

## Pricing and Determining the Optimal Discount of Perishable Goods to Speed up Demand Rate

Morteza Khakzar Bafraei\*

Assistant Professor of Industrial Engineering, Technology Development Institute, ACECR, Tehran,  
Iran, khakzar@jdsharif.ac.ir

Fatemeh Zabihi

Ph.D. Student of Industrial Engineering, Technology Development Institute, ACECR, Tehran,  
Iran, fatemehzabihi@yahoo.com

**Abstract:** In the competitive market of perishable cargoes, determining the price of the product and making opportunities for customers to accelerate the sale of goods through discounts is crucial. Over the life of perishable goods, generally its value reduced to the customer, in this situation, to encourage the purchase, policies such as a discount or reduced price sales policies can be effective. Literature has not provided a model for determining the optimal time to announce a price reduction. While early or late prices announcement could reduce profit, the aim of this paper is to analyze such a model at the level of an enterprise. In the modeling, we assumed that by announcing price discount, tangible changes occur in demand, and demand is a function of price and time. The demand rate in the discount time is decreasing in the beginning of the time and then declining over time. The purpose of the model is determining the optimal price, discount time and order size to maximize the total profit in a single period. After modeling, concavity of the profit function is considered and optimal pricing and discounts are exclusive. Then, a heuristic algorithm derived from the literature was used in order to determine the optimal price, the optimal discount time and the optimal order quantity.

**Keywords:** Pricing, Perishable product, Price discount

**Introduction:** In this article, the term "perishable" is used for goods that, due to rapid technological changes or the introduction of new products by competitors, should lose their value over a period of time. For example, fashion goods in the season will quickly fall in price, because otherwise the need for spare parts for military aircraft is one of fashion goods that would be unusable if a new aircraft model is being used (Khanlarzadeh et al., 2014). When non-perishable products approach their expiration date, they often use price discounts. Tajbakhsh et al (2011) developed an inventory model at a price of Random Discount, and numerical analysis that showed cost saving through discounts. The research conducted in the field of pricing and bidding for the aforementioned commodities, only several models have been developed that are either definitive or random models with known distributions (Wang, 2012). Rajan et al. (1992) have developed pricing policies and ordered for definitive applications. Also, if problem modeling occurs in the supply chain, competition between the members of the chain is formed to generate more profit. Zhang et al. (2015) considered a supply chain model with a producer and retailer for degraded items at a time-rate and price-dependent demand. They have designed an algorithm for obtaining price and investment protection technology strategies, and have examined both centralized and decentralized scenarios. In this article, the pricing of a perishable goods is considered under discounted conditions, and given the importance of selling these products over the life of the customer, it is essential to pursue a policy that can encourage customers to buy more. Also, the discount policy comes with the synchronization of the demand function during the discount period. In the absence of discounts, the demand rate is a function of the time and price, and in the discount period, the demand function is initially at an incremental time, and after the discount, the time is reduced. In the literature examined, the price for the final customer, which affects demand and does not change the demand for demand function, is not taken into account. For example, Meihami and Karimi (2014) show a change in demand after advertising with a coefficient in the demand function has given. While in the real world, with the announcement of a discount, the function of the rate of demand for perishable goods varies and is not mentioned in any of the previous investigations. In the following, we describe the assumptions and symbolization of problem modeling.

### Materials and Methods:

It is assumed that the maximum inventory in the first period ( $I_0$ ) is the order quantity, and its decreasing is only affected by demand. As a price mark-down should always be applied before the expiration date of the product, the time horizon for product selling can be divided into two intervals:  $[0, t]$  and  $[t, T]$ .

Notice that due to the discount after the price mark-down, the demand rate function during the time intervals  $[0, t]$  and  $[t, T]$  is different, in the interval  $[t, T]$ , the product is sold out at the discount price  $p(1-\alpha)$ . Due to the discount, a moderate growth in the demand initially occurs; however, it reduces gradually (see Fig. 1.).

There is no shortage, nor surplus in the end of the time horizon, i.e., period  $T$ , so the inventory level is the demand in that period. On the other hand, the demand in the time interval  $[0, t]$  can be expressed as follows,

---

\* Corresponding author

$$ED_t = \int_0^t D(p, t) dt = \int_0^t (a - bp)e^{-\lambda t} dt = \frac{(a-bp)}{\lambda} [1 - e^{-\lambda t}], \tag{1}$$

and the profit can be expressed,

$$TP = (p - c) \int_0^t D(p, t) dt + (p(1 - \alpha) - c) \int_t^T D(p, t) dt$$

$$= (p - c) \left[ \frac{(a-bp)}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}) \right] + (p(1 - \alpha) - c) \left[ \frac{1}{\lambda^4} (a - bp(1 - \alpha)) (e^{-\lambda t} (6 + t\lambda(6 + t\lambda(3 + t\lambda)))) + e^{-\lambda t} (-6 - T\lambda(6 + T\lambda(3 + T\lambda))) \right] \tag{2}$$

The methodology must be clearly stated and described in sufficient detail or with sufficient references containing the research model and tools.

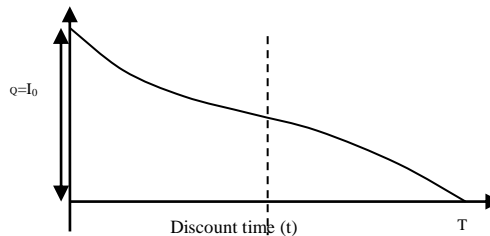


Fig. 1. Inventory level in period T

**Results and Discussion:** The proposed algorithm is used for solving the following numerical example to illustrate the solution process and results. Mathematica 9 was used in this regard.

Example. The following parameters and functions are used.

$$D_1(p, t) = (500 - 0.5p)e^{-0.98t}, \quad D_2(p, t) = (500 - 0.5p)t^3 e^{-0.98t} \quad T=2, c=200, \alpha=0.3$$

Table 1 show, the convergence of the algorithm, where for the quasi-optimal tolerance  $\epsilon$ , it results in  $p^*=694.826$ ,  $t^*=1.008$ ,  $TP^*=104558.612$ ,  $Q^*=293.945$ , and the numerical results are obtained for the price interval [400, 1000].

Table 1- Computational results of Example 1.

k	$p_k$	$t_k$	$TP_k$
1	600.000	1.078	100182.512
2	690.310	1.012	104548.806
3	694.597	1.008	104558.573
4	694.813	1.008	104558.611
5	694.825	1.008	104558.612
6	694.826	1.008	104558.612

**Conclusion:** In this paper, the pricing model for non-perishable goods was presented under discounted sales terms. In modeling the hypothesis problem by declaring a decline in sales prices, the demand rate has a tangible change, and demand is a function of price and time. In this paper, it was proved that the goal of profit is optimal and unique in terms of optimal price and discount time. With using a simple algorithm, a numerical example of a model and results are analyzed using sensitivity analysis on model parameters. The model presented in this paper is a comprehensive and complete model, and compares to different values of the parameters of the flexible demand function. The model presented in this study can be expanded in several ways; the demand rate in this paper is definite. It is considered to be time-dependent, with its probability, it is possible to define a suitable topic for future research. We can also consider the discount percentage variable. On the other hand, advertising policies, delay in payments and coordination models in the supply chain system and reviewing the results can be considered.

**References**

Khanlarzade, N. et. al. (2014), Inventory Control with Deteriorating Items: A State-Of-The-Art Literature Review. *International journal of industrial engineering computations*, 5(2): 179-198.

Maihami, R., and Karimi B., (2014), Optimizing The Pricing And Replenishment Policy For Non-Instantaneous Deteriorating Items With Stochastic Demand And Promotional Efforts. *Computers & Operations Research*, 51:302-312.

Rajan A., Steinberg R., Richard S., (1992), Dynamic pricing and ordering decisions by monopolist. *Management Science*, 38(2): 240-262.

Tajbakhsh, M., Lee, C., & Zolfaghari, S. (2011). An inventory model with random discount offerings. *Omega*, 39, 710-718.

Wang X., Li D., (2012), A dynamic product quality evaluation based pricing model for perishable food supply chains. *Omega*, 40: 906-917.

Zhang, Jianxiong et al., (2015), Coordinating A Supply Chain For Deteriorating Items With A Revenue Sharing And Cooperative Investment Contract. *Omega* 56: 37-49.

## قیمت‌گذاری و تعیین زمان بهینه کاهش قیمت فروش کالای فاسدشدنی برای افزایش نرخ تقاضا

مرتضی خاکزار بفرئی<sup>۱\*</sup>، فاطمه ذبیحی<sup>۲</sup>

۲- استادیار گروه پژوهشی مهندسی صنایع، پژوهشکده توسعه تکنولوژی جهاد دانشگاهی، تهران، ایران، khakzar@jdsarif.ac.ir

۲- دانشجوی دکتری مهندسی صنایع، پژوهشکده توسعه تکنولوژی جهاد دانشگاهی، تهران، ایران، fatemehzabihy@yahoo.com

**چکیده:** در بازارهای رقابتی کالای فاسدشدنی، تعیین قیمت کالا و ایجاد فرصت برای مشتری برای تسریع در فروش کالا از طریق تخفیف، امری حیاتی به‌شمار می‌رود. عموماً با گذشت عمر کالاهای فاسدشدنی، ارزش آن نزد مشتری کاهش می‌یابد. در این شرایط برای تشویق به خرید، سیاست‌های مختلفی از جمله تخفیف یا کاهش قیمت فروش مؤثر است. تاکنون در ادبیات پژوهش مدلی برای تعیین زمان بهینه اعلام کاهش قیمت ارائه نشده است؛ درحالی‌که اعلام زود هنگام یا دیر هنگام قیمت سود بنگاه را کاهش می‌دهد؛ بنابراین در این مقاله مدلی با ویژگی‌های معرفی شده در سطح بنگاه تحلیل می‌شود. در مدل‌سازی مسئله فرض شده است با اعلام کاهش قیمت، نرخ تقاضا تغییر محسوس دارد و نرخ تقاضا تابعی از قیمت و زمان است. همچنین نرخ تقاضا در زمان تخفیف، ابتدا نسبت به زمان افزایشی در نظر گرفته شده است و سپس با گذشت زمان، این نرخ کاهش می‌یابد. هدف مدل تعیین مقادیر بهینه قیمت فروش، زمان تخفیف و اندازه سفارش است تا سود کل در بازه‌ای مشخص و تک‌دوره‌ای حداکثر شود. پس از مدل‌سازی مسئله، نشان داده می‌شود که تابع سود تابعی مقعر است و قیمت و زمان تخفیف بهینه منحصر به فرد است. سپس با استفاده از الگوریتم ابتکاری برگرفته از ادبیات پژوهش، میزان سفارش بهینه با تعیین قیمت بهینه و زمان بهینه تخفیف محاسبه شده است.

**واژه‌های کلیدی:** قیمت‌گذاری، کالای فاسدشدنی، تخفیف فروش

## مقدمه

با گسترش رقابت برای جهانی شدن بازارها، سازمان‌ها به دنبال راه‌های مختلفی برای بهبود وضعیت رقابتی خود و جلب توجه بیشتر مشتریان هستند. در بسیاری از کسب و کارها، قیمت‌گذاری مکانیزمی مرسوم برای جذب مشتریان بیشتر و مدیریت درآمد در نظر گرفته می‌شود. قیمت‌گذاری پویا روشی مناسب برای تعیین قیمت‌های مختلف در طول زمان است که در بسیاری از خرده‌فروشی‌ها، صنایع تجاری و بنگاه‌ها شکل‌های گوناگونی از این نوع قیمت‌گذاری به کار گرفته می‌شود.

قیمت‌گذاری از عامل‌های مهم و مؤثر بر سطح و نوع تقاضای کالا است. زمانی که کالا فسادپذیر باشد، مسئله قیمت‌گذاری اهمیت دوچندانی می‌یابد؛ زیرا با ارائه راهکارهای مناسب قیمت‌گذاری تقاضای این اقلام تا حد زیادی مدیریت و مانع از اتلاف سرمایه به دلیل فاسدشدن کالا می‌شود.

به‌طور کلی به کالاهایی که در طول زمان ارزش خود را از دست بدهند کالای فاسدشدنی گفته می‌شود. کالاهایی مانند داروها، میوه و سبزیجات، کالاهای فصلی و مد، وسایل الکترونیکی و غیره کالاهای فاسدشدنی در نظر گرفته می‌شوند. در این مقاله اصطلاح فاسدشدن برای کالاهایی به کار می‌رود که به دلیل تغییرات سریع تکنولوژی یا معرفی محصولات جدید رقبای ارزش خود را در طی زمان از دست می‌دهند؛ برای مثال قیمت کالاهای مد باید در انتهای فصل سریعاً کاهش یابد؛ زیرا در غیر این صورت باید دور ریخته شوند. لوازم یدکی هواپیماهای نظامی یکی از انواع کالاهای مد هستند که در صورت ارائه مدل جدید هواپیما غیرقابل استفاده می‌شوند (خانلرزاده<sup>۲</sup> و همکاران، ۲۰۱۴). مرور ادبیات نشان می‌دهد مدل‌های موجود بیشتر به بحث کنترل موجودی پرداخته و کمتر مباحث مربوط به قیمت‌گذاری و تخفیفات قیمتی برای مشتریان را بررسی می‌کنند (وانگ<sup>۳</sup>، ۲۰۱۲). با توجه به اهمیت طول عمر کالا و توجه مشتری به تاریخ انقضای محصول، پایین آوردن قیمت در زمان نزدیک به تاریخ انقضا مکانیزمی تشویقی برای خرید کالا است؛ اما سوالی که در اینجا مطرح می‌شود این است که زمان بهینه برای پایین آوردن قیمت و تخفیف با توجه به وابستگی تقاضا به قیمت و زمان چیست؟ در این مقاله برای پاسخ به این سوال، ابتدا مسئله در قالب یک مسئله بهینه‌سازی ریاضی مدل‌سازی شده است و با حل این مدل، قیمت فروش و زمان بهینه تخفیف برای کالای فاسدشدنی تعیین شده است؛ به طوری که سود بنگاه حداکثر شود.

در ادامه، ادبیات موضوع بیان می‌شود. در بخش سوم ابتدا فرضیات و نمادگذاری مدل بیان، سپس تابع نرخ تقاضا در فاصله زمانی‌های مختلف در دوره موردنظر بررسی شده است. در ادامه، مدل ریاضی مسئله ارائه شده است و پس از اثبات وجود جواب بهینه سراسری و ارائه مثال عددی، با استفاده از الگوریتم ابتکاری مقادیر عددی قیمت بهینه و زمان بهینه تخفیف به دست آمده است. همچنین تحلیل حساسیت برای پارامترهای مدل در انتهای بخش سوم انجام شده است. در انتها در بخش چهارم نتیجه‌گیری و پیشنهادات آتی برای پژوهش ذکر شده است.

## ادبیات موضوع

مدیریت درآمد، استفاده از قیمت‌گذاری برای افزایش سود حاصل از دارایی‌های محدود بنگاه است. مزیت اصلی مدیریت درآمد آن است که تغییرات در قیمت‌گذاری به مراتب راحت‌تر از سرمایه‌گذاری در دارایی‌های بنگاه است. در صورتی که مدیریت درآمد به درستی صورت گیرد، ضمن افزایش سودآوری، رضایت مشتریان ارزشمند را از طریق دسترسی بهتر محصولات ارتقاء می‌بخشد (چاپرا<sup>۱</sup>، ۲۰۰۶). مدیریت درآمد، فرآیندی تحلیلی است که برای مدیریت ظرفیت و حداکثرکردن سودآوری ایجاد شده است (بیسی و دادا<sup>۲</sup>، ۲۰۰۷). پیش‌بینی و نظارت دائمی تقاضا، کارایی و اثربخشی قیمت‌گذاری را ارتقاء می‌بخشد و نقش مهمی در ارتقای سودآوری بنگاه دارد. برای روشن‌شدن مطلب، تقاضا فصلی در نظر گرفته می‌شود. اگر تقاضا فصلی باشد، در برخی از مواقع دارای اوج تقاضا است. در بسیاری از زنجیره‌های تأمین، اوج تقاضا در دوره‌ای خاص بسیار رایج است. تخفیف در دوره غیراوج روشی مناسب برای انتقال تقاضا به دوره‌های غیراوج است. این شیوه، سود فروشندگان را افزایش می‌دهد و هزینه بخشی از مشتریان را کم می‌کند، همچنین پتانسیل بیشتری برای ورود مشتریان در دوره تخفیف ایجاد می‌کند (پیمان‌دوست، ۱۳۹۱). در این مقاله نیز برای انتقال تقاضا به دوره‌های غیراوج از تخفیف قیمتی استفاده شده است. همچنین تابع نرخ تقاضایی که از زمان تخفیف استفاده می‌شود با بخش غیرتخفیف متفاوت است.

در حوزه دیگری از پژوهش‌های مرتبط، قیمت‌گذاری و کنترل موجودی محصولات فاسدشدنی، با هم ترکیب شده‌اند. راماسش<sup>۳</sup> (۲۰۱۰) مقدار سفارش اقتصادی را زمانی تعیین می‌کند که فروشنده، قیمت را در زمان محدود کاهش می‌دهد. الیون<sup>۴</sup> (۱۹۶۶) از اولین کسانی بود که مدل موجودی را با در نظر گرفتن تقاضای وابسته به قیمت در نظر گرفته است. کوهن<sup>۵</sup> (۲۰۰۳) مدل قیمت‌گذاری و موجودی را در حالتی در نظر گرفت که نرخ فاسدشدن در طول زمان پیوسته بوده است. وی<sup>۶</sup> (۱۹۹۵) سیاست بازپرسازی و قیمت‌گذاری را با در نظر گرفتن تقاضای وابسته به قیمت در نظر گرفته است؛ به نحوی که این قیمت در طول زمان کاهش می‌یابد. وی (۱۹۹۷) و وی (۱۹۹۹)، مدل کوهن را گسترش داد و علاوه بر در نظر گرفتن تقاضای وابسته به قیمت، فاسدشدن کالا را به صورت تابع وابیل در نظر گرفت و مدل را در حالت تخفیف قیمت و بدون تخفیف در نظر گرفت. موخوپادهای<sup>۷</sup> و همکاران (۲۰۰۵) مدل کوهن را با در نظر گرفتن وابستگی نرخ فساد به زمان، بهبود دادند. بانرجی<sup>۸</sup> و همکاران (۲۰۱۲) مدلی انعطاف‌پذیر ارائه کردند که مسئله تعیین قیمت بهینه برای کالاهای فاسدشدنی را بررسی می‌کند. راجان<sup>۹</sup> و همکاران (۱۹۹۲) و آباد<sup>۱۰</sup> (۱۹۹۶) سیستمی ترکیبی از قیمت‌گذاری و موجودی را در فضایی قطعی در نظر گرفتند. آنها چنین فرض کردند که تقاضا تحت تأثیر عمر باقیمانده محصول قرار می‌گیرد. همچنین تقاضا قطعی و تابعی کاهشی از قیمت و عمر محصول است. علاوه بر این، راجان و همکاران (۱۹۹۲) اظهار کردند محصولات فاسدشدنی دو ویژگی دارند که آنها را از مسئله رایج قیمت‌گذاری جدا می‌کند؛ این دو ویژگی، زوال فیزیکی موجودی و کاهش قیمت هر واحد موجودی هستند.

کیفیت بسیاری از محصولات قبل از خرید، عامل مهمی است که تصمیم خرید مصرف‌کننده را تحت تأثیر قرار می‌دهد. رزا دیاز<sup>۱۱</sup> (۲۰۰۶) بیان می‌کند تأثیر قیمت بر تصمیمات مصرف‌کننده به شیوه درک و ارزیابی قیمت بستگی دارد.

وقتی محصولات فاسدشدنی به تاریخ انقضای خود نزدیک می‌شوند، بیشتر از تخفیف قیمت استفاده می‌شود. تاجبخش و همکاران (۲۰۱۱) یک مدل موجودی با قیمت‌های تخفیفی تصادفی و با روش آنالیز عددی، طراحی کردند که صرفه‌جویی هزینه را از طریق ارائه تخفیف نشان داد. لی<sup>۱۵</sup> و همکاران (۲۰۰۶)، از رویکرد قیمت‌گذاری پویا برای بهینه‌سازی سود زنجیره خرده‌فروشی استفاده کرده‌اند، هزینه تغییرات قیمت و عدم قطعیت در رفتار مصرف‌کننده که با تغییر قیمت‌ها ایجاد می‌شود، اجرای مدل قیمت‌گذاری پویا را در عملیات خرده‌فروشی دشوار می‌کند.

در پژوهش‌های صورت‌گرفته در حوزه ترکیبی سفارش‌دهی و قیمت‌گذاری برای کالاهای مذکور، تنها چند مدل توسعه داده شده است که یا قطعی بوده است یا مدل‌هایی تصادفی با توزیع شناخته شده هستند (وانگ، ۲۰۱۲). راجان و همکاران (۱۹۹۲) و آباد (۱۹۹۶) خط‌مشی‌های قیمت‌گذاری و سفارش‌دهی برای تقاضاهای قطعی را توسعه داده‌اند. بهاتاچارجی و رامش<sup>۱۶</sup> (۲۰۰۰) مدل چندمرحله‌ای از موجودی انبار و قیمت‌گذاری را ارائه دادند که کالا دارای عمر ثابت و تقاضای قطعی است و مسئله در قالب برنامه‌ریزی پویا مدل‌سازی شده است. در مدل آنها اثبات می‌شود حداکثر سود به صورت پیوسته و مقعر است. بیسی و دادا (۲۰۰۷) سفارش‌دهی پویای بهینه و خط‌مشی‌های قیمت-گذاری برای خرده‌فروشی با تقاضای ترکیبی و حساس نسبت به قیمت را بررسی کرده‌اند.

همچنین اگر مدل‌سازی مسئله در فضای زنجیره تأمین انجام شود رقابت بین اعضای زنجیره برای کسب سود بیشتر، شکل می‌گیرد. ژانگ<sup>۱۷</sup> و همکاران (۲۰۱۵) مدل زنجیره تأمین با یک تولیدکننده و یک خرده‌فروش را برای اقلام فاسدشدنی با نرخ زمان و تقاضای وابسته به قیمت را در نظر گرفتند. آنها الگوریتمی برای به دست آوردن قیمت و استراتژی‌های سرمایه‌گذاری فن‌آوری حفاظت طراحی کرده‌اند و هر دو سناریوی متمرکز و غیرمتمرکز را بررسی کرده‌اند.

در این مقاله قیمت‌گذاری کالای فاسدشدنی در شرایط تخفیف مدنظر قرار می‌گیرد و با توجه به اهمیت فروش این محصولات در دوره عمر آنها از نظر مشتری، پیگیری سیاستی ضروری است تا مشتریان به خرید بیشتر تشویق شوند. همچنین سیاست تخفیف همراه با هماهنگ‌سازی تابع نرخ تقاضا در دوره تخفیف مطرح می‌شود؛ یعنی در بازه‌ای که تخفیف وجود ندارد نرخ تقاضا، تابعی کاهشی از زمان و قیمت است و در دوره تخفیف، تابع نرخ تقاضا ابتدا نسبت به زمان افزایشی است و با گذشت زمان کاهشی می‌شود. در ادبیات بررسی شده، تخفیف قیمتی برای مشتری نهایی به نحوی در نظر گرفته شده است که تقاضا را تحت تاثیر قرار داده و تابع نرخ تقاضا تغییر کند؛ برای مثال میهمی و کریمی<sup>۱۸</sup> (۲۰۱۴) تغییر تقاضا بعد از تبلیغات را با ضریبی در تابع نرخ تقاضا نشان داده‌اند؛ درحالی که در دنیای واقعی با اعلام تخفیف، تابع نرخ تقاضای کالای فاسدشدنی تغییر می‌کند و در هیچ‌کدام از پژوهش‌های قبلی به آن اشاره نشده است. در ادامه با معرفی مفروضات و نمادگذاری، مسئله مدل‌سازی می‌شود.

**مفروضات و نمادگذاری:** در این قسمت مدل قیمت‌گذاری همراه با تخفیف قیمتی برای کالای فاسدشدنی توسعه داده شده است. در این مسئله فرض می‌شود کمبود مجاز نیست و مقداری که در ابتدای دوره سفارش داده می‌شود برابر با تقاضای کل دوره است؛ بنابراین در انتهای دوره نیز مازاد موجودی وجود ندارد. همچنین فرض می‌شود تقاضا تابعی قطعی از قیمت و زمان است که با نزدیک شدن به تاریخ انقضای محصول (انتهای دوره) تخفیف قیمتی برای محصول در نظر گرفته می‌شود.

سایر مفروضات مسئله به شرح ذیل است:

- ۱- همه پارامترهای مدل قطعی هستند؛
- ۲- سیستم موجودی، تک‌محصولی و بدون محدودیت است؛
- ۳- مدت زمان تحویل برابر با صفر است؛
- ۴- افق زمانی، محدود و برابر با  $T$  در نظر گرفته شده است؛
- ۵- مدل‌سازی برای دوره  $T$  انجام می‌شود؛
- ۶- کمبود مجاز نیست؛
- ۷- محصول فاسدشدنی است و با نزدیک شدن به تاریخ انقضا ارزش آن نزد مشتری کم می‌شود.

نمادها و متغیرهای تصمیم: نمادهای استفاده شده در مدل‌سازی مسئله به شرح زیر است:

- $D_1(p,t)$ : نرخ تقاضای محصول در بازه زمانی قبل از تخفیف که بستگی به قیمت و زمان فروش دارد؛
- $D_2(p,t)$ : نرخ تقاضای محصول از زمان تخفیف که بستگی به قیمت و زمان فروش دارد؛
- $ED_t$ : مقدار تقاضا تا زمان  $t$ ؛
- $C$ : هزینه خرید هر واحد کالا؛
- $T$ : طول دوره برنامه‌ریزی؛
- $Q^*$ : میزان سفارش بهینه در ابتدای دوره؛
- $\alpha$ : درصد تخفیف برای کالای فاسدشدنی؛
- $t$ : زمان تخفیف؛
- $t^*$ : زمان بهینه تخفیف؛
- $P$ : قیمت فروش هر واحد محصول فاسدشدنی؛
- $P^*$ : قیمت فروش بهینه هر واحد کالای فاسدشدنی؛
- $TP^*$ : مقدار بهینه سود به‌ازای قیمت بهینه و زمان بهینه تخفیف ( $TP^* = TP(p^*, t^*)$ ).

**تابع نرخ تقاضا:** در این مقاله، نرخ تقاضای محصول تابعی از قیمت و زمان است. با توجه به اهمیت زمان در محصولات فاسدشدنی، تغییرات این تابع نسبت به زمان، به صورت نمایی در نظر گرفته می‌شود. همچنین به‌علت اینکه قیمت عامل مهمی در خرید محصول فاسدشدنی است، این تابع نسبت به قیمت به صورت خطی در نظر گرفته می‌شود. فرض می‌شود نرخ تقاضا به صورت رابطه ۱ است (تساوی<sup>۱۹</sup>، ۲۰۰۸).

$$D_1(p, t) = (a - bp)e^{-\lambda t}, \quad b > 0, a > 0, \quad \lambda > 0 \quad (1)$$

و مقدار تقاضا تا زمان  $t$  از رابطه ۲ محاسبه می‌شود.

$$ED_t = \int_0^t D(p, t) dt \quad (2)$$

باتوجه به تقسیم دوره  $T$ ، تابع قیمت به صورت رابطه ۳ در نظر گرفته می شود.

$$P(t) = \begin{cases} P & [0, t] \\ P(1 - \alpha) & [t, T] \end{cases} \quad (3)$$

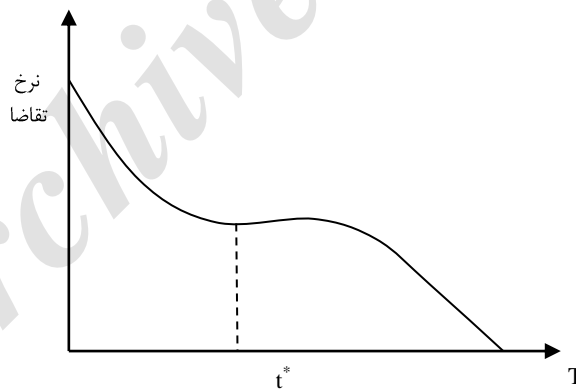
در دوره دوم با وجود تخفیف، نرخ تقاضا به صورت صعودی افزایش می یابد و به تدریج دوباره کاهش می یابد. این تابع به صورت زیر تعریف شده است:

$$D_2(p, t) = (a - bp(1 - \alpha))t^\beta e^{-\lambda t}, \quad b > 0, \quad a > 0, \lambda > 0, \beta > 0 \quad (4)$$

**مدل سازی تابع هدف:** در ابتدای دوره، موجودی به اندازه  $Q$  سفارش داده و بلافاصله دریافت می شود (زمان تدارک صفر در نظر گرفته می شود). تغییرات موجودی تحت تاثیر تقاضا است. با نزدیک شدن به تاریخ انقضاء برای افزایش تقاضا، تخفیف قیمتی برای محصول در نظر گرفته می شود و نمودار مربوط به آن در شکل (۱) نیز ترسیم شده است. براساس نمودار نشان داده شده، طول یک دوره به دو بازه زمانی تقسیم می شود:

الف. بازه زمانی  $[0, t]$ : در این بازه سرعت افزایش نرخ تقاضا به دلیل گذشت زمان کاهش می یابد. محصول در بازه  $[0, t]$  با قیمت  $p$  به فروش می رسد.

ب. بازه زمانی  $[t, T]$ : در این بازه محصول با قیمت تخفیفی  $p(1 - \alpha)$  به فروش می رسد. سطح موجودی باتوجه به قیمت تخفیفی با سرعت بیشتری نسبت به بازه قبل کاهش می یابد. در این بازه به دلیل وجود تخفیف و اطلاع مشتریان، رشد ناگهانی در نرخ تقاضا به وجود آمده و سپس سرعت آن به تدریج کاهش می یابد. باتوجه به روند بیان شده، تابع نرخ تقاضا به صورت شکل (۱) در نظر گرفته می شود.



شکل ۱- نمودار نرخ تقاضا برای محصول فاسدشدنی همراه با تخفیف قیمت

ابتدا مقدار تقاضا در دوره  $[0, t]$  به صورت رابطه ۵ محاسبه می شود.

$$ED_t = \int_0^t D(p, t) = \int_0^t (a - bp)e^{-\lambda t} = \frac{(a - bp)}{\lambda} [1 - e^{-\lambda t}] \quad (5)$$

مقدار تقاضا در فاصله  $[t, T]$  نیز به صورت رابطه ۶ محاسبه می شود.

$$ED_T = \int_t^T D(p, t) = \int_t^T (a - bp)t^\beta e^{-\lambda t} = \frac{1}{\lambda^4} (a + bp(-1 + \alpha))(e^{-t\lambda}(6 + t\lambda(6 + t\lambda(3 + t\lambda))) + e^{-T\lambda}(-6 - T\lambda(6 + T\lambda(3 + T\lambda)))) \quad (6)$$



در این مقاله قیمت و زمان تخفیف متغیر در نظر گرفته شده‌اند. درآمد حاصل از فروش محصول با قیمت  $p$  در فاصله  $[0, t]$  و درآمد حاصل از فروش با قیمت تخفیفی  $p(1-\alpha)$  در فاصله  $[t, T]$  به صورت رابطه  $\gamma$  محاسبه می‌شود.

$$\Pi_r = P \left[ \frac{(a-bp)}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}) \right] + P(1 - \alpha) \left[ \frac{1}{\lambda^4} (a - bp(1 - \alpha))(e^{-t\lambda}(6 + t\lambda(6 + t\lambda(3 + t\lambda))) + e^{-T\lambda}(-6 - T\lambda(6 + T\lambda(3 + T\lambda)))) \right] \quad (7)$$

هزینه مدل، تنها شامل خرید محصول از تأمین‌کننده است؛ بنابراین تابع سود به صورت رابطه  $\lambda$  است.

$$TP = (P - c) \left[ \frac{(a-bp)}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}) \right] + (P(1 - \alpha) - c) \left[ \frac{1}{\lambda^4} (a - bp(1 - \alpha))(e^{-t\lambda}(6 + t\lambda(6 + t\lambda(3 + t\lambda))) + e^{-T\lambda}(-6 - T\lambda(6 + T\lambda(3 + T\lambda)))) \right] \quad (8)$$

**نتایج و جواب بهینه:** هدف اصلی این مقاله، محاسبه مقادیر بهینه  $t$  و  $p$  به نحوی است که سود حاصل حداکثر شود. از تابع سود نسبت به  $p$  و  $t$  مشتق گرفته و برابر صفر قرار داده می‌شود تا متغیرهای تصمیم محاسبه شود. برای یافتن مقدار بهینه دستگاه معادلات هم‌زمان ۹ و ۱۰ باید حل شود تا معادلات ۱۱ تا ۱۳ به دست آید.

$$\frac{\partial TP}{\partial p} = \frac{b(c+p(-1+\alpha))(-1+\alpha)(e^{-t\lambda}(6+t\lambda(6+t\lambda(3+t\lambda))))}{\lambda^4} + \frac{b(1-e^{-t\lambda})(-c+p)}{\lambda} + \frac{(1-e^{-t\lambda})(a-bp)}{\lambda} - \frac{(a+bp(-1+\alpha))(-1+\alpha)(e^{-t\lambda}(6+t\lambda(6+t\lambda(3+t\lambda))))}{\lambda^4} + \frac{e^{-T\lambda}(-6-T\lambda(6+T\lambda(3+T\lambda)))}{\lambda^4} - \frac{e^{-T\lambda}(-6-T\lambda(6+T\lambda(3+T\lambda)))}{\lambda^4} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial TP}{\partial t} = e^{-t\lambda}(-c+p)(a-bp) - \frac{1}{\lambda^4} (c+p(-1+\alpha))(a+bp(-1+\alpha))(e^{-t\lambda}(t\lambda(t\lambda^2 + \lambda(3+t\lambda)) + \lambda(6+t\lambda(3+t\lambda))) - e^{-t\lambda}\lambda(6+t\lambda(6+t\lambda(3+t\lambda)))) = 0 \quad (10)$$

$$t^* = \frac{(-1)^{2/3}(c-p)^{1/3}(a-bp)^{1/3}}{((c+p(-1+\alpha))(a+bp(-1+\alpha)))^{1/3}} \quad (11)$$

$$p^* = \left( -\frac{a(1-e^{-t\lambda})}{\lambda} - \frac{bc(1-e^{-t\lambda})}{\lambda} + \frac{a(-1+\alpha)(e^{-t\lambda}(6+t\lambda(6+t\lambda(3+t\lambda))))}{\lambda^4} + \frac{e^{-T\lambda}(-6-T\lambda(6+T\lambda(3+T\lambda)))}{\lambda^4} + \frac{bc(-1+\alpha)(e^{-t\lambda}(6+t\lambda(6+t\lambda(3+t\lambda))))}{\lambda^4} \right) / \left( -\frac{2b(1-e^{-t\lambda})}{\lambda} - \frac{2b(-1+\alpha)^2(e^{-t\lambda}(6+t\lambda(6+t\lambda(3+t\lambda))))}{\lambda^4} + \frac{e^{-T\lambda}(-6-T\lambda(6+T\lambda(3+T\lambda)))}{\lambda^4} \right) \quad (12)$$

قضیه: جوابی که از معادلات (۱۱) و (۱۲) به دست می‌آید دارای شرایط درجه دوم برای حداکثرسازی تابع هدف سود خرده‌فروش ( $TP$ ) به صورت سراسری است.

اثبات: برای آنکه نشان داده شود مقدار بهینه به دست آمده برای تابع  $TP$  حداکثر سراسری است، باید ابتدا ماتریس هشین تابع سود نسبت به  $t^*$  و  $p^*$  بهینه محاسبه شود. در صورتی که عنصر اول این ماتریس منفی و دترمینان آن بزرگتر از صفر باشد اثبات کامل می‌شود؛ بنابراین نشان داده می‌شود که این شرایط برقرار است.

$$\frac{\partial^2 TP}{\partial p^2} = -\frac{2b(1-e^{-t\lambda})}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^4} 2b(-1+\alpha)^2(e^{-t\lambda}(6+t\lambda(6+t\lambda(3+t\lambda)))) + e^{-T\lambda}(-6 - T\lambda(6 + T\lambda(3 + T\lambda))) \quad (13)$$

$$\frac{\partial^2 TP}{\partial t^2} = -e^{-t\lambda}(-c+p)(-bp+a)\lambda - \frac{1}{\lambda^4}(c+p(-1+\alpha))(a+bp(-1+\alpha))(e^{-t\lambda}(2t\lambda^3+2\lambda(t\lambda^2+\lambda(3+t\lambda)))) - 2e^{-t\lambda}\lambda(t\lambda(t\lambda^2+\lambda(3+t\lambda)))+\lambda(6+t\lambda(3+t\lambda)))+e^{-t\lambda}\lambda^2(6+t\lambda(6+t\lambda(3+t\lambda))) \quad (14)$$

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 TP}{\partial p^2} & \frac{\partial^2 TP}{\partial p \partial t} \\ \frac{\partial^2 TP}{\partial t \partial p} & \frac{\partial^2 TP}{\partial t^2} \end{bmatrix} \rightarrow Det(H) = \frac{\partial^2 TP}{\partial p^2} * \frac{\partial^2 TP}{\partial t^2} - [\frac{\partial^2 TP}{\partial p \partial t}]^2 > 0 \rightarrow e^{-2t\lambda} \left( - \left( b \left( c(1+t^3(-1+\alpha))+2p(-1+t^3(-1+\alpha)^2)+s(1+t^3(-1+\alpha)) \right) \right)^2 + e^{t\lambda} \left( a(c(3t^2+\lambda-t^3\lambda)-p(-3t^2(-1+\alpha)+\lambda+t^3(-1+\alpha)\lambda))-bp(c(-3t^2(-1+\alpha)+\lambda+t^3(-1+\alpha)\lambda)+p(-3t^2(-1+\alpha)^2-\lambda+t^3(-1+\alpha)^2\lambda)) \right) \left( -\frac{2b(1-e^{-t\lambda})}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^4} 2b(-1+\alpha)^2 \left( e^{-t\lambda} (6+t\lambda(6+t\lambda(3+t\lambda))) + e^{-T\lambda} (-6-T\lambda(6+T\lambda(3+T\lambda))) \right) \right) \right) > 0 \quad (15)$$

با ساده‌سازی مقدار دترمینان رابطه ۱۶ به دست می‌آید.

$$Det(H) = e^{-2t\lambda} \left( - \left( b \left( c(1+t^3(-1+\alpha))+2p(-1+t^3(-1+\alpha)^2) \right) \right)^2 + \frac{1}{\lambda^4} 2be^{-t\lambda} (3t^2(c+p(-1+\alpha))(a+bp(-1+\alpha)) - ((-c+p)(bp-a)(-1+t^3)+p(b(c-2p)+a)t^3\alpha+bp^2t^3\alpha^2)\lambda)((-1+e^{-t\lambda})\lambda^3 - (-1+\alpha)^2(e^{-t\lambda}(6+t\lambda(6+t\lambda(3+t\lambda)))) + e^{-T\lambda}(-6-T\lambda(6+T\lambda(3+T\lambda)))) \right) \quad (16)$$

$$0 < \alpha < 1, \lambda < 1, p > c, t < T$$

برای اثبات مثبت بودن Det(H) به صورت زیر عمل می‌شود:

ابتدا از Det(H) نسبت به هر یک از متغیرهای مسئله یعنی p و t مشتق دوم گرفته می‌شود. منفی بودن مشتق دوم نشان‌دهنده این است که تابع Det(H) در هر برش از t نسبت به p و در هر برش از p نسبت به t مقعر است. سپس نشان داده می‌شود این تابع دو جواب برای هر کدام از متغیرهای p و t دارد؛ بنابراین مقدار Det(H) در بازه بین دو جواب که بازه مطلوب است، مثبت و اثبات کامل می‌شود.

مقدار مشتق دوم Det(H) نسبت به p به صورت زیر است. با کمی دقت مشخص می‌شود تک‌تک عبارات منفی است و در نهایت جمع آنها منفی می‌شود.

$$\frac{\partial^2 Det(H)}{\partial p^2} = 4b^2 \left( -2(-1+t^3(-1+\alpha))^2 - \frac{1}{\lambda^4} e^{t\lambda} (-\lambda+t^2(-1+\alpha)^2(-3+t\lambda)) \right) \left( (-1+e^{-t\lambda})\lambda^3 - (-1+\alpha)^2 \left( e^{-t\lambda} (6+t\lambda(6+t\lambda(3+t\lambda))) + e^{-T\lambda} (-6-T\lambda(6+T\lambda(3+T\lambda))) \right) \right) < 0$$

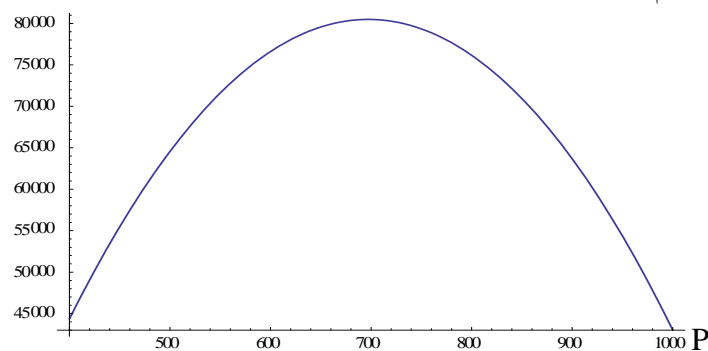
با حل  $\text{Det}(H)=0$  تنها دو مقدار برای  $p$  به دست می‌آید و باتوجه به منفی بودن مشتق دوم آن، واضح است تابع  $\text{Det}(H)$  بین دو ریشه به دست آمده در بالای محور عمودی قرار دارد و مثبت است. مقادیر به دست آمده برای  $p$  به صورت شکل (۲) است (به دلیل حجم بالای محاسبات عبارات به دست آمده مختصر نشان داده شده است).

$$\left\{ \left\{ p \rightarrow \left( -2ab - 2b^2c - 2abe^{t\lambda} - 2b^2ce^{t\lambda} + \frac{4abt^3 + 4b^2ct^3 + 2abe^{t\lambda}t^3 + \dots 213 \dots}{18abe^{t\lambda-T\lambda}t^2T^3\alpha^2} + \frac{18b^2ce^{t\lambda-T\lambda}t^2T^3\alpha^2}{\lambda} + \frac{6abe^{t\lambda-T\lambda}t^3T^2\alpha^3}{\lambda} + \frac{6b^2ce^{t\lambda-T\lambda}t^3T^2\alpha^3}{\lambda} - \frac{6abe^{t\lambda-T\lambda}t^2T^3\alpha^3}{\lambda} - \frac{6b^2ce^{t\lambda-T\lambda}t^2T^3\alpha^3}{\lambda} \right) \right\} / \left( 2 \left( -2b^2 - 2b^2e^{t\lambda} + 4b^2t^3 + 2b^2e^{t\lambda}t^3 - 2b^2t^6 + 2b^2e^{t\lambda-T\lambda}T^3 - 2b^2e^{t\lambda-T\lambda}t^3T^3 - 8b^2t^3\alpha - 4b^2e^{t\lambda}t^3\alpha + \dots 110 \dots + \frac{6b^2e^{t\lambda-T\lambda}T^2\alpha^2}{\lambda} - \frac{36b^2e^{t\lambda-T\lambda}t^3T^2\alpha^2}{\lambda} + \frac{36b^2e^{t\lambda-T\lambda}t^2T^3\alpha^2}{\lambda} + \frac{24b^2e^{t\lambda-T\lambda}t^3T^2\alpha^3}{\lambda} - \frac{24b^2e^{t\lambda-T\lambda}t^2T^3\alpha^3}{\lambda} - \frac{6b^2e^{t\lambda-T\lambda}t^3T^2\alpha^4}{\lambda} + \frac{6b^2e^{t\lambda-T\lambda}t^2T^3\alpha^4}{\lambda} \right) \right) \right\},$$

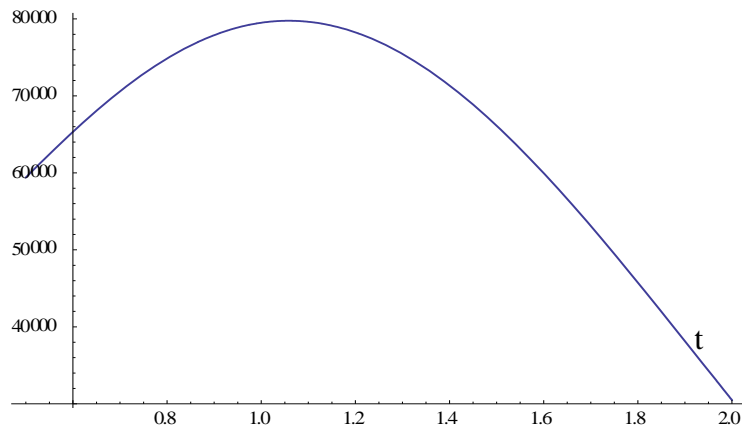
$$\left\{ \left\{ p \rightarrow \left( -2ab - 2b^2c - 2abe^{t\lambda} - 2b^2ce^{t\lambda} - \dots 1 \dots + \frac{\dots 217 \dots}{\lambda} + \frac{\dots 1 \dots}{\lambda} + \frac{6b^2 \dots 3 \dots T^2\alpha^3}{\lambda} - \frac{6abe^{\dots 1 \dots} t^2 T^3 \alpha^3}{\lambda} - \frac{6b^2 ce^{t\lambda - \dots 1 \dots} t^2 T^3 \alpha^3}{\lambda} \right) \right\} / \left( 2 \left( -2b^2 - 2b^2e^{t\lambda} + 4b^2t^3 + \dots 129 \dots + \frac{6b^2 e^{\dots 1 \dots} t^2 T^3 \alpha^4}{\lambda} \right) \right) \right\} \right\}$$

شکل ۲- محاسبات مربوط به مقادیر  $p$  در نرم‌افزار mathematica

به همین ترتیب مراحل فوق برای متغیر  $t$  نیز انجام شده است. در ادامه شکل مربوط به تابع  $\text{Det}(H)$  نسبت به  $p$  و  $t$  در بازه‌های مشخص شده رسم شده است. همان‌طور که در شکل ۳ و ۴ مشاهده می‌شود منحنی در بالای محور افقی قرار دارد و مقدار آن مثبت است. نمودار تابع  $\text{Det}(H)$  برای مثال مطرح شده در بخش ۳-۵ در بازه‌های  $[0, 1000]$ ،  $p = [400, 2]$  و  $t = [0.5, 0]$  رسم شده است.



شکل ۳- نمودار تابع  $\text{Det}(H)$  نسبت به  $p$

شکل ۴- نمودار تابع  $D(H)$  نسبت به  $t$ 

برای انجام محاسبات از نرم افزار Mathematica9 استفاده شده است. باتوجه به اثبات مثبت بودن دترمینان ماتریس هیشین در نقطهٔ بهینه، جواب به دست آمده حداکثر سراسری است. در روش دوم ارائه شده، برای هر مثال عددی مقدار دترمینان ماتریس هیشین محاسبه می شود. این روش ارزش کمتری دارد؛ ولی باتوجه به زیاد بودن تعداد پارامترها در روش نخست این روش استفاده می شود. در مثال عددی ارائه شده در این مقاله دترمینان محاسبه شده مثبت است.

#### مقدار جواب بهینه

الگوریتم: باتوجه به توضیحات بیان شده، برای محاسبهٔ مقادیر مدنظر از الگوریتم ساده ای برگرفته از ادبیات استفاده می شود (میهمی، ۱۳۸۹):

۱. مقدار اولیه  $p_1$  برای قیمت تعیین می شود و  $p_j = p_1$  قرار داده می شود؛
۲. برای  $p_j$  از معادله (۱۱) مقدار بهینهٔ زمان تخفیف به دست می آید ( $t_j$ );
۳. باتوجه به مقدار  $t_j$  به دست آمده در مرحله ۲ و استفاده از معادله (۱۲) مقدار  $p_{j+1}$  تعیین می شود؛
۴. اگر اختلاف بین  $p_j, p_{j+1}$  (خطا) کمتر از  $\delta$  باشد، قرار داده می شود  $p^* = p_{j+1}$  و  $t^* = t_j$  مقادیر بهینه هستند.
- الگوریتم متوقف می شود و به مرحله ۵ می رود. اما اگر اختلاف بین  $p_j, p_{j+1}$  بزرگ باشد،  $p_j = p_{j+1}$  و بازگشت به مرحله ۲ انجام می گیرد (مقدار خطای قابل گذشت  $0.0001$  فرض می شود یعنی اگر  $|p_j - p_{j+1}| < 0.0001$  باشد الگوریتم متوقف می شود).
۵. مقدار  $TP^*$  با جایگذاری  $p^*$  و  $t^*$  باتوجه به معادله (۸) محاسبه می شود.

مثال عددی: برای محاسبهٔ مقادیر عددی توابع و پارامترها به صورت زیر در نظر گرفته می شود و نتایج در جدول ۱ آمده است.

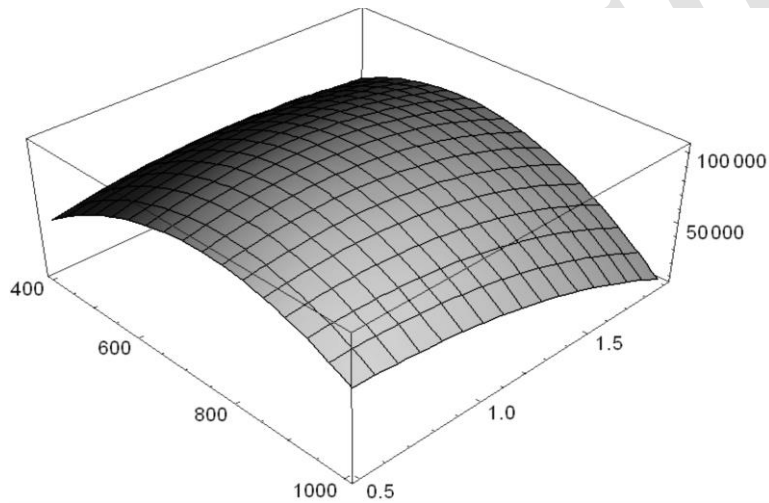
$$D_1(p,t) = (500 - 0.5p)e^{-0.9\alpha t}, D_2(p,t) = (500 - 0.5p)t^3 e^{-0.9\alpha t}, T=2, c=200, \alpha=0.3$$

$$P^* = 694/826, t^* = 1/0.8, TP^* = 104558/612, Q^* = 293/945$$

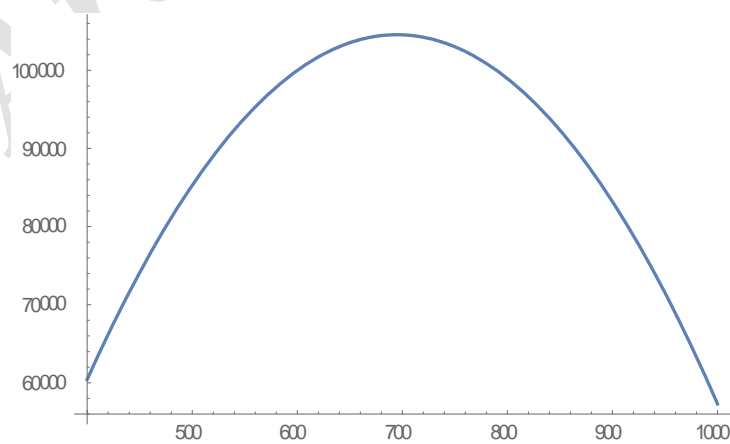
جدول ۱- نتایج مثال عددی

گام	$p_j$	$t^*$	TP*
۱	۶۰۰	۱/۰۷۸	۱۰۰۱۸۲/۵۱۲
۲	۶۹۰/۳۱۰	۱/۰۱۲	۱۰۴۵۴۸/۸۰۶
۳	۶۹۴/۵۹۷	۱/۰۰۸	۱۰۴۵۵۸/۵۷۳
۴	۶۹۴/۸۱۳	۱/۰۰۸	۱۰۴۵۵۸/۶۱۱
۵	۶۹۴/۸۲۵	۱/۰۰۸	۱۰۴۵۵۸/۶۱۲
۶	۶۹۴/۸۲۶	۱/۰۰۸	۱۰۴۵۵۸/۶۱۲

نمودار تابع هدف: تابع هدف به صورت شکل (۵) است. این تابع دارای حداکثر سراسری است و برای بازه‌های قیمت از ۴۰۰ تا ۱۰۰۰ و زمان تخفیف از ۰/۵ تا ۲ رسم شده است. محور عمودی نیز مقدار تابع هدف است. شکل (۶) مقدار سود را به ازاء قیمت‌های مختلف نشان می‌دهد.

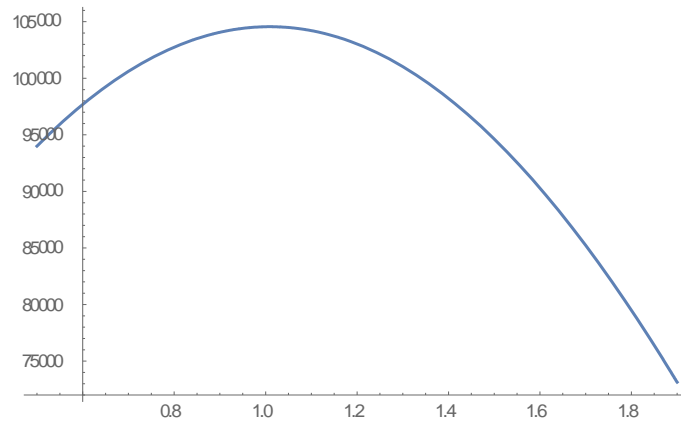


شکل ۵- نمودار سه بعدی تابع هدف حالت دوم



شکل ۶- مقدار تابع سود به ازای مقادیر مختلف قیمت و  $t^*$

شکل (۷) مقدار سود را به ازاء زمان‌های مختلف برای تخفیف نشان می‌دهد.



شکل ۷- مقدار تابع سود به ازای مقادیر مختلف زمان و  $p^*$

تحلیل حساسیت: در این قسمت تأثیر تغییرات پارامترهای مسئله روی  $t_1^*$ ،  $p^*$ ،  $TP^*$  و  $Q^*$  بررسی می‌شود و براساس آن نتایج مدیریتی استخراج می‌شود. نتایج تحلیل حساسیت برای مثال ارائه شده در جدول (۱) نشان داده است.

تأثیر تغییرات در مقدار پارامترهای  $T$ ،  $c$  و  $\alpha$  بر  $t^*$ ،  $p^*$ ،  $TP^*$  و  $Q^*$  براساس مثال عددی، در جدول ۲ نشان داده شده است. تحلیل حساسیت بوسیله تغییر در مقدار هر پارامتر به میزان  $\pm 0.5\%$ ،  $\pm 2.5\%$  و  $\pm 5.0\%$  و ثابت نگه داشتن سایر پارامترها انجام شده است. نتایج مشاهده شده از تغییرات پارامترها به صورت جدول ۲ خلاصه شده است.

جدول ۲- تحلیل حساسیت باتوجه به پارامترهای مدل

پارامتر	مقدار	$p^*$	$t^*$	$TP^*$	$Q^*$
C	۱۰۰	۶۳۷/۱۵	۱/۰۰۵	۱۳۴۶۵	۳۲۸
	۱۵۰	۶۶۵/۹۸	۱/۰۰۷	۱۱۹۶۸۱	۳۱۱
	۲۵۰	۷۲۳/۶۲	۱/۰۱۱	۹۰۲۸۷	۲۷۷
	۳۰۰	۷۵۲/۳۶	۱/۰۱۴	۷۶۸۶۷	۲۶۰
T	۱	۵۹۳/۵۴	۱/۰۸۲	-	-
	۱/۵	۶۴۳/۰۵	۱/۰۴۷	۷۰۲۴۶	۱۹۱
	۲/۵	۷۳۴/۰۳	۰/۹۸	۱۵۱۴۹۱	۴۲۴
	۳	۷۶۰/۹۰	۰/۹۵	۲۰۵۴۲۳	۵۶۷
$\alpha$	۰/۱	۶۳۳/۰۶	۰/۹۹	۱۱۱۲۷۰	۲۸۲
	۰/۲	۶۶۵/۲۶	۱/۰۰۰	۱۰۹۲۵۳	۲۸۶
	۰/۴	۷۱۷/۶۵	۱/۰۳۶	۹۷۰۰۳	۳۰۶
	۰/۴۵	۷۲۴/۳۳	۱/۰۶۵	۹۲۰۰۸	۳۱۴

۱. هنگامی که مقدار پارامترهای  $c$ ،  $T$  و  $\alpha$  افزایش می‌یابد، قیمت فروش بهینه خرده‌فروش  $p^*$  افزایش می‌یابد. به‌علاوه  $p^*$  نسبت به تغییر در پارامترهای  $c$ ،  $T$  و  $\alpha$  در جهت مثبت حساس است. این منطقی است؛ زیرا هزینه خرید و تخفیف تأثیر زیادی روی قیمت فروش دارند.

۲. هنگامی که مقدار پارامتر  $T$  افزایش می‌یابد، زمان بهینه  $t^*$  کاهش می‌یابد؛ درحالی‌که با افزایش، مقدار پارامترهای  $c$  یا  $\alpha$  افزایش می‌یابد؛ یعنی افزایش هزینه خرید و درصد تخفیف موجب می‌شود زمان تخفیف دیرتر شروع شود.

۳. هنگامی که مقدار پارامترهای  $T$  یا  $\alpha$  افزایش یابد، مقدار سفارش اقتصادی  $Q^*$  افزایش می‌یابد. با توجه به تخفیف، افزایش به‌کندی انجام می‌شود. همچنین با افزایش  $c$  مقدار سفارش اقتصادی کاهش می‌یابد؛ زیرا هزینه خرید موجب کاهش مقدار سفارش می‌شود.

۴. هنگامی که مقدار پارامترهای  $c$  یا  $\alpha$  افزایش می‌یابد، تابع سود بهینه به‌ازاء واحد  $TP^*$  کاهش می‌یابد. این نشان می‌دهد هزینه و تخفیف دیر هنگام اثر منفی روی سود نهایی دارند. همچنین با افزایش دوره فروش  $T$  سود نهایی افزایش می‌یابد.

### نتیجه‌گیری

در این مقاله مدل قیمت‌گذاری برای کالای فاسدشدنی در شرایط تخفیف فروش ارائه شد. در مدل‌سازی مسئله فرض شده است با اعلام کاهش قیمت فروش، نرخ تقاضا تغییر محسوس دارد و تقاضا تابعی از قیمت و زمان است. در این مقاله اثبات شد تابع هدف سود به‌ازاء مقادیر بهینه قیمت و زمان تخفیف، بهینه و منحصر به فرد است. در انتها با استفاده از الگوریتمی ساده مثال عددی مدل و نتایج با استفاده از تحلیل حساسیت روی پارامترهای مدل تشریح شد. مدل معرفی شده در این مقاله مدلی جامع و کامل است و نسبت به مقادیر مختلف پارامترهای تابع نرخ تقاضا منعطف مقاله است. مدل ارائه شده در این پژوهش از چند جهت می‌تواند گسترش یابد، نرخ تقاضا در این مقاله به‌صورت قطعی و وابسته به زمان در نظر گرفته شده است؛ با احتمالی کردن آن می‌توان موضوع مناسبی برای پژوهش‌های آتی تعریف کرد. همچنین می‌توان درصد تخفیف را متغیر در نظر گرفت. از جنبه دیگر در نظر گرفتن سیاست‌های تبلیغات، تأخیر در پرداخت‌ها و مدل‌های هماهنگی در سیستم (زنجیره تأمین) و بررسی نتایج حاصل است.

### References

- Abad L. P., (1996), Optimal pricing and lot-sizing under conditions of perishability and partial backordering . *Management Science*, 42(8): 1093-1104.
- Bhattacharjee, S., Ramesh, R., (2000). A multi-period profit maximizing model for retail supply chain management: An integration of demand and supply-side mechanisms *European Journal of Operational Research*, 122: 584-601.
- Bisi, A., Dada, M, (2007), Dynamic learning, pricing, and ordering by a censored newsvendor *Naval Research Logistics*, 54(4): 448-461.
- Bhattacharjee S., Ramasesh R., (2000), A multi-period profit maximizing model for retail supply chain

- management: An integration of demand and supply-side mechanisms *European Journal of Operational Research*, 122, 584-601.
- Chun, Y. H., (2003), Optimal pricing and ordering policies for perishable commodities *European Journal of Operational Research*, 144(1): 68-82.
- Chopra S., Meindl P., (2006) *Supply Chain Management* 3rd ed. Prentice Hall.
- Cohen, M. A., (1977) Joint Pricing and Ordering Policy for Exponentially Decaying Inventory with Known Demand *Naval Research Logistics Quarterly*, 24: 257-268.
- Dixit, A., Whipple, T. W., Zinkhan, G. M., Gailey E., (2008). A taxonomy of information technology-enhanced pricing strategies *Journal of Business Research*, 61, 275-283.
- Díaz, I. M., (2006), Demand restrictions in price-based decisions: manager versus consumers *Journal of Product & Demand Management*, 15(3): 214-224.
- Eilon, S. M., (1966), Issuing and Pricing Policy of Semi-Perishables *in Proceedings of the 4th International Conference on Operational Research*, Wiley-Interscience. New York, NY, USA.
- Goyal S.K., Giri B., (2001), Recent trends in modeling of deteriorating inventory *European Journal of Operational Research*, 134: 1-16.
- Khanlarzade, N. et. al. (2014), Inventory Control with Deteriorating Items: A State-Of-The-Art Literature Review. *International journal of industrial engineering computations*, 5(2): 179-198.
- Li D., Kehoe D., Drake P., (2006), Dynamic planning with a wireless product identification technology in food supply chains *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 30(9-10): 938-944.
- Mukhopadhyay, S. M., (2005), An EOQ Model with Two-Parameter Weibull Distribution Deterioration and Price-Dependent Demand *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 36: 25-33.
- Maihami, R., and Karimi B., (2014), Optimizing The Pricing And Replenishment Policy For Non-Instantaneous Deteriorating Items With Stochastic Demand And Promotional Efforts. *Computers & Operations Research*, 51: 302-312.
- Nakhai I, Maihami R. (2011), “Joint Pricing and Inventory Control for Deteriorating Items with Partial Backlogging”. *IJIEPM*, 21 (4): 167-177, in Persian.
- Pradeep K., Banerjee, T. R., (2012), A flexible model for the pricing of perishable assets *Omega*, 40(50): 533-544.
- Peymandoust, F., (2012), Developing a Joint Pricing and Inventory Control Model for Deteriorating Items in a Two Echelon Supply Chain, MSc. Thesis in Industrial Engineering, Tarbiat Modares University, in Persian.
- Rajan A., Steinberg R., Richard S., (1992), Dynamic pricing and ordering decisions by monopolist. *Management Science*, 38(2): 240-262.
- Ramasesh RV., (2010), Lot-sizing decision under limited-time price incentives: a review *Omega*, 38(3-4): 118-135.
- Tajbakhsh M.M., Lee C., Zolfaghari S., (2011), An inventory model with random discount offerings *Omega*, 39(6), 710-718.
- Talluri, K.T., Ryzin, G.J. van, (2005), *The Theory and Practice of Revenue Management*, 1st ed. Springer.
- Tsao, Y.Chung, Sheen, G.Ji., (2008), Dynamic pricing, promotion and replenishment policies for a deteriorating



- item under permissible delay in payments .*Computers & Operation Research*, 35: 3562-3580.
- Wee, H.M., (1997), A Replenishment Policy for Items with a Price-Dependent Demand and a Varying Rate of Deterioration .*Production Planning & Control*, 8: 494-499.
- Wee, H.M., (1999), Deteriorating Inventory Model with Quantity Discount, Pricing and Partial Backordering .*International Journal of Production Economics*, 59: 511-518.
- Wee, H.M., (1995), Joint Pricing and Replenishment Policy for Deteriorating Inventory with Declining Market .*International Journal of Production Economics*, 40: 163-171.
- Wang X., Li D., (2012), A dynamic product quality evaluation based pricing model for perishable food supply chains .*Omega*, 40: 906-917.
- Zhang, Jianxiong et al., (2015), Coordinating A Supply Chain For Deteriorating Items With A Revenue Sharing And Cooperative Investment Contract. *Omega* 56: 37-49.

- 
- <sup>1</sup>- Style Goods
  - <sup>2</sup>- Khanlarzade
  - <sup>3</sup>- Wang
  - <sup>4</sup>- Chopra
  - <sup>5</sup>- Bisi and Dada
  - <sup>6</sup>- Ramasesh
  - <sup>7</sup>- Eilon
  - <sup>8</sup>- Cohen
  - <sup>9</sup>- Wee
  - <sup>10</sup>- Mukhopadhyay
  - <sup>11</sup>- Banerjee
  - <sup>12</sup>- Rajan
  - <sup>13</sup>- Abad
  - <sup>14</sup>- Díaz
  - <sup>15</sup>- Li
  - <sup>16</sup>- Bhattacharjee and Ramesh
  - <sup>17</sup>- Zhang
  - <sup>18</sup>- Maihami and Karimi
  - <sup>19</sup>- Tsao

Archive of SID