فصلنامه پژوهش‌ها و سیاست‌های اقتصادی
سال بیست و دوم، شماره ۷۲، زمستان ۱۳۹۳، صفحات ۱۷۲-۱۵۵

استفاده از کاپیولا-CVaR در بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری و مقایسه تطبیقی آن با روش Mean-CVaR

سعید فلاح‌پور
استادیار گروه مدیریت مالی دانشکده مدیریت دانشگاه تهران
falahpor@ut.ac.ir

مهدی باغبان
کارشناس‌ارشد مدیریت مالی (نویسنده مسئول)
m.baghban@ut.ac.ir

بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری یکی از چالش‌های پیش‌روی بنگاه‌های اقتصادی است. صاحبنظران مختلف با فرضیات گوناگون در پی یافتن وزن بهینه هر دارایی در سبد سرمایه‌گذاری می‌باشند. باتوجه به اینکه یکی از فعالیت‌های عمده صندوق‌های سرمایه‌گذاری وشرکت‌های سرمایه‌گذاری پرتفوی‌گردانی می‌باشد انتخاب روش مناسب بهینه‌سازی برای این شرکت‌ها امری ضروری است. با توجه به محدودیت اساسی روش میانگین-واریانس مبنی بر نرمال بودن توزیع بازده دارایی‌ها روش‌های فاقد این محدودیت برای استفاده شرکت‌های مذکور و سرمایه‌گذاران مناسب‌تر می‌باشند. از سوی معیار ارزش در معرض خطر شرطی (CVaR) علاوه بر دارا بودن تمام خصوصیات معیار ارزش در معرض خطر (VaR) دارای مزایای بیشتری نسبت به آن از قبیل سادگی محاسبات، معیار دقیق‌تر ریسک و در نظر گرفتن احتمالات مختلف برای حالات مختلف می‌باشد، به این دلیل در تحقیق خود از معیار ارزش در معرض خطر شرطی استفاده می‌نماییم. بر این اساس، در این تحقیق برای دو فلز طلا و مس با استفاده از داده‌های هفتگی ابتدای سال ۲۰۰۲ تا انتهای ۲۰۱۳ با استفاده از روش کاپیولای نرمال اقدام به ایجاد پرتفوی بهینه می‌نماییم و در انتها معیار شارپ به‌دست آمده از این روش را با معیار شارپ Mean-CVaR مقایسه می‌کنیم و مشاهده می‌شود روش کاپیولا عملکرد بهتری دارد.

طبقه‌بندی JEL: *G11, G19*.

واژه‌های کلیدی: *بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری، تابع کاپیولا، ارزش در معرض خطر، ارزش در معرض خطر شرطی.*

* **تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۲/۲ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۳/۵/۱۹**

۱. مقدمه

در دنیای امروز هر شخص با امید به اینکه با چشم‌پوشی از مصرف فعلی شرایطی را فراهم آورد که در آینده بیشتر مصرف کند اقدام به سرمایه‌گذاری می‌نماید، بنابراین هر شخص به‌دنبال بازدهی بالاتر در مقابل تحمل ریسک کمتر می‌باشد تا مطلوبیت خود را به حداکثر برساند و برای دستیابی به هدف فوق اقدام به تشکیل پرتفوی می‌نماید. برای تشکیل پرتفوی تعدادی دارایی با وزن‌های متفاوت کنار یکدیگر قرار می‌گیرند. به انتخاب بهترین ترکیب دارایی‌هاکه متضمن کسب بیشترین بازدهی در یک سطح مشخص ریسک یاتحمل کمترین ریسک در یک سطح مشخص بازدهی باشد بهینه‌سازی پرتفوی می‌گویند.

استفاده از تئوری کاپیولا به تحقیقات اسکلار (۱۹۵۹) باز می‌گردد، اما استفاده از این ابزار در مالی نظریه‌ای جدید بوده و در سال‌های گذشته بهره‌گیری از آن رشد بسیاری داشته است. کاپیولا کارکردهای بسیاری دارد که می‌توان به مدیریت ریسک، وابستگی‌های سری زمانی و قیمت‌گذاری مشتقات مالی اشاره نمود. کاربرد زیاد کاپیولا در نظریه‌های مالی به این دلیل است که فرضیه نرمال بودن توزیع بازده‌ها را گسترش داده و استفاده از مدل‌های مالی را برای هر متغیری با هر توزیع حاشیه‌ای فراهم نموده است.

در تحلیل‌های مالی مدرن شواهد مبنی بر اینکه توزیع بازده دارایی‌های مالی غیرنرمال است در حال افزایش می‌باشد، در حالی‌که در روش‌های مرسوم مدیریت ریسک مانند روش حداقل واریانس ارائه‌شده توسط مارکوئیتز فرض اساسی نرمال بودن توزیع بازده دارایی‌ها می‌باشد. زمانی‌که توزیع بازدهی‌ها نرمال نیست ضریب همبستگی خطی برای بیان ساختار وابستگی معیار مناسبی نیست، به این دلیل در این تحقیق از کاپیولا به‌عنوان معیار جایگزین برای مدلسازی ساختار وابستگی استفاده می‌کنیم. ارزش در معرض خطر شرطی[1] به‌عنوان معیار جذابی از ریسک (معیار ریسک منسجم)[2] محسوب می‌شود که در سال‌های گذشته مورد استقبال قرار گرفته و به‌تدریج به‌عنوان ابزاری مفید برای اندازه‌گیری ریسک و مدیریت آن مطرح گردید که آن را با نماد CVaR نشان می‌دهند.

ابتدا کارهای انجام‌شده با استفاده از کاپیولا مالی را مرور می‌نماییم، در ادامه به معرفی کاپیولا و تابع کاپیولای نرمال می‌پردازیم و روش بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری به روش کاپیولا-CVaRرا بیان می‌کنیم. در ادامه، معیار شارپ هر یک از روش‌ها را مقایسه می‌نماییم و در پایان مشاهده می‌کنیم که بهینه‌سازی به روش کاپیولا-CVaR نتایج بهتری نسبت به روش Mean-CVaR با توجه به معیار شارپ ارائه می‌نماید.

1. Conditional Value at Risk (CVaR)
2. Coherent Risk Measure

۲. پیشینه تجربی تحقیق

مدارک و مستندات فراوانی وجود دارد که نشان می‌دهد بسیاری از متغیرهای اقتصادی توزیع نرمال ندارند و تاریخچه آن به کار میلز (۱۹۲۷) باز می‌گردد. از جمله مواردی که نشان می‌دهد توزیع‌های تک متغیره دارای توزیع نرمال نیست وجود کشیدگی بیش از حد در دنباله‌ها و چولگی می‌باشد. مطالعات اخیر نشان می‌دهد توزیع‌های چند متغیره نیز نرمال نیستند که اصطلاحاً گفته می‌شود دارای وابستگی نامتقارن هستند. یکی از مثال‌های وابستگی نامتقارن زمانی است که دو دارایی دارای ضریب همبستگی بیشتر در زمان بازار نزولی نسبت به بازار صعودی می‌باشند و این مطلب در کارهای لانجین و سولنیک (۲۰۰۱)، ارب و همکاران (۱۹۹۴) و آنگ و چن (۲۰۰۲) نشان داده شده است. ارب و همکاران با بررسی ضریب همبستگی سهام بین کشورهای G-7 متوجه شدند ضریب همبستگی در دوره‌های رکود از ضریب همبستگی در دوره‌های رشد اقتصادی بیشتر است. لانجین و سولنیک با استفاده از تئوری مقدار بسیار بزرگ[1] دنباله‌های توابع توزیع چند متغیره را مدلسازی نمودند. در تحقیق آنها فرضیه نرمال بودن توزیع بازدهی‌های چند متغیره در دنباله‌های منفی رد شد، در حالی که در دنباله‌های مثبت موفق به رد فرضیه صفر نشدند.

مدلسازی وابستگی یکی از عوامل کلیدی در ساختن پرتفولیو و مدیریت ریسک می‌باشد. انتخاب یک مدل نامناسب منجر به انتخاب پرتفوی غیربهینه و اندازه‌گیری نادرست ریسک می‌شود. به‌طور سنتی از ضریب همبستگی برای توضیح وابستگی بین متغیرها استفاده شده است، اما تحقیقات اخیر نشان‌دهنده برتری کاپیولاها برای مدلسازی وابستگی به‌دلیل انعطاف بیشتر آنها نسبت به رویکرد ضریب همبستگی می‌باشد. به‌عنوان مثال، می‌توان به کارهای امبرچتس و همکاران (۲۰۰۲) اشاره نمود. ضریب همبستگی خطی نقص عمده دارد که تحت تبدیل غیرخطی ناوردا نیست، در حالی‌که معیارهای وابستگی که از کاپیولا استنتاج می‌شوند می‌توانند بر این مشکل غلبه کنند و کاربرد وسیع‌تری دارند. در این زمینه می‌توان به کارهای نلسون (۱۹۹۷)، ویی و هوو (۲۰۰۲) و واندنهند و لامبرت (۲۰۰۳) اشاره نمود.

لغت کاپیولا نخستین بار توسط اسکلار (۱۹۵۹)استفاده شد. هر چند ایده آن در نوشته‌های هوئفدینگ (۱۹۴۰) مشاهده شده است و هم‌اکنون یکی از روش‌های مهم در زمینه ایجاد توزیع‌های چند متغیره می‌باشد. فری و مک‌نیل (۲۰۰۳)، مارشال و همکاران (۲۰۰۳) و هامرل و راسچ (۲۰۰۵)کاربرد کاپیولا را در زمینه قیمت‌گذاری مشتقه‌ها بررسی نمودند. جانکر و همکاران (۲۰۰۶) کاربرد کاپیولا را در زمینه ساختار زمانی نرخ بهره بررسی نمودند، همچنین گیسک (۲۰۰۴) و منگازا و وچیاتو (۲۰۰۴) استفاده از کاپیولا را در زمینه ریسک اعتباری بررسی نمودند. پوون و همکاران (۲۰۰۴) با استفاده از کاپیولای گواسی و گامبل اثر آن را

1. Extreme Value Theory

در پرتفوی خطی بررسی نمودند. علاوه بر این، لورتن و انگلیش (۲۰۰۰)، چمپبل و همکاران (۲۰۰۲) و آنگ و چن (۲۰۰۲) استفاده از کاپیولا را در متنوع‌سازی پرتفوی بررسی نمودند.

کاپیولای شرطی را نخستین بار پاتون (۲۰۰۱) در پایان‌نامه دکترای خود معرفی نمود. گوبرگ، جنست و ورکر (۲۰۰۵) و هامرل و راسچ (۲۰۰۵) کاربرد کاپیولا را در قیمت‌گذاری اختیارها بررسی نمودند. تحقیق گوبرگ و همکاران نشان می‌دهد قیمت اختیارهایی که با استفاده از توابع کاپیولا به‌دست می‌آید بسیار متفاوت از قیمت اختیارهایی است که از روش‌هایی به‌دست می‌آیند که فرض می‌کنند ساختار وابستگی در طول زمان ثابت است. نسلهوا و همکاران (۲۰۰۶) برای بررسی ریسک عملیاتی بانک‌ها از کاپیولا استفاده نموده‌اند.

امبرچتس و همکاران (۱۹۹۹) برای نخستین بار استفاده از کاپیولا را در مالی مطرح نمودند. چروبونی و همکاران (۲۰۰۴) به‌صورت سیستماتیک و منظم کاربرد کاپیولا را در مالی نشان دادند. جاندوا و راکینگر (۲۰۰۶) مدل کاپیولا-گارچ را ارائه نمودند و از آن برای استخراج ساختار وابستگی بین بازارهای سهام استفاده نمودند. ووی و زانگ (۲۰۰۴) از روش کاپیولا-گارچ به‌منظور تخمین ساختار وابستگی بین بازار سهام شانگهای و بازار سهام شنزن استفاده نمودند. وا و چن (۲۰۰۶) از روش کاپیولا-گارچ به‌منظور بررسی ریسک پرتفوی بازار سهام چین استفاده نمودند.

۳. روش تحقیق

۳-۱. توابع کاپیولا

در بازارهای مالی نه توزیع‌های حاشیه‌ای بازدهی‌های نرمال دارند و نه وابستگی بین بازدهی‌ها خطی می‌باشند. نتیجه این است که ضریب همبستگی خطی پیرسون معیار مناسبی برای وابستگی نیست. در مقابل، می‌توان از توابع کاپیولا که ابزارهای بسیار منعطفی برای مدلسازی توزیع‌های مشترک هستند استفاده نمود. معمولاً با استفاده از توابع کاپیولا می‌توان توابع توزیع مشترک بازدهی‌ها را بهتر از توزیع‌های بیضی شکل مدلسازی نمود.

برای درک بهتر مفهوم کاپیولا شرح مختصری در رابطه با نحوه شبیه‌سازی بر مبنای یک تابع توزیع[1] مشخص ارائه می‌نماییم، اما ابتدا به مفاهیم پایه‌ای در این زمینه می‌پردازیم. فرض کنید که X یک متغیر تصادفی پیوسته با دامنه D باشد.تابع توزیع F برای متغیر تصادفی X، تابع یکنوا صعودی از D به [0,1] می‌باشد، به نحوی که:

$$F \qquad (۱)$$

1. Distribution Function

بنابراین به‌ازای هر $x \in D$ احتمال آنکه X کمتر از x باشد برابر با مقدار تابع توزیع X در نقطه x می‌باشد. معکوس تابع توزیع X همانند هر تابع معکوس دیگری به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

F (۲)

F

اگر فرض کنیم F در تمام طول D مشتق‌پذیر باشد، آنگاه تابع چگالی[۱] X برابر است با مشتق تابع توزیع $F(f(x)=F'(x))$ و از آنجا که F تابع یکنوا صعودی می‌باشد $f(x)\geq 0$ است. مقدار متغیر تصادفی پیوسته X با احتمال $\alpha \in [0,1]$ مقدار x_α از متغیر تصادفی X است، به نحوی که:

P (۳)

ازکوانتیل‌ها برای شبیه‌سازی استفاده می‌شود. ابتدا یک متغیر تصادفی u که نشان‌دهنده احتمال است را شبیه‌سازی می‌کنیم، به این دلیل که این عدد از یک توزیع یکنواخت استاندارد[۲] به‌دست آمده با نماد u نشان داده می‌شود. حال از معکوس تابع توزیع برای یافتن کوانتیل مربوطه استفاده می‌کنیم. u کوانتیل توزیع X به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$x=F^{-1}(u) \tag{۴}$$

متغیری که دارای توزیع یکنواخت باشد تابع توزیع خطی دارد، به‌ویژه متغیر یکنواخت استاندارد $U\sim U(0,1)$ دارای ویژگی‌های زیر می‌باشد:

$$P(U<u)=u \tag{۵}$$

$$P(F(x)<u)=P\left(X<F^{-1}(u)\right)=F\left(F^{-1}(u)\right)=u$$

بنابراین به این نتیجه می‌رسیم که:

$$F(X)\sim U(0,1) \tag{۶}$$

1. Density Function
2. Standard Uniform Distribution

معادله (۶) نشان می‌دهدزمانی که از تابع توزیع برای متغیر تصادفی X استفاده کنیم متغیر تصادفی جدید F(X) حاصل می‌شود که این متغیر دارای توزیع یکنواخت استاندارد می‌باشد. به این عمل در ریاضیات تبدیل انتگرالی احتمال[1] اطلاق می‌شود. تبدیل انتگرالی احتمال یعنی انتقال یک متغیر تصادفی پیوسته به یک متغیر یکنواخت. اگر u=F(x) قرار دهیم آنگاه داریم:

$$P \tag{۷}$$

به عبارت دیگر، $F(x)=P(F^{-1}(U)<x)$ می‌باشد. معادله فوق نشان می‌دهد که می‌توانیم از توزیع متغیر X با استفاده از معکوس تابع توزیع و متغیر یکنواخت استاندارد شبیه‌سازی کنیم. هر بار که متغیر تصادفی u را تولید می‌کنیم با استفاده از معکوس تابع توزیع یک سری از متغیرهای مستقل را به مجموعه‌ای از مقادیر شبیه‌سازی‌شده توزیع X تبدیل می‌کنیم.

هرگاه بخواهیم مقداری برای متغیر تصادفی شبیه‌سازی کنیم ابتدا یک عدد تصادفی که دارای توزیع یکنواخت می‌باشد را تولید می‌کنیم، سپس با استفاده از معکوس تابع توزیع عمل شبیه‌سازی را انجام می‌دهیم. اگر بخواهیم برای چند متغیر تصادفی شبیه‌سازی کنیم رویه کار به این صورت می‌باشد، اما در اینجا می‌بایست وابستگی متقابل متغیرهای تصادفی را در نظر بگیریم. هر قدر از فرض بیضی شکل بودن توزیع مشترک متغیرها فاصله بگیریم ضریب همبستگی خطی اهمیت خود را از دست می‌دهد و می‌بایست از معیارهای وابستگی دیگر با عنوان کاپیولا استفاده کنیم.

۳-۱-۱. تعریف کاپیولا

اگر دو متغیر تصادفی X_1 و X_2 با توابع توزیع حاشیه‌ای پیوسته $F_1(x_1)$ و $F_2(x_2)$ را در نظر بگیریم و $u_i=F_i(x_i)\ i=1,2$ قرار دهیم توابعی که دارای شرایط زیر باشند تابع کاپیولای دو بعدی محسوب می‌شوند:

$$\begin{aligned}&C:[0,1]\times[0,1]\rightarrow[0,1]\\&C(u_1,0)=C(0,u_2)=0\\&C(u_1,1)=u_1 \text{ and } C(1,u_2)=u_2\\&C(\nu_1,\upsilon_2)-C(u_1,\upsilon_2)\geq C(\upsilon_1,u_2)-C(u_1,u_2) \text{ if } u_1\leq\upsilon_1 \text{ and } u_2\leq\upsilon_2\end{aligned} \tag{۸}$$

شرط نخست ایجاب می‌کند که تابع کاپیولا در محدوده مقادیر توابع توزیع قرار می‌گیرد. از بحث بخش قبل می‌دانیم که مقدار هر تابع توزیع یک متغیر یکنواخت استاندارد می‌باشد، بنابراین می‌توانیم بنوسیم $u_i=F_i(X_i),i=1,2$. سه شرط بعدی تابع کاپیولا را به‌عنوان تابع توزیع مشترک U_1 و U_2 نشان می‌دهند. توابع

1. Probability Integral Transform

بی‌شماری هستند که دارای شرایط بالا می‌باشند، بنابراین تعداد توابع کاپیولا بسیار زیاد است. اسکلار (۱۹۵۹) نشان داد که توابع کاپیولا در شرایط خاصی یکتا می‌باشند. فرم دو متغیره تئوری اسکلار به این صورت است که به‌ازای هر تابع توزیع مشترک $F(x_1,x_2)$ یک تابع کاپیولای یکتا $C:[0,1]\times[0,1]\rightarrow[0,1]$ وجود دارد، به نحوی که $F(x_1,x_2)=C\big(F_1(x_1),F_2(x_2)\big)$ می‌باشد.

به‌طور معکوس اگر C یک تابع کاپیولا و توابع $F_1(x_1)$ و $F_2(x_2)$ توابع توزیع باشند، تابع کاپیولا یک تابع توزیع مشترک با توابع حاشیه‌ای $F_1(x_1)$ و $F_2(x_2)$ می‌باشد. اگر از تابع کاپیولا نسبت به x_1 و x_2 مشتق بگیریم می‌توانیم تابع چگالی مشترک[1] $f(x_1,x_2)$ را بر حسب توابع چگالی حاشیه‌ای $f_1(x_1)$ و $f_2(x_2)$ به‌صورت زیر نمایش دهیم:

$$f(x_1,x_2)=f_1(x_1)f_2(x_2)c\big(F_1(x_1),F_2(x_2)\big) \qquad (۹)$$

در اینجا داریم:

$$c\big(F_1(x_1),F_2(x_2)\big)=\frac{\partial^2 C\big(F_1(x_1),F_2(x_2)\big)}{\partial F_1(x_1)\partial F_2(x_2)} \qquad (۱۰)$$

اگر در معادله فوق $F_i(x_i)=u_i$ جایگذاری کنیم معادله (۱۰) را می‌توان به‌صورت $c(u_1,u_2)$ نشان داد. زمانی که معادله (۱۰) را بر حسب (u_1,u_2) به‌جای (x_1,x_2) محاسبه می‌کنیم به آن چگالی کاپیولا[2] می‌گویند.

می‌توان مفاهیم فوق را به ابعاد بیشتر نیز تعمیم داد. اگر n متغیر تصادفی $X_1,X_2,\dots,X_n$ را با توابع توزیع حاشیه‌ای مشخص $F_1(x_1),F_2(x_2),\dots,F_n(x_n)$ در نظر بگیریم کاپیولا تابع یکنوا افزایشی از $[0,1]\times[0,1]\times\dots[0,1]\rightarrow[0,1]$ است به شرطی که شرایط اول تا سوم را دارا باشد.

تئوری اسکلار به ما می‌گوید با استفاده از مجموعه ثابتی از توابع حاشیه‌ای پیوسته کاپیولاهای مجزا توابع چگالی مشترک متفاوتی ایجاد می‌کنند، بنابراین با استفاده از یک تابع چگالی مشترک مشخص $F(x_1,\dots,x_n)$ با توابع حاشیه‌ای پیوسته می‌توانیم به تابع کاپیولای یکتا C برسیم، به طوری که:

$$F \qquad (۱۱)$$

1. Joint Density Function
2. Copula Density

اگر این تابع وجود داشته باشد تابع چگالی کاپیولای آن به‌صورت زیر می‌باشد:

$$c \qquad (۱۲)$$

با استفاده از تابع چگالی کاپیولا و توابع چگالی حاشیه‌ای $f_i(x_i)=F_i^{'}(x_i)$ می‌توانیم تابع چگالی مشترک متغیرها را به‌صورت زیر به‌دست آوریم:

$$f(\qquad (۱۳)$$

از آنجا که مقادیر توابع توزیع حاشیه‌ای دارای توزیع یکنواخت هستند می‌توانیم توابع کاپیولا را با استفاده از متغیرهای $u_i\in[0,1]$ نیز نمایش دهیم. اگر $F_i(x_i)=u_i$ قرار دهیم هر تابع توزیع مشترک F یک تابع کاپیولای ضمنی[1] به فرم زیر را تعریف می‌کند:

$$C \qquad (۱۴)$$

که در معادله فوق u_i ها کوانتیل توابع توزیع حاشیه‌ای می‌باشند، بنابراین به‌ازای هر تابع توزیع مشترک یک تابع کاپیولای ضمنی وجود دارد. تابع چگالی کاپیولا با استفاده از نماد $F_i(x_i)=u_i$ به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$c \qquad (۱۵)$$

۳-۲. وابستگی در دنباله توزیع

وابستگی در دنباله توزیع[2] همگامی در دنباله توزیع مشترک را بررسی می‌نماید. برای متغیرهای مستقل تابع چگالی کاپیولا همواره عدد یک می‌باشد. توابع چگالی کاپیولا مانند توابع چگالی معمولی نیستند که همواره مثبت هستند و دارای مقادیر بزرگتر در مرکز توزیع می‌باشند. توابع کاپیولای که در مالی استفاده می‌شوند دارای توابع چگالی هستند که مقادیر بزرگتر در کنارها قرار دارند. این موضوع اهمیت وابستگی در دنباله‌های توزیع را نشان می‌دهد. ضریب همبستگی دنباله پایین[3] i,j ام را به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

---

1. Implicit Copula
2. Tail Dependence
3. Lower Tail Dependence Coefficient

$$\lambda_{i,j}^{l}=\lim_{q\downarrow 0} P\left(X_i<F_i^{-1}(q)\middle|X_j<F_j^{-1}(q)\right) \quad (۱۶)$$

این ضریب احتمال شرطی اینکه یکی از متغیرها یک مقدار در دنباله پایین خود بگیرد به شرطی که متغیر دیگر یک مقدار خاص در دنباله پایین خود گرفته باشد را نشان می‌دهد. از آنجایی‌که این ضریب احتمال شرطی است $\lambda_{i,j}^{l}\in[0,1]$ می‌باشد. زمانی‌که $\lambda_{i,j}^{l}>0$ باشد گفته می‌شود که تابع کاپیولا دارای وابستگی دنباله پایین برای متغیر X_i و X_j می‌باشد و هر قدر این ضریب بزرگتر باشد وابستگی شدیدتر است، به این ترتیب ضریب وابستگی دنباله بالا[1] به‌وسیله حد زیر به‌دست می‌آید:

$$\lambda_{i,j}^{u}=\lim_{q\uparrow 1} P\left(X_i>F_i^{-1}(q)\middle|X_j>F_j^{-1}(q)\right) \quad (۱۷)$$

همانند ضریب قبل این ضریب نیز احتمال شرطی که یکی از متغیرها یک مقدار در دنباله بالا خود بگیرد به شرطی که متغیر دیگر مقدارخاصی در دنباله بالای خود گرفته باشد را نشان می‌دهد. زمانی‌که این ضریب مثبت باشد گفته می‌شود که تابع کاپیولا دارای وابستگی دنباله بالا برای متغیرهای X_i و X_j می‌باشد و هر قدر این ضریب بزرگتر باشد وابستگی شدیدتر است. اگر برای یک کاپیولا $\lambda_{i,j}^{l}=\lambda_{i,j}^{u}$ باشد گفته می‌شود که کاپیولا دارای وابستگی دنباله توزیع متقارن[2] می‌باشد.

کاپیولای نرمال که در این تحقیق معرفی می‌شود از نوع کاپیولاهای تغییرپذیر[3] است. کاپیولاهای تغییرپذیر تحت جایگشت متغیرها تغییر نمی‌کنند. به‌ازای تمام مقادیر i و j برای یک کاپیولای تغییرپذیر داریم:

$$\begin{aligned}\lambda_{i,j}^{l} &= \lambda_{j,i}^{l}\\ \lambda_{i,j}^{u} &= \lambda_{j,i}^{u}\end{aligned} \quad (۱۸)$$

۳-۳. کاپیولای نرمال یا گواسی

تابع کاپیولای نرمال چند متغیره دارای ماتریس همبستگی Σ برای پارامترها می‌باشد. از آنجایی‌که ضریب همبستگی همیشه نقش مهمی در مالی ایفا نموده است از کاپیولاهای نرمال در مالی زیاد استفاده می‌شود، گرچه اغلب به‌منظور سهولت کار از آنها استفاده می‌شود. تابع کاپیولای نرمال از توابع نرمال استاندارد تک متغیره و

1. Upper Tail Dependence Coefficient
2. Symmetric Tail Dependence
3. Exchangeable Copulas

یک تابع نرمال استاندارد n متغیره به‌دست می‌آید که به‌ترتیب با نماد Φ نشان داده می‌شوند. تابع کاپیولای نرمال به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$C(u_1,\ldots,u_n;\Sigma)=\Phi\left(\Phi^{-1}(u_1),\ldots,\Phi^{-1}(u_n)\right) \tag{۱۹}$$

توابع کاپیولا را به‌راحتی نمی‌توان به‌صورت فرم دقیق نمایش داد و تنهامی‌توان با استفاده از انتگرال‌ها آنها را نشان داد، بنابراین کارکردن با چگالی کاپیولاها آسان‌تر از کارکردن با توابع کاپیولا می‌باشد. تابع چگالی معادله (۱۹) به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$c(u_1,\ldots,u_n;\Sigma)=|\Sigma|^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\xi'\left(\Sigma^{-1}-I\right)\xi\right) \tag{۲۰}$$

در معادله فوق $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)'$ می‌باشد. ξ_i عبارتست از u_i کوانتیل متغیر نرمال استاندارد:

$$X_i.u_i=P\left(X_i<\xi_i\right)X_i\sim N(0,1) \tag{۲۱}$$

در اینجا تأکید می‌شود کاپیولای نرمال تابعی از مقادیر $(u_1,\ldots,u_n)$ می‌باشد و تابعی از مقادیر $(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ نیست، زیرا در معادله (۱۹)، $\xi=(\Phi^{-1}(u_1),\ldots,\Phi^{-1}(u_n))$ می‌باشد. روش به‌دست آوردن تابع توزیع مشترک زمانی‌که کاپیولا نرمال اما توزیع‌های حاشیه‌ای نرمال یا غیرنرمال هستند به‌صورت زیر می‌باشد:

- برای توابع حاشیه‌ای $u_i=F_i(x_i)$ قرار می‌دهیم.
- از معکوس تابع توزیع نرمال استفاده می‌کنیم ($\xi_i=\Phi^{-1}(u_i)$).
- از ماتریس همبستگی Σ و بردار ξ در معادله (۱۹) استفاده می‌کنیم.

زمانی‌که تنها دو متغیر تصادفی داریم تابع کاپیولا به‌صورت زیر می‌باشد:

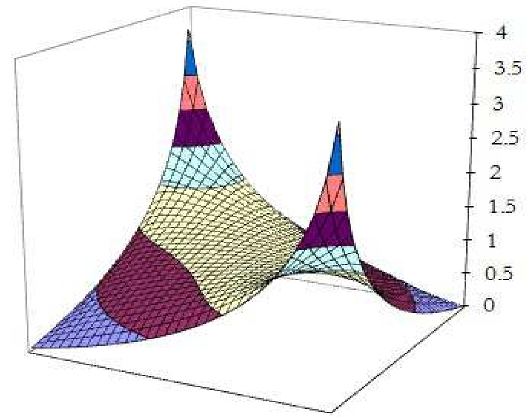
$$C(u_1,u_2;\varrho)=\Phi\left(\Phi^{-1}(u_1),\Phi^{-1}(u_2)\right) \tag{۲۲}$$

در اینجا Φ تابع نرمال دو متغیره می‌باشد. با استفاده از فرمول تابع نرمال دو متغیره معادله فوق را می‌توانیم به فرم زیر نمایش دهیم:

$$C(u_1,u_2;\varrho)=\int_0^{\Phi^{-1}(u_1)}\int_0^{\Phi^{-1}(u_2)}(2\pi)^{-1}(1-\varrho^2)^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{\left[x_1^2-2\varrho x_1x_2+x_2^2\right]}{2(1-\varrho^2)}\right)dx_1dx_2 \tag{۲۳}$$

تابع چگالی کاپیولای نرمال به‌صورت زیر می‌باشد:

$$c(u_1,u_2;\varrho)=(1-\varrho^2)^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{\varrho^2\xi_1^2-2\xi_1\xi_2+\varrho^2\xi_2^2}{2(1-\varrho^2)}\right) \quad (۲۴)$$



نمودار ۱. تابع چگالی کاپیولای نرمال با $\varrho=0.5$

۳-٤. تابع کاپیولا و شبیه‌سازی چند بعدی با مونت کارلو

تابع کاپیولا یک تابع توزیع تجمعی مشترک از متغیرهای $x_1,x_2,\dots,x_n$ با تابع توزیع تجمعی مشترک حاشیه‌ای $F_1(x_1),F_2(x_2),\dots,F_n(x_n)$ تابع کاپیولا به‌صورت $C(u_1,u_2,\dots,u_n)$ نشان داده می‌شود که $H(x_1,x_2,\dots,x_n)= C(F_1(x_1),F_2(x_2),\dots,F_n(x_n))$ بیان می‌شود و $H(x_1,x_2,\dots,x_n)$ تابع توزیع مشترک متغیر x می‌باشد. کاپیولا به ۲ روش تابع توزیع مشترک را تخمین می‌زند.

تحت به‌دست آوردن توزیع حاشیه‌ای $F_1(x_1),F_2(x_2),\dots,F_n(x_n)$ نشان‌دهنده توزیع حاشیه‌ای هر متغیر می‌باشد و تخمین پارامتر آنها از طریق مدل سری زمانی مرسوم مانند GARCH(1,1) انجام می‌گیرد.

در مرحله بعد پارامترهای کاپیولا را تخمین می‌زنیم. در این تحقیق برای تابع توزیع تجمعی مشترک حاشیه‌ای $\widehat{F}_i(x)=\frac{1}{T}\sum 1(X_{it}\le x)$ از (MLE) برای تخمین پارامترهای کاپیولای ارشمیدسی استفاده می‌کنیم.

برای تخمین زدن از طریق MLE از روش حداکثر نمودن احتمال تابع توزیع تجمعی مشترک چند بعدی استفاده می‌کنیم. متغیرهای دو بعدی برای تابع توزیع تجمعی مشترک $f(x_1,x_2)=c(u_1,u_2).\ f(x_1).\ f(x_2)$ است، در حالی‌که $f(x_1)$ و $f(x_2)$ تابع احتمال توزیع تجمعی مشترک متغیرهای x_1,x_2 می‌باشد و تابع $c(u,v)=\frac{\partial C(u,v)}{\partial u\partial v}$

تابع تراکمی کاپیولای نرمال است، بنابراین تابع حداکثر درستنمایی $L\left((x_1,y_1),(x_2,y_2),\theta\right)$ را می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم:

$$L=\prod f(x_1,x_2)=\prod c(u_1,u_2).\ f(x_1).\ f(x_2) \tag{۲۵}$$

از طریق حل ارزش اکسترمم می‌توانیم برآورد پارامترهای کاپیولای نرمال را به‌دست آوریم، بنابراین ساختن مدل کاپیولای نرمال توزیع مشترک که شامل تمام ساختار وابستگی به‌وسیله کاپیولا نرمال است که در مدیریت ریسک و بهینه‌سازی پرتفوی نسبت به مدل‌هایی که فرض می‌کنند توزیع بازده‌ها نرمال است نتایج بهتری دارد.

پس از اینکه پارامترهای کاپیولا نرمال را به‌دست آوردیم می‌بایست سری متغیرهای $x_1,x_2,\ldots,x_n$ از تابع توزیع تجمعی مشترک $C(u_1,u_2,\ldots,u_n)$ از متغیرهای $u_1,u_2,\ldots,u_n$ را با توزیع پیوسته به‌دست آوریم که با تابع توزیع تجمعی مشترک حاشیه‌ای $F_1(x_1),F_2(x_2),\ldots,F_n(x_n)$ و متغیرهای تصادفی $x_1,x_2,\ldots,x_n$ برابر می‌باشد.

ابتدا با استفاده از کاپیولای نرمال دو بعدی $C(u_1,u_2)$ متغیرهای (u_{1i},u_{2i}) را شبیه‌سازی می‌کنیم و n تعداد نمونه شبیه‌سازی‌شده می‌باشد. برای دستیابی به این هدف از توزیع شرطی استفاده می‌کنیم. برای این کار C_{u1} را به‌عنوان تابع توزیع شرطی متغیر تصادفی u_2 برای به‌دست آوردن مقادیر u_1 در کاپیولای نرمال دو بعدی $C(u_1,u_2)$ قرار می‌دهیم، در نتیجه $C_{u1}(u_2)=\partial C(u_1,u_2)/\partial u_1$ است، همچنین C_{u1} غیرکاهشی بوده و همواره در بازه $[0,1]$ قرار دارد.

۳-۵. کاپیولا-CVaR در بهینه‌سازی پرتفوی

برای تخمین CVaR با استفاده از تابع کاپیولای نرمال ابتدا می‌بایست توزیع حاشیه‌ای یک مدل را تخمین بزنیم. مدل‌هایی که در این تحقیق برای تخمین توزیع حاشیه‌ای مس و طلا استفاده می‌شوند از مدل‌های ناهمسانی واریانس می‌باشند. روش انجام کار به این صورت است که با استفاده از مدل GARCH (۱،۱) یک مدل برای توزیع حاشیه‌ای برآورد می‌کنیم. پس از برآورد مدل‌ها اجزای اخلال مدل‌ها را استاندارد می‌کنیم. اگر سری زمانی اجزای اخلال استاندارد شده توزیع‌های حاشیه‌ای را به‌صورت $\{\eta_i,\eta_j\}$ نمایش دهد با تبدیل $u_i=F_i(\eta_i)$ و $u_j=F_j(\eta_j)$ پارامترهای توزیع حاشیه‌ای را از روش حداکثر درستنمایی به‌دست می‌آوریم. پس از به‌دست آوردن پارامترهای تابع کاپیولای نرمال با استفاده از الگوریتمی که در بخش قبل توضیح داده شد برای هر یک از توزیع‌های حاشیه‌ای ۱/۰۰۰/۰۰۰ بازدهی شبیه‌سازی می‌کنیم و مقدار وزن‌های بهینه برای ۱۰ پرتفوی را به روش زیر محاسبه می‌نماییم:

$$
\begin{aligned}
&\min_{x,y,z}\ \gamma+\frac{1}{(1-\alpha)T}\sum_{i=1}^{T} z_i \\
&\text{s.t}\quad \mu^T x \geq R \\
&z_i \geq 0,\ \ i=1,\dots,T \\
&z_i \geq f(x,y_i)-\gamma,\quad i=1,\dots,T \\
&x \in \Omega
\end{aligned}
\tag{۲۶}
$$

برای بهینه‌سازی پرتفوی به روش Mean-CvaR از ماتریس میانگین و واریانس–کواریانس تاریخی طلا و مس استفاده می‌نماییم و با استفاده از تابع نرمال چند متغیره[1] به شبیه‌سازی بازده‌ها می‌پردازیم و مقدار وزن بهینه پرتفوی را با استفاده از فرمول (۲۶) به‌دست می‌آوریم. در نهایت، عملکرد درون‌نمونه‌ای روش Mean-CVaR را با سبد سرمایه‌گذاری به‌دست آمده از روش کاپیولا–CVaR مقایسه می‌کنیم.

٤. داده‌ها

با توجه به اینکه دارایی‌های مس و طلا در بازارهای مختلف معامله می‌شوند ساعات معاملاتی آنها با یکدیگر متفاوت است. در این تحقیق تلاش می‌کنیم به‌منظور از بین بردن همبستگی کاذب تنها از روزهایی که برای هر دو دارایی مظنه قیمت وجود داشته است استفاده نماییم. داده‌های تحقیق شامل ۶۲۵ مشاهده قیمت هفتگی دو سری زمانی طلا و مس طی دوره زمانی ابتدای سال ۲۰۰۲ تا انتهای اکتبر ۲۰۱۳ می‌باشد که از نرم‌افزار Meta Trader استخراج شده است. از ۶۱۵ مشاهده برای مشاهده و مدلسازی استفاده می‌نماییم، آنگاه به برازش ۱۰ سبد سرمایه‌گذاری بر مرز کارا می‌پردازیم و معیار شارپ متناسب با این ۱۰ سبد سرمایه‌گذاری را محاسبه می‌نماییم، سپس به روش غلتاندن با حذف یک هفته از ابتدای سال ۲۰۰۲ و اضافه نمودن هفته اول نوامبر ۲۰۱۳ فرایند فوق را تکرار می‌نماییم. این فرایند برای ۹ هفته متوالی تکرار می‌شود و با زیر هم قرار دادن این داده‌ها دو سری زمانی ۹۰تایی از کاپیولا–CVaR و Mean-CVaR به‌دست می‌آید.

٥. تجزیه‌وتحلیل داده‌ها

تحقیق فرایندی نظام‌مند می‌باشد که در آن محقق به‌دنبال پاسخی برای مسئله تحقیق می‌باشد و لازمه پاسخگویی به مسئله تحقیق تجزیه‌وتحلیل داده‌ها، تعبیر و تفسیر آنها و بررسی نتایج به‌دست آمده می‌باشد. برای مقایسه روش کاپیولا–CVaR و روش Mean-CVaR در بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری معیار شارپ هریک از روش‌ها را با یکدیگر مقایسه می‌کنیم. معیار شارپ معیار ارزیابی عملکرد می‌باشد که با فرمول زیر محاسبه می‌شود:

1. Multivariate Normal Distribution

$$SR=\frac{\overline{R}_p-\overline{R}_f}{\sigma_p} \qquad (۲۷)$$

که در آن، $\overline{R}_p$: بازده پرتفوی، $\overline{R}_f$: بازده بدون ریسک که بازده اوراق قرضه آمریکا را در نظر گرفتیم و σ_p: انحراف معیار بازده که شاخص سنجش ریسک در تئوری مدرن پرتفوی محسوب می‌شود. در تحقیق خود به‌جای انحراف معیار از CVaR پرتفوی در مخرج کسر استفاده می‌نماییم.

جداول ۱. معیار شارپ به روش Mean-CVaR

هفته نهم	هفته هشتم	هفته هفتم	هفته ششم	هفته پنجم	هفته چهارم	هفته سوم	هفته دوم	هفته اول
۰/۰۴۰۶۹۴	۰/۰۴۰۱۹۱	۰/۰۴۰۷۷۵	۰/۰۴۰۰۸۸۸	۰/۰۴۰۷۱۲	۰/۰۴۰۳۲	۰/۰۴۲۶۹۴	۰/۰۴۳۳۰۷	۰/۰۴۳۷۷۱
۰/۰۴۰۴۷۵	۰/۰۳۹۹۸۵	۰/۰۴۰۸۱۳	۰/۰۴۰۸۱	۰/۰۴۰۴۰۴	۰/۰۴۰۲۲۱	۰/۰۴۲۶۷۶	۰/۰۴۳۲۸۴	۰/۰۴۳۷۳۶
۰/۰۳۹۵۱۵	۰/۰۳۹۰۳۵	۰/۰۴۰۰۹۳	۰/۰۳۹۹۷۴	۰/۰۳۹۳۵۳	۰/۰۳۹۳۷۴	۰/۰۴۲۵۹۲	۰/۰۴۳۱۹۲	۰/۰۴۳۷۷۱
۰/۰۳۷۹۷۲	۰/۰۳۷۵۰۸	۰/۰۳۸۷۷۴	۰/۰۳۸۵۴۲	۰/۰۳۷۷۲۴	۰/۰۳۷۹۳۷	۰/۰۴۲۴۴۱	۰/۰۴۳۰۳	۰/۰۴۳۴۵۴
۰/۰۳۶۰۵۷	۰/۰۳۵۶۱	۰/۰۳۷۰۵۱	۰/۰۳۶۷۲۲	۰/۰۳۵۷۲۸	۰/۰۳۶۱۱۴	۰/۰۴۲۲۲۴	۰/۰۴۲۷۹۹	۰/۰۴۳۲۱
۰/۰۳۳۹۶۶	۰/۰۳۳۵۳۳	۰/۰۳۵۱۱۸	۰/۰۳۴۷	۰/۰۳۳۵۶۱	۰/۰۳۴۱۰۲	۰/۰۴۱۹۴۳	۰/۰۴۲۵۰۵	۰/۰۴۲۹۰۱
۰/۰۳۱۸۴۷	۰/۰۳۱۴۲۹	۰/۰۳۳۱۲۶	۰/۰۳۲۶۳۳	۰/۰۳۱۳۷۷	۰/۰۳۲۰۵	۰/۰۴۱۶۰۳	۰/۰۴۲۱۵۱	۰/۰۴۲۵۳۳
۰/۰۲۹۷۹۷	۰/۰۲۹۳۹۶	۰/۰۳۱۱۷۶	۰/۰۳۰۶۲۳	۰/۰۲۹۲۷۷	۰/۰۳۰۰۵۸	۰/۰۴۱۲۰۸	۰/۰۴۱۷۴۳	۰/۰۴۲۱۱
۰/۰۲۷۸۷۱	۰/۰۲۷۴۸۹	۰/۰۲۹۳۳	۰/۰۲۸۷۳	۰/۰۲۷۳۱۲	۰/۰۲۸۱۸۴	۰/۰۴۰۷۶۴	۰/۰۴۱۲۸۶	۰/۰۴۱۶۳۸
۰/۰۲۶۰۹۳	۰/۰۲۵۷۳۱	۰/۰۲۷۶۱۶	۰/۰۲۶۹۷۷	۰/۰۲۵۵۰۶	۰/۰۲۶۴۵	۰/۰۴۰۲۷۶	۰/۰۴۰۷۸۳	۰/۰۴۱۱۲۱

مأخذ: نتایج تحقیق.

جدول ۲. معیار شارپ با کاپیولای نرمال و مدل ناهمسانی واریانس GARCH نرمال

هفته نهم	هفته هشتم	هفته هفتم	هفته ششم	هفته پنجم	هفته چهارم	هفته سوم	هفته دوم	هفته اول
۰/۰۸۸۹۵۲	۰/۰۹۷۶۹۱	۰/۰۹۱۹۶۸	۰/۰۸۲۸۴۸	۰/۰۹۸۴۰۶	۰/۰۷۳۰۵۵	۰/۰۹۶۳۷	۰/۰۵۵۲۸۸	۰/۰۶۸۴۸۴
۰/۰۹۱۱۵۳	۰/۰۹۷۸۳	۰/۰۹۴۴۶۳	۰/۰۸۳۳۴۳	۰/۱۰۰۴۱۳	۰/۰۹۵۸۵۱	۰/۰۹۵۸۵۱	۰/۰۵۵۹۴۴	۰/۰۶۸۸۸۸
۰/۰۹۱۹۱۱	۰/۰۹۷۹۵۷	۰/۰۹۵۲۴۹	۰/۰۸۳۷۴۲	۰/۱۰۰۹۲۴	۰/۰۸۹۶۴۴	۰/۰۸۹۶۴۴	۰/۰۵۶۳۰۷	۰/۰۶۹۱۹۹
۰/۰۹۱۳۹۶	۰/۰۹۸۰۷۳	۰/۰۹۴۵۲	۰/۰۸۴۰۴۳	۰/۱۰۰۰۸۷	۰/۰۸۱۰۳۹	۰/۰۸۱۰۳۹	۰/۰۵۶۳۷۶	۰/۰۶۹۴۱۶
۰/۰۸۹۸۷۳	۰/۰۹۸۱۷۶	۰/۰۹۲۶۳۷	۰/۰۸۴۲۴۹	۰/۰۹۸۱۷۹	۰/۰۷۲۴۷۸	۰/۰۷۲۴۷۸	۰/۰۵۶۱۶۹	۰/۰۶۹۵۴۱
۰/۰۸۷۶۳۶	۰/۰۹۸۲۶۶	۰/۰۸۹۹۶۴	۰/۰۸۴۳۶۲	۰/۰۹۵۵۳۲	۰/۰۶۴۹۳۵	۰/۰۶۴۹۳۵	۰/۰۵۵۷۱۹	۰/۰۶۹۵۷۴
۰/۰۸۴۹۵۳	۰/۰۹۸۳۴۵	۰/۰۸۶۸۵	۰/۰۸۴۳۸۴	۰/۰۹۲۴۳۱	۰/۰۵۸۵۸۷	۰/۰۵۸۵۸۷	۰/۰۵۵۰۶۱	۰/۰۶۹۵۱۸
۰/۰۸۲۰۵۲	۰/۰۹۸۴۱۱	۰/۰۸۳۵۵۶	۰/۰۸۴۳۱۶	۰/۰۸۹۱۰۴	۰/۰۵۳۳۲۷	۰/۰۵۳۳۲۷	۰/۰۵۴۲۳۶	۰/۰۶۹۳۷۸
۰/۰۷۹۰۹۱	۰/۰۹۸۴۶۷	۰/۰۸۰۲۵۲	۰/۰۸۴۱۶۴	۰/۰۸۵۷۲۴	۰/۰۴۸۹۷۴	۰/۰۴۸۹۷۴	۰/۰۵۳۲۸۳	۰/۰۶۹۱۶۱
۰/۰۷۶۱۷۹	۰/۰۹۸۵۱	۰/۰۷۷۰۵۷	۰/۰۸۳۹۳۵	۰/۰۸۲۴۰۸	۰/۰۴۵۳۴۵	۰/۰۴۵۳۴۵	۰/۰۵۲۲۳۵	۰/۰۶۸۸۷

مأخذ: نتایج تحقیق.

برای بررسی معناداری تفاوت عملکرد روش Mean-CaR با روش کاپیولا–CVaR و آزمون فرضیه‌های تحقیق از آزمون استیودنت–t به‌منظور مقایسه میانگین دوجامعه با فرض ناهمسانی واریانس استفاده نمودیم و نتایج در جدول زیر ارائه شده است و فروض H_1, H_0 به‌صورت زیر مورد بررسی قرار گرفته است:

$$\begin{cases} H_0: \text{بین جامعه میانگین های دو روش کاپیولای نرمال (مدل ناهمسانی واریانس GARCH نرمال) و روش Mean − CaR اختلاف معنا داری وجود ندارد} \\ H_1: \text{بین جامعه میانگین های دو روش کاپیولای نرمال (مدل ناهمسانی واریانس GARCH نرمال) و روش Mean − CaR اختلاف معنا داری وجود دارد} \end{cases}$$

جدول ۳. آزمون مقایسه زوجی میانگین‌های کاپیولای نرمال (مدل ناهمسانی واریانس GARCH نرمال) و روش Mean-CVaR

	Mean-CVaR	Copula-CVaR
Mean	۰/۰۳۷۱۷	۰/۰۷۹۹۸
Variance	۰/۰۰۰۰۳	۰/۰۰۰۲۲
Observations	۹۹۰۰	۹۰۹۰
Pearson Correlation	−۰/۳۶۱۰۱	
Hypothesized Mean Difference	۰۰	
Df	۸۹	
t Stat	−۲۲/۹۸۳۲۶	
P(T<=t) one-tail	۰/۰۰۰/۰۰۰۰۰۰۰۰	
t Critical one-tail	۱/۶۶۲۱۶	
P(T<=t) two-tail	۰/۰۰۰/۰۰۰۰۰۰۰۰	
t Critical two-tail	۱/۹۸۶۹۸	

مأخذ: نتایج تحقیق.

با توجه به جدول فوق آماره محاسبه‌شده استیودنت–t عدد ۲۳- می‌باشد که با توجه به مقادیر بحرانی مقدار آماره محاسبه‌شده در ناحیه بحرانی قرار می‌گیرد. به عبارت دیگر، فرضیه H_0 مبنی بر عدم وجود اختلاف معنادار بین جامعه میانگین‌های دو روش کاپیولای نرمال (مدل ناهمسانی واریانس GARCH(۱،۱) نرمال) و روش Mean-CVaR در سطح احتمال ۹۵ درصد رد می‌گردد، بنابراین بر اساس نمونه بررسی‌شده در سطح اطمینان ۹۵ درصد بین جامعه میانگین‌های دو روش از لحاظ آماری اختلاف معناداری وجود دارد و با توجه به اینکه مقدار میانگین روش کاپیولای نرمال (مدل ناهمسانی واریانس GARCH(۱،۱) نرمال) از مقدار میانگین روش Mean-CVaR بیشتر است روش کاپیولای نرمال (مدل ناهمسانی واریانس GARCH(۱،۱) نرمال) نسبت به روش Mean-CVaR در سطح اطمینان ۹۵ درصد

دقت بیشتری در پیش‌بینی بازده‌ها بـر اسـاس معیـار شـارپ دارد، همچنـین لازم بـه ذکـر اسـت بـا توجـه بـه P-Value خروجی از نرم‌افزار اکسل نتایج آزمون فوق در سطح اطمینان ۹۹ درصد نیز برقرار می‌باشد.

٦. نتیجه‌گیری

هدف اصلی ایـن تحقیـق شناسـایی روش مناسـب بهینـه‌سـازی پرتفـوی بیــن روش کاپیــولا–CVaR و Mean-CVaR بوده است، از این رو با روش جدید بهینه‌سازی پرتفوی با تابع کاپیولای نرمال در بخش قبل آشنا شدیم. با وجود استفاده رایج از توابع کاپیولا در دنیا این روش در ایران نسبت به سایر روش‌ها کمتر مورد استفاده قرار گرفته است. در بازارهای مالی نه توزیع‌های حاشیه‌ای بازدهی‌ها نرمال هسـتند و نه وابستگی بین بازدهی‌ها خطی می‌باشند. نتیجه اینکه ضریب همبسـتگی خطـی پیرسـون معیـار مناسـبی برای وابستگی نیست. می‌توان از توابع کاپیولا که ابزار بسیار منعطفی برای مدلسازی توزیع‌های مشترک اسـت استفاده نمود، همچنین با توجه به مزایای معیار CVaR بـرای محاسـبه ریسـک پرتفـوی نسـبت بـه روش VaR از معیار CVaR جهت بهینه‌سازی پرتفوی در این تحقیق استفاده نمـودیم و بـا ترکیـب آن بـا تـابع کاپیولای نرمال به معرفی روش کاپیولا–CVaR پرداختیم.

همانطور که نتایج آزمون فرضیه‌های تحقیق مبنی بر مقایسه عملکرد مدل کاپیولا–CVaR بـا مـدل Mean-CVaR نشان می‌دهد عملکـرد مـدل کـاپیولا–CVaR بـا تـابع کـاپیولای نرمـال نسـبت بـه مـدل بهینه‌سازی Mean-CVaR با توجه به معیار شارپ بهتر است. با توجه به نتایج این تحقیق پیشنهاد می‌شود برای بهینه‌سازی سبد ارزی بانک مرکزی با توجه به در دسترس بودن اطلاعات برابری ارزها به‌صـورت روزانه از روش کاپیولا–CVaR استفاده شود.

منابع

راعی، رضا و سعید فلاح‌پور (۱۳۸۹)، "مدلی برای مدیریت فعال پرتفوی با استفاده از VaR و الگوریتم ژنتیک"، *بررسی‌های حسابداری و حسابرسی.*

فلاح‌پور، سعید (۱۳۸۸)، *طراحی مدلی برای مدیریت فعال پرتفوی سهام با استفاده از الگوریتم ژنتیک و ارزش در معرض ریسک*، پایان‌نامه دکترا، دانشگاه تهران، دانشکده مدیریت.

Alexander, C. (2008), "Market Risk Analysis", West Sussex: John Wiley & Sons.

Ang, A. & J. Chen (2002), "Asymmetric Correlations of Equity Portfolios", *Journal of Fina*ncial *Economics*, PP. 443-494.

Artzner, P., Delbaen, F., Eber J. M. & D. Heath (1999), "Coherent Measures of Risk", *Mathematical Finance*, Vol. 9, PP. 203-228.

Brandimarte, P. (2006), "Numerical Methods in Finance and Economics", A Matlab-Based Introduction

Campbell, R. A., Koedijk, C. G. & P. Kofman (2002), "Increased Correlation in Bear Markets", *Financial AnalystsJournal*, Vol. 58, No. 1, PP. 87-94.

Cherubini, U., Gobbi, F., Mulinacci, S. & S. Romagnoli (2012), *Dynamic Copula Methods in Finance*, John Wiley, NY.

Cherubini, U., Luciano, E. & W. Vecchiato (2004), *Copula Methods in Finance*, John Wiley, NY.

Elton, E., Gruber, M., Brown, S. & W. Goetzmann, *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis.*

Erb, C., Harvey, C. R. & T. Viskanta (1994), "Forecasting International Equity Correlations", *Financial Analysts Journal*, PP. 32-45.

Embrechts, P., Mcneil, A. & D. Straumann (1999), *Correlation: Pitfalls and Alternatives*, RISK Magazine, PP. 69-71.

Embrechts, P., Mcneil, A. & D. Straumann (2002), "Correlation and Dependence in Risk Management: Properties and Pitfalls", In: Dempster, M. (Ed.), Risk Management Value at Risk and Beyond, Cambridge University Press, PP. 176-223.

Frey, R. & A. J. Mcneil (2003), "Dependent Defaults in Models of Portfolio Credit Risk", *Journal of Risk*, Vol. 6, No. 1, PP. 59-92.

Giesecke, K. (2004), "Correlated Default with Incomplete Information", *Journal of Banking & Finance*, Vol. 28, No. 7, PP. 1521-1545.

Goorbergh, R., Genest, W. J. & B. M. Werker (2005), "Bivariate Option Pricing Using Dynamic Copula Models", Insurance, Mathematics and Economics, PP. 111-114.

Hamerle, A. & D. Rosch (2005), "Misspecified Copulas in Credit Risk Models: How Good is Gaussian", *Journal of Risk*, Vol. 8, No. 1.

Hoeffding, W. (1940), "Maßstabinvariante Korrelationstheorie", Schriften des Mathematischen Instituts und des Instituts f¨ur Angewandte Mathematik der Universit at Berlin 5 (3), PP. 179–233. (Reprinted as Scale-Invariant Correlation Theory in Fisher, N. I. and Sen, P. K., Editors, The Collected Works of Wassily Hoeffding, PP. 57-107, Springer, New York.

James, X. Xiong & Thomas Idzorek (2010), "Mean-Variance Versus Mean-Conditional Value-at-Risk Optimization: The Impact of Incorporating Fat Tails and Skewness in to the Asset Allocation Decision".

Jondeau, E. & M. Rockinger (2006), "The Copula-GARCH Model of Conditional Dependencies: An International Stock Market Application", *Journal of International Money and Finance*, PP. 827-853.

Junker, M., Szimayer, A. & N. Wagner (2006), "Nonlinear Term Structure Dependence: Copula Functions, Empirics and Risk Implications", *Journal of Banking & Finance*, Vol. 30, No. 4, PP. 1171–1199.

Longin, F. M. & B. Solnik (2001), "Extreme Correlation of International Equity Markets", *Journal of Finance*, Vol. 56, No. 2, PP. 649–676.

Loretan, M. & W. B. English (2000), "Evaluating Correlation Breakdowns during Periods of Market Volatility", International Finance Discussion Papers Nr. 658, Board of Governors of the Federal Reserve System.

Lujie Sun & Manying Bai (2007), "Application of Copula and Copula-CVaR in the Multivariate Portfolio Optimization", Springer Berlin Heidelberg, 4614, PP. 231-242

Markowitz, H. (1952), "Portfolio Selection", *The Journal of Finance*.

Marshal, R., Naldi, M. & A. Zeevi (2003), "Comparing the Dependence Structure of Equity and Asset Returns", *Risk*, Vol. 16, No. 10, PP. 83-87.

Meneguzzo, D. & W. Vecchiato (2004), "Copula Sensitivity in Collateralized Debt Obligations and Basket Default Swaps", *The Journal of Futures Markets*, Vol. 24, No. 1, PP. 37-70.

Neslehova, J., Embrechts, P. & C. Demoulin (2006), "Infinite-Mean Models and the LDA for Operational Risk", *Journal of Operational Risk*, PP. 3-25.

Mills, F. C. (1927), "The Behavior of Prices", New York: National Bureau of Economic Research, Inc

Nelsen, R. B. (1997), "Dependence and Order in Families of Archimedean Copulas", *Journal of Multivariate Analysis*, Vol. 60, PP. 111-122

Patton, A. J. (2111), "Applications of Copula Theory in Financial Econometrics", Unpublished Ph.D. Dissertation, University of California, Sandiego.

Poon, S. H., Rockinger, M. & J. Tawn (2004), "Extreme Value Dependence in Financial Markets: Diagnostics, Models and Financial Implications", *Review of Financial Studies*, Vol. 17, No. 2, PP. 581-610.

Tyrrell Rockafellar, R. & Stanislav Uryasev (1999), "Optimization of Conditional Value-at-Risk".

Resti, A. & A. Sironi (2007), "Risk Management and Shareholders' Value in Banking", West Sussex: John Wiley & Sons.

Salahi. M. & Et al (2013), "CVaR Robust Mean-CVaR Portfolio Optimazation".

Sharpe, W. (1995), *Investments*.

Sklar, A. (1959), "Fonctions de Repartition a n Dimensions Et Leurs Marges", Publications de l'Institut de Statistique de l'Universite´ de Paris 8, PP. 229-231.

Vandenhende, F. & P. Lambert (2003), "Improved Rank-Based Dependence Measures for Categorical Data", *Statistics and Probability Letters*, Vol. 63, PP. 157-163.

Wei, G. & T. Hu (2002), "Supermodular Dependence Ordering on a Class of Multivariate Copulas", *Statistics and Probability Letters*, PP. 375-385.

Wei, S. & Y. Zhang (2004), "Guo, Research on Degree and Patterns of Dependence in Financial Markets", *Journal of System Engineering*, Vol. 19, PP. 355-362.

Wu, Z. Chen & M. W. Ye (2006), "Risk Analysis of Portfolio by Copula-GARCH", *Systems Engineering Theory and Practice*, Vol. 26, PP. 45-52.