورودی ها و خروجی های مورد استفاده در تحلیل پوششی داده ها در حالت احتمالی قرار دارند، مطرح نمودند. همچنین، می توان به پژوهش های نوین تر همچون چانگ و همکاران^{۱۲} (۲۰۱۲) و وو و همکاران^{۱۳} (۲۰۱۰) اشاره نمود که در این پژوهش ها داده های غیر قطعی و فازی در حل مدل های تحلیل پوششی داده ها با شرایط خاص به کار گرفته شده است.

ترکیب تحلیل پوششی داده ها با دیگر مدل ها: دسته دیگری از پژوهش ها به ترکیب تحلیل پوششی داده ها با دیگر مدل های تصمیم گیری پرداخته است که این روش باعث کارآمدتر شدن مدل های تحلیل پوششی داده ها و نیز باعث قدرتمندتر شدن این روش گردیده است. از جمله این پژوهش ها می توان به (استرن^{۱۴}، ۱۹۹۸) و (استرن، ۲۰۰۰) و (سویوشی و همکاران، ۲۰۰۰، ۲۰۰۱، ۲۰۰۶، ۲۰۰۹ و ۲۰۱۲) اشاره نمود.

ترکیب تحلیل پوششی داده ها با شرایط لنگی مکمل قوی: ترکیب تحلیل پوششی داده ها با شرایط لنگی مکمل قوی نخستین بار توسط سویوشی و سکیتانی (۲۰۰۷) انجام شد و در پژوهش های سویوشی و گوتو (۲۰۰۹ و ۲۰۱۰ و ۲۰۱۲) در شکل های دیگری پی گرفته شد. این روش مفید دارای نقاط ضعفی است که از آن جمله می توان به در نظر گرفتن این روش در حالت قطعی اشاره نمود. در تحقیق پیش رو سعی شده است تا این مدل در حالت غیر قطعی نیز

اشعه از مجموعه اصول تحلیل پوششی داده‌ها به دست می‌آید. مدل ۴ بیانگر مدل BCC در ماهیت ورودی است.

$$\begin{aligned} \min &= \theta & (4) \\ \text{s.t:} & \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} &\leq \theta x_{io}, \quad i = 1, \dots, s \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} &\geq y_{ro}, \quad r = 1, \dots, s \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j &= 1 \\ \lambda_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

۲-۳- ترکیب تحلیل پوششی داده‌ها با شرایط لنگی مکمل قوی

در مدل ترکیبی تحلیل پوششی داده‌ها با شرایط لنگی مکمل قوی x, y به ترتیب داده‌های ورودی و خروجی هستند که برای $j=(1, \dots, n)$ واحد تصمیم‌گیرنده در نظر گرفته شده است. همچنین، u_r وزن داده شده به خروجی r ام و همچنین v_i وزن داده شده به ورودی i ام است. η نیز برای بهینه نگه داشتن وضعیت کمبود مکمل قوی به کار می‌رود. همچنین، $e=(1, 1, \dots, 1)$ برداری یکه است و علامت w نوع بازده به مقیاس را مشخص می‌نماید. مدلی که سویوشی و گوتو (۲۰۰۷) ارائه کرد به صورت مدل (۵) است:

$$\begin{aligned} \max & \eta & (5) \\ \text{s.t:} & \\ \theta x_{io} - \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} &\geq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} &\geq y_{ro}, \quad r = 1, \dots, s \end{aligned}$$

شرایط لنگی مکمل قوی این طور بیان می‌دارد که اگر x^* جواب بهینه مدل اولیه و y^* جواب بهینه مدل ثانویه باشد و همچنین s^* مقادیر بهینه متغیرهای کمبود مساله اولیه و u^* مقادیر بهینه متغیرهای مساله ثانویه باشد در این صورت روابط ۱ و ۲ بین جواب‌های بهینه و متغیرهای هر مدل برقرار است:

$$x^* * u^* = 0 \quad (1)$$

$$y^* * s^* = 0 \quad (2)$$

۲-۲- تحلیل پوششی داده‌ها

تحلیل پوششی داده‌ها روشی ناپارامتریک است که می‌تواند به ارزیابی واحد تصمیم‌گیرنده که دارای چندین ورودی و خروجی است، پردازد. این روش دارای مدل‌های متفاوتی است که در اینجا دو مورد از مدل‌های اولیه این روش ذکر می‌گردد.

۲-۲-۱- مدل CCR در ورودی محور:

هدف این مدل پیدا کردن واحد تصمیم‌گیرنده مجازی است که با حداقل ورودی بتواند خروجی Y_0 را تولید کند. مدل ۳ بیانگر مدل CCR در ورودی محورا است (چارنز و همکاران، ۱۹۷۸).

$$\begin{aligned} \min &= \theta & (3) \\ \text{s.t:} & \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} &\leq \theta x_{io}, \quad i = 1, \dots, s \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} &\geq y_{ro}, \quad r = 1, \dots, s \\ \lambda_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

۲-۲-۲- مدل BCC در ماهیت وردی:

این مدل با توجه به مدل CCR ارائه گردید. مجموعه امکان تولید این مدل با حذف اصل بی‌کرانی

از تابع عضویت خطی می توان به قابلیت استفاده از مزایای برنامه ریزی خطی در حل مسائل تحلیل پوششی داده ها در حالت غیر قطعی، اشاره نمود. در این مقاله نیز از رویکردی بر اساس برنامه ریزی خطی در مدل ترکیبی مورد بحث (ترکیب تحلیل پوششی داده ها و آنالیز تشخیصی در حالت فازی) استفاده شده است.

۵-۲- روش غیر فازی سازی

از روش های غیر فازی سازی مدل های فازی روشی است که در پژوهش ها خمینز^۶ (۱۹۹۶) و خمینز و همکاران (۲۰۰۷) ارائه کرده اند. این روش بر اساس تعریف ارزش انتظاری و فاصله انتظاری در اعداد فازی که توسط یاگر^{۱۷} (۱۹۸۱) و دوبویس و پراد^{۱۸} (۱۹۸۷) گسترش یافت و توسط خمینز (۱۹۹۶) و هیلپرن^{۱۹} (۱۹۹۲) پیگیری شد. بر اساس این روش می توان طرفین معادله یعنی \tilde{a} به عنوان ضرایب محدودیت و \tilde{b} به عنوان عدد سمت راست که به صورت فازی هستند را به اعداد غیر فازی تبدیل نمود این روش از روابط (۶) برای این کار استفاده می نماید.

$$\mu_M(\tilde{a}, \tilde{b}) = \begin{cases} 0 & \text{if } E_2^a - E_1^b < 0 \\ \frac{E_2^a - E_1^b}{E_2^a - E_1^b - (E_1^a - E_2^b)} & \text{if } 0 \in [E_1^a - E_2^b, E_2^a - E_1^b] \\ 1 & \text{if } E_1^a - E_2^b > 0 \end{cases} \quad (6)$$

زمانی که $\mu_M(\tilde{a}, \tilde{b}) > \alpha$ می توان این طور بیان کرد که $\tilde{a} \geq \tilde{b}$ و با در نظر گرفتن درجه α به

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \lambda_j &= 1 \\ \sum_{i=1}^m v_i x_{i0} &= 1 \\ - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} + \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} + w &\leq 0, \\ j &= 1, \dots, n \end{aligned}$$

$$\theta = \sum_{r=1}^s u_r y_{r0} + w$$

$$\begin{aligned} \lambda_j + \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} - \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - w e^T &\geq \eta e^T, \\ j &= 1, \dots, n \\ v_i - \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + \theta x_{i0} &\geq \eta e^T, i = 1, \dots, m \\ u_r + \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} - y_{r0} &\geq \eta e^T, r = 1, \dots, s \\ v_i &\geq 0, & i=1, \dots, m \\ u_r &\geq 0, & r=1, \dots, s \\ \lambda_j &\geq 0, & j=1, \dots, n \\ \eta &\geq 0, & w, \text{ free} \end{aligned}$$

۴-۲- تحلیل پوششی داده های فازی

پژوهش ها در مورد تحلیل پوششی داده های فازی از تحقیق سنگوپتا (۱۹۹۲) آغاز گردید. این تحقیق دو رویکرد را برای حل مسائل تحلیل پوششی داده ها که داده های غیر قطعی در آنها به کار رفته بود، پیشنهاد می داد. نخست، رویکردی احتمالی برای حل مسائل و دومین راه، رویکردی بر اساس سیستم های فازی است. رویکرد دوم بر مبنای پژوهش های زاده^{۱۵} (۱۹۷۸) قرار دارد. در تحقیق سنگوپتا (۱۹۹۲) دو تابع عضویت برای اعداد فازی مطرح می شود. تابع عضویت خطی و غیر خطی که از مزایای استفاده

$$[(1 - \alpha)E_2^{a_i x} + E_1^{a_i}]x \geq \alpha E_2^{b_i} + (1 - \alpha)E_1^{b_i}, \quad i = 1, \dots, l \quad (11)$$

$$\left[\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) E_2^{a_i x} + \frac{\alpha}{2} E_1^{a_i} \right] x \geq \frac{\alpha}{2} E_2^{b_i} + \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) E_1^{b_i}, \quad i = l + 1, \dots, m \quad (12)$$

$$\left[\frac{\alpha}{2} E_2^{a_i x} + \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) E_1^{a_i} \right] x \geq \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) E_2^{b_i} + \frac{\alpha}{2} E_1^{b_i}, \quad i = l + 1, \dots, m \quad (13)$$

با استفاده از رتبه‌بندی خمینز (۱۹۹۶) و استفاده از روش خمینز و همکاران (۲۰۰۷) حل موجه x^0 به صورت حل بهینه α قابل پذیرش است. می‌توان راه‌حل موجه را برای این مدل اثبات نمود. اگر و فقط اگر برای تمام بردار تصمیم‌های موجه بیان گردد که می‌تواند x به صورت: $\tilde{a}_i x \geq \tilde{b}_i, i = 1, \dots, l$ و $\tilde{a}_i x \approx_{\alpha} \tilde{b}_i, i = l + m, \dots, 1$ و $x \geq 0$ باشد، رابطه (۱۴) به دست می‌آید:

$$\tilde{c}^t x \geq \frac{1}{2} \tilde{c}^t x^0 \quad (14)$$

بنابراین، بهترین گزینه است که در حداقل درجه $\frac{1}{2}$ مخالف دیگر بردارهای موجه باشد. رابطه (۱۴) می‌تواند به صورت رابطه (۱۵) دوباره بازنویسی شود.

$$\frac{E_2^{c^t x} + E_1^{c^t x}}{2} \geq \frac{E_2^{c^t x^0} + E_1^{c^t x^0}}{2} \quad (15)$$

برآیند موضوع به این صورت می‌شود که، استفاده از تعاریف فاصله انتظاری و ارزش انتظاری برای اعداد فازی، معادل مدل α -parametric در حالت

صورت $\tilde{a} \geq_{\alpha} \tilde{b}$ نوشته می‌شود. بر اساس تعریف معادله فازی در تحقیق پارا و همکاران (۲۰۰۵) برای هر جفت از اعداد فازی \tilde{a}, \tilde{b} می‌توان گفت که \tilde{a} برابر با \tilde{b} در درجه α ، که اگر روابط فوق همزمان با هم به صورت $\tilde{a} \leq_{\frac{\alpha}{2}} \tilde{b}, \tilde{a} \geq_{\frac{\alpha}{2}} \tilde{b}$ وجود داشته باشند. این معادلات به صورت رابطه (۷) نوشته می‌شود.

$$\frac{\alpha}{2} \leq \mu_M(\tilde{a}, \tilde{b}) \leq 1 - \frac{\alpha}{2} \quad (7)$$

حال اگر مدل فازی نمونه بصورت مدل (۸) وجود داشته باشد:

$$\min z = \tilde{c}^t x \quad (8)$$

s.t:

$$\tilde{a}_i x \geq \tilde{b}_i, \quad i = 1, \dots, l$$

$$\tilde{a}_i x = \tilde{b}_i, \quad i = l + 1, \dots, m$$

$$x \geq 0$$

بر اساس پیشنهاد خمینز و همکاران (۲۰۰۷) بردار تصمیم $x \in R^n$ در درجه α موجه خواهد بود در صورتی که شرط $\min_{i=1, \dots, m} \{\mu_M(\tilde{a}_i x, \tilde{b}_i)\} = \alpha$ برقرار باشد. بر اساس (۶) و (۸) روابط $\tilde{a}_i x \geq \tilde{b}_i$ و $\tilde{a}_i x = \tilde{b}_i$ برابر با روابط (۹) و (۱۰) می‌شوند.

$$(9)$$

$$\frac{E_2^{a_i x} - E_1^{b_i}}{E_2^{a_i x} - E_1^{a_i x} + E_2^{b_i} - E_1^{b_i}} \geq \alpha, \quad i = 1, \dots, l \quad (10)$$

$$\frac{E_2^{a_i x} - E_1^{b_i}}{E_2^{a_i x} - E_1^{a_i x} + E_2^{b_i} - E_1^{b_i}} \leq 1 - \frac{\alpha}{2}, \quad i = l + 1, \dots, m$$

این روابط به صورت (۱۱) و (۱۲) و (۱۳) می‌تواند نوشته شود:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$$

$$\sum_{i=1}^m v_i \tilde{x}_{i o} = 1$$

$$-\sum_{i=1}^m v_i \tilde{x}_{i j} + \sum_{r=1}^s u_r \tilde{y}_{r j} + w \leq 0, j = 1, \dots, n$$

$$\sum_{r=1}^s u_r \tilde{y}_{r o} + w = \theta$$

$$\lambda_j + \sum_{i=1}^m v_i \tilde{x}_{i j} - \sum_{r=1}^s u_r \tilde{y}_{r j} - w e^T \geq \eta e^T, j = 1, \dots, n$$

$$v_i - \sum_{j=1}^n \lambda_j \tilde{x}_{i j} + \theta \tilde{x}_{i o} \geq \eta e^T, i = 1, \dots, m$$

$$u_r + \sum_{j=1}^n \lambda_j \tilde{y}_{r j} + \tilde{y}_{r o} \geq \eta e^T, r = 1, \dots, s$$

$$v_i \geq 0, \quad i=1, \dots, m$$

$$u_r \geq 0, \quad r=1, \dots, s$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad j=1, \dots, n$$

$$\eta \geq 0, \quad w, \text{ free}$$

برای تبدیل مدل فازی (۱۷) به مدل قطعی از روش غیرفازی سازی که در قسمت مبانی اولیه توضیح داده شد استفاده می گردد که بعد از استفاده از این روش مدل (۱۷) به صورت (۱۸) نوشته می شود:

$$\max \eta \quad (18)$$

s.t:

$$\theta[(1-\alpha)E_2^{X_{io}} + \alpha E_1^{X_{io}}]$$

$$-\sum_{j=1}^n \lambda_j [(1-\alpha)E_2^{X_{ij}} + \alpha E_1^{X_{ij}}] \geq 0, \quad i = 1, \dots, m$$

قطعی است که در این صورت مدل (۸) را می توان به صورت مدل (۱۶) نوشت:

$$\min \text{EV}(\tilde{c}) x \quad (16)$$

s.t:

$$[(1-\alpha)E_2^{a_i x} + E_1^{a_i}]x \geq \alpha E_2^{b_i} + (1-\alpha)E_1^{b_i}, \quad i = 1, \dots, l$$

$$\left[\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)E_2^{a_i x} + \frac{\alpha}{2}E_1^{a_i}\right]x \geq \frac{\alpha}{2}E_2^{b_i} + \left(1-\frac{\alpha}{2}\right)E_1^{b_i}, \quad i = l+1, \dots, m$$

$$\left[\frac{\alpha}{2}E_2^{a_i x} + \left(1-\frac{\alpha}{2}\right)E_1^{a_i}\right]x \geq \left(1-\frac{\alpha}{2}\right)E_2^{b_i} + \frac{\alpha}{2}E_1^{b_i}, \quad i = l+1, \dots, m$$

$$x \geq 0$$

۳- مدل پیشنهادی

ترکیب تحلیل پوششی داده ها با شرایط لنگی مکمل

قوی در حالت فازی:

مدلی که از ترکیب تحلیل پوششی داده ها با شرایط لنگی مکمل قوی در حالت غیر قطعی به دست می آید اصولی مانند مدل قطعی دارد با این تفاوت که در این مدل جدید ورودی ها و خروجی ها یعنی بردارهای x و y به صورت فازی در نظر گرفته شده اند. با توجه به فازی بودن و عدم قطعیت مدل جدید و با توجه به تغییرات ایجاد شده در آن، مدل جدید پیشنهادی به صورت مدل (۱۷) نوشته شده است.

$$\max \eta \quad (17)$$

s.t:

$$\theta \tilde{x}_{i o} - \sum_{j=1}^n \lambda_j \tilde{x}_{i j} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \tilde{y}_{r j} \geq \tilde{y}_{r o}, \quad r = 1, \dots, s$$

$$u_r + \sum_{j=1}^n \lambda_j [(1 - \alpha)E_2^{Y_{rj}} + \alpha E_1^{Y_{rj}}] - [(1 - \alpha)E_2^{Y_{ro}} + \alpha E_1^{Y_{ro}}] \geq \eta e^T, \quad r = 1, \dots, s$$

$$\begin{aligned} v_i &\geq 0, & i=1, \dots, m \\ u_r &\geq 0, & r=1, \dots, s \\ \lambda_j &\geq 0, & j=1, \dots, n \\ \eta &\geq 0, & w, \text{ free} \end{aligned}$$

۴- مثال عددی

در این قسمت مثال عددی برای توضیح بیشتر موضوع آورده می شود. این مثال شامل پنج واحد تصمیم گیری است که دارای دو ورودی و دو خروجی هستند. همچنین، تمامی اعداد به صورت فازی مثلثی هستند. جدول اعداد فازی برای این مثال از تحقیق گو و تاناکا^(۲۰۰۱) آورده شده است. جدول (۱) نشانگر اعداد مورد استفاده در این مثال است. با استفاده از اعداد ورودی و خروجی پنج مدل ترکیبی تحلیل پوششی داده ها با شرایط لنگی مکمل در نرم افزار لینگو حل گردیده است

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^n \lambda_j [(1 - \alpha)E_2^{Y_{rj}} + \alpha E_1^{Y_{rj}}] \\ &\geq [(1 - \alpha)E_2^{Y_{ro}} + \alpha E_1^{Y_{ro}}], \quad r = 1, \dots, s \\ &\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\ &\sum_{i=1}^m v_i [(1 - \alpha)E_2^{X_{io}} + \alpha E_1^{X_{io}}] = 1 \\ &-\sum_{i=1}^m v_i [(1 - \alpha)E_2^{X_{ij}} + \alpha E_1^{X_{ij}}] \\ &+ \sum_{r=1}^s u_r [(1 - \alpha)E_2^{Y_{rj}} + \alpha E_1^{Y_{rj}}] + w \leq 0, \\ &\quad j = 1, \dots, n \\ &\sum_{r=1}^s u_r [(1 - \alpha)E_2^{Y_{ro}} + \alpha E_1^{Y_{ro}}] + w = \theta \\ &\lambda_j + \sum_{i=1}^m v_i [(1 - \alpha)E_2^{X_{ij}} + \alpha E_1^{X_{ij}}] \\ &- \sum_{r=1}^s u_r [(1 - \alpha)E_2^{Y_{rj}} + \alpha E_1^{Y_{rj}}] - w e^T \\ &\geq \eta e^T, \quad j = 1, \dots, n \\ &v_i - \sum_{j=1}^n \lambda_j [(1 - \alpha)E_2^{X_{ij}} + \alpha E_1^{X_{ij}}] \\ &+ \theta [(1 - \alpha)E_2^{X_{io}} + \alpha E_1^{X_{io}}] \geq \eta e^T, \\ &\quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

که نتایج آن در جدول (۲) آورده شده است.

جدول ۱- ورودی ها و خروجی های فازی مثلثی

	واحد تصمیم گیرنده ۱	واحد تصمیم گیرنده ۲	واحد تصمیم گیرنده ۳	واحد تصمیم گیرنده ۴	واحد تصمیم گیرنده ۵
ورودی اول	(۳/۵ و ۴/۵)	(۲/۹ و ۲/۹)	(۴/۴ و ۹/۹ و ۵/۴)	(۳/۴ و ۱/۱ و ۴/۸)	(۵/۹ و ۶/۵ و ۷/۱)
ورودی دوم	(۱/۹ و ۲/۱ و ۲/۳)	(۱/۴ و ۱/۵ و ۱/۶)	(۲/۲ و ۲/۶ و ۳)	(۲/۳ و ۲/۲ و ۲/۴)	(۳/۶ و ۴/۱ و ۴/۶)
خروجی اول	(۲/۴ و ۲/۶ و ۲/۸)	(۲/۲ و ۲/۲ و ۲/۲)	(۲/۷ و ۳/۲ و ۳/۷)	(۲/۵ و ۲/۹ و ۳/۳)	(۴/۴ و ۵/۱ و ۵/۸)
خروجی دوم	(۳/۸ و ۴/۱ و ۴/۴)	(۳/۳ و ۳/۵ و ۳/۷)	(۴/۳ و ۵/۱ و ۵/۹)	(۵/۵ و ۵/۷ و ۵/۹)	(۶/۵ و ۷/۴ و ۸/۳)

جدول ۲- نتایج به دست آمده از حل مدل با کمک نرم افزار لینگو

	واحد تصمیم گیرنده ۱	واحد تصمیم گیرنده ۲	واحد تصمیم گیرنده ۳	واحد تصمیم گیرنده ۴	واحد تصمیم گیرنده ۵
θ	۰/۸۴۲	۱	۰/۸۳۸	۱	۱
η	۰/۸۹۷	۰/۲۲۵	۰/۳۰۲	۰/۱۴۸	۰/۹۰۱
λ_1	۰	۰	۰	۰	۰
λ_2	۰/۶۲۷	۱	۰/۰۶۹	۰	۰
λ_3	۰	۰	۰	۰	۰
λ_4	۰/۳۷۲	۰	۰/۹۳	۱	۰
λ_5	۰	۰	۰	۰	۱
v_1	۰	۰/۲۲۵	۰/۱۹۶	۰/۱۴۸	۰/۹۰۱
v_2	۰/۴۵۸	۰/۲۲۵	۰	۰/۱۴۸	۰/۹۰۱
u_1	۰/۲۸۴	۰	۰/۲۲۴	۰	۰

شده است. همین طور جدول ۴ بیانگر مقایسه‌ای بین کارایی‌های بدست آمده از هر سه روش است. قابل ذکر است مدل‌های فازی فوق با استفاده از روش شرح داده شده در این مقاله غیر فازی شده‌اند.

همانطور که مشاهده می‌گردد واحد های تصمیم‌گیری ۵ و ۲ دارای کارایی یک هستند و بقیه واحدهای تصمیم‌گیری ناکارا اعلام شده‌اند. حال برای مقایسه، این مثال با استفاده روش CCR فازی و همین طور BCC فازی با استفاده از نرم افزار لینگو حل گردیده است، که نتایج آن در جدول ۳ آورده

جدول ۳- نتایج به دست آمده از حل مدل‌های CCR فازی و BCC فازی

		واحد تصمیم گیرنده ۱	واحد تصمیم گیرنده ۲	واحد تصمیم گیرنده ۳	واحد تصمیم گیرنده ۴	واحد تصمیم گیرنده ۵
CCR فازی	θ	۰/۸۲۴	۰/۹۵۷	۰/۸۳۶	۱	۰/۹۹۴
		۰	۰	۰	۰	۰
		۰	۰	۰	۰	۰
		۰	۰	۰	۰	۰
		۰/۷۶۷	۰/۶۳	۰/۹۷۴	۱	۱/۵۴۱
BCC فازی	θ	۰/۸۴۲	۱	۰/۸۳۸	۱	۱
		۰	۰	۰	۰	۰
		۰/۶۲۷	۱	۰/۰۶۹	۰	۰
		۰	۰	۰	۰	۰
		۰/۳۷۲	۰	۰/۹۳	۱	۰
	۰	۰	۰	۰	۱	

جدول ۴- مقایسه کارایی های سه مدل (ترکیبی ، CCR فازی و BCC فازی)

	واحد تصمیم گیرنده ۱	واحد تصمیم گیرنده ۲	واحد تصمیم گیرنده ۳	واحد تصمیم گیرنده ۴	واحد تصمیم گیرنده ۵
مدل ترکیبی	۰/۸۴۲	۱	۰/۸۳۸	۱	۱
CCR فازی	۰/۸۲۴	۰/۹۵۷	۰/۸۳۶	۱	۰/۹۹۴
BCC فازی	۰/۸۴۲	۱	۰/۸۳۸	۱	۱

۵- نتیجه گیری

در این تحقیق ترکیب تحلیل پوششی داده‌ها با شرایط لنگی مکمل قوی در حالت فازی بررسی شد. مدل ترکیبی تحلیل پوششی داده‌ها با شرایط لنگی مکمل قوی مدلی قدرتمند است که می‌توان از این مدل در ارزیابی کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده استفاده نمود. در این تحقیق، نخست توضیحاتی در مورد تحلیل پوششی داده‌ها و ارزش این روش در محاسبه کارایی سازمان‌ها داده شد، سپس به بررسی ترکیب این روش با وضعیت کمبود مکمل قوی پرداخته شد.

به این علت که این روش تا کنون در شرایط عدم قطعیت به کار گرفته نشده است مدلی فازی، پیشنهاد گردید که بتوان از این مدل در حل مسائلی که دارای داده‌های قطعی نیستند بهره برد. به همین منظور، روش غیر فازی سازی در ترکیب با این مدل به کار گرفته شد و مدلی جدید ایجاد گردید تا کاربرد این مدل بیشتر و همچنین، این مدل به شرایط واقعی نزدیک‌تر گردد. همچنین، بعد از مدل پیشنهادی به حل مثالی عددی پرداخته شد تا این که حل این مثال به تشریح و روشن شدن بیشتر موضوع کمک نماید.

با توجه به نتایج به دست آمده این طور می‌شود برداشت نمود که در این مثال مدل ترکیبی تحلیل پوششی داده‌ها با شرایط لنگی مکمل قوی با مدل BCC فازی شرایط همانندی در به دست آوردن کارایی‌ها دارند و همین طور مدل CCR فازی مدلی سختگیرانه تر نسبت به دو مدل دیگر است. همچنین، شایان ذکر است، مدل ترکیبی ارائه شده در مواقعی که واحدهای تصمیم‌گیرنده، ورودی‌ها و خروجی‌های بیشتری نیاز به بررسی داشته باشند؛ عملکرد بهتری نسبت به مدل‌های موجود خواهد داشت، به بیان دیگر، این مدل در ارزیابی واحدهای تصمیم‌گیرنده پیچیده و با حجم زیاد به مراتب عملکرد بهتری در مقایسه با دیگر مدل‌های موجود دارد، زیرا در مدل‌هایی مانند BCC و CCR تمامی اطلاعات موجود در مساله استفاده نمی‌شوند و بعضی از ضرایب ممکن است صفر گردند. در حالی که ضرایب این مدل در حالت ترکیبی همگی مثبت هستند و به این علت از تمامی اطلاعات موجود در مساله بهره می‌برد، که این مورد به عملکرد بهتری در به دست آوردن کارایی‌ها نسبت به مدل‌هایی همچون BCC و CCR خصوصاً در مدل‌هایی با حجم زیاد، منجر می‌گردد.

- European journal of the operation research*, 155, 487-501.
- Dubois, D., Prade, H. (1987). "The mean value of a fuzzy number". *Fuzzy Sets and Systems*, 24, 279-300.
- Franklin Liu, F.H., & Peng, H.H. (2008). "Ranking of units on the DEA frontier with common weights". *Computers & Operations Research*, 35, 1624-1637.
- Guo, P., & Tanaka, H. (2001). "Fuzzy DEA: A perceptual evaluation method". *Fuzzy Sets and Systems*, 119(1), 149-160.
- Heilpern, S. (1992). "The expected value of a fuzzy number". *Fuzzy Sets and Systems*, 47, 81-86.
- Jimenez, M. (1996). "Ranking fuzzy numbers through the comparison of its expected intervals", *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge Based Systems*, 4 (4), 379-388.
- Jimenez, M., Arenas, A., & Bilbao, A., Rodriguez, M.V. (2007). "Linear programming with fuzzy parameters: an interactive method resolution", *European Journal of Operational Research*, 177, 1599-1609.
- Parra, M.A., Terol, A.B., Gladish, B.P., & Rodriguez Uria, M.V. (2005). "Solving a multi objective possibilistic problem through compromise programming", *European Journal of Operational Research*, 164, 748-759.
- Sengupta, J. K. (1992). "A fuzzy systems approach in data envelopment analysis". *Computers and Mathematics with Applications*. 24, 259-266.
- Stern, Z.S., Friedman, L. (1998). "DEA and the discriminant analysis of ratios for ranking units". *European Journal of Operational Research*, 111(3), 470-478.
- Stern, Z.S., Mehrez, A., & Hadad, Y. (2000). "An AHP/DEA methodology for ranking decision making units". *International Transactions in Operational Research*, 7, 109-124.
- در این مثال مقایسه‌ای بین مدل ترکیبی پیشنهادی در این مقاله و دو مدل BCC فازی و CCR فازی انجام گرفت و نتایج آن در مقاله درج گردید.
- برای پژوهش‌های آتی می‌توان از مدل‌های متنوع تحلیل پوششی داده‌ها که تا کنون در ترکیب با سایر مسائل مطرح در آمار و یا تحقیق در عملیات قرار نگرفته اند استفاده نمود، تا با استفاده از مدل‌های متنوعی که می‌توان از این ترکیب‌ها به دست آورد به روش‌های مفیدتر و در عین حال کاربردی‌تر برای ارزیابی‌های مختلف دست یافت. به طور نمونه می‌توان تحلیل پوششی داده‌ها را با برنامه‌ریزی خطی و غیر خطی همچنین، با استفاده از روندهای اصلاحی موجود در آمار استفاده نمود. همچنین، مدل ارایه شده را می‌توان با در نظر گرفتن حالت‌های اعداد احتمالی و بازه‌ای و تئوری خاکستری ترکیب نمود تا با بهره‌گیری از مدل‌های نوین بتوان ارزیابی‌های دقیق‌تری از شرایط واحدهای تصمیم‌گیرنده انجام داد.

منابع

- Chang, P.T., & Lee, J.H.. (2012). "A fuzzy DEA and knapsack formulation integrated model for project selection". *Computers & Operations Research*, 39(1), 112-125.
- Charnes, A., Cooper, W.W., Wei, Q.L., & Huang, Z.M. (1989). "Cone ratio data envelopment analysis and multi-objective programming", *International Journal of Systems Science*, 7, 1099-1118.
- Chen, Y. (2004). "Ranking efficient units in DEA". *Omega*, 32, 213-219.
- Cooper, W.W., Deng, H., Hung, Z.M., & Li, S.X. (2002). "chance constrained programming approaches to congestion in stochastic data envelopment analysis".

- Sueyoshi, T., & Goto, M. (2011). "A combined use of DEA (Data Envelopment Analysis) with Strong Complementary Slackness Condition and DEA-DA (Discriminant Analysis)". *Applied Mathematics Letters*, 24, 1051-1056.
- Thompson, R.G., Singleton, F.D., Thrall, R.M., & Smith, B.A. (1986). "Comparative Site Evaluations for Locating a High-Energy Physics Lab in Texas", *interfaces*, 16, 35-49.
- Wu, D.D., & Olson, D.L. (2010). "Fuzzy multi attribute grey related analysis using DEA". *Computers & Mathematics with Applications*, 60, 166-174.
- Yager, R. (1981). "A procedure for ordering fuzzy subsets of the unit interval", *Information Sciences*, 24, 143-161.
- Zadeh, L.A. (1978). "Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility". *Fuzzy sets and systems*, 1, 3-28.
- Sueyoshi, T. (2001). "Extended DEA-Discriminant analysis". *European Journal of Operational Research*, 131, 324-351.
- Sueyoshi, T. (2004). "Mixed integer programming approach of extended DEA-discriminant analysis". *European Journal of Operational Research*, 152, 45-55.
- Sueyoshi, T. (2006). "DEA-discriminant analysis: methodological comparison among eight discriminant analysis approaches". *European Journal of Operational Research*, 169, 247-272.
- Sueyoshi, T., & Sekitani, K. (2007). "Measurement of returns to scale using a non-radial DEA model: A range-adjusted measure approach". *European Journal of Operational Research*, 176, 1918-1946.
- Sueyoshi, T., & Goto, M. (2009). "DEA-DA for bankruptcy-based performance assessment: misclassification analysis of the Japanese construction industry". *European Journal of Operational Research*, 199, 561-575.
- Sueyoshi, T., & Sekitani, K. (2009). "An occurrence of multiple projections in DEA-based measurement of technical efficiency: theoretical comparison among DEA models from desirable properties". *European Journal of Operational Research*, 196, 764-794.
- Sueyoshi, T., & Goto, M. (2010). "Measurement of a linkage among environmental, operational, and financial performance in Japanese manufacturing firms: a use of Data Envelopment Analysis with strong complementary slackness condition". *European Journal of Operational Research*, 207, 1742-1753.
- Sueyoshi, T., & Goto, M. (2012b). "Efficiency-based ranking assessment for electric power industry: a combined use of Data Envelopment Analysis (DEA) and DEADiscriminant Analysis (DA)". *Energy Econ*, 34, 634-644.

پی‌نوشت

- 1 Complementary slackness
- 2 Data envelopment analysis
- 3 Sueyoshi
- 4 Charnes
- 5 Sueyoshi, Goto
- 6 Thompson
- 7 Sueyoshi, Sekitani
- 8 Strong Complementary Slackness Condition
- 9 Chen
- 10 Sengupta
- 11 Cooper
- 12 Chang
- 13 Wu
- 14 Stern
- 15 Zadeh
- 16 Jimenez
- 17 Yager
- 18 Dubois, Prade
- 19 Heilpern
- 20 Parra
- 21 Guo, Tanaka