

Inverse of Backup 2-Median Problems with Variable Edge Lengths and Vertex Weight on Trees and Variable Coordinates on the Plane

Morteza Nazari

PhD student, Faculty of Mathematical Sciences, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran, mnazari_math@shahroodut.ac.ir

Jafar Fathali*

Associate Professor, Faculty of Mathematical Sciences, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran, fathali@shahroodut.ac.ir

Mostafa Nazari

Assistant Professor, Dept. of Mech. Eng., Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran, nazari_mostafa@shahroodut.ac.ir

Seyed Mojtaba Varedi

Assistant Professor, Dept. of Mech. Eng., Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran, varedi@shahroodut.ac.ir

Abstract: In this paper we consider the inverse of backup 2-median problem. In this problem, a set of weighted points are given and we should change some parameters of the problem such as weights of vertices and edges and coordinates of points such that the two given points be the backup 2-median. We present mathematical models for inverse backup 2-median problems on graphs. In the case that the underlying network is a tree, linear models are presented for the problem with variable edges and weight of vertices. We also consider the continuous case of the problem with variable coordinates of vertices on the plane. In this case, we solve the model by PSO and a hybrid improved PSO methods. Computational results are compared for the varying amounts of parameters.

Keywords: Facility Location, Reverse Optimization, Backup 2-Median, Meta-Heuristic

Introduction: The inverse and backup location facility problems are two important branches of location theory that have been interested by many researchers in the recent decades. Let n weighted points be given in the plane or on a graph. The inverse median models investigate to change some parameters of problem such as coordinates, edge lengths and vertex weights such that the given facilities be the median points. For more information about inverse location problems see Burkard et al. (2004). On the other hand, in the backup median problems supposed that some facilities may failed. Therefore the other facilities should serve the clients. The backup 2-median problem on trees has been considered by Wang et al. (2009). Fathali (2014) investigated the backup multi-facility location problem on the plane.

In this paper we consider the combination of inverse location and backup facility location problems. We want to change coordinates, weight of vertices or length of edges with minimum cost such that the given facilities be backup median facilities.

Materials and Methods:

2. inverse Backup 2-Median On Trees: Let $T=(V,E)$ be a tree with n vertices. Each vertex $v_i \in V$ has a nonnegative weight w_i . Let $d(u,v)$ be the distance between two points u and v , m_1 and m_2 be the two given vertices in T which are assumed the location of facilities. Each facility may fail with a probability ρ . For any vertex v_i , suppose that the cost of increasing and decreasing per unit of w_i is c_i^+ and c_i^- , respectively. Let p_i and q_i be the amounts by which the weight w_i is increased and

* Corresponding author

decreased, respectively. Then, the model of inverse backup 2-median problem can be written as follows.

$$\begin{aligned} & \min \sum_{i=1}^n (c_i^+ p_i + c_i^- q_i) \\ & \text{s.t.} \\ & (1-\rho) \sum_{i=1}^n \hat{w}_i d(v_i, \{m_\lambda, m_r\}) + \rho \sum_{i=1}^n \hat{w}_i d(v_i, m_\lambda) + \rho \sum_{i=1}^n \hat{w}_i d(v_i, m_r) \leq (1-\rho) \sum_{i=1}^n \hat{w}_i d(v_i, \{u_j, u_k\}) + \rho \left(\sum_{i=1}^n \hat{w}_i d(v_i, u_j) + \sum_{i=1}^n \hat{w}_i d(v_i, u_k) \right); \forall u_j, u_k \in V \\ & \hat{w}_i = w_i + p_i - q_i, i = 1, \dots, n. \\ & p_i, q_i \geq 0, i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Using some properties of backup 2-median problem on trees, this model can be converted to a linear programming model.

3. Inverse Backup 2-Median on The Plane: In this section we consider the inverse backup 2-median on the plane. Let n points X_1, \dots, X_n be given in the plane. Let we have a limited budget B , to change the parameters. Then we want to modify the coordinate of given points such that the two points m_1 and m_2 be close to backup 2-median. With the same notation of inverse backup 2-median on trees, the model of inverse backup 2-median problem on the plane can be written as follow.

$$\begin{aligned} & \Omega_1 : \\ & \min (1-\rho) \sum_{i=1}^n \left(w_i \min_{t=1,2} \{d(\hat{X}_i, m_t)\} \right) + \rho \sum_{i=1}^n \left(w_i d(\hat{X}_i, m_1) + d(\hat{X}_i, m_2) \right) \\ & \text{s.t.} \\ & \hat{X}_i = X_i + p_i - q_i, \quad i = 1, \dots, n \\ & \sum_{i=1}^n (c_i^+ p_i + c_i^- q_i) \leq B, \\ & p_i, q_i \geq 0, i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Results and Discussion: Two Particle Swarm Optimization (PSO) methods have been applied to solve the inverse backup 2-median problem on the plane. Table 1, shows the results with varying norms p , which obtained by running the two PSO methods on a problem with 80 points.

Table 1. The results of two PSO models for BR2MP with $n=80$, $B=700$ and $\rho = 0.5$

p	F_{ps0}	F_{ipso}	CPU - Time $_{ps0}$ (s)	CPU - Time $_{ipso}$ (s)
1	5.81E+03	5.64E+03	676.09	481.06
2	4.71E+03	4.65E+03	353.89	378.37
5	4.19E+03	3.75E+03	526.14	462.06
10	3.83E+03	3.39E+03	362.328	657.44

Conclusion: In this paper we investigated the backup 2-median problem with variable edge lengths and vertices weights on trees. The problem with variable coordinates on the plane is also considered. The models of mentioned problems and computational results which obtained by two PSO methods are presented.

References

Burkard, R. E., Pleschiutsching, C., & Zhang, J. (2004). "Inverse median problems". *Discrete Optimization*, 1(1), 23-39.

Fathali, J. (2014). "Backup multifacility location problem with l_p norm". *OPSEARCH*, 52(2), 382-391.

Wang, H. L., Wu, B. Y., & Chao, K. M. (2009). "The backup 2-center and backup 2-median problems on trees". *Networks*, 53(1), 39-49.

مدیریت تولید و عملیات، دوره ۹، پیاپی ۱۷، شماره ۲، پاییز و زمستان ۱۳۹۷

دریافت: ۱۳۹۶/۰۲/۰۷ پذیرش: ۱۳۹۷/۰۲/۱۸

صص: ۱۳۷-۱۱۵

مسائل معکوس مکان‌یابی تسهیلات ۲- میانه پشتیبان با تغییر طول یال‌ها و وزن رئوس روی درخت و تغییر مختصات نقاط در صفحه

مرتضی نظری^۱، جعفر فتحعلی^{۲*}، مصطفی نظری^۳، سید مجتبی واردی کولایی^۴

۱- دانشجوی دکتری، دانشکده ریاضی، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران، mnazari_math@shahroodut.ac.ir

۲- دانشیار، دانشکده ریاضی، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران، fathali@shahroodut.ac.ir

۳- استادیار، گروه جامدات، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران، nazari_mostafa@shahroodut.ac.ir

۴- استادیار، گروه جامدات، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران، vareidi@shahroodut.ac.ir

چکیده: در این مقاله برای نخستین بار معکوس مسئله بهینه‌سازی ۲- میانه پشتیبان^۱ بررسی شده است. در این مسئله تعدادی نقطه، مشتری در نظر گرفته می‌شوند و هدف این است که با تغییر پارامترهای مسئله، دو نقطه از پیش تعیین شده به سمت ۲- میانه پشتیبان شدن برود. ابتدا مسائل معکوس (نوع محدودیت بودجه‌ای و نوع حداقل هزینه) ۲- میانه پشتیبان در حالت گسسته برای گراف‌های عمومی مدل‌سازی ریاضی می‌شود. سپس درحالی‌که گراف مدنظر درخت باشد، آنها به مسئله برنامه‌ریزی خطی تبدیل می‌شوند. همچنین در حالت پیوسته برای مسئله معکوس نوع محدودیت بودجه‌ای ۲- میانه پشتیبان (با تغییر در مختصات نقاط) مدل ریاضی ارائه می‌شود. با توجه به NP-سخت بودن مسئله، مسئله با الگوریتم‌های فرا ابتکاری ازدحام ذرات^۲ (PSO) و الگوریتم بهبودیافته ازدحام ذرات^۳ (IPSP)، حل می‌شود. در نهایت نتایج در حالات مختلف بررسی می‌شود.

واژه‌های کلیدی: مکان‌یابی تسهیلات، بهینه‌سازی معکوس، ۲- میانه پشتیبان، فرا ابتکاری

مقدمه

مسائل بهینه‌سازی مرتبط با مفاهیم مکان‌یابی در چندین دهه گذشته توجه ویژه‌ای را به خود اختصاص داده‌اند؛ به‌نحوی که در سال‌های اخیر مطالعات مکان‌یابی به یکی از عناصر کلیدی در موفقیت و بقای مراکز صنعتی و تولیدی تبدیل شده است. توجه ویژه به این مفاهیم به‌چند دلیل است؛ نخست به‌دلیل اینکه به‌طور مداوم در تمام سطوح برنامه‌ریزی بشری حضور داشته‌اند؛ دوم به‌دلیل اینکه تصمیم‌گیری‌های مکانی دارای ماهیت استراتژیک هستند (یعنی بیشتر آنها با منابع عظیمی از سرمایه سروکار دارند و تأثیرات اقتصادی آنها بلندمدت است)، درنهایت به‌دلیل اینکه بیشتر مدل‌های مکان‌یابی به‌سختی حل می‌شوند و حتی پایه‌ای‌ترین مدل‌های مرتبط به این مسائل دارای پیچیدگی محاسباتی بالایی هستند.

مکان‌یابی یکی از علوم مهندسی صنایع است که توجه به آن سبب کاهش هزینه‌ها و موفقیت واحدهای صنعتی می‌شود. مکان‌یابی تسهیلات و تأسیسات از کاربردی‌ترین زمینه‌های پژوهشی است که در بسیاری از شاخه‌های علوم گسترده شده است. ازجمله این شاخه‌ها تحقیق در عملیات، علوم مدیریت، مهندسی صنایع، جغرافیا و دیگر شاخه‌های مرتبط هستند.

امروزه مسائل مکان‌یابی کلاسیک به این صورت شناخته می‌شود که مجموعه‌ای از نقاط، مکان مشتریان هستند و هدف پیدا کردن بهترین مکان برای یک یا چندین سرویس‌دهنده است؛ به‌نحوی که با توجه به شرایط موجود به‌بهترین شکل به مشتریان سرویس دهی شود.

مسائل p - میانه از جمله مسائل پرکاربر و مهم مکان‌یابی هستند. در یک مسئله p - میانه، n نقطه v_i ، به‌ازاء $i = 1, 2, \dots, n$ داده شده است. هریک از این نقاط دارای وزن w_i هستند. در این نوع مسائل باید به‌دنبال پیدا کردن مجموعه‌ای شامل p نقطه (p - میانه) مانند $\Lambda = \{m_1, m_2, \dots, m_p\}$ بود؛ به‌نحوی که مجموع وزنی این نقاط تا کل n نقطه داده‌شده حداقل شود؛ به‌عبارت دیگر باید تابع هدف زیر حداقل شود.

$$\sum_{i=1}^n w_i \min_{1 \leq j \leq p} \{d(v_i, m_j)\} \quad (1)$$

$d(v_i, m_j)$ فاصله بین نقاط v_i و m_j است (فتحعلی^۴، ۲۰۰۶). از طرف دیگر در طول دهه‌های اخیر تلاش‌های زیادی برای ایجاد مدل‌های مکان‌یابی انجام شده است که مشخصه‌های بیشتری از دنیای واقعی را در نظر می‌گیرند. ازجمله مشخصه‌های پرکاربرد و مهمی که در نظریه‌های اخیر تحقیق در عملیات ظاهر شده است، مفاهیم "عدم قطعیت" و "مکان‌یابی معکوس" هستند.

در مسئله مکان‌یابی معکوس، برخلاف مسئله مکان‌یابی کلاسیک، سرویس‌دهنده‌ها از قبل مشخص (انتخاب شده) هستند. آنگاه باید به‌جای پیدا کردن مکان‌های بهینه برای این سرویس‌دهنده‌ها، این نقاط به‌وسیله تغییر در بعضی پارامترهای اساسی مسئله (مثل مسیرهای ترافیکی) با کمترین هزینه ممکن یا با استفاده از بودجه‌ای ثابت و مشخص بهبود یابند (باروقی و همکاران^۵، ۲۰۱۱). با توجه به اینکه هدف در این نوع مسائل بهینه‌شدن سرویس‌دهنده‌ها با کمترین هزینه ممکن و یا بهبود سرویس‌دهنده‌ها با استفاده از بودجه‌ای محدود است، این نوع مسائل را به‌ترتیب مسائل معکوس نوع حداقل هزینه^۶ و مسائل معکوس نوع محدودیت بودجه‌ای^۷ می‌نامند (بورکار و همکاران^۸، ۲۰۰۶).

از طرف دیگر، تئوری مکان‌یابی به‌طور سنتی علاقه‌مند به مسائلی است که وزن سرویس‌دهنده‌ها و در دسترس بودن آنها با قطعیت مشخص باشد؛ اما در واقعیت برآورد دقیق همه پارامترها امکان‌پذیر نیست؛ بنابراین مدل‌های مکان‌یابی با عدم قطعیت بررسی شده‌اند و برخی از حالت‌های آنها تعریف و مطالعه شده است (وانگ و همکاران^۹، ۲۰۰۹). در این مدل‌ها ممکن است سرویس‌دهنده‌ها شکست بخورند و مشتریان اختصاص داده‌شده به این سرویس‌دهنده‌ها مجبورند از سرویس‌دهنده‌های در حال کار سرویس بگیرند. این مسائل مبتنی بر این ویژگی را به‌اختصار مسائل مکان‌یابی پشتیبان می‌نامند (وانگ و همکاران، ۲۰۰۹).

مروری بر ادبیات

نظریه مکان‌یابی به‌شکلی که امروزه استفاده می‌شود با منتشر شدن کتاب آلفرد وبر^{۱۰} (۱۹۰۹) پدید آمد. وبر در این کتاب نتایج پژوهش‌های خود را درباره صنایع کارخانه‌ای ارائه کرد؛ اما مطالعات جدی روی مکان‌یابی از زمانی شروع شد که حکیمی^{۱۱} (۱۹۴۶)، تابع هدف را به دو صورت کمترین مجموع و حداقل - حداکثر مدل‌سازی کرد؛ در واقع حکیمی روابط p -میانه را ابداع کرد. همچنین نخستین طبقه‌بندی مدل‌های مختلف مکان‌یابی در مقالات هندلر^{۱۲} و میرچندانی^{۱۳} (۱۹۷۹) مشاهده می‌شود.

بورتن^{۱۴} و توینت^{۱۵} (۱۹۹۲)، با بررسی مسئله معکوس کوتاه‌ترین مسیر، نخستین کسانی بودند که در زمینه مسائل بهینه‌سازی معکوس روی شبکه‌ها پژوهش انجام دادند.

برمن و همکاران^{۱۶} (۲۰۰۰)، برای نخستین بار مسئله ۱- میانه معکوس نوع محدودیت بودجه‌ای را روی درخت مطالعه کردند و برای حل آن الگوریتمی خطی به دست آوردند. بورکارد و همکاران (۲۰۰۶)، ثابت کردند مسئله ۱- میانه معکوس نوع محدودیت بودجه‌ای با تغییرات طولی یال، روی گراف‌های عمومی، NP-سخت است. همچنین آنها برای دور گراف‌ها، الگوریتم خطی ارائه کردند. بورکارد و همکاران^{۱۷} (۲۰۰۸)، مسئله ۲- میانه معکوس نوع محدودیت بودجه‌ای روی درخت‌ها را بررسی کردند. آنها برای حل آن الگوریتمی از مرتبه $O(n \log n)$ ، ارائه دادند. وانگ و همکاران^{۱۸} (۲۰۱۰)، مسئله ۲- میانه معکوس نوع محدودیت بودجه‌ای روی دورها را به مسئله ۳- میانه معکوس نوع محدودیت بودجه‌ای روی یک مسیر تبدیل کردند و از این طریق نشان دادند این مسئله در زمان چندجمله‌ای حل می‌شود. همچنین جیانفنگ و همکاران^{۱۹} (۲۰۱۲)، مسئله ۱- میانه معکوس نوع محدودیت بودجه‌ای را با یک محدودیت اضافه روی درخت‌ها بررسی کردند و ثابت شد که این مدل به دو زیرمسئله معادل تقسیم‌پذیر است. این زیرمسئله‌ها به ترتیب با الگوریتم‌های حداقل برش^{۲۰} و حریصانه^{۲۱} حل می‌شوند.

در سال‌های اخیر نیز نگوین^{۲۲} (۲۰۱۶)، معکوس نوع محدودیت بودجه‌ای مسئله ۱- مرکز روی درخت‌های وزن‌دار را مطالعه کردند و برای آن الگوریتمی از مرتبه زمانی $O(n^2)$ ارائه کرد که تعداد رئوس درخت است.

از طرف دیگر، بورکارد و همکاران (۲۰۰۴)، مسئله ۱- میانه معکوس نوع حداقل هزینه را با تغییرات وزن مربوط به نقاط بررسی کردند. آنها ابتدا مسئله p - میانه معکوس گسسته را در فضای متریک (X, d) ، به صورت مدل ریاضی برنامه‌ریزی خطی مدل‌سازی کردند و سپس به این نتیجه دست یافتند که مسئله p - میانه معکوس گسسته (که در آن

مشتریان ممکن است دارای هر وزن حقیقی باشند و با این شرط که p ثابت است و پارامتر ورودی نیست) در زمان چندجمله‌ای حل شدنی است. آنها در ادامه مسئله ۱- میانه معکوس را روی درخت‌ها بررسی کردند.

گلوی^{۳۳} (۲۰۰۸)، مسئله ۱- میانه معکوس نوع حداقل هزینه را با تغییرات وزن رأسی روی درخت (که قبلاً بورکارد و همکارانش در مقاله بورکارد و همکاران^{۲۴} (۲۰۰۴) ارائه داده بودند) به صورت مدل کوله‌پشتی مدل‌سازی کرد و نشان داد که این مسئله در زمان خطی حل شدنی است. از طرف دیگر، باروقی و همکاران (۲۰۱۱) نشان دادند مسئله p - میانه معکوس نوع حداقل هزینه با تغییرات طول یالی روی شبکه‌های کلی مسئله‌ای NP-سخت است؛ بنابراین آنها شبکه‌های خاصی چون درخت‌ها و گراف‌های ستاره‌دار را در نظر گرفتند و الگوریتم‌هایی از مرتبه چندجمله‌ای برای حل آنها ارائه دادند.

باروقی و همکاران (۲۰۱۰)، مسئله ۱- میانه معکوس را با تغییر مختصات نقطه‌ای ارائه کردند. سپاسیان و رهبرنیا^{۲۵} (۲۰۱۵)، نیز مسئله ۱- میانه معکوس را با تغییرات هم‌زمان وزن رأسی و طول یالی روی درخت بررسی کردند و الگوریتمی برای آن ارائه کردند.

برای نخستین بار اشنایدر^{۲۶} و دسکین^{۲۷} (۲۰۰۵)، مدل قابلیت اطمینان را برای مسائل مکان‌یابی بررسی کردند. مسائل مکان‌یابی ۲- میانه و ۲- مرکز پشتیبان، نخستین بار به وسیله وانگ و همکاران (۲۰۰۹) بررسی شد. آنها به ترتیب الگوریتم‌هایی با زمان‌های $O(n)$ و $O(n \log n)$ را برای این دو مسئله ارائه کردند. چنگ و همکاران^{۲۸} (۲۰۱۴) نیز مسئله مکان‌یابی ۲- میانه پشتیبان را روی گراف‌های بلوکی در زمان $O(n \log n + m)$ حل کردند.

همچنین فتحعلی (۲۰۱۴)، مسئله مکان‌یابی چندوسیله‌ای پشتیبان در صفحه را بررسی کردند و الگوریتمی تکراری برای حل آن ارائه دادند. مدبر و همکاران (۱۳۹۵) نیز مسئله ۲- مرکز ناخوشایند پشتیبان روی درخت‌ها را بررسی و الگوریتم‌هایی چندجمله‌ای برای حل آن ارائه کردند.

در این پژوهش برای نخستین بار معکوس مسئله بهینه‌سازی ۲- میانه پشتیبان مطالعه شده است. در قسمت ۳ مقاله، تعاریف و نمادگذاری‌های لازم برای قسمت‌های بعدی مقاله آورده شده است. در قسمت ۴ مقاله، معکوس نوع محدودیت بودجه‌ای و معکوس نوع حداقل هزینه برای مسئله ۲- میانه پشتیبان در فضای گسسته (گراف‌ها و درخت‌ها) مطالعه می‌شود. در ادامه در قسمت ۵ مقاله، معکوس نوع محدودیت بودجه‌ای مسئله ۲- میانه پشتیبان در فضای پیوسته و با تغییر در مختصات نقاط، مدل‌سازی ریاضی می‌شود و با توجه به NP-سخت بودن مسئله مذکور، روش‌های فرا ابتکاری ازدحام ذرات (PSO) و الگوریتم بهبودیافته ازدحام ذرات (IPSO)، برای حل آن پیشنهاد شده است. در قسمت ۶ نتایج و پیشنهادات لازم برای کارهای آتی ذکر شده است. در انتها در پیوست حساسیت پارامترهای مختلف مسئله در حالت پیوسته ارائه و چند مثال در این حالت بررسی شده است.

تعریف مسئله و نمادگذاری

در این قسمت مفاهیم و نمادگذاری‌های لازم در مقاله بیان می‌شود. فرض کنید، $G = (V(G), E(G), w, l)$ ، گرافی ساده و بدون جهت است که $V(G)$ مجموعه رأس‌ها، $E(G)$ مجموعه یال‌ها، $w: V(G) \rightarrow \mathbb{R}^+$ تابع وزنی

رأس‌ها و $l: E(G) \rightarrow \mathbb{R}^+$ ، تابع طول یال‌های گراف G است. مجموع وزنی رأس‌های گراف G با نماد $w(G)$ ،

$$d_G(u, v) \cdot w(G) = \sum_{v \in V(G)} w(v) d_G(u, v) \text{ که به‌نحوی می‌شود؛}$$

فاصله بین دو رأس u و v در گراف G است و به‌صورت مجموع طولی کوتاه‌ترین مسیر بین دو رأس u و v ، تعریف می‌شود. اگر در گراف G ، $U \subseteq V(G)$ باشد، در این صورت زیرگراف G شامل U به‌صورت $G[U]$ نشان داده می‌شود. همچنین در درخت $T = (V, E)$ ، مسیری یکتا بین دو رأس u و v به‌صورت $P[u, v]$ نمایش داده می‌شود. برای هر زوج رأس (u, v) رابطه زیر قرار می‌گیرد.

$$\prod(u, v) = (U, V) \quad (۲)$$

به‌طوری‌که $U = \{x \mid d(x, u) \leq d(x, v)\}$ و $V = V(T) - U$ است؛ بنابراین با توجه به تعریف (۲)، در یک درخت هر یک از مجموعه‌های U و V ، زیرگراف همبند را تولید می‌کنند. این دو مجموعه با حذف یال $e \in E(T)$ به دست می‌آید که یال e ، یال مرکزی u و v و همان نقطه میانگین مسیر $P[u, v]$ است.

مسئله مکان‌یابی ۲- میانه پشتیبان: در مسئله مکان‌یابی ۲- میانه پشتیبان، هر سرویس‌دهنده ممکن است با احتمالی شکست بخورد. با این فرض که سرویس‌دهنده‌ها نمی‌توانند به‌طور هم‌زمان شکست بخورند، سرویس‌دهنده دیگر مسئولیت سرویس‌دهی را بر عهده می‌گیرد. فرض کنید، ρ_1 و ρ_2 احتمال شکست دو سرویس‌دهنده در مسئله ۲- میانه پشتیبان هستند. جواب مسئله با زوج رأس (m_1, m_2) نشان داده می‌شود؛ به‌نحوی‌که m_1 ، مکان سرویس‌دهنده با احتمال شکست ρ_1 و m_2 ، مکان سرویس‌دهنده با احتمال شکست ρ_2 هستند. در این مقاله فرض شده است احتمال شکست دو سرویس‌دهنده با هم برابر هستند؛ یعنی، $\rho_1 = \rho_2 = \rho$.

هدف مسئله ۲- میانه پشتیبان حداقل کردن مجموع فاصله از تمام نقاط به مجموعه سرویس‌دهنده‌های در حال کار است؛ در واقع هدف حداقل کردن تابع زیر است.

$$F(m_1, m_2) = (1 - \rho) \sum_{v_i \in V} w(v_i) d(v_i, \{m_1, m_2\}) + \rho \sum_{v_i \in V} w(v_i) d(v_i, m_1) + \rho \sum_{v_i \in V} w(v_i) d(v_i, m_2), \quad (۳)$$

تعریف ۱ (وانگ و همکاران، ۲۰۰۹). فرض کنید درخت T و احتمال شکست ρ داده شده‌اند. مسئله ۲- میانه پشتیبان روی درخت به دنبال پیدا کردن یک جفت رأس مانند (m_1, m_2) است؛ طوری‌که تابع هدف زیر حداقل شود.

$$C_\rho(m_1, m_2) = D(V_1, m_1) + \rho D(V_2, m_1) + D(V_2, m_2) + \rho D(V_2, m_2) \quad (۴)$$

طوری‌که $(V_1, V_2) = \prod(m_1, m_2)$ ، $m_1, m_2 \in V(T)$ و

$$D(V, u) = \sum_{v \in V(T)} w(v) d(u, v); V \subseteq V(T) \quad (۵)$$

اگر $e = (x, y)$ یال مرکزی m_1 و m_2 در درخت T باشد، در این صورت با حذف یال $e = (x, y)$ ، درخت T به دو زیردرخت T_x و T_y تقسیم می‌شود؛ طوری‌که x در T_x و y در T_y قرار دارد.

لم ۱ (وانگ و همکاران، ۲۰۰۹): اگر (m_1, m_2) ، ۲- میانه پشتیبان روی رأس‌های مختلف درخت T باشند، آنگاه m_1 و m_2 ، به ترتیب میانه‌های زیردرخت‌های $X(e)$ و $Y(e)$ هستند؛ به نحوی که $e = (x, y)$ یال مرکزی m_1 و m_2 است. در لم بالا $X(e)$ همان زیردرخت T_x است که وزن رأس x در آن $(w(x) + pw(T_y))$ در نظر گرفته شده است. به طور مشابه زیردرخت $Y(e)$ همان زیردرخت T_y است که وزن رأس y در آن $(w(y) + pw(T - T_y))$ در نظر گرفته شده است (وانگ و همکاران، ۲۰۰۹).

معکوس مسأله ۲- میانه پشتیبان در فضای گسسته گراف‌ها

در مسأله ۲- میانه پشتیبان، هدف حداقل کردن رابطه (۳) است. در حالت معکوس در فضای گسسته هدف این است که با تغییر پارامترهای اصلی مسئله، مانند وزن نقاط و طول یال‌ها و با کمترین هزینه ممکن، دو رأس دلخواه m_1 و m_2 ، تبدیل به ۲- میانه پشتیبان شوند. در این قسمت معکوس نوع حداقل هزینه و نوع محدودیت بودجه‌ای مسأله ۲- میانه پشتیبان در حالت گسسته با تغییر در وزن رئوس گراف و طول یال‌های گراف بررسی می‌شوند.

مسأله ۲- میانه پشتیبان معکوس نوع حداقل هزینه $(BI2MP)^{29}$ با روش تغییر در وزن رئوس گراف: در مسأله $BI2MP$ به روش تغییر در وزن رئوس، هدف این است که با تغییر در وزن رئوس یک گراف و با کمترین هزینه، دو رأس از پیش تعیین شده (m_1, m_2) بهینه شوند. فرض کنید n تعداد رئوس گراف G و c_i^+ هزینه متحمل شده از افزایش هر واحد وزن رأس v_i و c_i^- هزینه متحمل شده از کاهش هر واحد وزن رأس v_i باشند. همچنین p_i و q_i به ترتیب میزان افزایش و کاهش وزن رئوس v_i یعنی w_i هستند؛ بنابراین هزینه متحمل شده از تغییر وزن رئوس برابر با $\sum_{i=1}^n (c_i^+ p_i + c_i^- q_i)$ است. همچنین زوج رأس (m_1, m_2) باید بهینه شوند؛ بنابراین باید برای هر $u_j, u_k \in V(G)$ ، نامساوی $F(m_1, m_2) \leq F(u_j, u_k)$ برقرار باشد. $F(m_1, m_2)$ ، مقدار تابع هدف مسأله ۲- میانه پشتیبان است که در رابطه (۳) بیان شده است.

حال مسأله $BI2MP$ با روش تغییر در وزن رئوس گراف به صورت زیر مدل‌سازی می‌شود. این مدل یک مدل برنامه‌ریزی غیرخطی با تعداد محدودیت‌های از مرتبه $O(n^2)$ است. مسأله بهینه‌سازی بالا، روی گراف‌های کلی از نوع مسائل NP -سخت است؛ بنابراین این مسئله برای گراف‌های خاصی مانند درخت‌ها بررسی شده‌اند.

$$\min \sum_{i=1}^n (c_i^+ p_i + c_i^- q_i) \quad (6)$$

s.t.

$$(1 - \rho) \sum_{i=1}^n \hat{w}_i d(v_i, \{m_1, m_2\}) + \rho \sum_{i=1}^n \hat{w}_i d(v_i, m_1) + \rho \sum_{i=1}^n \hat{w}_i d(v_i, m_2) \leq (1 - \rho) \sum_{i=1}^n \hat{w}_i d(v_i, \{u_j, u_k\}) + \rho \left(\sum_{i=1}^n \hat{w}_i d(v_i, u_j) + \sum_{i=1}^n \hat{w}_i d(v_i, u_k) \right); \forall u_j, u_k \in V \quad (7)$$

$$\hat{w}_i = \hat{w}_i + p_i - q_i, i = 1, \dots, n. \quad (8)$$

$$p_i, q_i \geq 0, i = 1, \dots, n. \quad (9)$$

در مسئله BI2MP، دو رأس (m_1, m_2) جواب مسئله هستند؛ بنابراین باتوجه‌به لم ۱، m_1 و m_2 به‌ترتیب میانه‌های زیردرخت‌های $X(e)$ و $Y(e)$ هستند. طبق تعریف میانه‌بودن m_1 برای زیردرخت $X(e)$ ، رابطه زیر برقرار است.

$$\begin{aligned} & \sum_{v_i \in X(e) \setminus \{x\}} \hat{w}_i d(v_i, m_1) \\ & + (\hat{w}(x) + \rho \hat{w}(T_y)) d(x, m_1) \leq \\ & \sum_{v_i \in X(e) \setminus \{x\}} \hat{w}_i d(v_i, u_j) \\ & + (\hat{w}(x) + \rho \hat{w}(T_y)) d(x, u_j); \forall u_j \in V \end{aligned} \quad (10)$$

و به‌طور مشابه m_2 در زیردرخت $Y(e)$ ، میانه است؛ بنابراین رابطه زیر برقرار است.

$$\begin{aligned} & \sum_{v_i \in Y(e) \setminus \{y\}} \hat{w}_i d(v_i, m_2) \\ & + (\hat{w}(y) + \rho \hat{w}(T - T_y)) d(y, m_2) \leq \\ & \sum_{v_i \in Y(e) \setminus \{y\}} \hat{w}_i d(v_i, u_k) \\ & + (\hat{w}(y) + \rho \hat{w}(T - T_y)) d(y, u_k); \forall u_k \in V \end{aligned} \quad (11)$$

روابط (۱۰) و (۱۱) جایگزین رابطه (۷) می‌شوند. همچنین با جایگذاری محدودیت (۸) در روابط (۱۰) و (۱۱) و مقداری عملیات ریاضی، مسئله BI2MP با تغییر در وزن رئوس درخت به‌صورت زیر مدل‌سازی می‌شود.

$$\min \sum_{i=1}^n (c_i^+ p_i + c_i^- q_i) \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & s.t. \\ & \sum_{v_i \in X(e)} (\gamma_{ij} p_i) + \rho \gamma_{xj} \sum_{v_i \in T_y} p_i - \sum_{v_i \in X(e)} (\gamma_{ij} q_i) \\ & - \rho \gamma_{xj} \sum_{v_i \in T_y} q_i \leq - \left(\sum_{v_i \in X(e)} (\gamma_{ij} w_i) + \rho \gamma_{xj} w(T_y) \right) \quad \forall j \in n. \end{aligned} \quad (13)$$

$$\rho \gamma'_{yk} \sum_{v_i \in (T - T_y)} p_i + \sum_{v_i \in T_y} (\gamma'_{ik} p_i) - \rho \gamma'_{yk} \sum_{v_i \in (T - T_y)} q_i - \quad (14)$$

$$\sum_{v_i \in T_y} (\gamma'_{ik} q_i) \leq - \left(\sum_{v_i \in T_y} (\gamma'_{ik} w_i) + \rho \gamma'_{yk} w(T - T_y) \right) \quad \forall k \in n.$$

$$p_i, q_i \geq 0, i = 1, \dots, n. \quad (15)$$

در محدودیت‌های (۱۳) و (۱۴) همه ضرایب $\gamma'_{ik}, \gamma'_{jk}, \gamma_{ij}, \gamma_{xj}$ مقادیر ثابتی هستند و به‌صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\begin{cases} d(v_i, m_1) - d(v_i, u_j) = \gamma_{ij} \\ d(x, m_1) - d(x, u_j) = \gamma_{xj} \\ d(v_i, m_2) - d(v_i, u_k) = \gamma'_{ik} \\ d(y, m_2) - d(y, u_k) = \gamma'_{yk} \end{cases} \quad (16)$$

این مسئله به صورت زیر بازنویسی می شود.

$$\min \{C^t X \mid AX \leq b, X \geq 0\} \quad (17)$$

به نحوی که:

$$\begin{cases} C = (c_1^+, c_2^+, \dots, c_n^+, c_1^-, c_2^-, \dots, c_n^-), \\ X^t = (p_1, p_2, \dots, p_n, q_1, q_2, \dots, q_n), \\ A = [B \mid -B] \end{cases} \quad (18)$$

$$B = \begin{bmatrix} \left. \begin{matrix} \gamma_{i1} \\ \vdots \\ \gamma_{in} \end{matrix} \right\}_{\{i \mid V_i \in X(e)\}} & \left. \begin{matrix} \rho\gamma_{x1} \\ \vdots \\ \rho\gamma_{xn} \end{matrix} \right\}_{\{j \mid V_j \in \mathcal{E}(e)\}} \\ \left. \begin{matrix} \rho\gamma'_{y1} \\ \vdots \\ \rho\gamma'_{yn} \end{matrix} \right\} & \left. \begin{matrix} \gamma'_{j1} \\ \vdots \\ \gamma'_{jn} \end{matrix} \right\} \end{bmatrix} \quad (19)$$

مسئله BI2MP روی درخت از مسئله برنامه ریزی غیرخطی با تعداد محدودیت هایی از مرتبه $O(n^2)$ ، به مسئله برنامه ریزی خطی و حداکثر با $O(n) = 2n - 2$ محدودیت تبدیل شده است؛ بنابراین با روش های حل مسائل برنامه ریزی خطی حل شدنی است.

مسئله ۲- میانه پشتیبان معکوس نوع حداقل هزینه با روش تغییر در طول یال های گراف: فرض کنید c_i^+ هزینه متحمل شده از افزایش هر واحد طول یال $e_i = (v_i, v_{i+1})$ و c_i^- هزینه متحمل شده از کاهش هر واحد طول یال e_i باشند. $x_{e_i}^+$ و $x_{e_i}^-$ به ترتیب میزان افزایش و کاهش طول یال e_i هستند که l_{e_i} طول یال e_i است همچنین کوتاه ترین مسیر بین دو رأس (v_i, u_j) در گراف G است. در این مسئله هدف این است که با کمترین هزینه ممکن از تغییر طول یال های گراف (یعنی حداقل کردن) $\sum_{i=1}^n (c_i^+ x_{e_i}^+ + c_i^- x_{e_i}^-)$ دو رأس دلخواه m_1 و m_2 ، تبدیل به ۲-میانه پشتیبان شوند؛ بنابراین مسئله BI2MP با تغییر در طول یال به صورت زیر مدل می شود.

$$\min \sum_{i=1}^n (c_i^+ x_{e_i}^+ + c_i^- x_{e_i}^-) \quad (20)$$

s.t.

$$\begin{aligned} & (1-\rho) \sum_{i=1}^n \hat{w}_i d^l(v_i, \{m_1, m_2\}) + \rho \sum_{i=1}^n \hat{w}_i d^l(v_i, m_1) \\ & + \rho \sum_{i=1}^n \hat{w}_i d^l(v_i, m_2) \leq (1-\rho) \sum_{i=1}^n \hat{w}_i d^l(v_i, \{u_j, u_k\}) \\ & + \rho \left(\sum_{i=1}^n \hat{w}_i d^l(v_i, u_j) + \sum_{i=1}^n \hat{w}_i d^l(v_i, u_k) \right); \forall u_j, u_k \in \mathcal{V} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\hat{l}_i = l_i + x_{e_i}^+ - x_{e_i}^-, \forall e_i \in E \quad (22)$$

$$0 \leq x_{e_i}^+ \leq u_{e_i}^+, \forall e_i \in E \quad (23)$$

$$0 \leq x_{e_i}^- \leq u_{e_i}^-, \forall e_i \in E \quad (24)$$

مدل بالا مدلی غیرخطی با تعداد محدودیت‌های $O(n^2)$ است. مسئله بالا برای یک گراف کلی از نوع مسئله NP-سخت است؛ ولی اگر گراف مدنظر درخت در نظر گرفته شود، مدل بالا به صورت مدل برنامه‌ریزی خطی بیان می‌شود.

فرض کنید $T = (V, E)$ ، درختی است که $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ ، همچنین m_1 و m_2 دو رأسی باشند که هدف بهینه‌کردن آنها است. از آنجایی که در معکوس مسئله ۲- میانه پشتیبان حاضر، m_1 و m_2 جواب‌های مسئله از قبل مشخص هستند، باتوجه به لم ۱ می‌توان گفت، m_1 و m_2 به ترتیب میانه‌های زیردرخت‌های $X(e)$ و $Y(e)$ هستند؛ بنابراین باتوجه به شرط میانه‌بودن m_1 برای زیردرخت $X(e)$ رابطه زیر برقرار است.

$$\sum_{v_i \in X(e) \setminus \{x\}} w_i d^i(v_i, m_1) + (w(x) + \rho w(T_y)) d^i(x, m_1) \leq \sum_{v_i \in X(e) \setminus \{x\}} w_i d^i(v_i, u_j) + (w(x) + \rho w(T_y)) d^i(x, u_j); \forall u_j \in V \quad (25)$$

از طرفی رابطه ۲۶ به صورت زیر است.

$$\begin{cases} d^i(v_i, m_1) = d^l(v_i, m_1) + \sum_{e \in P(v_i, m_1)} (x_e^+ - x_e^-) \\ d^i(v_i, u_j) = d^l(v_i, u_j) + \sum_{e \in P(v_i, u_j)} (x_e^+ - x_e^-) \end{cases} \quad (26)$$

با قراردادن روابط (۲۶) در شرط (۲۵)، رابطه زیر برقرار می‌شود.

$$\sum_{v_i \in X(e)} w_i \left(\sum_{e_i \in P[v_i, m_1]} (x_{e_i}^+ - x_{e_i}^-) - \sum_{e_i \in P[v_i, u_j]} (x_{e_i}^+ - x_{e_i}^-) \right) + \rho w(T_y) \sum_{e_i \in P[x, m_1]} (x_{e_i}^+ - x_{e_i}^-) - \rho w(T_y) \sum_{e_i \in P[x, u_j]} (x_{e_i}^+ - x_{e_i}^-) \leq - \left(\sum_{v_i \in X(e)} w_i \gamma_{ij} + \rho w(T_y) \gamma_{xj} \right); \forall u_j \in V \quad (27)$$

و به طور مشابه برای شرط میانه‌بودن m_2 در زیردرخت $Y(e)$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\sum_{v_i \in Y(e)} w_i \left(\sum_{e_i \in P[v_i, m_2]} (x_{e_i}^+ - x_{e_i}^-) - \sum_{e_i \in P[v_i, u_k]} (x_{e_i}^+ - x_{e_i}^-) \right) + \rho w(T - T_y) \sum_{e_i \in P[y, m_2]} (x_{e_i}^+ - x_{e_i}^-) - \rho w(T_y) \sum_{e_i \in P[y, u_k]} (x_{e_i}^+ - x_{e_i}^-) \leq - \left(\sum_{v_i \in Y(e)} w_i \gamma'_{ik} + \rho w(T - T_y) \gamma'_{yk} \right); \forall u_k \in V \quad (28)$$

به نحوی که:

$$\begin{cases} d^l(v_i, m_\gamma) - d^l(v_i, u_j) = \gamma_{ij} \\ d^l(x, m_\gamma) - d^l(x, u_j) = \gamma_{xj} \\ d^l(v_i, m_\gamma) - d^l(v_i, u_k) = \gamma'_{ik} \\ d^l(y, m_\gamma) - d^l(y, u_k) = \gamma'_{yk} \end{cases} \quad (29)$$

با قراردادن شروط (۲۷) و (۲۸) به جای محدودیت (۲۱)، مسئله BI2MP با روش تغییر طول یالی به صورت زیر مدل سازی می شود. این مدل یک مسئله بهینه سازی خطی روی یک مسیر و با حداکثر $O(n) = 2n$ محدودیت است. $u_{e_i}^-$ و $u_{e_i}^+$ نیز حداکثر میزان افزایش یا کاهش در طول یال هستند.

$$\begin{aligned} \min \sum_{i=1}^n (c_i^+ x_{e_i}^+ + c_i^- x_{e_i}^-) \\ s.t. \\ \sum_{v_i \in X(e)} w_i \left(\sum_{e_i \in P[v_i, m_\gamma]} (x_{e_i}^+ - x_{e_i}^-) - \sum_{e_i \in P[v_i, u_j]} (x_{e_i}^+ - x_{e_i}^-) \right) + \\ \rho w(T_y) \sum_{e_i \in P[x, m_\gamma]} (x_{e_i}^+ - x_{e_i}^-) \\ - \rho w(T_y) \sum_{e_i \in P[x, u_j]} (x_{e_i}^+ - x_{e_i}^-) \\ \leq - \left(\sum_{v_i \in X(e)} w_i \gamma_{ij} + \rho w(T_y) \gamma_{xj} \right); \forall u_j \in V \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \sum_{v_i \in Y(e)} w_i \left(\sum_{e_i \in P[v_i, m_\gamma]} (x_{e_i}^+ - x_{e_i}^-) - \sum_{e_i \in P[v_i, u_k]} (x_{e_i}^+ - x_{e_i}^-) \right) + \\ \rho w(T - T_y) \sum_{e_i \in P[y, m_\gamma]} (x_{e_i}^+ - x_{e_i}^-) - \\ \rho w(T_y) \sum_{e_i \in P[y, u_k]} (x_{e_i}^+ - x_{e_i}^-) \leq \\ - \left(\sum_{v_i \in Y(e)} w_i \gamma'_{ik} + \rho w(T - T_y) \gamma'_{yk} \right); \forall u_k \in V \end{aligned} \quad (31)$$

$$\bullet \leq x_{e_i}^+ \leq u_{e_i}^+, \forall e_i \in E(T) \quad (32)$$

$$\bullet \leq x_{e_i}^+ \leq u_{e_i}^+, \forall e_i \in E(T) \quad (33)$$

مسئله ۲- میانه پشتیبان معکوس نوع محدودیت بودجه‌ای (BR2MP) با تغییر در وزن رئوس گراف: فرض کنید $B > 0$ ، بودجه مدنظر برای تغییر پارامتر مسئله یعنی وزن رئوس (w_v) باشد. همچنین فرض کنید m_1 و m_2 ، دو رأسی هستند با این هدف که در یک مسئله پشتیبان تبدیل به ۲- میانه شوند. هدف مسئله معکوس از نوع محدودیت بودجه‌ای این است که با بودجه $B > 0$ ، دو رأس دلخواه m_1 و m_2 را تا حد ممکن به بهینه‌شدن نزدیک کند. اگر فاصله بین رأس v و رأس m_1 با $d_1^l(v)$ و فاصله آن با رأس m_2 با $d_2^l(v)$ نمایش داده شوند و p_v و q_v به ترتیب میزان افزایش و کاهش وزن رأس v یعنی w_v باشند و هزینه متحمل شده از افزایش و کاهش وزن رأس v به ترتیب با c_v^+ و c_v^- نمایش داده شود، در این صورت مدل کلی مسئله BR2MP با تغییر در وزن رئوس به صورت زیر است.

$$\min(1-\rho) \sum_{v \in V(G)} \min_{i=1,2} \{ \hat{w}_v d_i^l(v) \} + \quad (35)$$

$$\rho \left(\sum_{v \in V(G)} \hat{w}_v (d_1^l(v) + d_2^l(v)) \right)$$

s.t.

$$\hat{w}_v = w_v + p_v - q_v, \quad \forall v \in V(G) \quad (36)$$

$$\sum_{v \in V(G)} f_v(p_v, q_v) \leq B \quad (37)$$

$$p_v, q_v \geq 0, \quad \forall v \in V(G). \quad (38)$$

تابع هدف (۳۵) همان تابع هدف (۳) برای مسئله ۲- میانه پشتیبان است که قرار است با تغییر در وزن رئوس یعنی تغییر w_v به \hat{w}_v ، تا حد امکان بهینه شود. از طرف دیگر نیز تغییر وزن رئوس گراف تنها به اندازه بودجه B مجاز است؛ بنابراین رابطه زیر برقرار است.

$$f_v(p_v, q_v) = c_v^+ p_v + c_v^- q_v = C \cdot (p_v, q_v) \quad (39)$$

در این رابطه، C برداری مثبت است. بدون اینکه کلیت مسئله تغییر کند، فرض می‌شود $C = 1$ است؛ بنابراین محدودیت (۳۷) به صورت زیر بازنویسی می‌شود و می‌توان به جای B ، با \tilde{B} کار کرد.

$$\sum_{v \in V(G)} p_v + q_v = \frac{B}{C} = \tilde{B} \quad (40)$$

از آنجایی که m_1 و m_2 مقادیری مشخص هستند، مقادیر $d_1^l(v)$ و $d_2^l(v)$ نیز برای هر $v \in V(G)$ ثابت هستند. به وضوح مشخص است که تابع هدف (۳۵) و محدودیت‌های (۳۶) تا (۳۸) خطی هستند؛ بنابراین مدل این مسئله به صورت مسئله برنامه‌ریزی خطی است.

مسئله ۲- میانه پشتیبان معکوس نوع محدودیت بودجه‌ای (BR2MP) با تغییر در طول یال گراف: فرض کنید $B > 0$ ، بودجه مدنظر برای تغییر پارامتر مسئله یعنی وزن رئوس (w_v) باشد، همچنین فرض کنید m_1 و m_2 ، دو رأسی هستند که قرار است در مسئله پشتیبان به ۲- میانه تبدیل شوند. فاصله بین رأس v و رأس m_1 با $d_1^l(v)$ و

فاصله آن با رأس m_2 با $d_2^l(v)$ نمایش داده می‌شود. در این صورت مدل کلی مسئله BR2MP با تغییر در طول به صورت زیر است.

$$\min(1-\rho) \sum_{v \in V(G)} \min_{t=1,2} \{w_v d_t^l(v)\} + \rho \left(\sum_{v \in V(G)} w_v (d_1^l(v) + d_2^l(v)) \right) \quad (41)$$

$$s.t. \quad (42)$$

$$\hat{l}_e = l_e + x_e \quad \forall e \in E(G),$$

$$\sum_{v \in V(G)} f_e(x_e) \leq B, \quad (43)$$

$$0 \leq x_e \leq u_e \quad \forall e \in E(G). \quad (44)$$

در روابط بالا x_e میزان تغییرات طول یالی است و u_e نیز حداکثر تغییرات طول یالی را بیان می‌کند. همچنین l_e بیانگر طول یال، $e = (v_i, v_{i+1})$ را نمایش می‌دهد. $\sum_{v \in V(G)} f_e(x_e)$ نیز تابع هزینه ناشی از تغییرات طول یال است که به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$\sum_{v \in V(G)} f_e(x_e) = \sum_{v \in V(G)} c_v x_e \quad (45)$$

معکوس مسئله ۲- میانه پشتیبان^{۳۰} در فضای پیوسته با تغییر در مختصات نقاط

در این قسمت معکوس نوع محدودیت بودجه‌ای مسئله ۲- میانه پشتیبان^{۳۱} (BR2MP) به روش تغییر در مختصات نقاط بررسی می‌شود

هدف این است که با تغییر در مختصات نقاط $X_i = (x_{i1}, \dots, x_{ik})$ ، دو نقطه دلخواه (از پیش تعیین شده) m_1 و m_2 با استفاده از بودجه محدود، تا حد امکان به حالت بهینه نزدیک شوند. فرض کنید تغییر هر واحد مختصات نقاط X_i ، هزینه $C_i = (C_{i1}, \dots, C_{ik})$ را دارد؛ به نحوی که هزینه متحمل شده از تغییر مختص t -ام نقطه X_i ، است. به طور مشابه بردارهای $P_i^+ = (p_{i1}^+, \dots, p_{ik}^+)$ و $P_i^- = (p_{i1}^-, \dots, p_{ik}^-)$ به ترتیب میزان افزایش و کاهش مختصات نقاط X_i را نشان می‌دهند.

اکنون مسئله BR2MP همراه با تغییر در مختصات نقاط به صورت زیر مدل‌سازی می‌شود.

$$\Omega_1 : \min(1-\rho) + \sum_{i=1}^n \left(w_i \min_{t=1,2} \{d(\hat{X}_i, m_t)\} \right) + \rho \sum_{i=1}^n \left(w_i d(\hat{X}_i, m_1) + d(\hat{X}_i, m_2) \right) \quad (46)$$

s.t

$$X_i = X_i + P_i^+ - P_i^-, i = 1, \dots, n \quad (47)$$

$$\sum_{i=1}^n f_d(P_i^+, P_i^-) \leq B, \quad (48)$$

$$P_i^+, P_i^- \geq 0, i = 1, \dots, n \quad (49)$$

که $f_d(P_i^+, P_i^-)$ تابع هزینه ناشی از تغییر مختصات نقاط است و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$f_d(P_i^+, P_i^-) = C_i^+ \cdot P_i^+ + C_i^- \cdot P_i^- \quad (50)$$

مدل برنامه‌ریزی بالا با تابع هدف (۴۶) و محدودیت‌های (۴۷) تا (۴۹)، مسئله بهینه‌سازی غیرخطی و به دلیل وجود عبارت $\min_{i=1,2} \{d(X_i, m_i)\}$ در تابع هدف، نامحدب است.

مسئله ۲- میانه پشتیبان معکوس نوع محدودیت بودجه‌ای در صفحه با نرم l_p : برای نقاط (m_1, m_2) رابطه زیر تعریف می‌شود.

$$\prod(m_1, m_2) = (I_1, I_2) \quad (51)$$

به نحوی که:

$$I_1 = \{i \mid d(X_i, m_1) \leq d(X_i, m_2)\} \quad (52)$$

و

$$I_2 = 1, 2, \dots, n \setminus I_1 \quad (53)$$

اگر $\zeta_i = (\zeta_{i1}, \zeta_{i2})$ ، میزان تغییرات مختصات نقاط $X_i = (x_{i1}, x_{i2})$ باشد، در این صورت با توجه به مجموعه‌های I_1 و I_2 ، مدل مسئله Ω_1 در صفحه به صورت زیر بازنویسی می‌شود.

$$\Omega_1 : \quad (54)$$

$$\min f(\zeta_{11}, \dots, \zeta_{n1}, \zeta_{12}, \dots, \zeta_{n2}) =$$

$$(1-\rho) \sum_{i \in I_1} w_i \left(|x_i + \zeta_{i1} - a_1|^p + |y_i + \zeta_{i2} - b_1|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+ (1-\rho) \sum_{i \in I_2} w_i \left(|x_i + \zeta_{i1} - a_2|^p + |y_i + \zeta_{i2} - b_2|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+ \rho \sum_{i \in I_1 \cup I_2} w_i \left(|x_i + \zeta_{i1} - a_1|^p + |y_i + \zeta_{i2} - b_1|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+ \rho \sum_{i \in I_1 \cup I_2} w_i \left(|x_i + \zeta_{i1} - a_2|^p + |y_i + \zeta_{i2} - b_2|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

s.t.

$$\sum_{i=1}^n (\zeta_{i1} + \zeta_{i2}) \leq \beta, \quad (55)$$

$$\zeta_{i1}, \zeta_{i2} \in \mathbb{R}^+; \forall i=1, \dots, n. \quad (56)$$

حال دو لم زیر برای مدل فوق بیان می‌شود.

لم ۲: تابع هدف مسئله Ω_2 ، محدب است. اثبات: قرار داده می‌شود:

$$(\zeta_{i1}, a_1 - x_i, \zeta_{i2}, b_1 - y_i) = (s_1, s_2, s_3, s_4) = S$$

فرض کنید $f(S) = \left(|s_1 - s_2|^p + |s_3 - s_4|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ و $0 < \lambda < 1$ باشد. در این صورت رابطه زیر برقرار است.

$$\begin{aligned}
 f(\lambda S' + (1-\lambda)S'') &= \\
 &= \left[\begin{aligned} &|(\lambda s'_1 + (1-\lambda)s''_1) - (\lambda s'_r + (1-\lambda)s''_r)|^p \\ &+ |(\lambda s'_r + (1-\lambda)s''_r) - (\lambda s'_1 + (1-\lambda)s''_1)|^p \end{aligned} \right]^{\frac{1}{p}} \\
 &= \left[\begin{aligned} &|\lambda(s'_1 - s'_r) + (1-\lambda)(s''_1 - s''_r)|^p \\ &+ |\lambda(s'_r - s'_1) + (1-\lambda)(s''_r - s''_1)|^p \end{aligned} \right]^{\frac{1}{p}} \\
 &\leq \left[|\lambda(s'_1 - s'_r)|^p + |\lambda(s'_r - s'_1)|^p \right]^{\frac{1}{p}} \\
 &\quad + \left[|(1-\lambda)(s''_1 - s''_r)|^p + |(1-\lambda)(s''_r - s''_1)|^p \right]^{\frac{1}{p}} \\
 &= \lambda \left(|s'_1 - s'_r|^p + |s'_r - s'_1|^p \right)^{\frac{1}{p}} + (1-\lambda) \left(|s''_1 - s''_r|^p + |s''_r - s''_1|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &= \lambda f(S') + (1-\lambda)f(S'')
 \end{aligned}$$

تابع $f(S) = \left(|x_i + \zeta_{i1} - a_i|^p + |y_i + \zeta_{i2} - b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ محذب است؛ بنابراین باتوجه به مثبت بودن ضرایب w_i و p و باتوجه به اینکه جمع تعداد شمارا تابع محذب، محذب است، نتیجه می شود که عبارت $(1-\rho) \sum_{i \in I_1} w_i \left(|x_i + \zeta_{i1} - a_i|^p + |y_i + \zeta_{i2} - b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ محذب است. به طور مشابه ثابت می شود که قسمت های دیگر تابع هدف نیز محذب هستند؛ بنابراین باتوجه به اینکه جمع چند تابع محذب، محذب است، نتیجه می شود تابع هدف مسئله Ω_2 نیز محذب است.

لم ۳: مشتقات تابع هدف مسئله Ω_2 در بعضی از نقاط، تعریف نشده است. اثبات: مشتقات تابع هدف در نقاطی که مخرج آنها صفر می شود، تعریف نشده هستند. باتوجه به لم ۳، برای آنکه نقاط ناپیوستگی مشتقات جزئی تابع هدف مسئله Ω_2 از بین برود، مقدار ε که عددی کوچک و مثبت است به رابطه (۵۴) اضافه می شود تا مشتقات جزئی آن همواره پیوسته باشد؛ بنابراین تقریبی از تابع هدف مسئله Ω_2 به صورت زیر به دست می آید.

$$\begin{aligned}
 \Omega_2 : (BR2MPH) \\
 \min f_h(\zeta_{11}, \dots, \zeta_{n1}, \zeta_{12}, \dots, \zeta_{n2}) = \\
 (1-\rho) \sum_{i \in I_1} w_i \left(\left((x_i + \zeta_{i1} - a_i)^\varepsilon + \varepsilon \right)^{\frac{p}{\varepsilon}} + \left((y_i + \zeta_{i2} - b_i)^\varepsilon + \varepsilon \right)^{\frac{p}{\varepsilon}} \right)^{\frac{1}{p}} \\
 + (1-\rho) \sum_{i \in I_2} w_i \left(\left((x_i + \zeta_{i1} - a_i)^\varepsilon + \varepsilon \right)^{\frac{p}{\varepsilon}} + \left((y_i + \zeta_{i2} - b_i)^\varepsilon + \varepsilon \right)^{\frac{p}{\varepsilon}} \right)^{\frac{1}{p}} \\
 + \rho \sum_{i \in I_1 \cup I_2} w_i \left(\left((x_i + \zeta_{i1} - a_i)^\varepsilon + \varepsilon \right)^{\frac{p}{\varepsilon}} + \left((y_i + \zeta_{i2} - b_i)^\varepsilon + \varepsilon \right)^{\frac{p}{\varepsilon}} \right)^{\frac{1}{p}} \\
 + \rho \sum_{i \in I_1 \cup I_2} w_i \left(\left((x_i + \zeta_{i1} - a_i)^\varepsilon + \varepsilon \right)^{\frac{p}{\varepsilon}} + \left((y_i + \zeta_{i2} - b_i)^\varepsilon + \varepsilon \right)^{\frac{p}{\varepsilon}} \right)^{\frac{1}{p}}
 \end{aligned} \tag{57}$$

وقتی $\varepsilon \rightarrow 0$ ، مقدار تابع هدف مسئله Ω_3 (BR2MPH) با مقدار تابع هدف مسئله Ω_2 (BR2MP) برابر می شود. این موضوع در لم ۴ مشاهده می شود.

لم ۴: با رفتن $\varepsilon \rightarrow 0$ ، خطای حاصل از اضافه کردن مقدار ε به تابع هدف مسئله Ω_3 برابر صفر است.

اثبات: قرار داده می‌شود $s_i = (x_i + \zeta_{i1} - a_1)$ ، اگر $s_i = (y_i + \zeta_{i2} - b_1)$ و $s_r = \frac{1}{\epsilon}$ باشد، رابطه زیر برقرار است.

$$\begin{aligned} & \left(\left((x_i + \zeta_{i1} - a_1)^r + \frac{1}{\epsilon} \right)^{\frac{p}{r}} + \left((y_i + \zeta_{i2} - b_1)^r + \frac{1}{\epsilon} \right)^{\frac{p}{r}} \right)^{\frac{1}{p}} \quad (58) \\ & = \left((s_i^r + s_r^r)^{\frac{p}{r}} + (s_r^r + s_r^r)^{\frac{p}{r}} \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq \left(\left((s_i + s_r)^r \right)^{\frac{p}{r}} + \left((s_r + s_r)^r \right)^{\frac{p}{r}} \right)^{\frac{1}{p}} \\ & = \left((s_i + s_r)^p + (s_r + s_r)^p \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

همچنین با استفاده از نامساوی مینکوفسکی، رابطه زیر برقرار می‌شود.

$$\begin{aligned} & \left((s_i + s_r)^p + (s_r + s_r)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq (s_i^p + s_r^p)^{\frac{1}{p}} + (s_r^p + s_r^p)^{\frac{1}{p}} \quad (59) \\ & = (s_i^p + s_r^p)^{\frac{1}{p}} + 2^{\frac{1}{p}} \frac{1}{\epsilon} \\ & = \left((x_i + \zeta_{i1} - a_1)^p + (y_i + \zeta_{i2} - b_1)^p \right)^{\frac{1}{p}} + 2^{\frac{1}{p}} \frac{1}{\epsilon} \end{aligned}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} & \left(\left((x_i + \zeta_{i1} - a_1)^r + \frac{1}{\epsilon} \right)^{\frac{p}{r}} + \left((y_i + \zeta_{i2} - b_1)^r + \frac{1}{\epsilon} \right)^{\frac{p}{r}} \right)^{\frac{1}{p}} \quad (60) \\ & - \left((x_i + \zeta_{i1} - a_1)^p + (y_i + \zeta_{i2} - b_1)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq 2^{\frac{1}{p}} \frac{1}{\epsilon} \\ & \Rightarrow \sum_{i \in I_1} w_i \left(\left(\left((x_i + \zeta_{i1} - a_1)^r + \frac{1}{\epsilon} \right)^{\frac{p}{r}} + \left((y_i + \zeta_{i2} - b_1)^r + \frac{1}{\epsilon} \right)^{\frac{p}{r}} \right)^{\frac{1}{p}} \right. \\ & \quad \left. - \left((x_i + \zeta_{i1} - a_1)^p + (y_i + \zeta_{i2} - b_1)^p \right)^{\frac{1}{p}} \right) \\ & \leq 2^{\frac{1}{p}} \frac{1}{\epsilon} \sum_{i \in I_1} w_i \end{aligned}$$

به‌طور مشابه این اثبات برای قسمت‌های دیگر تابع هدف (۵۷) نیز بیان می‌شود؛ بنابراین رابطه زیر برقرار است.

$$\begin{aligned} f_h - f & \leq (1 - \rho) 2^{\frac{1}{p}} \frac{1}{\epsilon} \sum_{i \in I_1} w_i + (1 - \rho) 2^{\frac{1}{p}} \frac{1}{\epsilon} \sum_{i \in I_2} w_i \quad (61) \\ & + 2^{\frac{1}{p}} \frac{1}{\epsilon} \rho \sum_{i \in I_1 \cup I_2} w_i + 2^{\frac{1}{p}} \frac{1}{\epsilon} \rho \sum_{i \in I_1 \cup I_2} w_i \\ & = (1 + \rho) 2^{\frac{1}{p}} \frac{1}{\epsilon} \left(\sum_{i \in I_1} w_i + \sum_{i \in I_2} w_i \right) = (1 + \rho) 2^{\frac{1}{p}} \frac{1}{\epsilon} \sum_{i \in I_1 \cup I_2} w_i \end{aligned}$$

در رابطه (۶۱) وقتی $\epsilon \rightarrow 0$ ، خطا صفر می‌شود.

در حالت خاصی که بودجه مدنظر به اندازه‌ای بزرگ باشد تا بتوان به اندازه دلخواه نقاط را به سرویس‌دهنده‌ها نزدیک کرد (یعنی، $B \rightarrow \infty$)، می‌توان با استفاده از شرط لازم بهینگی و لم ۲ برای بهینه‌شدن مسئله Ω_3 ، الگوریتمی بازگشتی ارائه کرد؛ بنابراین رابطه زیر برقرار است.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_h}{\partial \zeta_{i1}} & = \frac{w_i(x_i + \zeta_{i1} - a_1)}{Dx.Sx_{a_1}} \Big|_{i \in I_1} + \rho \frac{w_i(x_i + \zeta_{i1} - a_1)}{Dx.Sx_{a_1}} \Big|_{i \in I_2} \quad (62) \\ & + \frac{w_i(x_i + \zeta_{i1} - a_2)}{D'x.Sx_{a_2}} \Big|_{i \in I_2} + \rho \frac{w_i(x_i + \zeta_{i1} - a_2)}{D'x.Sx_{a_2}} \Big|_{i \in I_1} \end{aligned}$$

و به‌طور مشابه:

$$\frac{\partial f_h}{\partial \zeta_{i2}} = \frac{w_i(y_i + \zeta_{i2} - b_1)}{Dx.Sy_{b_1}} \Big|_{i \in I_1} + \rho \frac{w_i(y_i + \zeta_{i2} - b_1)}{Dx.Sy_{b_1}} \Big|_{i \in I_2} + \frac{w_i(y_i + \zeta_{i2} - b_2)}{D'x.Sy_{b_2}} \Big|_{i \in I_2} + \rho \frac{w_i(y_i + \zeta_{i2} - b_2)}{D'x.Sy_{b_2}} \Big|_{i \in I_1} \quad (63)$$

از مساوی با صفر قراردادن روابط (۵۵) و (۵۶) نتیجه زیر حاصل می‌شود.

$$\psi_{i_1}^{k+1} = \begin{cases} \frac{\frac{w_i \alpha_{i_1}}{Dx^k Sx_{a_1}^k} + \frac{\rho w_i \alpha_{i_\gamma}}{D'x^k Sx_{a_\gamma}^k}}{\frac{w_i}{Dx^k Sx_{a_1}^k} + \frac{\rho w_i}{D'x^k Sx_{a_\gamma}^k}} & i \in I_1 \\ \frac{\frac{\rho w_i \alpha_{i_1}}{Dx^k Sx_{a_1}^k} + \frac{w_i \alpha_{i_\gamma}}{D'x^k Sx_{a_\gamma}^k}}{\frac{\rho w_i}{Dx^k Sx_{a_1}^k} + \frac{w_i}{D'x^k Sx_{a_\gamma}^k}} & i \in I_\gamma \end{cases} \quad (64)$$

و

$$\psi_{i_\gamma}^{k+1} = \begin{cases} \frac{\frac{w_i \alpha'_{i_1}}{Dx^k Sy_{b_1}^k} + \frac{\rho w_i \alpha'_{i_\gamma}}{D'x^k Sx_{b_\gamma}^k}}{\frac{w_i}{Dx^k Sy_{b_1}^k} + \frac{\rho w_i}{D'x^k Sx_{b_\gamma}^k}} & i \in I_1 \\ \frac{\frac{\rho w_i \alpha'_{i_1}}{Dx^k Sy_{b_1}^k} + \frac{w_i \alpha'_{i_\gamma}}{D'x^k Sx_{b_\gamma}^k}}{\frac{\rho w_i}{Dx^k Sy_{b_1}^k} + \frac{w_i}{D'x^k Sx_{b_\gamma}^k}} & i \in I_\gamma \end{cases} \quad (65)$$

که:

$$\begin{cases} \alpha_{i_1} = a_1 - x_i \\ \alpha_{i_\gamma} = a_\gamma - x_i \\ \alpha'_{i_1} = b_1 - y_i \\ \alpha'_{i_\gamma} = b_\gamma - y_i \end{cases} \quad (66)$$

و

$$Dx = \left(\left((x_i + \zeta_{i1} - a_1)^2 + \varepsilon \right)^{\frac{p}{2}} + \left((y_i + \zeta_{i2} - b_1)^2 + \varepsilon \right)^{\frac{p}{2}} \right)^{\frac{p-1}{p}}, \quad (67)$$

$$D'x = \left(\left((x_i + \zeta_{i1} - a_2)^2 + \varepsilon \right)^{\frac{p}{2}} + \left((y_i + \zeta_{i2} - b_2)^2 + \varepsilon \right)^{\frac{p}{2}} \right)^{\frac{p-1}{p}}$$

$$Sx_{a_1} = \left(\left((x_i + \zeta_{i1} - a_1)^2 + \varepsilon \right)^{\frac{p}{2}} \right)^{\frac{2-p}{p}},$$

$$Sx_{a_2} = \left(\left((x_i + \zeta_{i1} - a_2)^2 + \varepsilon \right)^{\frac{p}{2}} \right)^{\frac{2-p}{p}},$$

$$Sy_{b_1} = \left(\left((y_i + \zeta_{i2} - b_1)^2 + \varepsilon \right)^{\frac{p}{2}} \right)^{\frac{2-p}{p}},$$

$$Sy_{b_2} = \left(\left((y_i + \zeta_{i2} - b_2)^2 + \varepsilon \right)^{\frac{p}{2}} \right)^{\frac{2-p}{p}}.$$

بنابراین وقتی بودجه مدنظر به اندازه کافی بزرگ باشد، از روابط بازگشتی (۶۴) و (۶۵) استفاده می‌شود. در اینجا وقتی بودجه مدنظر محدود باشد مسئله Ω_3 با الگوریتم‌های فرا ابتکاری حل و نتایج با هم مقایسه می‌شوند.

الگوریتم‌های فرا ابتکاری: الگوریتم‌های بهینه‌سازی، مقادیر متغیرهای طراحی را به گونه‌ای تغییر می‌دهند تا تابع هدف مدنظر حداقل یا حداکثر شود. به‌طور کلی روش‌های بهینه‌سازی به دو گروه روش‌های گرادیانی و روش‌های جستجو تقسیم می‌شود. روش‌های جستجو برای مسائل حجیم و در مواردی که مشتق گرفتن از تابع هدف دشوار است کارایی زیادی دارند. هرچند نمی‌توان به‌صراحت درباره برتری روش‌های تکاملی فوق نسبت به یکدیگر نظر داد و این امر طبق نظریه NFLT^{۳۲} (هو و همکاران^{۳۳}، ۲۰۰۲)، از مسئله‌ای به مسئله دیگر متفاوت است، روش‌های الگوریتم ژنتیک^{۳۴} (GA) و PSO، توانا تر و پرکاربردتر از بقیه بوده‌اند. در این پژوهش که مسئله‌ای NP-سخت (مگیدو و همکاران^{۳۵}، ۱۹۸۴) و به‌شدت غیرخطی همراه با قیود فراوان است، از روش PSO و IPSO استفاده می‌شود.

الگوریتم‌های فرا ابتکاری PSO و IPSO: از جمله روش‌های تکاملی و مدرن است که در سال ۱۹۹۵ کندی^{۳۶} و ابرهارت^{۳۷} با الهام از رفتار دسته‌جمعی موجوداتی مثل حشرات، زنبورها، مورچگان و پرندگان معرفی کرده‌اند. هر عضو این گروه براساس اطلاعات و آگاهی خود و اطلاعات کلی گروه حرکت می‌کند. این روش براساس گروه‌هایی از اعضا در نظر گرفته می‌شود که به دنبال بهترین مقدار برای تابع هدف، حرکت می‌کنند. هر کدام از این اعضا دارای دو مشخصه موقعیت و سرعت هستند که دائماً تغییر می‌کنند و اصلاح می‌شود. هر عضو در فضای طراحی مسئله، گردش می‌کنند و به دنبال نقطه بهینه است. از سوی دیگر هر عضو بهترین موقعیت خود را نیز در نظر گرفته و در حافظه خود حفظ می‌کند. تبادل اطلاعات میان این اعضا براساس بهترین نقاط برای هر عضو و بهترین نقطه تمام اعضا، باعث می‌شود موقعیت و سرعت هر عضو به‌طور مداوم طبق روابط زیر اصلاح شود (رائو^{۳۸}، ۲۰۰۹).

$$v_{ij}(t+1) = \omega_i v_{ij}(t) + c_1 r_{1j}(t)[y_{ij}(t) - x_{ij}(t)] + c_2 r_{2j}(t)[\bar{y}_j(t) - x_{ij}(t)] \quad (68)$$

$$x_{ij}(t+1) = x_{ij}(t) + v_{ij}(t), \quad (69)$$

$$y_i(t+1) = \begin{cases} y_i(t), & \text{if } f(x_i(t+1)) \geq f(y_i(t)) \\ x_i(t+1), & \text{if } f(x_i(t+1)) < f(y_i(t)) \end{cases} \quad (70)$$

$x_i(t)$ موقعیت فعلی ذره، v_i سرعت حرکت ذره، y_i بهترین موقعیتی که ذره تاکنون تجربه کرده است، \bar{y}_i بهترین مکانی است که تاکنون ذرات مجاور یافته‌اند.

c_1 ضریب یادگیری مربوط به تجارب شخصی هر ذره است که در این مقاله $c_1 = 2.02$ در نظر گرفته شده است. در مقابل c_2 ضریب یادگیری برای کل جامعه و در اینجا $c_2 = 2.02$ است. از طرف دیگر r_1 و r_2 ، باعث می‌شوند که نوع گوناگونی در جواب‌ها به وجود بیاید و جستجوی کامل‌تری روی فضا انجام گیرد (رائو، ۲۰۰۹). r_1 و r_2 در این مقاله در هر تکرار به صورت عدد تصادفی از توزیع نرمال در بازه (0,1) تولید و در هر تکرار به‌روزرسانی می‌شوند؛ بنابراین همان‌طور که مشاهده می‌شود موقعیت و سرعت هر ذره در هر مولفه برای $j = 1, 2, \dots, n$ ، به‌طور جداگانه به‌روزرسانی خواهد شد.

ω_i ضریب وزنی است که به صورت خطی از ω_{\min} تا ω_{\max} تغییر می‌کند. مقدار زیاد ضریب وزنی، جستجوی کلی و مقدار کم آن جستجوی محلی را برای تعیین نقطه بهینه انجام می‌دهد؛ بنابراین در مراحل تکرار روش، برای یافتن نقطه بهینه، این ضریب به صورت خطی و طبق رابطه زیر کاهش می‌یابد تا در آخرین مرحله به کمترین مقدار خود می‌رسد (رائو، ۲۰۰۹).

$$\omega_t = \omega_{\max} - \left(\frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{t_{\max}} \right) \cdot t \quad (71)$$

در این مقاله $t_{\max} = 1000$ حداکثر مراحل تعیین شده برای تکرار مسئله و ω_{\max} و ω_{\min} به ترتیب برابر با ۰/۲ و ۰/۹، در نظر گرفته شده‌اند. اگر همه اعضا به یک نقطه نزدیک شوند یا فاصله اعضا از یکدیگر تا مقدار تعیین شده‌ای کاهش یابد، حل مسئله همگرا می‌شود و نقطه بهینه به دست می‌آید.

در روش IPSO ضریب وزنی ω_i به صورت زیر است (داس و همکاران^{۳۹}، ۲۰۱۶).

$$\omega_i = \omega_{\min} + (\omega_{\max} - \omega_{\min}) \left(\frac{\text{dist}_j}{\text{max_dist}} \right) \quad (72)$$

در این رابطه dist_j فاصله اقلیدسی عضو j - ام از بهترین نقطه \bar{y}_i و max_dist نیز بیشترین فاصله تا \bar{y}_i در بین همه اعضا است (داس و همکاران، ۲۰۱۶). این مقادیر با توجه به مشخص بودن نقاط و بهترین جواب در هر تکرار محاسبه می‌شود.

نتیجه‌گیری و پیشنهادات

مکان‌یابی تسهیلات و تأسیسات از کاربردی‌ترین زمینه‌های پژوهشی است که در بسیاری از شاخه‌های علوم گسترده شده است. امروزه مدل‌هایی از مکان‌یابی تأسیسات و تسهیلات بررسی شده است که با شاخصه‌های دنیای واقعی تطابق بیشتری دارند. به مکان‌یابی معکوس و پشتیبان به دلیل تطابق بیشتر با واقعیت توجه می‌شود. در این مقاله برای نخستین بار، معکوس (نوع محدودیت بودجه‌ای و نوع حداقل هزینه) مسئله ۲- میان‌پشتیبان در حالت گسسته برای گراف‌های عمومی مدل‌سازی ریاضی شده است و سپس درحالتی که گراف مدنظر درخت باشد، به مسئله برنامه‌ریزی خطی تبدیل می‌شود. همچنین درحالت پیوسته نیز برای مسئله معکوس نوع محدودیت بودجه‌ای ۲- میان‌پشتیبان (با تغییر در مختصات نقاط) مدل ریاضی ارائه می‌شود. همچنین با توجه به NP-سخت بودن و نامحدوب بودن مسئله درحالت خاصی که بودجه به اندازه کافی بزرگ باشد با انجام تخصیص، به یک مسئله محدب تبدیل می‌شود و برای آن الگوریتمی تکراری ارائه می‌شود. همچنین درحالت کلی و زمانی که بودجه محدود باشد، مسئله مذکور درحالت پیوسته با الگوریتم‌های فرا ابتکاری ازدحام ذرات^{۴۰} (PSO) و الگوریتم بهبودیافته ازدحام ذرات^{۴۱} (IPSP) حل می‌شود و تغییرات پارامترهای مختلف مسئله همچون ضریب شکست، بودجه و نرم، تحلیل می‌شود.

در ادامه مسائل معکوس محدودیت بودجه‌ای در فضای پیوسته به وسیله تغییر در وزن رئوس، مسائل معکوس حداقل هزینه در فضای پیوسته به وسیله تغییر در وزن رئوس و تغییر در مختصات نقاط برای مطالعه و بررسی کارهای آتی پیشنهاد می‌شود.

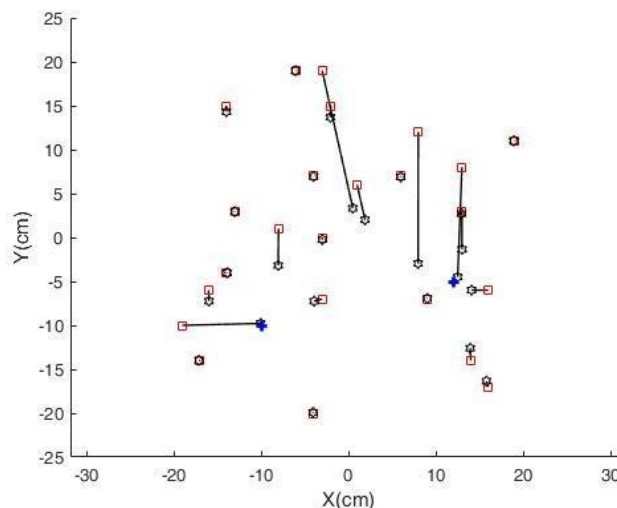
پیوست آ:

در این قسمت مثال‌هایی عددی برای مسئله معکوس ۲- میانه پشتیبان در حالت پیوسته با روش تغییر در مختصات نقاط آورده شده است و اثرات مختلف تغییر در پارامترهای مختلف مسئله همچون تغییر در نرم p مقدار بودجه B و ضریب شکست p بررسی شده است. نرم افزار استفاده شده در این مقاله، نرم افزار Matlab ورژن R2017b است که در لپ‌تاپ مدل Fujitsu با مشخصات زیر مدل‌سازی شده است.

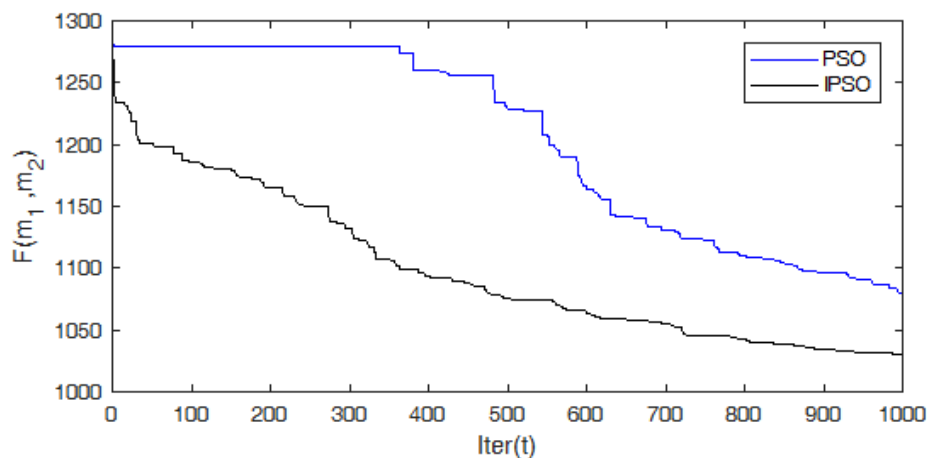
Intel(R) Core™ i5-2430M CPU, 4.00GB RAM

مثال ۱

در این مثال مسئله BR2MP با تغییر در مختصات نقاط در محیط پیوسته، برای ۲۰ مشتری با بودجه $B = 250$ و $\rho = 0/3$ در نرم اقلیدسی با روش‌های فرا ابتکاری PSO و IPSO حل شده است. نمودار (۱) نحوه جابجایی نقاط اولیه (مشتریان) را نشان می‌دهد. نمودار (۲) و (۳) نیز عملکرد الگوریتم‌های فرا ابتکاری PSO و IPSO استفاده شده برای $\rho = 0/3$ و $\rho = 0$ در این مقاله را نشان می‌دهد.

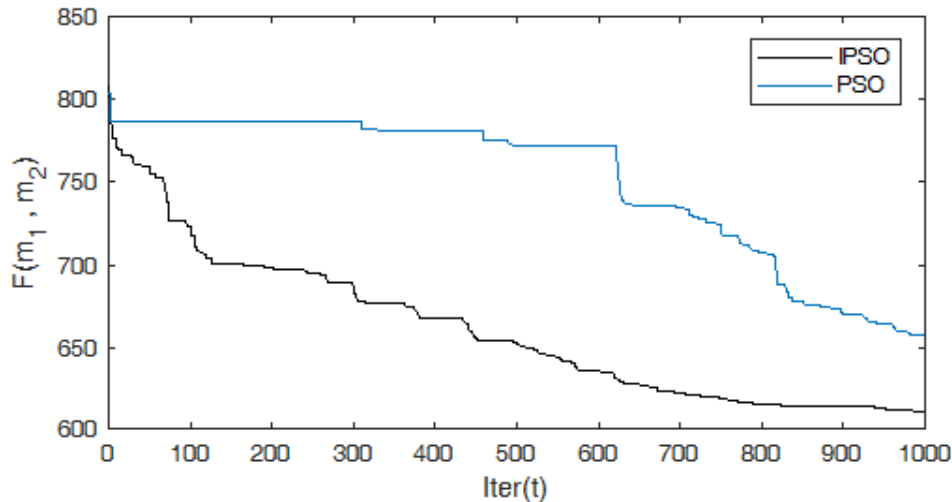


نمودار ۱- نقاط اولیه (مربع قرمز)، نقاط بهینه (ستاره مشکی) و نقاط ۲- میانه (نقاط بعلاوه آبی) برای $B = 80$ و $n = 25, \rho = 0/3$.



نمودار ۲- نمودار مقایسه‌ای عملکرد روش‌های PSO،

IPSO برای حالت $B = 80$ و $n = 25, \rho = 0/3$.



نمودار ۳- نمودار مقایسه‌ای عملکرد روش‌های PSO، IPSO
 برای حالت $B = 80$ و $n = 25, \rho = 0$

همان‌طور که در نمودار (۲) و (۳) مشاهده می‌کنید و در متن مقاله نیز اشاره شد، عملکرد IPSO نسبت به PSO بهتر است.

مثال ۲- اثرات ضریب شکست p ، بر مسئله BR2MP در حالت پیوسته به روش تغییر در مختصات به‌طور کلی با توجه به تعریف یک مسئله ۲- میانه پشتیبان، وقتی یکی از میانه‌ها (سرویس‌دهنده‌ها)، شکست بخورد، مشتریان این سرویس‌دهنده مجبورند از سرویس‌دهنده دیگر سرویس بگیرند؛ بنابراین این امر باعث افزایش مقدار تابع هدف خواهد شد. زمانی که p باشد تابع هدف مسئله مذکور همان تابع هدف مسئله ۲- میانه معمولی

$$\rho \sum_{v_i \in V} w(v_i) d(v_i, m_1)$$

است (در رابطه (۳))، p را معادل صفر در نظر بگیرید؛ ولی زمانی که $\rho \neq 0$ باشد دو جمله

$$\rho \sum_{v_i \in V} w(v_i) d(v_i, m_r)$$

و به تابع هدف مسئله اضافه می‌شوند و با افزایش p این دو مقدار نیز افزایش می‌یابند؛ بنابراین با افزایش ضریب شکست ρ ، مقدار تابع هدف مسئله BR2MP نیز افزایش می‌یابد؛ برای مثال، این امر در جداول (۱) و (۲) مشاهده می‌شود.

در این مثال دو شبیه‌سازی عددی با تعداد نقاط $n = 50$ و $n = 10$ آورده شده است. جدول (۱) مقدار تابع هدف با نرم اقلیدسی را به‌ازای $n = 10$ و بودجه $B = 40$ نسبت به مقادیر مختلف p نشان می‌دهد. جدول (۲) نیز مقدار تابع هدف با نرم اقلیدسی را به‌ازای $n = 50$ و بودجه $B = 40$ نسبت به مقادیر مختلف p نشان می‌دهد.

جدول ۱- تأثیرات p بر مقدار تابع هدف مسئله BR2MP برای حالت $B = 40, p = 2, n = 10$.

ρ	F_{ps0}	F_{ipso}	CPU - Time _{ps0} (s)	CPU - Time _{ipso} (s)
۰	۶۸/۸۱	۷۰/۰۴	۶۳/۷۴	۳۲/۲۳
۰/۳	۱۶۶/۹۰	۱۶۶/۵۶	۵۰/۵۹	۳۱/۱۰
۰/۵	۲۲۵/۷۴	۲۲۵/۴۴	۳۹/۲۸	۳۳/۲۹
۰/۷	۲۸۷/۳۷	۲۸۷/۴۹	۳۸/۱۷	۴۷/۹۳
۰/۹	۳۴۶/۴۶	۳۴۵/۴۰	۳۹/۵۸	۴۸/۷۴

جدول ۲- تأثیرات p بر مقدار تابع هدف مسئله BR2MP برای حالت $p = 2, B = 350$ و $n = 50$.

ρ	F_{ipso}	F_{pso}	CPU - Time _{ipso} (s)	CPU - Time _{pso} (s)
۰	۶۳۴/۰۲	۵۷۱/۹۹	۲۳/۰۵	۱۲۱/۷۵
۰/۳	۰۳E+۱/۱۰	۰۳E+۱/۰۷	۹۱/۳۲	۹۹/۸۱
۰/۵	۰۳E+۱/۴۸	۰۳E+۱/۳۹	۹۲/۹۴	۱۳۴/۱۸
۰/۷	۰۳E+۲/۰۰	۰۳E+۱/۶۸	۱۲۹/۴۲	۱۳۸/۳۵

مثال ۳- اثرات تغییر نرم p ، بر مسئله BR2MP در حالت پیوسته به روش تغییر در مختصات به‌طور کلی مقدار $d^{lp}(X_i, m_t)$ (نرم l_p) با افزایش مقدار p کاهش پیدا می‌کند؛ بنابراین در بوجه ثابت B ، که $p < p'$ باشد، برای حالت p' نسبت به حالت p ، نقاط اولیه نزدیک‌تر به نقاط $\{m_1, m_2\}$ هستند؛ بنابراین بوجه ثابت B ، برای حالت p' نسبت به حالت p ، تابع هدف را بیشتر کاهش می‌دهد؛ بنابراین با افزایش مقدار p تابع هدف کاهش پیدا می‌کند. این امر در جدول (۳) نیز مشاهده می‌شود. در جدول (۳) مثال عددی با تعداد نقاط $n = 80$ و $p = 0.5$ و بوجه $B = 700$ نسبت به مقادیر مختلف p آورده شده است.

جدول ۳- تأثیرات p ، بر مقدار تابع هدف مسئله BR2MP برای حالت $p = 0.5, B = 700$ و $n = 80$.

p	F_{pso}	F_{ipso}	CPU - Time _{pso} (s)	CPU - Time _{ipso} (s)
۱	E+03۵/۸۱	E+03۵/۶۴	۶۷۶/۰۹	۴۸۱/۰۶
۲	E+03۴/۷۱	E+03۴/۶۵	۳۵۳/۸۹	۳۷۸/۳۷
۵	E+03۴/۱۹	E+03۳/۷۵	۵۲۶/۱۴	۴۶۲/۰۶
۱۰	E+03۳/۸۳	E+03۳/۳۹	۳۶۲/۳۲۸	۶۵۷/۴۴

مثال ۴- اثرات تغییر بوجه B روی مسئله BR2MP در حالت پیوسته به روش تغییر در مختصات افزایش بوجه به این معنی است که می‌توان تغییرات بیشتری را در جابجایی مختصات نقاط اعمال کرد و این امر بیانگر این موضوع است که با افزایش بوجه، تابع هدف بهبود بخشیده می‌شود. به عبارت دیگر از لحاظ ریاضی با افزایش بوجه، فضای جوابی که محدودیت مسئله یعنی رابطه (۵۵) ایجاد می‌کند، افزایش می‌یابد و این امر باعث بهبود مقدار تابع هدف خواهد شد. جدول (۴) اثرات تغییر بوجه را بر مسئله شبیه‌سازی شده برای حالت $p = 3, \rho = 0/3$ و $n = 30$ نشان می‌دهد.

جدول ۴- تأثیرات B ، بر مقدار تابع هدف مسئله BR2MP برای حالت $p = 3, \rho = 0/3$ و $n = 30$.

B	F_{ipso}	F_{pso}	CPU - Time _{ipso} (s)	CPU - Time _{pso} (s)
۱۰۰	۴۹۶/۹۰	۴۷۱/۷۹	۷۵۰/۸۸	۵۴۱/۸۰
۲۰۰	۳۲۶/۷۲	۳۱۴/۵۰	۱۲۰۷/۳۸	۶۸۲/۳۶
۵۰۰	۲۶۹/۴۸	۲۵۵/۴۳	۸۸۹/۹۱	۷۶۹/۵۲

References

- Baroughi, B. F., Burkard, R. E., & Alizadeh, B. (2010). "Inverse median location problems with variable coordinates". *Central European Journal of Operations Research*, 18(3), 365- 381.
- Baroughi, B. F., Burkard, R. E., & Gassner, E. (2011). "Inverse p- median location problems with variable edge lengths". *Mathematical. Methods of Operations Research*, 73(2), 263-280.
- Berman, O. & Drezner, Z. (2000). "A note on the location of an obnoxious facility on a networks". *European Journal of Operational Research*, 120(1), 215-217.
- Burkard, R. E., Gassner, E., & Hatzl, J. (2006). "A linear time algorithm for the reverse 1-median problem on cycle". *Networks*, 48(1), 16-23.
- Burkard, R. E., Gassner, E., & Hatzl, J. (2008). "Reverse 2-median problems on trees". *Discrete Applied Mathematics*, 156(11), 1963-1976.
- Burkard, R. E., Pleschiutsching, C., & Zhang, J. (2004). "Inverse median problems". *Discrete Optimization*, 1(1), 23-39.
- Burton, D., & Toint, Ph. L. (1992). "On an instance of the inverse shortest path problem". *Mathematical Programming*, 53(1-3), 45-61.
- Cheng, Y. K., Kang, L. Y., & Yan, H. (2014). "The backup 2-median problem on block graphs". *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 30(2), 309-320.
- Das, P. K., Behera, H. S., & Panigrahi B. K. (2016). "A hybridization of an improved particle swarm optimization and gravitational search algorithm for multi-robot path planning". *Swarm and Evolutionary Computation*, 28, 14-28.
- Fathali, J. (2006), "A genetic algorithm for the p-median problem with pos/neg weights", *Applied Mathematics and Computation*, 183(2), 1071-1083.
- Fathali, J. (2014). "Backup multifacility location problem with l_p norm". *OPSEARCH*, 52(2), 382-391.
- Galavii, M. (2008). Institute of Optimization and Discrete Mathemati". Ph.D Thesis, Graz University of Technology, Graz, Austria.
- Hakimi, S. L. (1964) "Optimum location of switching centers and the absolute centers and medians of a graph". *Operations Research*, 12(3), 450-459.
- Handler, G. Y., & Mirchandani, P. B. (1979). Location on Networks: Theory and Algorithms. MIT Press, Cambridge.
- Ho, Y. C., & Pepyne, D. L. (2002). "Simple explanation of the no free lunch theorem of optimization". *Cybernetics and Systems Analysis*, 38(2), 292-298.
- Jianfang, Y., & Juan, J. (2012). "Reverse 1-median problem with constraint in trees". *Proceedings of the 2012 International Conference on Computer Application and System Modeling*, Paris, France, 75-78.
- Modaber, L., Alizadeh, B., Baroughi, B. F., (2016). "The Optimal Algorithms for Backup Undesirable 2-Center Location Models on Tree Graphs". *Journal of Operational Research and Its Applications*. 13 (2), 69-83.
- Nguyen, K. T., (2016). "Reverse 1-center problem on weighted trees". *Optimization*, 65(1), 253-264.
- Megiddo N, & Supowitz K, (1984). On the complexity of some common geometric location problems, *SIAM Journal on Computing*, 13(1), 182-196.
- Rao, S. S. (2009). Engineering Optimization Theory and Practice (Fourth Edition). John Wiley and Sons, Inc.
- Sepasian, A. R., & Rahbarnia, F. (2015). "An $O(n \log n)$ algorithm for the 1- median problem on the tree with variable vertex weight and edge reductions". *Optimization*, 64(3), 595-602.
- Snyder, L. V., & Daskin, M. S. (2005). "Reliability models for facility location: The expected failure cost case". *Transportaion Science.*, 39(3), 400-416.

- Wang, H. L., Wu, B. Y., & Chao, K. M. (2009). "The backup 2-center and backup 2-median problems on trees". *Networks*, 53(1), 39-49.
- Wang, Q., & Bai, Y. (2010). "An efficient algorithm for reverse 2-median problem on a cycle". *Journal of Networks*, 5(10), 1169-1176.
- Weber, A. (1929). "Uber den Standort der Industriet, Tubingen" (1909). English Trans.: Theory of Location of Industries, (C. J. Friedrich, ed. and trans.). Chicago, University Press, Chicago, Illinois.

¹ Backup 2-meian

² Particle Swarm Optimization (PSO)

³ Improve Particle Swarm Optimization (IPSO)

⁴ Fathali

⁵ Baroughi et al.

⁶ Inverse Problem

⁷ Reverse Problem

⁸ Burkard et al.

⁹ Wang et al.

¹⁰ Weber

¹¹ Hakimi

¹² Handler

¹³ Mirchandani

¹⁴ Butron

¹⁵ Toint

¹⁶ Berman et al.

¹⁷ Burkard et al.

¹⁸ Wang et al.

¹⁹ Jianfang et al.

²⁰ Minimum cut

²¹ Greedy

²² Nguyen

²³ Galavii

²⁴ Burkard et al.

²⁵ Sepasian and Rahbarnia

²⁶ Snyder

²⁷ Daskin

²⁸ Cheng et al.

²⁹ Backup Inverse 2-Median Problem (BI2MP)

³⁰ Backup Reverse 2-Median Problem (BR2MP)

³¹ Backup Reverse 2-Median Problem (BR2MP)

³² No Free Lunch Theorem (NFLT)

³³ Ho et al.

³⁴ Genetic algorithm (GA)

³⁵ Megiddo et al.

³⁶ Kenedy

³⁷ Eberhart

³⁸ Rao

³⁹ Das et al.

⁴⁰ Particle Swarm Optimization (PSO)

⁴¹ Improve Particle Swarm Optimization (IPSO)