

نزاع فرگه و هیلبرت: روش صحیح پرداختن به فراقضیه‌ها در دستگاه‌های اصل موضوعی

میثم محمدامینی*

چکیده

«منطق به صورت نامحدود ... صوری نیست. اگر چنین بود، بدون محتوا می‌بود ...
هیچ علمی کاملاً صوری نیست» (Frege, 1971:109).

در ۱۸۹۹، دیوید هیلبرت نظام اصل موضوعی منقحی برای هندسه اقلیدسی عرضه کرد و با اثبات مشروط فراقضیه‌های سازگاری و استقلال برای این نظام، راه‌حلی برای یکی از مسائل دیرپای ریاضیات (مشهور به مسئله خطوط موازی) ارائه داد. گوتلوب فرگه، پایه‌گذار منطق صوری جدید، مخالفت‌های بنیادینی با رویکرد فرمالیستی هیلبرت و برهان‌های او برای فراقضیه‌های سازگاری و استقلال ابراز داشت. بررسی دلایل این مخالفت نشان می‌دهد که دیدگاه فرگه نسبت به صوری بودن منطق و قضیه‌های فرانظریه‌ای به کلی متفاوت از دیدگاه پذیرفته‌شده امروزی است. در این مقاله پس از شرح مختصر روش اثبات هیلبرت برای فراقضیه‌های سازگاری و استقلال و همین‌طور انتقادهای اصلی فرگه به آن، به روش پیش‌نهادی خود فرگه برای پرداختن به این مسائل اشاره خواهم کرد و سپس به این بحث خواهم پرداخت که چرا در نهایت ریاضی‌دانان و منطق‌دانان، به پیروی از هیلبرت، به نکته‌سنجی‌های فرگه وقعی ننهادند و منطق جدید با معرفی نظریه مدل گام در راهی نهاد که از نگاه فرگه به هیچ وجه قابل قبول نبود. در پایان نتیجه‌ای که از این بررسی می‌گیرم این است که در واقع، فرگه و هیلبرت، هر یک بر اساس اندیشه‌ها و علایق خود، برداشت‌های متفاوتی از مفاهیمی مانند سازگاری و استقلال در دستگاه‌های اصل موضوعی داشته‌اند، جایی که فرگه به دنبال «سازگاری اندیشه‌ای» است هیلبرت صرفاً «سازگاری نحوی» را اثبات می‌کند.

* استادیار پژوهشکده مطالعات بنیادین علم و فناوری، دانشگاه شهید بهشتی me.amini@sbu.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۳۹۴/۳/۱۲، تاریخ پذیرش: ۱۳۹۴/۵/۲۰

۲ نزاع فرگه و هیلبرت: روش صحیح پرداختن به فراقضیه‌ها در ...

برداشت سخت‌گیرانه فرگه از مفهوم سازگاری و استقلال دامنه پژوهش‌های بعدی را به شدت محدود می‌ساخت، حال آن‌که برداشت هیلبرتی امکانات وسیع و جذابی برای انجام بحث‌های فرانظریه‌ای فراهم می‌آورد.

کلیدواژه‌ها: دستگاه اصل موضوعی، فرانظریه، فراقضیه استقلال، فراقضیه سازگاری، تحلیل مفهومی.

۱. مقدمه

مطابق برداشت رایج از تاریخ تحولات منطق، گوتلوب فرگه را با آثاری هم‌چون *مفهوم‌نگاری (Begriffsschrift)* و *مبانی حساب (Grundlagen der Arithmetik)* بنیادگذار منطق صوری جدید می‌شناسند. لیکن نباید از نظر دور داشت که دیدگاه او نسبت به برخی مسائل، به‌ویژه در فلسفه منطق و فرامنتق، یک‌سره متفاوت از دیدگاه پذیرفته‌شده امروزی است. در نظر گرفتن زبان فقط به صورت «کاملاً تعبیرشده» (fully interpreted)، ناممکن بودن بازتعبیر زبان (reinterpretation)، و فرض وجود محتوای مستقل برای منطق از جمله نظرهای فرگه‌اند که شاید به علت ناهم‌خوانی با دیدگاه مدرن، اغلب در بررسی منطق و فلسفه فرگه نادیده گرفته می‌شوند.

دستگاه اصل موضوعی هیلبرت برای هندسه و قضایای سازگاری و استقلال او برای این دستگاه انتقادات اساسی فرگه را در پی داشت. این انتقادات برخی از مواضع مهم و کم‌تر تصریح‌شده فرگه در باب منطق و فلسفه منطق را آشکار کرد. نزاع فرگه و هیلبرت بر سر یک دستگاه اصل موضوعی برای هندسه پای اساسی‌ترین مسائل را به میان کشید؛ مسائلی چون جای‌گاه اصول موضوع در ریاضیات، روش پرداختن به مسائل فرانظری، شرایط و تبعات رابطه استلزام منطقی، و جای‌گاه و شرایط تعاریف.

بررسی‌های نسبتاً فراوانی درباره انتقادات فرگه به هیلبرت و موجه بودن آن‌ها انجام شده است. در مقاله حاضر کوشیده‌ام تا به یک جنبه غالباً مغفول‌مانده انتقادات فرگه بپردازم، یعنی رابطه میان شرایط لازم برای یک تعریف پذیرفتنی از دیدگاه فرگه و لزوم توجه به تحلیل مفهومی (conceptual analysis) و معناشناسی در کنار استدلال‌های صوری. شناسایی اشیا و مفاهیم پایه متعلق به منطق پروژه‌ای است که منطق‌گرایی فرگه برای پرداختن به بحث‌های فرانظریه‌ای و حتی شناخت کامل رابطه‌ای هم‌چون استلزام منطقی نیازمند آن است. خود فرگه بر ضرورت این کار تأکید می‌کند، اما در باب انجام آن چندان خوش‌بین

میثم محمدامینی ۳

نیست و می گوید: «به سادگی می توان دید که این پرسش ها به سرعت فیصله نمی یابند؛ و بنابراین نمی گویم تا این بررسی را بیش از این پیش ببرم» (Frege, 1971: 111).

۲. دستگاه اصل موضوعی هیلبرت برای هندسه

در سال ۱۸۹۹، دیوید هیلبرت در یک مجموعه سخنرانی درباره بنیادهای هندسه، دستگاه پیشنهادی خود برای هندسه را معرفی کرد. متن سخنرانی ها با عنوان *مبانی هندسه* در اواخر همان سال منتشر شد. هیلبرت خود در مقدمه این اثر هدف از نگاشتن آن را چنین بیان می کند:

بررسی حاضر، تلاشی است نو در انتخاب مجموعه ای ساده و کامل و مستقل از اصول موضوع برای هندسه و استنتاج مهم ترین قضایا به شکلی که با بیشترین وضوح ممکن، اهمیت گروه های مختلف اصول موضوع و دامنه نتایج گرفته شده از هر یک از اصول مشخص شود (Hilbert, 1902: 1).

هیلبرت در ابتدای این اثر سه دسته گوناگون از اشیا (چیزها) را نام می برد: نقاط، خطوط، و صفحات. میان اشیا روابط متقابل مشخصی وجود دارد که با عباراتی چون «قرار دارد» و «بین»، توصیف کامل و دقیق این روابط به عنوان نتیجه ای از «اصول موضوع هندسه» به دست می آید (ibid: 3). هیلبرت این اصول موضوع را در پنج گروه معرفی می کند. تعداد کل اصول موضوع جمعاً بیست است که به این صورت طبقه بندی شده اند: گروه اول اصول موضوع اتصال (۷ اصل موضوع)، گروه دوم اصول موضوع ترتیب (۵ اصل موضوع)، گروه سوم اصل موضوع موازی ها (اصل موضوع اقلیدس)، گروه چهارم اصول موضوع هم نهشتی (۶ اصل موضوع) و گروه پنجم اصل موضوع پیوستگی (اصل موضوع ارشمیدس).

در فصل دوم کتاب، هیلبرت ابتدا سازگاری این دستگاه را ثابت می کند و سپس نشان می دهد که اصل موضوع خطوط موازی (گروه سوم)، اصول موضوع هم نهشتی (گروه چهارم) و اصل موضوع پیوستگی (گروه پنجم) از سایر اصول موضوع مستقل اند. نمونه هایی از اصول موضوع دستگاه هیلبرت از این قرار است:

(I.1) هر دو نقطه متمایز مانند A و B یک خط راست (a) را به طور کامل معین می کنند؛

(I.2) هر دو نقطه متمایز روی یک خط راست آن خط راست را همیشه به طور کامل

معین می کنند؛

۴ نزاع فرگه و هیلبرت: روش صحیح پرداختن به فراقضیه‌ها در ...

(I.3) سه نقطه متمایز A ، B ، و C که روی یک خط راست نیستند همیشه یک صفحه را به طور کامل معین می‌کنند؛
 (III) در یک صفحه، از هر نقطه خارج خط راست a یک و تنها یک خط راست می‌توان رسم کرد که خط a را قطع نکند. این خط راست را خط موازی با a می‌نامیم.
 هیلبرت در مورد مسئله سازگاری و معرفی روش خود برای اثبات آن مدعی است که اصول موضوعی که پیش‌نهاد کرده است با هم سازگارند یعنی:

با هیچ فرایند منطقی استدلال نمی‌توان از این اصول موضوع گزاره‌ای استنتاج کرد که با یکی از اصول دیگر در تناقض باشد. برای اثبات این امر، کافی است هندسه ای بسازیم که در آن اصول هر پنج گروه ارضا شوند (ibid: 27).

برهان‌های هیلبرت برای سازگاری و استقلال را می‌توان برهان‌های نسبی نامید. روش او چنین است که با بازتعبیر واژه‌های اصلی و غیرمنطقی یک دستگاه، مثلاً A ، اصول موضوع آن را به قضایایی صادق در یک دستگاه مرجع، مثلاً B ، تبدیل می‌کند. اگر تعبیر ارائه‌شده به درستی اصول موضوع A را به قضایایی صادق در B تبدیل کند مسئله سازگاری دستگاه A به مسئله سازگاری B تحویل می‌شود. در این صورت A سازگار خواهد بود اگر B سازگار باشد. از همین روست که گفته می‌شود روش هیلبرت سازگاری را به صورت نسبی یا مشروط (نسبت به دستگاه مرجع) اثبات می‌کند (Blanchette, 2007 a).

اثبات‌های هیلبرت دو مرحله‌ای هستند. در مرحله اول واژه‌های غیرمنطقی با استفاده از نظریه پس‌زمینه بازتعبیر می‌شوند، و در مرحله دوم صدق این گزاره‌های بازتعبیرشده نشان داده می‌شود. از آن‌جا که نظریه پس‌زمینه با تعبیر جدید اصول موضوع را صادق می‌کند هر نتیجه منطقی از آن‌ها نیز صادق خواهد بود. اگر از مجموعه اصول موضوع بتوان تناقض را نتیجه گرفت باید در نظریه پس‌زمینه نیز تناقض قابل استنتاج باشد؛ زیرا تناقض تحت هر تعبیری تناقض خواهد بود.

هیلبرت با تعبیر واژه‌های اصلی و غیرمنطقی دستگاه خود در حوزه اعداد حقیقی، آن‌ها را به قضایایی درباره اعداد حقیقی تبدیل می‌کند. با نشان دادن صدق این قضایا، سازگاری دستگاه جدید با فرض سازگاری نظریه اعداد حقیقی، اثبات شده است. هیلبرت برای نشان دادن سازگاری دستگاه خود چنین تعبیری از آن ارائه می‌دهد:

- Ω را مجموعه‌ای از اعداد جبری^۲ در نظر بگیرید که ۱ ، عضو آن است و نسبت به چهار عمل اصلی حساب و عمل $(1+\omega^2)^{1/2}$ بسته است؛

میشم محمدمینی ۵

- هر جفت (x, y) از اعداد متعلق به Ω نشان‌دهنده یک نقطه و هر سه‌تایی $(u:v:w)$ از این اعداد معرف یک خط است؛
- اگر معادله $ux+vy+w=0$ برقرار باشد بیان‌کننده آن است که نقطه (x, y) روی خط $(u:v:w)$ قرار دارد.

با در نظر گرفتن این سه فرض، اصول موضوع $I-1$ ، $I-2$ و III گزاره‌هایی صادق در حوزه اعداد حقیقی خواهند بود (Hilbert, 1902: 27-8). به اعتقاد هیلبرت، بدین ترتیب سازگاری این سه اصل موضوع با یک‌دیگر اثبات می‌شود. البته هیلبرت برای بیان چنین ادعایی باید سازگاری نظریه اعداد حقیقی را فرض بگیرد.

برای مسئله استقلال نیز هیلبرت به همین روش عمل می‌کند. منظور از استقلال گزاره P از یک دسته گزاره Γ این است که نمی‌توان از Γ با استنتاج منطقی به P رسید. این یعنی مجموعه گزاره‌های $\{P, \neg P, \Gamma\}$ سازگار است. بنابراین مسئله استقلال نیز به سازگاری تحویل می‌شود. برای اثبات استقلال یک گزاره از یک دسته دیگر هیلبرت تعبیری ارائه می‌دهد که در آن گزاره مورد نظر کاذب و سایر گزاره‌ها صادق باشند.

۳. انتقادهای فرگه (انتقادهای سیستمی)

پس از انتشار کتاب هیلبرت، فرگه اعتراض‌هایی جدی به دیدگاه او درباره اصول موضوع و رویکردش به مسائل سازگاری و استقلال مطرح کرد. این انتقادات ابتدا از طریق نامه‌نگاری‌هایی که در فاصله میان دسامبر ۱۸۹۹ و سپتامبر ۱۹۰۰ ادامه داشت بیان شد و هم‌چنین در دو مقاله که با عنوان مشترک «در باب مبانی هندسه» ('the Foundations of Geometry') در سال‌های ۱۹۰۳ و ۱۹۰۶ انتشار یافت پی‌گیری شد. هیلبرت خود هیچ‌گاه انتقادهای فرگه را وارد ندانست و پس از ۱۹۰۰ دیگر به نامه‌های او پاسخ نداد. اما برخی از هواداران هیلبرت کوشیدند انتقادات فرگه را پاسخ گویند. از جمله گُرتلت (A. R. Korslet) که به دفاع از هیلبرت برخاست و پیش‌نهاد کرد دستگاه هیلبرت به شکل صرفاً صوری و بدون محتوا در نظر گرفته شود، یعنی دستگاهی که می‌تواند تعبیر گوناگونی بپذیرد (Korselt, 1903: 402-407). این کار، به ادعای گُرتلت هم‌خوان با مقاصد هیلبرت و در عین حال پاسخ‌گوی بخش عمده انتقادات فرگه خواهد بود. بحث دستگاه‌های تماماً صوری و جای‌گاه آن‌ها در ریاضیات از این‌جا وارد مرحله تازه‌ای شد و توجه ریاضی‌دانان بیش‌تری را به خود معطوف داشت.

۶ نزاع فرگه و هیلبرت: روش صحیح پرداختن به فراقضیه‌ها در ...

انتقادهای فرگه به هیلبرت را می‌توان به دو دسته کلی تقسیم کرد: انتقادهای سیستماتیک که به نظام اصل موضوعی هیلبرت وارد بود و دسته دیگر انتقادهای روش‌شناختی که علیه روش هیلبرت در برهان‌های او برای سازگاری و استقلال اصول موضوع اقامه شدند (Frege, 1971: xii). برای ارائه و ارزیابی بهتر و دقیق‌تر این انتقادهای در قالب همین دسته‌بندی به طرح انتقادهای فرگه به هیلبرت می‌پردازم.

۱.۳ تعاریف و اصول موضوع

یک مسئله اساسی که موضوع انتقادهای فرگه به هیلبرت است مربوط به تفاوت تعاریف و اصول موضوع است. از نظر فرگه اصول موضوع و تعاریف دارای تفاوت‌های بارزی هستند. از جمله مهم‌ترین تفاوت‌ها به این موارد می‌توان اشاره کرد:

- به واسطه یک تعریف، یک واژه جدید معرفی می‌شود. در حالی که در یک اصل موضوع هیچ واژه ناشناخته‌ای وجود ندارد. یعنی مرجع همه واژه‌ها مشخص شده است؛
 - به همین دلیل، تعاریف اندیشه‌ای را بیان نمی‌کنند، در حالی هر اصل موضوع باید بیان‌کننده یک اندیشه باشد؛
 - یک تعریف از انجام یک قرارداد حکایت می‌کند. در مقابل، به واسطه یک اصل موضوع یک ادعا تصدیق می‌شود؛
 - در مورد تعاریف صحبت از صدق و کذب نمی‌کنیم، بلکه قابل پذیرش بودن آن‌ها مهم است. پس از آن‌که یک تعریف مورد پذیرش قرار گرفت فی‌نفسه صادق تلقی می‌شود و در استنتاج هم‌چون یک اصل صادق می‌تواند به کار رود؛
- با این وجود درست نیست که تعاریف را از اصول بشماریم. پیش از همه به این دلیل که قراردادهایی دل‌خواه هستند که با همه گزاره‌های تصدیقی (assertoric) تفاوت دارند (ibid: 24).

- از نظر جای‌گاه معرفتی نیز تعاریف و اصول موضوع متفاوت‌اند؛ «هیچ تعریفی دانش ما را افزایش نمی‌دهد» (ibid). در حالی که اصول موضوع بار معرفتی دارند. اما تمام این تفاوت‌ها از سوی هیلبرت نادیده انگاشته می‌شود. در واقع دستگاه هیلبرت آن‌طور که در «مبانی هندسه» معرفی شده است فقط به بیان اصول موضوع می‌پردازد و در آن به تعاریف به صورت مستقل از اصول موضوع و پیش از معرفی آن‌ها، اشاره‌ای نمی‌شود. برای هیلبرت، کل مجموعه اصول موضوع هستند که تعریف مفاهیم طرح‌شده در

میثم محمدامینی ۷

آن‌ها را به دست می‌دهد. این همان چیزی است که از آن با نام «تعاریف ضمنی هیلبرت» (Hilbert's implicit definitions) یاد می‌شود. هر اصل موضوع یک وجه یا ویژگی از یک مفهوم، مثلاً بینیت، را مشخص می‌کند. هیلبرت در نامه‌اش به فرگه توضیح می‌دهد که اگر به دنبال تعریف به معنای معمول آن باشیم، دقیقاً باید چنین بگوییم: «بین» رابطه‌ی میان نقاط یک خط راست است و چنین ویژگی‌هایی دارد: II.5. ... II.1. (ibid: 11).^۳ از نظر هیلبرت، فقط کل ساختار دستگاه اصول موضوعی است که تعاریف را به دست می‌دهد. هیلبرت در نامه به فرگه چنین می‌گوید:

هر اصل موضوع بخشی از تعریف را مشخص می‌کند و بنابراین هر اصل موضوع جدید مفهوم را تغییر می‌دهد ... هنگامی که مفهوم به صورت کامل و دور از ابهام تثبیت شد، دیگر افزودن اصول موضوع جدید غیرمجاز و غیرمنطقی است (ibid: 13).

حال بهتر مشخص می‌شود که چرا هیلبرت در مقدمه‌ی مبانی هندسه، هدف طرح خود را ارائه‌ی یک مجموعه اصول موضوع ساده و کامل و مستقل معرفی می‌کند. از نظر هیلبرت دستگاه پیش‌نهادی او مفاهیم مندرج در آن را به صورت کامل معین و مشخص می‌سازد. فرگه با نظر هیلبرت در باب تثبیت یک مفهوم و غیرمجاز بودن اضافه کردن اصول موضوع دیگر پس از آن کاملاً موافق است؛ اما تعاریف هیلبرت را حتی با فرض مجاز بودن ارائه‌ی تعاریف به صورت ضمنی به سیاق هیلبرتی نابسند می‌یابد. از دید او تعاریف هیلبرت به‌هیچ‌رو تمام نیستند. وی می‌گوید:

نمی‌دانم با داشتن تعاریف شما چگونه می‌توان به این پرسش پاسخ داد که آیا ساعت جیبی من یک نقطه است یا خیر. حتی اصل موضوع اول هم از ابتدا با دو نقطه سر و کار دارد؛ بنابراین برای این که بدانم ساعت جیبی من یک نقطه است یا خیر باید پیش از آن، شیء دیگری را به عنوان نقطه بشناسم (ibid: 18).

فرگه این انتقاد ظاهراً عجیب را باز هم پی می‌گیرد و می‌گوید اگر بدانم که مثلاً قلم من یک نقطه است، هنوز نمی‌توانم بدانم که آیا با ساعت جیبی من یک خط راست را معین می‌کنند یا خیر؛ زیرا نمی‌دانم یک خط راست چیست!

البته انتقادهای فرگه به نوع تعاریف در دستگاه هیلبرتی به این معنی نیست که همه‌ی واژه‌ها باید تعریف شوند و در پاسخ به گرزلت که برآوردن این خواسته را ناممکن شمرده بود تأکید می‌کند که به دنبال چنین چیزی نیست: «نمی‌توان انتظار داشت همه‌چیز تعریف شود» (ibid: 23). آنچه فرگه به دنبال آن است تعریف مفاهیم اصلی سیستم بر مبنای برخی مفاهیم اولیه است. در بخش ۶ در این مورد بیش‌تر توضیح می‌دهم.

۸ نزاع فرگه و هیلبرت: روش صحیح پرداختن به فراقضیه‌ها در ...

۲.۳ اصل موضوع یا شبه اصل موضوع؟

اگر بپذیریم که مجموعه کامل اصول موضوع هیلبرت تعاریف واژه‌های اصلی و جدید آن‌ها را به صورت کامل مشخص می‌کند، باز هم فرگه به این شکل ارائه تعاریف به صورت ضمنی اعتراض دارد. وقتی که کل مجموعه اصول موضوع در کنار هم مرجع واژه‌های به‌کاررفته در آن‌ها را مشخص می‌کنند هر کدام از اصول موضوع به‌تنهایی چه وضعی دارند. مطابق برداشت سنتی و پذیرفته‌شده، یک اصل موضوع یک اندیشه کامل و صادق را بیان می‌کند که صدق آن بدیهی است. اما اصل موضوع‌های هیلبرت نمی‌توانند اندیشه‌ای را بیان کنند؛ زیرا مرجع همه واژه‌های به‌کاررفته در آن‌ها مشخص نیست.

از همین رو فرگه اصول موضوع هیلبرت را «شبه اصل موضوع» (semi-axiom) می‌خواند. این اصول موضوع چون اندیشه‌ای را بیان نمی‌کنند اصلاً در دستگاه نمادگذاری فرگه‌ای قابل نمایش نیستند. پیش‌نهاد فرگه برای اصلاح این وضع در نظر گرفتن این «شبه اصل موضوع‌ها» به عنوان مقدم جملات شرطی است که تالی آن‌ها قضایای دستگاه هستند. او واژه‌های اصلی اصول موضوع هیلبرت (یا به قول خودش «شبه اصل موضوع‌های» او) را متغیر آزاد در نظر می‌گیرد و جملات شرطی‌ای می‌سازد که مقدم آن‌ها «شبه اصل موضوع‌ها» و تالی آن‌ها شبه‌قضایا هستند. یک سور عمومی روی این جملات شرطی گزاره‌ای به دست می‌دهد که گرچه هیچ یک از بخش‌های آن را گزاره کامل نمی‌توان دانست، اما خود کامل است و اندیشه‌ای مستقل را بیان می‌کند. در این صورت آنچه بیان می‌شود گزاره‌هایی است کلی که قضایای هندسه اقلیدسی یک حالت خاص آن می‌تواند باشد. این نظر همان چیزی است که به استنتاج‌گرایی (deductivism) فرگه شهرت یافته است. عمل کردن به این خواست فرگه با توجه به نمادگذاری خود او سبب می‌شود اثبات ساده‌ترین قضایا نیز صورتی بسیار طولانی و مفصل به خود بگیرد. اما از نظر فرگه «بسیاری سردرگمی‌ها در ریاضیات ناشی از صرفه‌جویی غیرضروری در جوهر چاپ‌گر و غرور نابجا است» (ibid: 89).

۳.۳ مفاهیم مرتبه اول و دوم

انتقاد دیگر فرگه متوجه مفاهیم جدید و خلط مفاهیم مرتبه اول و مرتبه دوم در دستگاه اصل موضوعی هیلبرت می‌شود. فرگه در نامه‌ای به لیلمان (H. Liebmann) دیدگاه خود درباره تمایز قاطع شیء و مفهوم و همین‌طور تمایز میان مفاهیم مرتبه اول و دوم را شرح

می‌دهد. به اعتقاد او «... هیلبرت در ابتدا قصد داشت مفاهیم مرتبه دوم را تعریف کند، لیکن آن‌ها را از مفاهیم مرتبه اول تمییز نداده است ... و یکی از اشتباهاتی که در این جا اتفاق می‌افتد خلط این دو و نسبت دادن یک واژه (مثلاً «نقطه») به هر دوی آن‌ها است» (ibid: 5). همین مسئله منشأ اعتراض فرگه به روش هیلبرت و نتیجه‌ای است که از برهان‌های خود می‌گیرد (که در بخش ۲.۴ به آن خواهیم پرداخت). برای طرح این انتقاد فرگه ناگزیرم آموزه فرگه در باب اشیا و مفاهیم مرتبه اول و بالاتر را به اختصار معرفی کنم.

فرگه در مقاله مشهور خود با نام «در باب شیء و مفهوم» مفصلاً به تشریح دیدگاهش در مورد شیء و مفهوم به منزله هویتی منطقی می‌پردازد. شیء و مفهوم از نظر او دارای تمایزات بنیادین هستند. فرگه شیء و مفهوم را تعریف نمی‌کند. این‌ها هویات اولیه هستند. آنچه از نظر منطقی بسیط است (مرکب نیست) نیاز به تعریف ندارد. برای چیزی که از نظر منطقی بسیط است، یک واژه جدید ابداع می‌کنیم و فقط با بعضی اشارات خواننده را متوجه مقصود از این واژه می‌کنیم. درک مرجع این واژه‌ها نیازمند درجه‌ای از هم‌دلی و هم‌کاری از سوی خواننده است. در چنین جایی است که تعریف صریح لازم و حتی ممکن نیست (Frege, 1960).

فرگه هر مفهوم مرتبه اول را مرکب از یک یا چند مشخصه (characteristics) می‌داند و هر شیء برای این که تحت این مفهوم قرار بگیرد باید دارای ویژگی‌هایی (properties) باشد که این مشخصات به آن‌ها اشاره دارند. این ویژگی‌ها به اصطلاح ویژگی‌های برسازنده آن مفهوم‌اند. مثلاً مفهوم مرتبه اول «عدد اول بزرگ‌تر از هشت»، مرکب از «عدد اول» و «بزرگ‌تر از هشت» است و هر شیء برای قرار گرفتن تحت آن باید ویژگی‌های «عدد اول بودن» و «بزرگ‌تر از هشت بودن» را داشته باشد.

پس از ایجاد تمایز میان اشیا و مفاهیم مرتبه اول، نوبت طرح مفاهیم مرتبه دوم می‌رسد. «تمایز میان مفهوم مرتبه اول و دوم به همان قاطعیت تمایز میان مفهوم و شیء است» (Frege, 1971: 5). میان اشیا و مفاهیم مرتبه اول رابطه‌ای وجود دارد: اشیا تحت مفاهیم مرتبه اول قرار می‌گیرند. رابطه‌ای مشابه، اما نه این‌همان، میان مفاهیم مرتبه اول و دوم وجود دارد. برای نشان دادن تفاوت این رابطه‌ها فرگه این‌طور می‌گوید: «مفاهیم مرتبه اول درون مفاهیم مرتبه دوم قرار می‌گیرند». با این تحلیل وجود داشتن از نظر فرگه مفهومی مرتبه دوم است. هنگامی که گفته می‌شود «ریشه دوم چهار وجود دارد» در واقع درباره یک مفهوم مرتبه اول، «ریشه دوم چهار»، سخن گفته می‌شود، یعنی در این باره که دست‌کم یک شیء تحت این مفهوم مرتبه اول قرار می‌گیرد. بنابراین وجود داشتن یک مفهوم مرتبه دوم است.

۱۰ نزاع فرگه و هیلبرت: روش صحیح پرداختن به فراقضیه‌ها در ...

از نظر فرگه میان مفاهیم مرتبه دوم و اشیا رابطه‌ای وجود ندارد. بنابراین گزاره «وجود دارد جولیوس سزار» نه کاذب، بلکه بی‌معناست (Frege, 1960: 50) (این ادعای فرگه به شکل جالبی با نظریه‌ی انواع راسل شباهت دارد. اما ظاهراً فرگه دلایل محکمی برای خودداری از ارائه نظریه‌ای هم‌چون نظریه‌ی راسل داشته است).^۴

برگردیم به دستگاه اصل موضوعی هیلبرت. آشکار است که مرجع «نقطه» یک شیء است. بنابراین مفهوم «نقطه بودن» مفهومی مرتبه اول است. هر مفهوم مرتبه اول باید مشخصات و ویژگی‌های برساننده‌ی مرتبه اول داشته باشد. اما اگر ما اصول موضوع هیلبرت را به عنوان اجزای تعریف او مثلاً برای نقطه در نظر بگیریم می‌بینیم که مشخصاتی که او برمی‌شمرد آمیزه‌ای است از مشخصات مرتبه اول و دوم. مثلاً، هیلبرت «وجود داشتن» را به عنوان یکی از ویژگی‌های «نقطه بودن» برمی‌شمرد؛

این‌ها ویژگی‌هایی نیستند که یک شیء برای نقطه بودن باید آن‌ها را دارا باشد، بلکه ویژگی‌های مرتبه دوم‌اند. و بنابراین هر مفهومی به وسیله‌ی این‌ها تعریف شود مفهومی مرتبه دوم خواهد بود (Frege, 1971: 36).

اما قصد بر آن بود که «نقطه بودن» به عنوان مفهومی مرتبه اول تعریف شود. همین مسئله منشأ انتقادهای فرگه به روش هیلبرت برای اثبات سازگاری و استقلال اصول موضوع دستگاه خود می‌شود.

۴. انتقادهای روش شناختی

۱.۴ انتقاد به بازتعبیر نظریه

برای فرگه زبان نظامی از علامت‌ها (signs) است که کاملاً تعبیر شده‌اند. یعنی تعبیر زبان و نحوه‌ی ارتباط علائم با معانی یکتاست. چنین برداشتی نتیجه‌ی این آموزه است که معنا (sense) مرجع (reference) را متعین می‌کند. تغییر در نظام علائم، زبانی جدید را نتیجه می‌دهد. مثلاً زبانی را در نظر بگیرید که در آن، علامتی مانند «فرگه» به شخص فرگه ارجاع می‌دهد. طبق دیدگاه مورد بحث، نمی‌توانیم درباره‌ی این زبان بگوییم ممکن است در حالتی «فرگه» به چیزی غیر از شخص فرگه ارجاع دهد؛ زیرا اگر مرجع این نام شخص دیگری باشد با زبانی به‌کلی متفاوت سر و کار داریم (Antonelli and May, 2000: 245).

حال زبانی را در نظر بگیرید که همه‌ی واژه‌ها در آن یک و فقط یک مرجع مشخص دارند. هر رشته‌ای از علائم که اندیشه‌ای را بیان کند یک گزاره می‌سازد. پس یک گزاره مشخص

یک اندیشه ثابت را بیان می‌کند و در نتیجه ارزش صدق آن ثابت است. بنابراین از نظر فرگه معنی ندارد دربارهٔ صادق نبودن یک اصل موضوع سخن بگوییم. در حالی که برهان‌های هیلبرت مبتنی به امکان بازتعبیر زبان هستند؛ زیرا همان‌طور که پیش از این اشاره شد هیلبرت استقلال گزاره P از گزاره‌های A_1, \dots, A_n را با ارائهٔ مدلی برای $\{A_1, \dots, A_n, \neg P\}$ اثبات می‌کند. چنین چیزی از نظر فرگه پذیرفتنی نیست؛ اصول موضوع صادق هستند و با توجه به معنای سنتی و متعارف اصل موضوع، ضرورتاً صادق هستند. سخن گفتن از تعبیر و بازتعبیر زبان از نظر فرگه گمراه‌کننده است:

واژه «تعبیر» قابل انتقاد است؛ زیرا یک اندیشه وقتی به درستی بیان شود جایی برای تعبیرهای مختلف باقی نمی‌گذارد ... گویی ممکن است گزاره‌هایی متفاوت با واژه‌هایی یک‌سان داشته باشیم! این برخلاف قاعدهٔ پرهیز از ابهام است، یعنی مهم‌ترین قاعده‌ای که منطبق باید بر زبان نوشتاری و گفتاری اعمال کند (Frege, 1971: 79).

اما هیلبرت اصول موضوع را «جزئاً تعبیرشده» (در مقابل کاملاً تعبیرشده) در نظر می‌گرفت. به این معنی که واژه‌های منطقی معمولی معانی ثابت دارند، اما واژه‌های غیرمنطقی معنای مشخص و ثابتی ندارند. چنین برداشتی از دید فرگه نادرست است. او به طعنه اصل موضوع کاذب را چیزی در ردیف دایرهٔ مربع می‌خواند! برای فرگه، زبان مجموعه‌ای از علائم بی‌معنا نیست. این انتقاد ابعاد گسترده‌تری دارد و به مخالفت فرگه با دیدگاه فرمالیستی در ریاضیات ارتباط دارد. فرگه در بیان یکی از دلایل مخالفت خود با فرمالیسم در بخش ۹۱ در *اصول حساب* (Grundgesetze) به کاربردپذیری ریاضیات اشاره می‌کند و می‌گوید:

یک دستگاه حساب بدون هیچ اندیشه‌ای به عنوان محتوا، امکان کاربرد نیز نخواهد داشت ... چرا معادلات حساب کاربرد دارند؟ فقط به این علت که اندیشه‌ای را بیان می‌کنند (به نقل از Antonelli and May, 2000: 246).

نظر فرگه در واقع محدود به حساب نیست. از نگاه او، محتوا برای کاربردپذیری ضروری است. این تفاوت دیدگاه در مورد زبان به طور کلی، و تعبیر آن یکی از نقاط اساسی افتراق میان فرگه و هیلبرت است.

۲.۴ نامعتبر بودن نتایج هیلبرت

همان‌گونه که در بخش ۳.۳ بیان شد، از نظر فرگه اگر شکل ارائهٔ تعاریف برای واژه‌های

۱۲ نزاع فرگه و هیلبرت: روش صحیح پرداختن به فراقضیه‌ها در ...

جدید در دستگاه هیلبرت پذیرفتنی باشد مفاهیم و دستگاه هیلبرت مرتبه دوم خواهند بود. در واقع دستگاه هیلبرت یک دستگاه مرتبه دوم است که هندسه اقلیدسی یک حالت خاص آن است.

از نظر فرگه آنچه برهان هیلبرت برای استقلال واقعاً ثابت می‌کند مستقل بودن مفاهیمی مرتبه دوم است که از روی مفاهیم مندرج در شبه اصل موضوع‌های او ساخته می‌شوند. این انتقاد را در یک جمله کوتاه از قول فرگه می‌توان چنین بیان کرد: «چگونه ممکن است برهانی واحد برای اندیشه‌های متفاوت وجود داشته باشد؟» (به نقل از 248: ibid).

دستگاه هیلبرت یک دستگاه مرتبه دوم است و آنچه او یک تعبیر از آن می‌خواند فقط یک نمونه یا مصداق جزئی از یک قضیه کلی‌تر است. چیزی که هیلبرت اثبات می‌کند این است که در یکی از این نمونه‌ها که از روی شمای کلی به دست آمده است، تناقضی وجود ندارد. از این جا می‌توان نتیجه گرفت که در شمای کلی نیز تناقضی وجود ندارد؛ زیرا اگر تناقضی بود در هر یک از نمونه‌ها نیز وجود می‌داشت. اما سازگاری در شمای مرتبه دوم نظریه دلیل آن نیست که هر یک نمونه‌ها نیز سازگار باشند. این چیزی است که هیلبرت ادعا می‌کند و از نظر فرگه بر حق نیست.

این انتقاد فرگه مبتنی است بر دیدگاه خاص او نسبت به مسائل سازگاری و استقلال و در نگاهی کلی‌تر مسائلی هم‌چون نتیجه منطقی و صوری بودن منطق و استدلال‌های آن. در ادامه به این مطلب می‌پردازم و راه‌حل پیشنهادی فرگه برای مسئله استقلال را شرح می‌دهم.

۵. سازگاری و استقلال از دیدگاه فرگه

فرگه به طور کلی در بررسی‌های منطقی خود علاقه‌مند به پرسش از مفهوم استنتاج منطقی (logical entailment) است. چه موقع یک گزاره از دسته‌ای گزاره دیگر قابل استنتاج است، یا به بیان دیگر چه وقت نتیجه منطقی آن‌ها است؟ فرگه به مسئله استنتاج‌ناپذیری نیز می‌پردازد اما با اهمیتی به مراتب کم‌تر. برای مثال اصول حساب را نتیجه منطقی اصول منطق می‌داند اما در مورد اصول موضوع هندسه مدعی است که صدق آن‌ها نتیجه صدق اصول منطق یا اصول حساب نیست. آن‌ها ریشه در شهود ما از فضا دارند.

نظام استنتاج فرگه با وجود همه پیچیدگی و غنای آن، توانایی لازم برای اثبات گزاره‌ای همانند این را ندارد: «گزاره P نتیجه منطقی مجموعه گزاره Ω نیست» و بنابراین او اثباتی برای قضایای استقلال یا سازگاری ارائه نکرد. چنین چیزی اتفاقی نیست، فرگه به‌واقع بر آن

بود که استقلال و سازگاری به صورت سیستماتیک قابل اثبات نیستند. او در برخی نوشته‌ها این عدم امکان را علی‌الاصول قلمداد می‌کند و در بعضی نوشته‌های دیگر مدعی است که هیچ روش موفقی برای این کار، دست‌کم هنوز، وجود ندارد (Blanchette, 2007 b).

در ۱۸۹۹ هنگامی که نزاع میان فرگه و هیلبرت درگرفت، فرگه دیدگاه کاملاً روشنی نسبت به مفاهیم نتیجه منطقی، سازگاری و استقلال داشت، همان دیدگاهی که مبنای کارهای او در مبنای حساب بود. چنین دریافتی از این مفاهیم در تضاد با فرضیات و اعمالی است که در برهان‌های هیلبرت برای مسائل سازگاری و استقلال انجام می‌شود. در ذهن فرگه منطق و استدلال‌های منطقی کاملاً صوری و مستقل از محتوا و معنا نبوده است. در نزاع میان فرگه و هیلبرت، انتقادی که فرگه به اثبات‌های سازگاری و استقلال هیلبرت وارد می‌داند اکتفای صرف به ساختار و صورت جملات و نادیده گرفتن محتوای واژه‌های اصلی آن است.

مسئله سازگاری پاسخ به این پرسش است که آیا یک دسته از جملات منطقاً مستلزم تناقض‌اند یا خیر. این‌جاست که پای مسئله اساسی‌تر استلزام منطقی به میان می‌آید. چه وقت مجموعه‌ای از مقدمات گزاره‌ای را منطقاً نتیجه می‌دهند.

معمول است که ویژگی منطق جدید را صوری بودن و استقلال کامل نحو از معنی‌شناسی می‌دانند. اما فرگه به عنوان بنیادگذار منطق جدید، آن را یک‌سره صوری و مستقل از معنی نمی‌داند. از نظر فرگه، «هیچ علمی کاملاً صوری نیست» (Frege, 1971: 109).

مسئله استقلال و سازگاری هر دو مسائلی درباره رابطه استلزام منطقی هستند. اختلاف هیلبرت و فرگه بر سر این مسائل ریشه در اختلاف برداشت آن‌ها از مفهوم نتیجه منطقی و رابطه استلزام دارد. برای فرگه، استلزام، سازگاری، استقلال و سایر روابط منطقی، روابطی میان اندیشه‌ها هستند. وجود چنین رابطه‌ای را با توجه به جملات بیان‌کننده این اندیشه‌ها می‌توان نتیجه گرفت. اما در باب عدم وجود، از روی جملات نمی‌توان قضاوت کرد. میان استلزام منطقی اندیشه‌ها و اثبات‌پذیری جملات رابطه یک‌طرفه است. به همین دلیل فرگه نتایجی که هیلبرت درباره سازگاری و استقلال اصول موضوع خود گرفته بود معتبر نمی‌دانست، که در بخش ۲.۴ در این باره بحث شد.

یک مثال برای روشن شدن این اختلاف می‌تواند مفید باشد. این مجموعه گزاره را در نظر بگیرید: {«زید دیشب نخوابید»، «زید دیشب کابوس دید»} که در منطق مرتبه اول به این صورت نمایش داده می‌شوند: $\{ \neg Sx, Nx \}$. این مجموعه از دید هیلبرت سازگار اما از نظر فرگه ناسازگار است. این مثال نشان می‌دهد چرا فرگه معتقد بود باید پیش از شروع

استدلال، جملات و واژه‌های به‌کاررفته در آن‌ها مورد تحلیل مفهومی قرار گیرند. آشکار است که این برداشت از مفهوم سازگاری سفت و سخت‌تر از سازگاری نحوی صرف است. آنچه هیلبرت از سازگاری مراد می‌کرد سازگاری نحوی است و آنچه در نظر فرگه بود می‌توان سازگاری اندیشه‌ای نامید. در این صورت فرگه به‌نوعی در اعتراض خود به هیلبرت بر حق بود؛ زیرا هیلبرت سازگاری اندیشه‌ای را اثبات نکرده بود. ولی ظاهراً هیلبرت نیز چنین ادعایی نداشت. اما این اختلاف در برداشت از مفهوم سازگاری فقط یک عدم توافق بر سر واژه‌ها و ترمینولوژی نبود. فرگه بر این گمان بود که درک و برداشت او از مفهوم سازگاری یعنی سازگاری میان اندیشه‌ها از نظرگاه فلسفی اهمیت بیش‌تری دارد، اما مسیر پیش‌رفت آینده منطق و ریاضیات نشان داد که فرگه در این باب چندان بر حق نبوده است.

رابطه اثبات‌پذیر بودن یک اندیشه از دسته‌ای از اندیشه‌ها قوی‌تر است از رابطه استنتاج‌پذیری یک جمله از دسته‌ای جملات. اثبات‌پذیری رابطه‌ای کلی‌تر است؛ چراکه جملات متفاوتی می‌توانند یک اندیشه را بیان کنند. در نظر بگیریید p یک اندیشه و s جمله‌ای بیان‌کننده آن اندیشه باشد و هم‌چنین A مجموعه‌ای از اندیشه‌ها و B مجموعه‌ای از جملات بیان‌کننده این اندیشه‌ها باشد. حال اگر s از B قابل استنتاج باشد می‌توان نتیجه گرفت که p با فرض A قابل اثبات است. اما اگر s از B قابل استنتاج نباشد نمی‌توان نتیجه گرفت که p هم با توجه به A اثبات‌پذیر نیست؛ زیرا کاملاً محتمل است جمله‌ای مانند r و مجموعه جملاتی چون C وجود داشته باشند که به‌ترتیب بیان‌کننده اندیشه‌های p و A باشند و r از C قابل استنتاج باشد.

در دستگاه صوری فرگه، پرسش درباره اثبات‌پذیر بودن نیمه‌تصمیم‌پذیر است به این معنی که اگر پاسخ مثبت باشد راهی برای نشان دادن آن وجود دارد، اما راهی برای نشان دادن اثبات‌ناپذیر بودن یک اندیشه از یک دسته اندیشه دیگر وجود ندارد. پس نتیجه می‌شود که سازگاری نحوی شرط کافی برای سازگاری اندیشه‌ای (فرگه‌ای) نیست.

۶. اهمیت تحلیل مفهومی و تعاریف

از دید فرگه، جمله به مثابه مجموعه‌ای از اصوات یا علائم کاملاً متمایز است از اندیشه‌ای که با آن بیان می‌شود. روشن است که وقتی از سازگاری یا استقلال جملات سخن می‌گوییم، از سازگاری و استقلال اندیشه‌هایی که این جملات بیان می‌کنند سخن می‌گوییم و نه مجموعه‌ای از صداها یا علائم.

در نظر فرگه، در حالی که هر جمله یک اندیشه یکتا را بیان می‌کند، یک اندیشه را می‌توان با جملاتی متمایز بیان کرد، جملاتی که نمایش تجزیه مفاهیم و روابط مرکب منطقی به اجزای برساننده آن‌هاست اما هر کدام تا مرحله‌ای خاص در این فرایند تجزیه پیش رفته‌اند. هدف پروژه منطق‌گرایی فرگه نشان دادن این مسئله بود که اصول موضوع حساب را می‌توان با تحلیل مفهومی به جملاتی تبدیل کرد که همان اندیشه را بیان می‌کنند و در عین حال از اصول منطق قابل استنتاج هستند.

پیش‌روی در مراحل این تحلیل مفهومی پیچیدگی نحوی را افزایش می‌دهد و در مقابل از پیچیدگی مفهومی یا محتوایی می‌کاهد. اتخاذ چنین دیدگاهی از سوی فرگه این گمان را تقویت می‌کند که او ظاهراً قائل به نوعی نظام سلسله‌مراتبی میان مفاهیم است که در آن مفاهیم ساده‌تر با یک ساختار منطقی مفهوم‌های پیچیده‌تر را به وجود می‌آورند. این دیدگاه درست مانند رویکردی است که فرگه نسبت به جملات دارد.

اما فرایند تحلیل مفهومی به‌ناچار باید در یک مرحله متوقف شود. بنابراین فرگه باید برخی مفاهیم را مفاهیم اولیه یا مفاهیم اتمی بداند. او در مبانی حساب به روشنی نشان می‌دهد که مفاهیم و روابط منطقی هم‌چون نقیض و این‌همانی دارای چنین جای‌گاهی هستند. البته بلانشت (Blanchette, 2007 a) مدعی است که فرگه معتقد به وجود یک مرحله نهایی در تحلیل مفهومی گزاره نبوده است. برای این ادعا به وجود جملاتی استناد می‌کند که یک اندیشه را بیان می‌کنند اما به هیچ وجه با تحلیل مفهومی به یک‌دیگر مرتبط نمی‌شوند. مثلاً یک اندیشه که با دو جمله متفاوت به صورت‌های $f(a)=f(b)$ و $R(a,b)$ نشان داده می‌شود.

اما فرگه در مقاله اولی که با نام «مبانی هندسه» نگاشته است، پس از طرح انتقادهای خود در باب خلط تعاریف و اصول موضوع می‌گوید:

عقیده من چنین است: ما باید عناصر منطقی پایه را که تعریف‌ناشدنی هستند مشخص کنیم ... هنگامی که محققان به درکی درباره عناصر پایه و مدل‌های آن‌ها دست یافتند، توافق در باب آنچه منطقاً مرکب است به‌سادگی از طریق تعریف حاصل می‌شود (Frege, 1971: 57).

تعریف مجاز از نگاه فرگه گزاره‌ای است که عناصر پایه‌ای منطق را ترکیب می‌کند و در یک واژه قرار می‌دهد. شناختن این عناصر پایه برای بررسی مسئله استلزام و حد تحلیل مفهومی ضرورت دارد. مسئله سازگاری و استقلال یا همان مسئله عدم استلزام هنگامی می‌تواند پاسخ قطعی یابد که گزاره تا حد رسیدن به عناصر پایه‌ای مورد تحلیل قرار گرفته

۱۶ نزاع فرگه و هیلبرت: روش صحیح پرداختن به فراقضیه‌ها در ...

باشد. این مسئله ارتباطی نزدیک با شناسایی اشیا و مفاهیم منطقی دارد که راه‌حل پیشنهادی خود فرگه برای این مسائل نیازمند آن است. در بخش پایانی به بیان این راه‌حل می‌پردازم.

۷. نتیجه‌گیری

نزاع میان فرگه و هیلبرت نشان می‌دهد که دیدگاه فرگه نسبت به منطق و فرانظریه تا چه حد متفاوت از دیدگاه امروزی است و درک او از مفاهیم اساسی چون نتیجه منطقی، سازگاری و استقلال تا چه اندازه متفاوت از رویکرد مدرن است.

نظر غالب این است که دیدگاه‌هایی هم‌چون عدم امکان بازتعبیر زبان و در نظر گرفتن محتوا برای منطق سبب می‌شود فرگه از ورود به بحث‌های فرانظریه‌ای بازماند. اما با بررسی دقیق‌تر نظرهای فرگه مشخص می‌شود که این حکم چندان معتبر نیست، هرچند که خالی از حقیقت هم نیست. درست است که فرگه نمی‌تواند هم‌چون نظریه مدل امروزی وارد بحث‌های فرانظریه‌ای شود، لیکن برخی قضایا هم‌چون سازگاری و استقلال برای فرگه قابل طرح است. فرگه خود در مقاله دومی که با نام «مبانی هندسه» نگاشت، طرحی از یک برهان برای قضیه سازگاری ارائه کرد که در واقع اصلاحیه‌ای برای برهان هیلبرت بود. اما باید اذعان کرد فرگه در پرداختن به این موارد بسیار محتاط و مردد بود.

رویکرد فرگه به فرانظریه اساساً متفاوت از آن چیزی است که نزد هیلبرت یا تارسکی می‌توان یافت. این تفاوت دیدگاه از تفاوت رویکرد فرگه نسبت به مسائل معاشناختی نشئت می‌گیرد. در نتیجه دیدگاه فرگه نسبت به مسائل فرانظریه‌ای متفاوت از دیدگاه پذیرفته‌شده امروزی در نظریه مدل است. فرگه دامنه و کاربرد دیگری برای مسائل فرانظریه‌ای متصور بود.

معمول است که در بررسی‌های منطقی از دو نوع دیدگاه درون‌گرایانه و برون‌گرایانه درباره منطق نام می‌برند. دیدگاه درون‌گرایانه صرفاً بررسی نحوه استنتاج گزاره‌ها از یک‌دیگر را در نظر دارد. در حالی که رویکرد برون‌گرایانه این امکان را فراهم می‌کند که یک نظام منطقی خود به منزله موضوع یک بررسی صوری در نظر گرفته شود.

در مورد فرگه آن‌چه او مخالف آن است نه اساس دیدگاه برون‌گرایانه، بلکه دو آموزه اساسی از یک قرائت خاص از این دیدگاه است. رویکرد برون‌گرایانه در منطق نسبت به عدم یا وجود تمایز میان فرازبان و زبان موضعی اتخاذ نمی‌کند. آیا یک زبان می‌تواند برای سخن گفتن در مورد خود آن زبان به کار گرفته شود؟ برون‌گرایی نسبت

به این پرسش بی‌اعتناست. در مورد سمانتیک نیز موضع برون‌گرایی خشتی است. یعنی در مورد ضرورت توانایی بازتعبیر کردن زبان موضعی اتخاذ نمی‌شود. اما نظریه مدل که بر پایه کارهای تارسکی بنا شده است هم‌زمان دو اندیشه اساسی را دربر دارد: ۱. زبان و فرازبان از هم متمایزند؛ ۲. فرانظریه نظریه مدل است، یعنی نظریه تعابیر جای‌گزین (alternative interpretations). اما فرانظریه را می‌توان کلی‌تر از دیدگاه تارسکی در نظر گرفت (Antonelli and May, 2000: 252).

به عقیده فرگه زبان نسبت به جهان از قدرت بیانی کامل برخوردار است. از نظر او چیز ناگفتنی وجود ندارد. شش اصل موضوع منطق و قواعد استدلال، صدق‌های منطقی را می‌دهند. گزاره‌هایی که در زبان به صورت منطقی اثبات نمی‌شوند می‌توانند در برخی کاربردهای منطق اثبات شوند. به این شکل اصول موضوع دیگری به اصول منطقی افزوده می‌شوند که این اصول جدید با توجه به حوزه پژوهش توجیه می‌شوند. معروف‌ترین مثال فرگه اصول موضوع هندسه است. این اصول بر اساس شهود هندسی ما توجیه می‌شوند.

از دیدگاه فرگه منطق دارای عمومیتی است که در مورد هر چیز در جهان سخن می‌گوید. پس طبیعتاً انتظار داریم بتواند در مورد خود منطق نیز سخن بگوید. از این منظر بحث‌های فرانظریه‌ای ممنوعیتی برای فرگه ندارد. اما این‌که بتوانیم در مورد خود منطق سخن بگوییم برای بحث فرانظریه‌ای کافی نیست. گزاره‌هایی به این شکل باید اصل موضوع یا قضیه باشند. برای این منظور باید کاربردی از منطق داشته باشیم که حوزه نظر آن خود منطق است. با در نظر گرفتن عمومیت کاربردی منطق چنین کاربردی مجاز است؛ یعنی کاربرد منطق برای بررسی خود آن.

اگر بخواهیم منکر امکان بحث‌های فرانظریه‌ای در نظام فرگه‌ای شویم، یا باید انکار کنیم که هر گزاره در زبان قابلیت صورت‌بندی دارد یا این‌که عمومیت حوزه‌های کاربرد منطق را رد کنیم. فرگه هیچ‌یک از این دو را نمی‌پذیرد (Tappenden, 2000). البته نظر فرگه درباره زبان به عنوان نظامی کاملاً تعبیر شده، مسلماً فرانظریه به روش تارسکی را مجاز نمی‌داند.

برای روشن شدن دامنه مجاز این بحث‌ها از نگاه فرگه خوب است طرح برهان او را برای اثبات مسئله استقلال اصول موضوع مختصراً مرور کنیم. در مقاله دومی که فرگه با نام «مبانی هندسه» نوشت، شرح می‌دهد که چگونه ممکن است سازگاری یک دسته گزاره را اثبات کرد (Frege, 1971: 103-112). فرض کنید یک تبدیل داریم که هر واژه در زبان را به واژه دیگری در همان زبان می‌برد. این تبدیل جای‌گاه منطقی واژه‌ها را حفظ می‌کند. یعنی

۱۸ نزاع فرگه و هیلبرت: روش صحیح پرداختن به فراقضیه‌ها در ...

کلماتی که مرجع آن‌ها اشیا هستند به کلمات دیگری که مرجع آن‌ها نیز اشیا هستند تبدیل می‌شوند. همین‌طور کلماتی که به مفاهیم مرتبه اول یا بالاتر دلالت دارند طوری تبدیل می‌شوند که این دسته‌بندی حفظ شود. شرط دیگری نیز وجود دارد. اشیا و مفاهیمی که متعلق به خود منطبق هستند، مانند «و»، «یا»، «نقیض» و ...، در این تبدیل دست‌نخورده باقی می‌مانند. در صورتی که این شرایط برآورده شوند، تبدیل مورد نظر دارای این ویژگی خواهد بود که هر گزاره که بیان‌کننده اندیشه‌ای باشد تحت آن به گزاره دیگر که آن نیز بیان‌کننده اندیشه‌ای است تبدیل می‌شود. حال فرگه می‌گوید:

بگذارید ببینیم آیا اندیشه G وابسته به یک گروه اندیشه Ω است یا خیر. می‌توانیم به این پرسش پاسخ منفی بدهیم اگر طبق تبدیل ما، اندیشه‌های گروه Ω متناظر با گروهی اندیشه صادق Ω' باشند، در حالی که اندیشه G متناظر اندیشه کاذب G' است؛ زیرا اگر G وابسته به Ω بود، از آنجا که اندیشه‌های Ω' صادق هستند، G' نیز وابسته به Ω' و در نتیجه G' صادق می‌بود (ibid: 110).

چنین راه‌حلی از سوی فرگه این نظر را تقویت می‌کند که از نظر فرگه امکان بازتعبیر به شکل ضعیف، به بیان فرگه تبدیل، واژه‌ها وجود دارد به نوعی که فقط شامل واژه‌های غیرمنطقی باشد. تفاوت دیدگاه فرگه و دیدگاه امروزی در این باب را می‌توان به این صورت توضیح داد:

برای فرگه، منطبق در مورد چیزی است، یعنی همه چیز. قوانین منطبق محتوا دارند: آن‌ها کلی‌ترین صدق‌ها درباره ساختار منطقی جهان (logical furniture of universe) هستند ... دیدگاه ما نسبت به منطبق این مفهوم از صدق‌های منطقی را در خود دارد که آن‌ها کاملاً کلی هستند، نه به این معنی که کلی‌ترین صدق‌ها درباره ساختار منطقی جهان هستند، بلکه از این حیث که موضوع به‌خصوصی ندارند، از هیچ هویت یا رده‌ای از هویات به‌طور خاص سخن نمی‌گویند ... (Goldfarb, 1979: 252-253).

اما هنوز یک مسئله حل‌نشده باقی است: مسئله اشیا و مفاهیم منطقی. برای فرگه گذشته از ادات منطقی و سورها و مانند این‌ها، چیزهایی مانند اعداد نیز جزء اشیا منطقی به‌شمار می‌آیند. پیش از شناسایی این اشیا و مفاهیم راه ورود به بحث‌های فرانظریه‌ای برای فرگه بسته است. این مسئله در واقع همان شناسایی عناصر پایه منطقی یا همان تعریف‌ناشدنی‌هاست که در بخش پیش از آن سخن گفتم. فرگه خود صراحتاً از پی‌گرفتن این راه خودداری کرده است و این مسئله‌ای است که هنوز مورد توجه برخی منطقیان است هرچند برخی نیز ارائه راه‌حل مناسب برای آن را ناممکن می‌دانند.

پی‌نوشت‌ها

۱. تأکدها از هیلبرت است.
۲. هر عددی جبری ریشه یک چندجمله‌ای جبری با ضرایب صحیح است. مجموعه اعداد جبری مجموعه‌ای شمارا از اعداد حقیقی‌اند.
۳. کتاب *بنیادهای هندسه و نظریات صوری حساب* (۱۹۷۱) ترجمه آیکه‌هنر و. کلوگ، که منبع اصلی برای نگارش این مقاله نیز بوده است، مجموعه‌ای است از مقالات و نوشته‌های منطقی و ریاضیاتی گوتلوب فرگه. نامه‌های رد و بدل شده میان فرگه و هیلبرت نیز در همین کتاب آمده است. این توضیح را از آن جهت افزودم که خواننده ارجاع به Frege, 1971 در برابر نقل قول از هیلبرت را اشتباه نپندارد.
۴. در واقع، اندیشه اصلی در پس نظریه انواع راسل نیز معرفی نظامی سلسله‌مراتبی برای هستی‌شناسی اشیای ریاضی است. نظریه انواع، برای پرهیز از گرفتار شدن در دام پارادوکس راسل، ادعا می‌کند که هر هویت ریاضی متعلق به یک طبقه یا نوع است و میان انواع سلسله‌مراتبی وجود دارد که مطابق آن اشیای متعلق به هر نوع منحصرأ با استفاده از اشیای متعلق به نوع قبلی ساخته می‌شوند.

منابع

- Antonelli, Aldo and May Robert (2000). 'Frege's New Science', *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Vol. 41, No. 3.
- Blanchette, Patricia (2007 a). 'The Frege-Hilbert Controversy', *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Edward N. Zalta (ed.), URL: <http://plato.stanford.edu/archives/spr2014/entries/frege-hilbert/>.
- Blanchette, Patricia (2007 b). 'Frege on Consistency and Conceptual Analysis', *Philosophia Mathematica*, Vol. 15, No.3.
- Frege, Gottlob (1960). 'On Concept and Object', in *Translations from the philosophical writings of Gottlob Frege*, P.T Geach and M. Black (trans), Oxford: Oxford University Press.
- Frege, Gottlob (1971). *On the Foundations of Geometry and Formal Theories of Arithmetic*, E. W. Kluge (trans.), New Haven and London: Yale University Press.
- Goldfarb, Warren D. (1979). 'Logic in the twenties: The nature of the quantifier', *The Journal of Symbolic Logic*, Vol. 44.
- Hilbert, David (1902). *Foundations of Geometry*, E. J. Townsend (trans.), Chicago: Open Court Publishing Co.
- Korselt, Alwin R. (1903). 'On the Foundations of Geometry', *Jahresbericht*, 12.
- Tappenden, Jamie (2000). 'Frege on axioms and independence arguments in geometry: Did Frege reject independence arguments?', *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Vol. 41, No. 2.