منطق‌پژوهی، پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
دوفصل‌نامهٔ علمی (مقالهٔ علمی ـ پژوهشی)، سال دهم، شمارهٔ اول، بهار و تابستان ۱۳۹۸، ۸۹–۱۲۰

منطق پیوسته

سید محمد امین خاتمی*

مسعود پورمهدیان**

چکیده

منطق پیوسته تعمیمی از منطق کلاسیک به یک منطق با مجموعه مقادیر درستی بی‌نهایت مقداری است. بسیاری از نتایج منطق کلاسیک و نظریه مدل آن به منطق پیوسته تعمیم داده شده‌اند. منطق پیوسته نه تنها در بررسی و تحلیل خواص ساختارهای مباحث آنالیز ریاضی کاربردهای فراوانی دارد، بلکه باعث بوجود آمدن نگرش‌های جدیدی در نظریه مدل منطق کلاسیک نیز شده است.در مقاله حاضر مروری خواهیم داشت بر سیر تکاملی منطق پیوسته از روی منطق چندمقداری لوکاسیویچ. سپس بعضی از مهمترین خواص اولیه منطق پیوسته را بیان می‌کنیم. در انتها با توجه به تحلیلی که از مفهوم پیوستگی در منطق پیوسته با توجه به مجموعه مقادیر درستی داریم، نوعی از منطق پیوسته که مبتنی بر نرم‌های مثلثی پیوسته است را معرفی خواهیم کرد. این موضوع به معرفی منطق‌های پیوسته مبتنی بر منطق‌هایی مثل منطق گودل و حاصل‌ضربی می‌انجامد. در انتها به بررسی بعضی از خواص این منطق‌ها از جمله خاصیت فشردگی خواهیم پرداخت.

کلیدواژه‌ها: منطق ریاضی، منطق چندمقداری، منطق فازی، منطق پیوسته

---

* دکترای منطق ریاضی، استادیار گروه علوم کامپیوتر، دانشگاه صنعتی بیرجند، بیرجند، khatami@birjandut.ac.ir

** دکترای منطق ریاضی، دانشیار گروه ریاضی، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران (نویسندهٔ مسئول)، pourmahd@ipm.ir

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۰۲/۰۱، تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۰۶/۳۱

۱. مقدمه

بحث‌های ارسطو در مورد صدق یا کذب جملاتی که در مورد آینده اطلاعی می‌دهند (problem of future contingents)، باعث شد در اواسط دوره رنسانس اولین ایده‌های تخطی از اصل «دو ارزشی بودن» (principle of bivalence) شکل بگیرند. این مسئله البته تا اوایل قرن بیستم میلادی، بیشتر با مباحث فلسفی، توسط افرادی همچون لایبنیتز (G.W.Leibniz) و میُننگ (A.Meinong) مورد بررسی قرار گرفت.

در اوایل قرن بیستم، اولین انگاره‌های منسجم تخطی از «اصل دو ارزشی بودن» شکل گرفتند.در سال‌های ۱۸۹۸، ۱۹۰۹ و ۱۹۱۲ سه منطق‌دان اسکاتلندی، آمریکایی و روسی به نام‌های مک‌کال (H.MacColl)، پیرس (C.S.Peirce) و واسیلیو (N.A.Vasil'ev) با رویکردهای مختلف به این موضوع پرداختند. در سال ۱۹۲۰ جان لوکاسیویچ (J.Lukasiewicz) و امیل پست (E.L.Post) دو مقاله کاملاً مستقل در مورد دو سیستم منطقی از منطق‌های چندمقداری منتشر کردند. این دو مقاله اولین کارهای با بنیه ریاضی قوی در مورد منطق‌های چندمقداری محسوب می‌شوند.

منطقِ معرفی‌شده توسط لوکاسیویچ به لحاظ مجموعه مقادیر درستی، سه مقداری بود ولی خیلیِ سریع و تا سال ۱۹۳۰ این منطق با مجموعه مقادیر درستی نامتناهی مقداری نیز توسط خود لوکاسیویچ مورد بررسی قرار گرفت. تفاوت اصلی منطق لوکاسیویچ و منطق پُست با منطق کلاسیک در مجموعه مقادیر درستی بود ولی به لحاظ عملکرد روابط منطقی، در هر دوی این منطق‌ها شبیه منطق کلاسیک هر رابط منطقی دارای یک تابع درستی بود. این موضوع ایجاب می‌کرد که یک ارزیابی روی مجموعه گزاره‌های اتمیک، را بتوان به یک تابع ارزش روی مجموعه همه گزاره‌ها تعمیم داد. نتیجه این شباهت این شد که منطقیون سیستم‌های اثباتی برای این منطق‌ها طراحی کنند که شبیه سیستم اثبات منطق کلاسیک باشد. در عین حال کامل بودن این سیستم‌های اثبات، به این معنی که هر گزاره درستی توسط آنها قابل اثبات باشد، در خیلی از موارد قابل حصول نبود و برای موارد دست‌یافتنی شبیه منطق لوکاسیویچ نیز تا سالها معطل ماند.

نکته حائز اهمیت دیگر در مورد منطق لوکاسیویچ این بود که این منطق به لحاظ عملکرد روابط منطقی، بر خلاف منطق پُست و یا خیلی از منطق‌های چندمقداری دیگر،دقیقاً تعمیمی از منطق کلاسیک بود. حتی بعد از معرفی شکلِ محمولی منطق لوکاسیویچ مشاهده شد که رفتار سورها نیز شباهت زیادی به رفتار سورها در منطق

کلاسیک دارند. این شباهت عملکرد روابط منطقی و سورها باعث شد تا با تعمیم سیستم‌های اثبات منطق کلاسیک، سیستم‌های اثباتی برای منطق لوکاسیویچ بدست آیند.

بعلاوه بعضی از روش‌هایی که برای اثبات کامل بودن سیستم‌های اثبات منطق کلاسیک به کار گرفته می‌شدند در منطق‌های چندمقداری نیز مورد توجه قرار گرفتند.به عنوان مثال تشکیل جبر لیندن‌بائوم یک تئوری که شامل کلاس‌های هم‌ارزیِ گزاره‌های معادل بود و در سال ۱۹۳۵ توسط تارسکی و لیندن‌بائوم برای منطق کلاسیک معرفی شده بود، در بررسی کامل بودن سیستم‌های اثبات منطق لوکاسیویچ به کار گرفته شد. این موضوع باعث معرفی مفهوم MV–جبرها (MV-algebras) توسط چانگ (C.C.Chang) در سال ۱۹۵۷ در مقابل جبرهای بولی (Boolean algebras) در منطق کلاسیک شد. چانگ در سال ۱۹۵۸ با نمایش یک MV–جبر به کمک قسمتی محدود از عناصر مثبت یک گروه آبلی مرتب، توانست کامل بودن سیستم‌های اثبات منطق لوکاسیویچ گزاره‌ای را ثابت کند (Chang, 1959: 74). البته این مهم در سال ۱۹۵۶ و بطور جدگانه توسط رز (A.Rose) و روزر (J.B.Rosser) و با روشی ریاضیگونه نیز انجام شد (Rose and Rosser, 1958: 1).

اما در مورد اثبات کامل بودن سیستم اثبات برای منطق لوکاسیویچ مرتبه اول،نکته کلیدی که باعث به سرانجام رسیدن این مهم شد، پیوستگی تابع درستی روابط منطقیِ منطق لوکاسیویچ بود. در واقع چنانچه توپولوژی اقلیدسی را روی [0,1] و نیز $[0,1]^2$ در نظر بگیریم، آنگاه تابع درستی همه روابط منطقی در منطق لوکاسیویچ پیوسته خواهند بود. چانگ و بلونس (L. P. Belluce) در سال ۱۹۶۳ توانستند با استفاده از این واقعیت، کامل بودن سیستم اثبات برای منطق لوکاسیویچ مرتبه اول را نیز ثابت کند (Belluce and Chang, 43 :1963). در ادامه چانگ به همراه کیسلر (J.Keisler) و با الهام گرفتن از خواص منطق لوکاسیویچ سه سال بعد منطقی چندمقداری به نام منطق پیوسته را معرفی کردند که در آن به جای استفاده از بازه یکه واحد [0,1]، مجموعه مقادیر درستی یک فضای توپولوژیک هاسدورف در نظر گرفته شده بود و روابط منطقی نیز توابعی پیوسته بودند (Continuous .(Model Theory, 1966

دانشمند فقید ایرانی‌الاصل، زاده (لطفی عسکرزاه L.A.Zadeh) بعد از معرفی مجموعه‌های فازی در سال ۱۹۶۵، در دهه ۱۹۷۰ منطق فازی را معرفی کرد که به بررسی مفهوم ابهام (vagueness) در مفاهیم منطقی می‌پرداخت. با توجه به ماهیت منطق‌های چندارزشی، منطقیون خیلی سریع به مطالعه مفهوم ابهام در غالب اصطلاحاتی مثل درجه

درستی، درجه اثبات‌پذیری، K–سازگاری و ... پرداختند. همانطور که کاربردهای دیدگاه فازی در سایر علوم به سرعت مورد استقبال واقع شد، در بسیاری از انواع منطق‌های چندمقداری این دیدگاه مورد مطالعه قرار گرفت و حتی خیلی اوقات واژه «منطق فازی» بجای «منطق چندمقداری» مورد استفاده قرار گرفت. در سال ۱۹۷۹ پاولکا (J.Pavelka) برای بررسی مفاهیم فازیِ درجه درستی و درجه اثبات‌پذیری با افزودن ثوابت منطقی صفر موضعی $\{\bar{r}: r \in (0,1)\}$ به مجموعه روابط منطقی و استفاده از پیوستگی توابع درستیِ روابط منطقی، نشان داد درجه درستی و درجه اثبات‌پذیری در منطق لوکاسیویچ مجهز شده با $\bar{r}$ها که به منطق پاولکا مشهور شد، با هم برابر هستند (Pavelka, 1979: 45). در سال ۱۹۹۸ هایک (P. Hájek) منطق‌دان فقید مجارستانی در کتاب مشهورش در مورد منطق‌های چندمقداری ومنطق فازی (Metamathematics of fuzzy logic)، منطق اساسی (basic logic) که نوعی از منطق‌های چندمقداری مبتنی بر نرم مثلثی پیوسته (continuous t-norm) بود را معرفی کرد. منطق پایه به نوعی در بر گیرنده طیف وسیعی از منطق‌های چندمقداری از جمله منطق لوکاسیویچ، منطق گودل (Gödel logic) و منطق حاصل‌ضربی (product logic) بود. هایک در کتاب مذکور به شکل قابل توجهی همه نتایج بدست آمده تا آن زمان در مورد این منطق‌های چندمقداری را با جزئیات جمع‌آوری کرد.

شروع مباحث جدی در منطق پیوسته را شاید بتوان به کارهای دهه ۱۹۹۰ میلادی هنسون (C.W. Henson) و برخی از همکارانش مانند بن‌یاکف (I. Ben-Yaacov) در نظریه مدل ساختارهای آنالیز ریاضی منسوب کرد. با الهام گرفتن از کارهای چانگ و البته با نگاهی به ایده‌های پاولکا، در سال ۲۰۰۶ بن‌یاکف و هنسون طی یک کارسوق علمی، منطق پیوسته را به شکل جدید آن معرفی کردند. یکی از کامل‌ترین مراجع حاصل از این همکاری‌ها در مورد معرفی منطق پیوسته بخشی از یک مجموعه مقالات است که بن‌یاکوف، برنشتاین (Berenstein.A)، هنسون و اسویاتسوف (A. Usvyatsov) آن را به رشته تحریر درآورده‌اند (Ben-Yaacov, Berenstein, Henson and Usvyatsov, 2008: 315). در منطق پیوسته‌ی معرفی شده توسط بن‌یاکف و همکارانش، نه تنها مباحث مربوط به نظریه مدل تا حدودی از توسیع مباحث نظریه مدل منطق کلاسیک به دست می‌آمدند، بلکه مطالعه ساختارهایی از آنالیز ریاضی که قبلاً در نظریه مدل منطق کلاسیک با دشواری‌هایی همراه بود، در اینجا به نظر ساده‌تر می‌آمدند. شاید بتوان مطالعه نظریه مدل ساختارهای

متریک را یکی از مهمترین کاربردهای منطق پیوسته دانست که در حال حاضر توسط بن‌یاکوف و همکارانش در حال توسعه می‌باشد.

نگاهی دیگر به کار کلیدی چانگ و کیسلر (Continuous Model Theory, 1966) می‌تواند معرف نوعی دیگر از منطق پیوسته باشد که برای مطالعه ساختارهای متریک خاص ممکن است مناسبت بیشتری نسبت به منطق پیوسته معرفی شده توسط بن‌یاکف و همکارانش داشته باشد. در واقع چنانچه خود را محدود به توپولوژی اقلیدسی روی [0,1] و $[0,1]^2$ نکنیم، آنگاه مشاهده می‌کنیم که توابع درستیِ همه روابط منطقیِ بعضی از منطق‌های پایه مانند منطق گودل و یا حاصل‌ضربی نیز ممکن است پیوسته باشند که این منجر به ظهور نوعی دیگر از منطق‌های پیوسته خواهد شد. این کار در واقع توسط نویسندگان مقاله حاضر به همراه خانم توانا برای منطق گودل در سال ۲۰۱۴ انجام شده است (Khatami, Pourmahdian and Tavana: 2016, 1743). بعلاوه در حال حاضر نویسنده اول در حال توسیع این موضوع برای منطق حاصل‌ضربی و نیز منطق پایه می‌باشد. نظریه مدل مربوط به این نوعِ از منطق پیوسته نیز شاید شبیه نظریه مدل منطق پیوسته بن‌یاکف، قابلیت توسعه به هر دو لحاظ منطقی و کاربردی را داشته باشد.

در سه بخش بعدی مقاله سیر تکاملی منطق پیوسته از روی منطق لوکاسیویچ را بیان خواهیم کرد. در بخش پنجم بعضی از اولین قضایایی که برای توسعه نظریه مدل منطق پیوسته لازم هستند را بیان می‌کنیم. بالاخره در بخش آخر به معرفی نوعی از منطق پیوسته که مبتنی سایر منطق‌های چندمقداری مانند منطق گودل و یا حاصل‌ضربی است می‌پردازیم.در تصاویر مربوط به تابع درستیِ روابط منطقی، به جای استفاده از تصاویر معمولِ سه‌بعدی، از تصاویر دوبعدی ولی با تکیه بر تغییر رنگ نقاط برای بعد سوم استفاده کرده‌ایم. در واقع طیفی از رنگ‌های بین سفید و سیاه که به ترتیب نشان دهنده «درستی محض» و «غلط بودن محض» می‌باشند، نشان دهنده عملکرد تابع درستی در ازای ورودی‌های مختلف می‌باشند. این تصاویر علاوه بر اینکه تعبیرِ روابط منطقی را نسبت به تصاویر سه‌بعدی، بهتر نشان می‌دهند، برخی از خواص توابعِ درستیِ روابط منطقی مانند پیوستگیِ آنها را نیز خیلی خوب نمایش می‌دهند.

۲. سیستم منطقی لوکاسیویچ

در منطق لوکاسیویچ ۳ مقداری که در سال ۱۹۲۰ توسط لوکاسیویچ معرفی شد، مجموعه مقادیر درستی شامل سه مقدار «{د}=درست»، «{ن}=نادرست» و «{د،ن}=ممکن» بود. به لحاظ فلسفی او مقدار «ممکن» را برای ارزش گزاره‌هایی که در زمان آینده هستند در نظر گرفته بود. در این منطق دو رابط منطقیِ تناقض و استلزام به عنوان روابط منطقیِ پایه هستند که سایر روابط منطقی را به کمک این دو رابط منطقی می‌توان تعریف نمود.

منطقِ واژه‌ی «ممکن»، ایجاب می‌کند که تاثیر روابط منطقی روی مقدار درستی «ممکن»، بطور تابعی بسته نباشند و مقدار درستی یک گزاره بسیط که بعضی از گزاره‌های اتمیک آن مقدار درستی «ممکن» را دارند، از روی مقدار درستی گزاره‌های اتمیک تشکیل دهنده آن قابل محاسبه نباشد. اما حساب احتمالات که در آن زمان توسعه قابل ملاحظه‌ای یافته بود، با چنین توابعی سروکار داشت. بنابراین لوکاسیویچ برای اینکه منطق جدیدی برای کار کردن با مقادیر مبهم ابداع کند، فرض کرد که روابط منطقی دارای تابع درستی باشند و ارزش گزاره‌های بسیط از روی گزاره‌های اتمیک آن و با توجه به توابع درستی روابط منطقی قابل محاسبه باشد. در واقع وی فرض کرد که دو اصل مهم زیر از اصول منطق کلاسیک در منطق لوکاسیویچ هم برقرار هستند:

۱. ارزش درستی هر گزاره از روی گزاره‌های اتمیک آن و با توجه به توابع درستی روابط منطقی به دست می‌آید. به عبارت دیگر عملکرد همه رابط منطقی کاملاً معلوم است،

۲. به ازای هر رابط منطقی *، اگر ارزش گزاره مرکب $A * B$ مشخص باشد، آنگاه چنانچه به جای A وB دو گزاره دیگر و هم‌ارزش با خود A وB قرار دهیم، ارزش گزاره جدید با ارزش $A * B$ برابر است.

این دو اصلِ لوکاسیویچ در خیلی از منطق‌های چندمقداری که در سال‌های بعد ابداع شدند، مفروض بودند. در واقع در حال حاضر واژه منطق چندمقداری به منطق‌هایی اطلاق می‌شود که مجموعه مقادیر درستی آن‌ها بیشتر از دو مقدار درستی داشته باشند و بعلاوه همه روابط منطقی دارای تابع درستی باشند.

به عنوان مثال، لوکاسیویچ تابع درستی رابط منطقی استلزام را برای دو گزاره φ و ψ به شکل زیر تعریف کرد:

- وقتی ارزش ψ برابر «درست» و یا ارزش φ برابر «نادرست» است حتماً ارزش $\varphi \to \psi$ برابر درست خواهد بود،
- بعلاوه وقتی مقدم «درست» ولی تالی «ممکن» باشد و نیز وقتی مقدم «ممکن» و تالی «نادرست» باشد ارزش گزاره $\varphi \to \psi$ برابر «ممکن» تعریف شد،
- اگر هر دو گزاره φ و ψ ارزش «ممکن» داشته باشند با توجه به این واقعیت که در منطق کلاسیک گزاره $A \to A$ یک همانگو است، ارزش $\varphi \to \psi$ را «درست» در نظر گرفت ،
- شبیه منطق کلاسیک مقدم «درست» و تالی «نادرست»، نتیجه «نادرست» را برای ارزش $\varphi \to \psi$ می‌دهد،

بنابراین جدول درستی رابط منطقی «استلزام» به صورت شکل ۱ است:

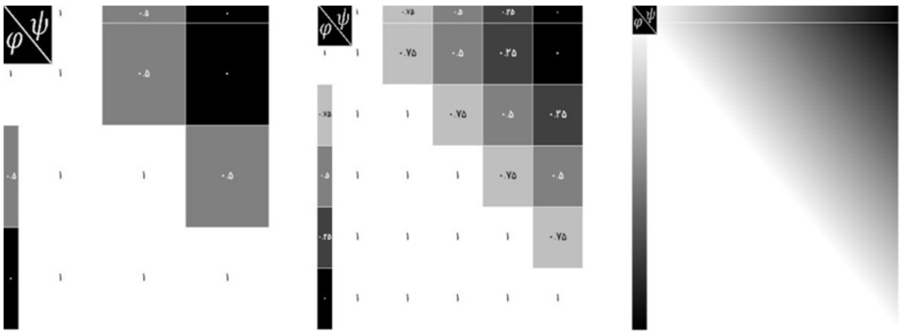
$\varphi \backslash \psi$	د	د،ن	ن
د	د	د،ن	ن
د،ن	د	د	د،ن
ن	د	د	د

شکل۱. رابط منطقی $\varphi \to \psi$

لوکاسیویچ در ادامه از اعداد بازه یکه واحد $[0,1]$ برای نمایش مقادیر درستی استفاده کرد. مثلاً برای حالت ۳ مقداری به جای استفاده از مجموعه $\{\{د\},\{ن\},\{د،ن\}\}$ از مجموعه مقادیر درستی $\mathcal{W}_3 = \{0,0.5,1\}$ استفاده کرد. بطور کلی در منطق لوکاسیویچ m مقداری مجموعه مقادیر درستی عبارت است از

$$\mathcal{W}_m = \left\{\frac{k}{m-1} : 0 \le k \le m-1\right\}$$

و در حالت بی‌نهایت مقداری این مجموعه، بازه یکه واحد $\mathcal{W}_\infty = [0,1]$ می‌باشد. تابع درستی رابط منطقی استلزام برای منطق لوکاسیویچ سه مقداری، پنج مقداری و بینهایت‌مقداری به صورت زیر تعریف می‌شود:



شکل۲. $\varphi \to \psi$ برای منطق لوکاسیویچ

به لحاظ ضابطه‌ای، تابع درستی مربوط به تابع درستیِ رابـط منطقـی اسـتلزام در منطـق لوکاسیویچ به صورت

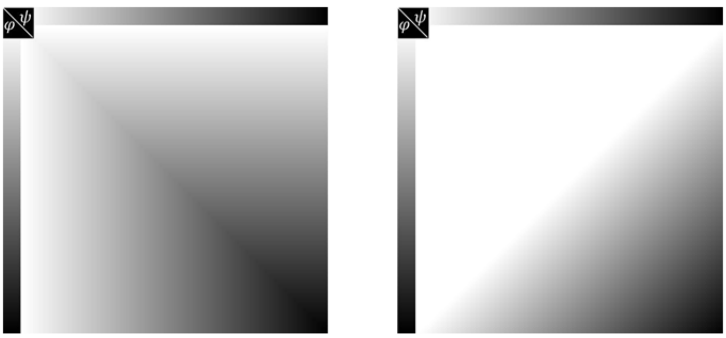
$$x \to y = \min(1 + y - x, 1)$$

است.رابط منطقی دیگری که در کنار استلزام به عنوان رابطهای پایه‌ای منطق لوکاسیویچ شناخته می‌شود، «تناقض» است که با تابع درستی $\neg x = 1 - x$ معرفی می‌شود. از روی این دو رابط منطقی، سایر روابط منطقی را می‌توان تعریف کرد. به عنوان مثال ترکیب فصـلی و عطفی چنانچه شبیه منطق کلاسیک با کمک $\{\neg, \to\}$ تعریف شوند، داریم:

$$x \oplus y \quad := \neg x \to y \qquad = \min(1, x + y)$$

$$x \,\&\, y \quad := \neg(\neg x \oplus \neg y) \quad = \max(0, x + y - 1)$$

تصویر توابع درستی این دو روابطِ منطقی که آنها را «یا قوی» و «و قوی» مـی‌نامنـد در حالت بی‌نهایت مقداری به صورت زیر است.

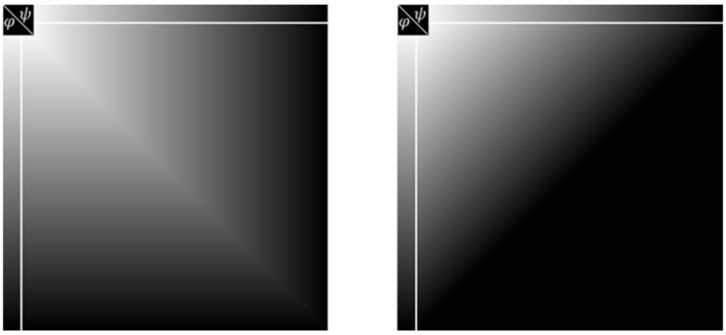


شکل۳. «یا قوی» و «یا ضعیف»

در اینجا علاوه بر دو رابط منطقی معرفی شده $\{\oplus, \&\}$، روابط منطقی دیگری نیز که عملکردی شبیه فاصل و عاطف داشته باشند، وجود دارند. به عنوان مثال

«یا» ضعیف	$x \vee y$	$:= (x \rightarrow y) \rightarrow y$	$= \max(x, y)$
«و» ضعیف	$x \wedge y$	$:= x \,\&(x \rightarrow y)$	$= \min(x, y)$

که تصویر تابعِ درستی آنها در حالت بی‌نهایت مقداری به صورت زیر است:



شکل۴. «و قوی» و «و ضعیف»

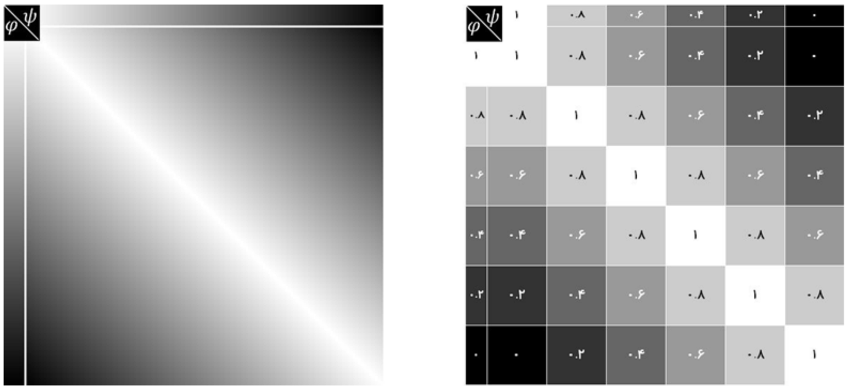
می‌دانیم، ترکیب فصلی دو گزاره ماهیتی سهل‌گیرانه دارد و چنانچه ارزش یکی از دو گزاره درست باشد، ارزش ترکیب فصلی آنها درست است. در اینجا همانطور که شکل ۳ نشان می‌دهد، ترکیب فصلیِ قوی دو گزاره φ و ψ سهل‌گیرانه‌تر از ترکیب فصلیِ ضعیف آنها است، و لذا به لحاظ ماهیتی، $x \oplus y$ قوی‌تر از $x \vee y$ است و نقاطی که ارزشِ ترکیب فصلی قوی «تقریباً درست» می‌باشد، بیشتر از نقاطی هستند که ارزش ترکیب فصلی ضعیف «تقریباً درست» است.

رابط منطقی «اگر و فقط اگر» یا «معادل بودن منطقی» نیز شبیه منطق کلاسیک به صورت

$$x \leftrightarrow y := (x \rightarrow y)\&(y \rightarrow x)$$

تعریف می‌شود. محاسبه‌ای ساده نشان می‌دهد که تابع درستی این رابط منطقی $1 - |x - y|$ است. همانطور که انتظار می‌رود، وقتی ارزش دو گزاره φ و ψ نزدیک هم باشد، ارزش $\varphi \leftrightarrow \psi$ به درست نزدیک‌تر است. لذا ارزش $\varphi \leftrightarrow \psi$ بنوعی تعیین کننده فاصله بین گزاره‌ها است و وقتی ارزش آن درست‌تر باشد، ارزش دو گزاره φ و ψ به هم

نزدیک‌تر بوده است. شکل ۵ عملکرد $x \leftrightarrow y$ را در دو حالت ۶ مقداری و بینهایت مقداری به تصویر می‌کشد.



شکل۵ . رابط منطقی اگر و فقط اگر (معادل بودن منطقی)

در سال ۱۹۳۱ وایسبرگ (M. Wajsberg) یک سیستم اصل موضوعی شامل ۴ اصل موضوع به همراه قاعده وضع مقدم برای منطق لوکاسییچ ۳ مقداری معرفی کرد. در عین حال تا دهه ۱۹۵۰ سیستم اثباتی که همه گزاره‌های درست توسط آن قابل اثبات باشند معرفی نشد. رز و روزر در سال ۱۹۵۸ موفق شدند یک سیستم اثبات کامل شامل ۵ اصل موضوع به همراه قاعده وضع مقدم را برای منطق لوکاسیویچ گزاره‌ای بی‌نهایت مقداری معرفی کنند (Rose and Rosser, 1958: 1). این ۵ اصل موضوع به شرح ذیل هستند که البته ۳ تا اصل اول از همان اصول موضوعه‌ای بودند که وایسبرگ معرفی کرده بود. البته بعداً معلوم شد که نیازی به اصل L5 نیز نمی‌باشد و از روی بقیه اصول قابل اثبات است.

L1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$
L2) $(\varphi \to \psi) \to [(\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)]$
L3) $(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$
L4) $[(\varphi \to \psi) \to \psi] \to [(\psi \to \varphi) \to \varphi]$
L5) $[(\varphi \to \psi) \to (\psi \to \varphi)] \to (\psi \to \varphi)$

اثبات رز و روزر ماهیتی ریاضی‌گونه داشت. بعد از رز و روزر و البته در همان سال چانگ توانست یک راه‌حل جبری برای حل این مسئله بیابد که بدلیل شباهت آن با یکی از روش‌های اثبات کامل بودن سیستم اثبات در منطق کلاسیک، بیشتر مورد استقبال منطقیون بود (Chang, 1959: 74).

طرح اثبات چانگ برای اینکه نشان دهد هر گزاره درستی در منطق لوکاسیویچ بی‌نهایت مقداریِ مبتنی بر مجموعه مقادیر درستی [0,1] به کمک اصول فوق و قاعده وضع مقدم قابل اثبات است، به صورت زیر بود:

- با توجه به اینکه رابطه

«$\varphi \sim \psi$ اگر و فقط اگر $\varphi \leftrightarrow \psi$ قابل اثبات باشد»

یک رابطه هم‌ارزی روی مجموعه گزاره‌ها است، مجموعه کلاس‌های هم‌ارزی آن، یعنی مجموعه $\{[\varphi]: \varphi$ گزاره است$\}$ را با تعریف‌های زیر می‌توان به یک MV–جبر تبدیل کرد:

$$
\begin{aligned}
0 &:= [\bot] \\
[\varphi] + [\psi] &:= [\varphi \oplus \psi] \\
-[\varphi] &:= [\neg\varphi]
\end{aligned}
$$

- یک MV–جبر ساختاری جبری است مثل $(A, +, -, 0)$ که + یک عملگر دوتایی و − یک عملگر تک‌موضعی روی A و 0 یکی از عناصر A است که در خواص زیر صدق می‌کنند:

$$
\begin{aligned}
&a + (b + c) = (a + b) + c \qquad && -(-a) = a \\
&a + b = b + a && a + (-0) = -0 \\
&a + 0 = a && -(-(x) + y) + y = -(-(y) + x) + x
\end{aligned}
$$

مثلاً [0,1] با دو عمل $x \boxplus y = \min(1, x + y)$ و $\boxminus x = 1 - x$ یک MV–جبر است که آن را MV–جبر استاندارد می‌نامند.

- روی هر MV–جبر $(A, +, -, 0)$ رابطه ترتیبی جزئی به صورت زیر قابل تعریف است:

$a \leq b$ اگر و فقط اگر $(-a) + b = -0$

بعلاوه هر MV–جبری، زیرجبرِ حاصل‌ضرب مستقیم چند MV–جبر مرتب خطی است.

- هر تساوی در زبان MV–جبرها، در MV–جبر استاندارد درست است اگر و فقط اگر در همه MV–جبرهای مرتب خطی درست باشد. (بخش اصلی مقاله چانگ برای اثبات همین موضوع اختصاص یافته بود. او برای اثبات این موضوع ابتدا نشان داد که

هر MV–جبر مرتب خطی را می‌توان به کمک قسمتی محدود از عناصر مثبت یک گروه آبلی مرتب خطی نمایش داد)

- اکنون ارتباط بین گزاره‌های درست در منطق لوکاسیویچِ مبتنی بر مجموعه مقادیر درستی [0,1] با تساوی‌ها در MV–جبرها، حکم را نتیجه می‌دهد.

در عین اینکه سیستم اثبات منطق لوکاسیویچ کامل است، اما بر خلاف منطق کلاسیک، تمامیت قوی در این منطق با سیستم اثبات فوق برقرار نیست. به عبارت دیگر اگر یک تئوری T (هر مجموعه از گزاره‌ها را تئوری می‌نامند) و یک گزاره φ مفروض باشند، آنگاه فقط در صورت متناهی بودن T می‌توان از اینکه T مستلزم φ است ($T \vDash \varphi$)، نتیجه گرفت که φ از روی T قابل اثبات است ($T \vdash \varphi$).در عین حال یکی از نتایجِ تمامیت قوی در منطق کلاسیک که خاصیت فشردگی است، در منطق لوکاسیویچ به کمک پیوستگی روابط منطقی (و نه از روی تمامیت قوی) قابل اثبات است. برای بیان خاصیت فشردگی نیاز به چند تعریف داریم.

- یک گزاره را سازگار گویند هرگاه تابع ارزشی مثل $v: \{\text{گزاره‌های اتمیک}\} \to [0,1]$ موجود باشد بطوریکه $v(\varphi) = 1$.
- مفهوم سازگاری در منطق‌های چندمقداری را به صورت فازی نیز می‌توان تعریف کرد. اگر K یک زیرمجموعه [0,1] باشد، انگاه گزاره φ را K–سازگار می‌خوانند هرگاه تابع ارزشی مثل $v: \{\text{گزاره‌های اتمیک}\} \to [0,1]$ موجود باشد که $v(\varphi) \in K$.
- یک تئوری را سازگار (K–سازگار) می‌نامند هرگاه هر گزاره آن سازگار (K–سازگار) باشد.
- یک تئوری را متناهیاً سازگار (K–سازگار) می‌نامند هرگاه هر زیرمجموعه متناهی آن سازگار (K–سازگار) باشد.
- یک منطق در خاصیت فشردگی (K–فشردگی) صدق می‌کند هرگاه هر تئوری متناهیاً سازگار (K–سازگار) آن، سازگار (K–سازگار) باشد.

خاصیت فشردگی حدود سال ۱۹۶۳ و با توجه به پیوستگیِ تابع درستی روابط منطقی برای منطق لوکاسیویچ مرتبه اول (و لذا منطق لوکاسیویچ گزاره‌ای) اثبات شد. مفهوم K–فشردگی حدود دهه ۱۹۹۰ میلادی مورد توجه محققین قرار گرفت و در سال ۱۹۹۵ K–فشردگی برای منطق لوکاسیویچ گزاره‌ای (P. Cintula and M. Navara, 2004: 59) و در سال ۲۰۱۲ برای منطق لوکاسیویچ مرتبه اول اثبات گردید (Tavana, Pourmahdian and Didevar,

2011: 254). در منطق‌گزاره‌ای البته اثبات با روش‌های مختلفی مانند «استفاده از مفهوم اثبات و قضیه تمامیت»، «استفاده از قضیه تیخونوف و پیوستگی روابط منطقی» و «استفاده از مفهوم ابرضرب» انجام شده است. در مورد حالت مرتبه اول منطق لوکاسیویچ، اثبات کمی تکنیکی‌تر است. در آخرین اثباتی که برای این موضوع در (Tavana, Pourmahdian and Didevar, 2011: 254) ارائه شده است، با استفاده از تکنیک هنکین (Henkin method) برای منطق کلاسیک، و سپس استفاده از ساختار ابرضرب (ultraproduct construction)، فشردگی و K–فشردگی منطق لوکاسیویچ مرتبه اول ثابت شده‌اند.

۳. منطق پیوسته چانگ و کیسلر

کامل بودن سیستم اثبات منطق لوکاسیویچ مرتبه اول برای اولین بار در سال ۱۹۶۳ توسط چانگ و بلوس و با کمک گرفتن از ایده‌های کیسلر ثابت شد. یکی از نکات کلیدی در این اثبات، پیوستگی تابع درستی همه روابط منطقی در منطق پیوسته بود. بعد از این کار، چانگ و کیسلر کاری مشترک را برای توسعه منطق کلاسیک به یک نوع منطق جدید مبتنی بر توابع پیوسته شروع کردند. آنها بعد از چند سخنرانی و انتشار چند مقاله، در سال ۱۹۶۶ منطق پیوسته را معرفی کردند.

درمنطق پیوسته مجموعه مقادیر درستی یک فضاهای توپولوژیک فشرده هاسدورف X در نظر گرفته می‌شود. با در نظر گرفتن یک زبان مرتبه اول که فقط شامل نمادهای محمولی است و فاقد نماد تابعی یا ثابت می‌باشد و مجموعه‌ای از رابط‌های منطقی و سورها، مجموعه Σ از همه جملات به صورت استقرایی شبیه منطق کلاسیک بدست می‌آید. به لحاظ معنی‌شناسی:

- تعبیر هر رابط منطقی Δ، تابعی پیوسته مثل $f_\Delta: X^n \to X$ است که n نشان دهنده گزاره‌هایی است که توسط Δ با هم ارتباط پیدا می‌کنند،
- تعبیر هر سور Θ، تابعی است مثل $f_\Theta: P(X) \to X$،
- به ازای زبان محمولی $L = \{P_i\}_{i\in I}$، یک L–ساختار یا به اختصار یک ساختار $\mathcal{M}$، مجموعه‌ای ناتهی است مثل M همراه با توابعی پیوسته مثل $P^{\mathcal{M}}: M^n \to X$ به ازای هر نماد محمولی $P \in L$.

- تعبیر هر گزاره $\varphi \in \Sigma$ در ساختار $\mathcal{M} = (M, P_i^{\mathcal{M}})$، بـه صـورت اسـتقرایی از روی نحوه ساخته شدن گزاره φ ساخته می‌شود:
  - اگر به ازای رابط منطقی n موضعی Δ، $\varphi = \Delta(\psi_1, \ldots, \psi_n)$، آنگاه
$$\varphi^{\mathcal{M}} = f_\Delta(\psi_1^{\mathcal{M}}, \ldots, \psi_n^{\mathcal{M}}),$$
  - اگر به ازای سور Θ، $\varphi = \Theta x\, \psi(x)$، آنگاه $\varphi^{\mathcal{M}} = f_\Theta(\{\psi^{\mathcal{M}}(a): a \in M\})$.

در واقع در اینجا تعبیر یک فرمول n متغییره $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ تابعی پیوسته است مثل $\varphi^{\mathcal{M}}: M^n \to X$ و تعبیر هر گزاره عنصری است از M. چانگ و کیسلر توانستند قضیه فشردگی را که در واقع دریچه‌ای برای شروع مباحث نظریه مدل است، برای منطق پیوسته به اثبات برسانند. طرح اثبات این موضوع به صورت زیر بود:

- با توجه به قضیه تیخونوف، X^Σ با توپولوژی حاصل‌ضربی فشرده و هاسدورف است،
- فرض کنید $\mathfrak{M}$ کلاس همه ساختارها باشد و فرض کنید $H: \mathfrak{M} \to X^\Sigma$ تابعی باشـد که تصویر هر ساختار $\mathcal{M}$ تحـت آن، تـابع $H_{\mathcal{M}}: \Sigma \to X$ بـا ضـابطه $H_{\mathcal{M}}(\varphi) = \varphi^{\mathcal{M}}$ است،
- ضعیف‌ترین توپولوژی روی $\mathfrak{M}$ که تحت آن تـابع H پیوسـته اسـت را توپولـوژی مقدماتی روی $\mathfrak{M}$ می‌نامیم.
- با توجه به فشرده و هاسدورف بودن X، مفهـوم ابرضـرب سـاختارها قابـل تعریـف است. با کمک مفهوم ابرضرب می‌توان نشان داد کـه توپولـوژی مقـدماتی روی $\mathfrak{M}$ فشرده است که فوراً خاصیت فشردگی برای منطق پیوسته را نتیجه می‌دهد.

منطق لوکاسیویچ مرتبه اول بی‌نهایت مقداری مبتنی بر مجموعه مقـادیر درسـتی [0,1]، حالت خاصی از منطق پیوسته است. گرچه منطق پیوسته معرفی شده توسط چانگ و کیسلر برای مطالعه برخی از ساختارهای آنالیز ریاضی مفید بود، اما چـون روی مجموعـه مقـادیر درستی X فقط ساختاری توپولوژیکی (و فاقد ترتیب) در نظر گرفته شـده بـود، لـذا همـه خواص ساختارها را نمی‌شد توسط این منطق مورد بررسی قرار داد.

۴. منطق پاولکا

در سال ۱۹۷۹ پاولکا، سعی کرد که مفاهیم فازی مانند درجه درستی و درجه اثبات‌پذیری را در منطق لوکاسیویچ تعریف کند. او برای این منظور تعدادی رابط منطقی صفر موضعی دیگر را به مجموعه روابط منطقی افزود. در واقع از آنجایی که مجموعه پایه‌ای روابط منطقی در منطق لوکاسیویچ گزاره‌ای، مجموعه $\{\bot, \to, \neg\}$ می‌باشد که در آن $\bot$ صفر موضعی، $\neg$ تک موضعی و $\to$ دو موضعی می‌باشد، در منطق پاولکا مجموعه روابط منطقی $\{\neg, \to, \bot\} \cup \{\bar{r}\}_{r\in(0,1)}$ می‌باشد که به لحاظ معنی‌شناسی تعبیر رابط صفر موضعی $\bar{r}$ عدد حقیقی r است. البته برای بهتر شدن نمادگذاری از دو نماد $\bar{0}$ و $\bar{1}$ به جای $\bot$ و $\top$ می‌توان استفاده کرد. به لحاظ سیستم اثبات در منطق پاولکا، حداقل دو اصل جدید در مورد رفتار منطقی روابط صفر موضعی $\bar{r}$ را باید به مجموعه اصول قبلی افزود:

- $\neg\bar{r} \leftrightarrow \overline{1-r}$،
- برای $r \leq s$، $\bar{r} \to \bar{s} \leftrightarrow \overline{1+s-r}$ و برای $r > s$، $\bar{r} \to \bar{s} \leftrightarrow \bar{1}$.

پاولکا بعد از معرفی سیستم اثبات، درجه اثبات‌پذیری یک گزاره را به صورت زیر تعریف کرد:

$$|\varphi|_T = \sup\{r : T \vdash \bar{r} \to \varphi\}.$$

پیوستگی روابط منطقی و همچنین همبند بودن بازه بسته یکه واحد باعث می‌شوند که به راحتی بتوان به نتایج زیر رسید:

- $\sup\{r : T \vdash \bar{r} \to \varphi\} = \inf\{r : T \vdash \varphi \to \bar{r}\}$،
- $|\neg\varphi|_T = 1 - |\varphi|_T$،
- چنانچه $|\varphi|_T \leq |\psi|_T$، $|\varphi \to \psi|_T = 1 + |\psi|_T - |\varphi|_T$ و برای $|\varphi|_T > |\psi|_T$، $|\varphi \to \psi|_T = 1$.

اما نکته قابل توجهی که از نتایج فوق می‌توان به آن رسید، نوعی کامل بودن برای سیستم اثبات منطق پاولکا است که از کامل بودن سیستم اثبات منطق لوکاسیویچ قوی‌تر است. اگر $\|\varphi\|_T = \inf\{v(\varphi) : v \vDash T\}$ درجه درستی یک گزاره تحت یک تئوری T باشد، با توجه به این مفهوم جدید، می‌توان انواع کامل بودن (یا تمامیت) را به صورت زیر تقسیم‌بندی کرد:

- تمامیت ضعیف: اگر φ درست باشد، قابل اثبات هم خواهد بود، به عبارت دیگر، اگر $\vDash \varphi$ آنگاه $\vdash \varphi$،
- تمامیت قوی: اگر φ از دید تئوری T درست باشد، توسط T قابل اثبات هم خواهد بود، به عبارت دیگر اگر $T \vDash \varphi$ آنگاه $T \vdash \varphi$،
- تمامیت پاولکا: درجه اثبات‌پذیری و درجه درستی یک تئوری با هم برابر هستند، یعنی $|\varphi|_T = \|\varphi\|_T$.

پاولکا نشان داد علاوه بر تمامیت ضعیف، تمامیت پاولکا نیز در منطق لوکاسیویچِ مجهز شده با روابط منطقی صفر موضعی $\{\bar{r}\}_{r\in(0,1)}$ برقرار است.البته مانند منطق لوکاسیویچ، تمامیت قوی برای تئوری‌های متناهی نیز در منطق پاولکا برقرار است. بطور کلی در هر منطقی:

- تمامیت قوی دو نوع تمامیت دیگر را نتیجه می‌دهد،
- تمامیت پاولکا تمامیت ضعیف را نتیجه می‌دهد، اما تمامیت قوی را همیشه نتیجه نمی‌دهد،
- در حالت کلی از تمامیت ضعیف هیچ‌کدام از دو نوعِ دیگر تمامیت نتیجه نمی‌شود.

هایک البته منطق پاولکا را به صورتی ضعیف‌تر و فقط با تجهیز منطق لوکاسیویچ به روابط منطقیِ صفر موضعی $\bar{r}$ به ازای اعداد گویای بازه یکه واحد مورد بررسی قرار داد و همان نتایج پاولکا را برای آن اثبات کرد (Hájek, 1998: 123). او علاوه بر این نشان داد برای تئوری متناهی T اگر $\|\varphi\|_T = r$ آنگاه $T \vdash \bar{r} \to \varphi$. هایک با توسعه مطالعات پاولکا به منطق مرتبه اول گویای پاولکا، علاوه بر اثبات تمامیت پاولکا برای منطق مرتبه اول گویای پاولکا، اشاره‌ای به همه نتایج قابل توجه دانسته شده تا آن زمان و نیز مهمترین مسائل باز این حوزه دارد. دو مورد قابل توجه از این احکام عبارتند از:

- به ازای هر تئوریT و گزاره φ در منطق مرتبه اول لوکاسیویچ و یا منطق مرتبه اول گویای پاولکا، اگر $T \vDash \varphi$ آنگاه به ازای هر $n \geq 1$، $T \vdash \varphi \oplus \varphi^n$ که $\varphi^n = \underbrace{\varphi\&\varphi\&\dots\&\varphi}_{n}$،
- اگر φ یک گزاره در منطق مرتبه اول لوکاسیویچ باشد، آنگاه φ در منطق مرتبه اول لوکاسیویچ قابل اثبات است اگر و فقط اگر در منطق مرتبه اول گویای پاولکا قابل اثبات باشد.

۵. منطق پیوسته

از حدود سال ۲۰۰۰ به بعد، منطق پیوسته در شکل جدیدی که در واقع توسیعی از همان منطق لوکاسیویچ مرتبه اول مبتنی بر مجموعه مقادیر درستی [0,1] می‌باشد، توسط هنسون و بن‌یاکوف مورد مطالعه قرار گرفت. در این شکل جدید منطق پیوسته، به لحاظ وجود ساختار مرتبی که روی بازه یکه واحد است، قرائتی از مفاهیم تقریبی و فازی نیز در بررسی ساختارها، قابل مداقه بود. این امر در کنار شباهت خیلی از نتایج نظریه مدل منطق پیوسته با منطق کلاسیک، موجب استقبال محققین از شکل جدید منطق پیوسته گردید. علی‌الخصوص مطالعه ساختارهای آنالیز ریاضی توسط این منطق باعث پیشرفت‌هایی در نظریه مدل این منطق شد.

در منطق پیوسته، به ازای هر تابع پیوسته $f: [0,1]^n \to [0,1]$ رابطی منطقی مثل Δ_f وجود دارد. لذا تعداد روابط منطقی به اندازه تعداد همه توابع پیوسته مذکور می‌باشد. در عین حال یکی از خواص جالب نحوی منطق پیوسته، شباهت آن به نحوِ منطق کلاسیک به لحاظ امکان معرفی مجموعه‌ای کامل از روابط منطقی است. می‌دانیم در منطق کلاسیک، بعضی از مجموعه‌های روابط منطقی مثل $\{\neg,\vee\}$، $\{\neg,\wedge\}$، $\{\neg,\to\}$ و $\{\to,\bot\}$ کامل هستند و قادرند هر نوع رابط منطقی دیگر با هر نوع تعبیری را تولید کنند. در منطق پیوسته البته این موضوع به این صورت است که مجموعه‌هایی از روابط منطقی وجود دارند که تعابیر آنها قادرند تعبیر سایر روابط منطقی را تقریب بزنند. مثلاً $\{\neg,\to,\bot\} \cup \{\bar{r}\}_{r\in(0,1)\cap\mathbb{Q}}$، $\{\neg,\to,\bot,\dot{\overline{2}}\}$ (که $\dot{\overline{2}}$ تک موضعی است و $v\left(\frac{\cdot}{2}\varphi\right) = \frac{v(\varphi)}{2}$)، $\{\to,\bot,\top,\frac{\cdot}{2}\}$ و $\{\&,\to,\bot,\frac{\cdot}{2}\}$ کامل هستند (Ben Yaacov and Usvyatsov, 2010: 5213).

در معنی‌شناسی منطق کلاسیک و نیز منطق‌های چندمقداری مبتنی بر مجموعه مقادیر درستی [0,1]، معمولاً صفر به عنوان غلط محض و تعبیر رابط منطقی $\bot$ و در مقابل، 1 به عنوان درست محض و تعبیر رابط منطقی $\top$ در نظر گرفته می‌شود. اما در منطق پیوسته، از آنجایی که هدف اصلی آن بررسی خواص نظریه مدلی ساختارهای آنالیز ریاضی و بخصوص ساختارهای متریک است، بدلایلی که بعداً خواهید دید، 1 به معنی غلط محض و صفر به معنی درست محض در نظر گرفته شدند. این موضوع موجب تغییر معنی‌شناسی در سایر روابط منطقی نیز می‌شود. به عنوان مثال در تعبیر $x \wedge y$، چون درستی آن (صفر بودن

آن) به معنی درستی همزمان x و y (صفر بودن آن‌ها) می‌باشد، لذا $x \wedge y = \max\{x, y\}$.
تعبیر سایر روابط منطقی نیز به شکل مشابه، دوگان تعابیر قبلی خواهد بود:

- $x \vee y = \min\{x, y\}$، $x \,\&\, y = \min\{x + y, 1\}$، $x \to y = \max\{y - x, 0\}$،
- $x \oplus y = \max\{x + y - 1, 0\}$، $x \leftrightarrow y = |y - x|$، $\neg x = 1 - x$، $\frac{\cdot}{2}x = \frac{x}{2}$

ما این معنی‌شناسی را به دلیلی که در بخش بعد به آن اشاره خواهیم داشت، معنی‌شناسی متریک می‌نامیم. توجه کنید که در معنی‌شناسی متریک بعضی از اقسام گزاره‌ها مثل φ^n یا $n\varphi$ را به ازای عدد طبیعی n با توجه به معنی آنها تعریف خواهیم کرد.

بعضی از محققین مثل بن‌یاکوف، حتی از نمادهای دیگری که بیشتر شبیه تعبیر روابط منطقی هستند، برای نمایش روابط منطقی استفاده می‌کنند (که البته ما با توجه به پیشینه بحث در منطق لوکاسیویچ این نمایشِ روابط منطقی را استفاده نمی‌کنیم). مثلاً بن‌یاکوف از $x \dot{+} y$ و $x \dot{-} y$ به ترتیب بجای $x \,\&\, y$ و $x \to y$ استفاده می‌کند. همچنین از آنجایی که در یک مشبکه نماد $\vee$ به معنی کوچکترین کران بالا است، او از این نماد به منظور همین معنی استفاده می‌کند و در واقع از $\vee$ برای رابط منطقی «و قوی» استفاده می‌کند (و نه «یای قوی»).

در مورد تعابیر سورها، گرچه قبلاً اشاره‌ای به تعبیر سورها و نوع آنها در منطق لوکاسیویچ مرتبه اول نداشتیم، ولی بدلیل اهمیت موضوع در اینجا باید نگاهی به این مهم نیز داشته باشیم. سورهای مورد استفاده در منطق پیوسته مرتبه اول شبیه منطق کلاسیک فقط دو سور عمومی و وجودی هستند (و البته در بیشتر منطق‌های محمولی نیز فقط همین دو سور در نظر گرفته می‌شوند). تعبیر این سورها در منطق پیوسته، شبیه تعابیر روابط منطقی، دوگان تعبیر آنها در منطق لوکاسیویچ مرتبه اول است. در واقع اگر $\forall x\, \varphi(x)$ در ساختار $\mathcal{M}$ درست باشد (صفر باشد)، آنگاه به ازای هر عنصرِ a از جهان سخن ساختار $\mathcal{M}$ باید $\varphi(a)$ درست باشد (صفر باشد). پس $(\forall x\, \varphi(x))^{\mathcal{M}} = \sup_{a \in M} \varphi^{\mathcal{M}}(a)$. بطور مشابه $(\exists x\, \varphi(x))^{\mathcal{M}} = \inf_{a \in M} \varphi^{\mathcal{M}}(a)$.

در منطق کلاسیک یکی از مهمترین محمول‌ها در زبان‌های مرتبه اول، محمول تساوی می‌باشد که فرض می‌شود این محمول در هر زبان مرتبه اولی وجود دارد. محمول تساوی در اصول موضوعه زیر صدق می‌کند:

E۱. $\forall x\, x = x$،

E۲. $\forall x\, \forall y\, x = y \to y = x$، E۳. $\forall x \forall y \forall z\ [x = y\ \wedge y = z] \to x = z$.

برای پیاده سازی این محمول در منطق پیوسته، فرض کنید محمول دو موضعی d در نقش تساوی باشد. پس d باید در اصول زیر صدق کند. یعنی

d۱. $\forall x\ d(x, x)$،

d۲. $\forall x\ \forall y\ d(x, y) \to d(y, x)$،

d۳. $\forall x \forall y \forall z\ [d(x, y) \& d(y, z)] \to d(x, z)$.

اکنون با توجه به تعابیر روابط منطقی و نوع معنی‌شناسی منطق پیوسته، اگر ساختار $\mathcal{M}$ در اصول فوق صدق کند، آنگاه تعبیر d خواص زیر را خواهد داشت:

- $\forall a \in M, d^{\mathcal{M}}(a, a) = 0$،
- $\forall a\ \forall b\ d^{\mathcal{M}}(a, b) = d^{\mathcal{M}}(b, a)$،
- $\forall a\ \forall b\ \forall c\ d^{\mathcal{M}}(a, c) \leq d^{\mathcal{M}}(a, b) + d^{\mathcal{M}}(b, c)$.

در واقع الان دلیل معنی‌شناسی دوگان که صفر به معنی درست محض و 1 به معنی غلط محض می‌باشد را بهتر می‌فهمیم. این نوع معنی‌شناسی موجب تعبیرِ محمول تساوی به یک متر می‌شود که یکی از مهمترین ابزارهای مورد نیاز در منطقِ پیوسته برای بررسی ساختارهای متریک است.

در منطق پیوسته بعضی از خواص مانند فشردگی به کمک مفاهیم موجود در معنی‌شناسی قابل اثبات هستند. مثلاً شبیه منطق پیوسته چانگ و کیسلر، اثبات خاصیت فشردگی با استفاده از مفهوم ابرضرب و پیوستگی تعابیر روابط منطقی ممکن می‌شود. در عین حال حقایق بسیارِ دیگری هستند که نیازمند وجود مفهوم بنیادین «اثبات» هستند که در منطق پیوسته چانگ وِ کیسلر چندان توجهی به آن نشده بود. در حالت منطق پیوسته گزاره‌ای، یکی از سیستمهای اثبات پیشنهادی، از تجهیز اصول منطق لوکاسیویچ گزاره‌ای (اصول موضوعه L1 تا L4) با دو اصل زیر و قاعده استنتاج بدست می‌آید.

C1) $(\frac{\dot{}}{2}\varphi \to \varphi) \to \frac{\dot{}}{2}\varphi$

C2) $(\frac{\dot{}}{2}\varphi \to \varphi) \to \frac{\dot{}}{2}\varphi$

اولین نتیجه قابل توجهی که از اصول موضوعه جدید منتج می‌شود نوعی تمامیت تقریبی برای سیستم اثبات منطق پیوسته است. اگرچه در منطق لوکاسیویچ و همچنین در منطق پیوسته تمامیت قوی فقط برای تئوری‌های متناهی برقرار می‌باشد، اما در منطق پیوسته نوعی تمامیت تقریبی که صورتی کاربردی‌تر نسبت به «تمامیتِ قویِ منحصر به تئوری‌های متناهی» دارد، به شکل زیر برقرار است.

- تمامیت تقریبی: در منطق پیوسته گزاره‌ای، اگر φ از دید تئوری T درست باشد، توسط T به شکل تقریبی قابل اثبات خواهد بود، در واقع اگر $T \vDash \varphi$ آنگاه به ازای هر عدد طبیعی n، $T \vdash 2^{-n} \to \varphi$ که $2^{-n} := \underbrace{\frac{\dot{-}}{2}\frac{\dot{-}}{2}\dots\frac{\dot{-}}{2}}_{n}\perp$.

اثبات این موضوع البته از حوصله این متن خارج است، ولی در عین حال طرح اثبات آن را می‌توان در غالب چند ادعای زیر بیان نمود:

ادعای ۱: اگر تئوری T در منطق لوکاسیویچ گزاره‌ای دارای مدل نباشد، آنگاه $n, m \in \mathbb{N}$ و زیرمجموعه $\{\varphi_i\}_{i<m}$ از تئوری T وجود دارند که

$$\vDash n\varphi_{m-1} \to (n\varphi_{m-2} \to (n\varphi_{m-3} \to \cdots (n\varphi_1 \to \top) \dots)).$$

(در اینجا $0\varphi \to \psi := \psi$ و $n\varphi \to \psi := \varphi \to [(n-1)\varphi \to \psi]$. نکات کلیدی در اثبات ادعای فوق، فشرده بوده بازه یکه واحد $[0,1]$ و پیوستگی تعابیر روابط منطقی است. لذا این مطلب در منطق پیوسته گزاره‌ای نیز صادق است.)

ادعای ۲: در منطق لوکاسیویچ گزاره‌ای، T یک تئوری سازگار است (یعنی $T \nvdash \perp$)، اگر و فقط اگر دارای مدل باشد.

(اثبات براحتی با استفاده از ادعای ۱ و سپس به کار بردن خاصیت تمامیت ضعیف به انجام می‌رسد)

ادعای ۳: در منطق پیوسته گزاره‌ای، تئوری T سازگار است اگر و فقط اگر دارای مدل باشد.

(فرض کنید C مجموعه همه گزاره‌های منطق پیوسته گزاره‌ایِ تشکیل شده از روی گزاره‌های اتمیک $\{p_i\}_{i\in I}$ باشد و L مجموعه همه گزاره‌های منطقِ لوکاسیویچ گزاره‌ای تشکیل شده از روی گزاره‌های اتمیک $\{p_\varphi\}_{\varphi\in C}$ باشد. با معرفی یک تئوری $\Sigma' \subseteq L$ به ازای هر تئوری $\Sigma \in C$، و سپس با معرفی یک مدل v برای تئوری Σ در منطق پیوسته از روی مدل v' برای Σ' در منطق لوکاسیویچ و استفاده از ادعای ۲، اثبات به فرجام می‌رسد.)

ادعای ۴: در منطق لوکاسیویچ گزاره‌ای یا منطق پیوسته گزاره‌ای، اگر T یک تئوری و φ و ψ دو گزاره باشند، آنگاه:

- $\vdash (n(\varphi \to \psi) \to \bot) \to (\psi \to \varphi)$ (نمادگذاری $n\alpha \to \beta$ در ادعای ۱ معرفی شد)
- اگر $T \cup \{\varphi \to \psi\} \vdash \bot$، آنگاه $T \vdash \psi \to \varphi$

(مورد اول از روی قواعد اثبات و یا با استفاده از خاصیت تمامیت ضعیف براحتی ثابت می‌شود. در مورد دوم، چون با توجه به ادعای ۲ و۳ تئوری $T \cup \{\varphi \to \psi\}$ دارای مدل نیست، لذا ادعای ۱ ایجاب می‌کند که عدد طبیعی n طوری موجود باشد که $T \vdash n(\varphi \to \psi) \to \bot$ و لذا از قسمت اول همین ادعا و قاعده استنتاج مطلوب بدست می‌آید.)

اکنون تمامیت تقریبی را می‌توان به این صورت ثابت کرد: اگر $T \vDash \varphi$، آنگاه به ازای هر عدد طبیعی n تئوری $T \cup \{\varphi \to 2^{-n}\}$ دارای مدل نیست و لذا با توجه به ادعای ۳ ناسازگار است. لذا قسمت دوم ادعای ۴ ایجاب خواهد کرد که برای هر عدد طبیعی n، $T \vdash 2^{-n} \to \varphi$.

یکی از نتایج تمامیت تقریبی، تمامیت پاولکا برای منطق پیوسته گزاره‌ای است. یعنی در منطق پیوسته گزاره‌ای نیز به ازای هر تئوری T، درجه درستی تئوری T با درجه اثبات‌پذیری آن برابر است. علاوه بر همه نتایج اخیر در مورد منطق پیوسته گزاره‌ای، (Ben Yaacov and Pedersen, 2010: 168) با تعمیم سیستم اثبات منطق لوکاسیویچ مرتبه اول، تمامیت تقریبی و نیز تمامیت پاولکا را برای این منطق ثابت کرده است. این اصول موضوعه عبارتند از:

- اصول موضوعه منطق لوکاسیویچ مرتبه اول
- دو اصل C1 و C2
- اصول مربوط به محول تساوی یا همان متر (اصول ۱E تا ۳E)
- دو اصل شماتیکِ مصداقیت در مورد محمول تساوی (یا همان متر)، که مصداق تساوی عناصر را بیان می‌کنند. با توجه به اینکه در منطق پیوسته تعبیر محمول تساوی یک متر (یا فاصله) می‌شود، لذا زمانی که دو عنصر از عالم سخن فاصله کمی از هم دارند و تقریباً مساوی‌اند، انتظار داریم خواص بیرونی آنها نیز تقریباً مشابه هم باشد. به عبارت دیگر اصول مصداقیت بیان می‌کنند که مصداق تساوی و یا شباهت عناصر، خواص بیرونی آنها نیز می‌باشد. اصل مصداقیتِ تساوی در مورد

توابع (محمول‌ها) بیان می‌کند که هر چقدر که دو عنصرِ عالم سخن شبیه هم باشند، تعابیر یک نماد تابعی (محمولی) مثل f (مثل P) به ازای آن دو عنصر نیز بایـد شـبیه هم باشند و بعلاوه میزان این شباهت، تابعی از میزان شـباهت آن دو عنصـر بـه هـم است. البته بیان این دو اصل به زبان منطق پیوسته مستلزم این است که برای هر نماد تابعیِ f و نیز هر نماد محمولیِ P در یک زبان مرتبه اول، توابعِ میزان شباهت را که با δ_f و δ_P نمایش می‌دهیم، از ابتدا در زبان زمینه بگنجانیم. این دو اصل را بـرای نمـاد تابعیِ یک متغییره f و محمولیِ یک متغییره P می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\forall x \forall y \left[\left(d(x,y) \rightarrow \overline{\delta_f(n)} \right) \vee \left(\overline{n^{-1}} \rightarrow d\big(f(x), f(y)\big) \right) \right]$$

$$\forall x \forall y \left[\left(d(x,y) \rightarrow \overline{\delta_P(n)} \right) \vee \left(\overline{n^{-1}} \rightarrow \big(P(x) \leftrightarrow P(y) \big) \right) \right]$$

نکته قابل توجه این است که معنی اصول مصداقیت، پیوستگی تعابیر نمادهای تـابعی و محمولی است. لذا در منطق پیوسته مرتبه اول، برای استفاده از خواص خوبی مانند تمامیت تقریبی، ساختارهای متریکی قابل بررسی هستند که عملگرهای آنها، توابعی پیوسته باشند و البته اکثر ساختارهای مورد علاقه اهـالی آنـالیز، ایـن خصوصـیت را دارنـد. بـه خصـوص ساختارهایی مانند فضاهای هیلبرت و باناخ و فضاهای انتگرالی بعضاً توسط منطـق پیوسـته مورد مطالعه قرار گرفته‌اند.

۶. منطق پیوسته مبتنی بر منطق گودل و منطق حاصل‌ضربی

پیوستگی تعابیر روابط منطقی در منطق لوکاسیویچ یکی از مهمترین نکات کلیدی در توسعه این منطق و پیدایش منطق پیوسته است. البته عدم پیوستگی تعابیر روابـط منطقـی در سـایر منطق‌های چندمقداری که در دو اصل ۱MV و ۲MV صدق می‌کنند، مانع توسعه آنها نشده است و تحقیقات زیادی در مورد آنها انجام شـده و یـا در حـال انجـام اسـت، امـا میـزان پیشرفتهای موجود در مورد این منطق‌ها و عمومی بودن نتایج، بدلیل پیچیدگی‌های حاصـل از عدم پیوستگی تعابیر روابط منطقی، نسبت به منطق لوکاسیویچ، خیلی کمتر است.

در این بخش قصد داریم نشان دهیم در منطق گودل و منطق حاصـل‌ضـربی کـه تعبیـر رابط منطقی استلزام پیوسته نیست، با در نظر گرفتن یک توپولوژیِ متفـاوت بـا توپولـوژی اقلیدسی روی بازه یکه واحد، تعابیر همه روابط منطقی پیوسته مـی‌شـوند و لـذا بعضـی از نتایج منطق پیوسته و منطق لوکاسیویچ، در این منطق‌ها قابلیت تعمیم پیدا می‌کنند. برای این

منظور ابتدا منطق اساسی که تعمیمی از هر سه منطق لوکاسیویچ، گودل و حاصل‌ضربی است را معرفی می‌کنیم.

۱.۶ منطق اساسی

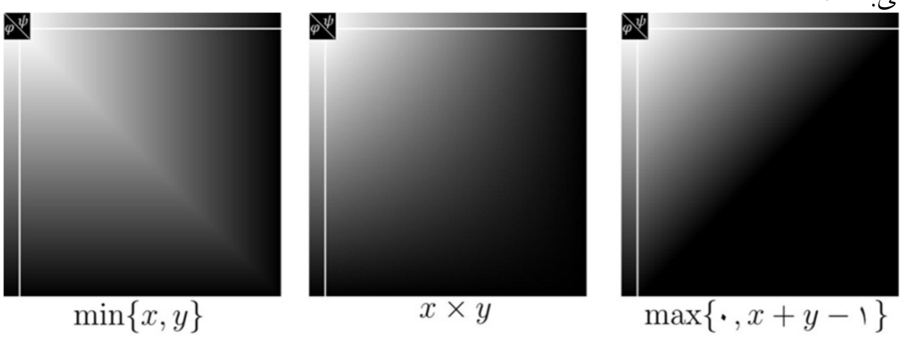
همانطور که در مقدمه اشاره کردیم، اولین بار هایک در سال ۱۹۹۸، منطق اساسی را معرفی کرد. در منطق اساسی مجموعه روابط منطقی پایه عبارتند از $\{\&, \rightarrow, \perp\}$. به لحاظ معنی‌شناسی، & به منظور رساندن معنی «ترکیب عطفی» یا همان «و قوی» است. از یک ترکیب عطفی این انتظار می‌رود که اولاً: تحدید آن به مجموعه مقادیر درستی منطق کلاسیک، همان ترکیبی عطفی منطق کلاسیک باشد، ثانیاً ترکیب عطفی «غلط محض» با هر مقدارِ دیگر، «غلط محض» باشد، ثالثاً دارای خاصیت جابجایی و شرکت‌پذیری باشد، و بالاخره صعودی باشد. یکی از مشهورترین توابعی که در همه این خواص صدق می‌کنند، نرم‌های مثلثی (triangular norm) یا t–نرم‌ها می‌باشند. یک t–نرم تابعی است مثل $*: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ با خواص زیر:

T۱. به ازای هر x, y, z، $x * y = y * x$ و $x * (y * z) = (z * y) * z$،

T۲. به ازای هر x, y, z، اگر $x \leq y$ آنگاه $x * z \leq y * z$،

T۳. به ازای هر x، $x * 1 = x$. که البته در کنار دو خاصیت اول نتیجه میدهد $x * 0 = 0$.

«و قوی» در منطق‌های لوکاسیویچ، حاصل‌ضربی و گودل در واقع یک نوع t–نرم می‌باشد.



شکل۶.: t–نرم‌های لوکاسیویچ، حاصل‌ضربی و گودل

برای معنی استلزام اولاً: شبیه منطق کلاسیک می‌خواهیم جمله شـرطی بـه انتفـاء مقـدم درست باشد، ثانیاً: وقتی از حکـم φ بـا ارزش x، نتیجـه‌ای مثـل ψ و بـا ارزش a حاصـل می‌شود، آنگاه انتظار داریم از هر حکم شبیه φ و با ارزش کمتر از x نیز حکمی شبیه ψ و با ارزش حداقل a نتیجه شود، و لذا وقتی $y \leq x$ انتظار داریم $a \to y \geq a \to x$، ثالثاً: از آن جا که معمولاً قاعده استنتاج (Modus ponens) در اکثر سیستمهای اثبات مفـروض اسـت، لـذا انتظار داریم گزاره $(\varphi\&(\varphi \to \psi)) \to \psi$ یک همانگو باشد.

اکنون چنانچه تعبیر & یک نرم مثلثی $*$ باشد و تعبیر $\to$ را نیز با تابع $\Rightarrow$ نمـایش دهـیم، آنگاه اگر ارزش درستی $\varphi \to \psi$ حداقل به اندازه x درست باشد، از صعودی بودن $*$ داریـم $e(\varphi) * e(\varphi \to \psi) \geq e(\varphi) * x$. بعلاوه از خاصیت دوم تابع استلزام نتیجه می‌گیریم

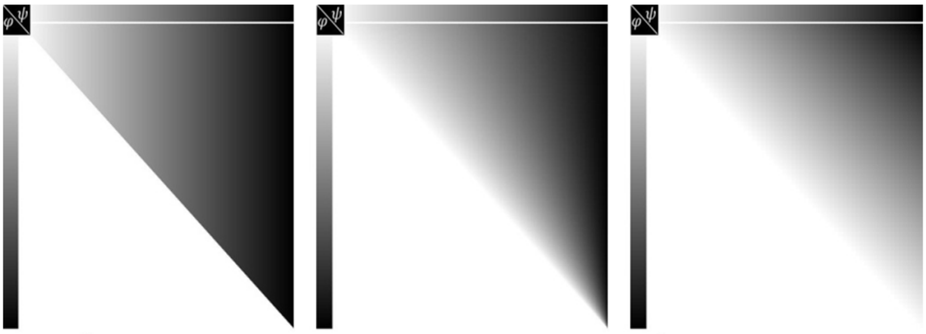
$$\big(e(\varphi) * e(\varphi \to \psi)\big) \Rightarrow e(\psi) \leq (e(\varphi) * x) \Rightarrow \psi.$$

همانگو بودن $(\varphi\&(\varphi \to \psi)) \to \psi$ ایجاب می‌کند $\big(e(\varphi) * e(\varphi \to \psi)\big) \Rightarrow e(\psi) = 1$، لذا نامساوی فوق نتیجه می‌دهد $(e(\varphi) * x) \Rightarrow \psi = 1$. حالا از اینکه جمله شرطی به انتفاء مقدم درست است نتیجه می‌گیریم $e(\varphi) * x \leq e(\psi)$.

از آنجایی کـه عکـس ایـن موضـوع نیـز درسـت اسـت، لـذا بـا داشـتن نـرم مثلثـی $*: [0,1]^2 \to [0,1]$ می‌توان عملگر استلزام $\Rightarrow: [0,1]^2 \to [0,1]$ را عملگری تعریف کرد کـه دارای این خاصیت است که به ازای هر x, y, z،

$$x * z \leq y \quad \text{اگر فقط و اگر} \quad z \leq x \Rightarrow y.$$

خاصیت فوق را خاصیت الحاقی و توابع $*$ و $\Rightarrow$ که در خاصیت فوق صدق می‌کننـد را یک جفت الحاقی می‌نامند. برای t-نرم‌های پیوسته (و نیز پیوسته از چپ) می‌توان ثابت کرد که عملگر منحصر بفرد $\Rightarrow$ وجود دارد که در خاصیت الحاقی صدق می‌کند. اگر تعبیر & را t-نرمِ لوکاسیویچ در نظر بگیریم، آنگـاه محاسـبه‌ای سـاده از روی خاصـیت الحـاقی نشـان می‌دهد که تعبیر $\to$، همان عملگر استلزامِ معرفی شده توسط لوکاسیویچ، است. در مورد t-نرم‌های شکل ۶، تعابیر زیر از روی تعریف فوق برای رابط منطقی استلزام بدست می‌آیند:



$\begin{cases} 1 & x \leq y \\ y & x > y \end{cases}$ $\begin{cases} 1 & x \leq y \\ y/x & x < y \end{cases}$ $\begin{cases} 1 & x \leq y \\ x - y - 1 & x > y \end{cases}$

شکل ۷. تعبیر $x \to y$ برای t–نرم‌های لوکاسیویچ، حاصل‌ضربی و گودل

سایر روابط منطقی مثل $\neg,\wedge,\vee,\leftrightarrow$ در منطق لوکاسیویچ از روی $\&,\to,\bot$ به صورت زیر قابل تعریف هستند.

$$\begin{array}{llll} \varphi \wedge \psi & := \varphi\&(\varphi \to \psi) & , \quad \varphi \vee \psi & := \big((\varphi \to \psi) \to \psi\big) \wedge \big((\psi \to \varphi) \to \varphi\big) \\ \neg\varphi & := \varphi \to \bot & , \quad \varphi \leftrightarrow \psi & := (\varphi \to \psi)\&(\psi \to \varphi) \end{array}$$

هایک همین تعاریف را در منطق اساسی در نظر گرفت. جالب اینجاست که به ازای هر t–نرم پیوسته، تعبیر دو رابط منطقی $\wedge,\vee$ همیشه همان توابع max و min است. البته در مورد t–نرم پیوسته از چپ همواره از ترکیب روابط منطقی پایه‌ای $\{\&,\to,\bot\}$ نمی‌توان رابط منطقی $\wedge$ را با تعبیر min بدست آورد.

۲.۶ منطق اساسی با معنی‌شناسی متریک

مطالب این بخش ادامه بعضی از تحقیقات مولفین این مقاله در مورد منطق گودل پیوسته می‌باشد. در سال ۲۰۱۳ نویسنده دوم مقاله اخیر، پورمهدیان، ایده‌هایی برای پیاده‌سازی معنی‌شناسی منطق پیوسته روی منطق گودل، برای بدست آوردن نوعی از منطق پیوسته به منظور مطالعه نظریه مدل فضاهای فرامتریک، را با نویسنده اول این مقاله، خاتمی، در میان گذاشت که حاصل مطالعات مشترک آنها در این مورد در (Khatami, Pourmahdian and Tavana, 2016: 1743) و (Khatami and Pourmahdian, 2015: 101) انتشار یافت. مطالب این

بخش در واقع تعمیمی از ایده‌های این تحقیقات به منطق اساسیِ مبتنی بر نرم مثلثی پیوسته است.

اگر بخواهیم معنی‌شناسی متریک را شبیه منطق پیوسته روی منطق اساسی اعمال کنیم، آنگاه شبیه منطق پیوسته، تعابیر روابط منطقی را باید به صورت دوگان تعابیر قبلی در نظر بگیریم. به عبارت دیگر وقتی مجموعه مقادیر درستی را بازه یکه واحد در نظر بگیریم، آنگاه

- تعبیر $\perp$، تابع ثابت 1 است،
- تعبیر & یک هم‌نرم مثلثی یا s–نرم است. یک s–نرم تابعی است مثل $\star: [0,1]^2 \to [0,1]$ که در دو خاصیت ۱T و ۲T از خواص t–نرم و دوگان خاصیت ۳T صدق می‌کند. به عبارت دیگر $\star$ عملگری جابجایی، شرکت‌پذیر و صعودی است و بعلاوه به ازای هر x، $x \star 0 = x$ و $x \star 1 = 1$.
- تعبیر $\rightarrow$ نیز تابعی مثل $\rightarrowtail: [0,1]^2 \to [0,1]$ است که از روی دوگان خاصیت الحاقی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$x \star z \geq y \quad \text{اگر فقط و اگر} \quad z \geq x \rightarrowtail y$$

البته پیوستگی $\star$ در کنار بسته بودن بازه یکه واحد ایجاب می‌کنند که

$$x \rightarrowtail y = \min\{z : z \star x \geq y\}$$

براحتی می‌توان خواص زیر را در مورد s–نرم پیوسته $\star$ و جفت الحاقی آن، $\rightarrowtail$، را شبیه خواص مشابه در مورد t–نرم‌ها و جفت الحاقی آن‌ها اثبات کرد (Hájek, 1998: 67):

۱. به ازای هر $x, y \in [0,1]$، $x \rightarrowtail y \leq y$ و چنانچه $x \geq y$ آنگاه $x \rightarrowtail y = 0$،

۲. به ازای هر $x, y \in [0,1]$، $x \star y \geq \max\{x, y\}$،

۳. به ازای هر $x, y, z \in [0,1]$، $x \rightarrowtail y \geq (y \rightarrowtail z) \rightarrowtail (x \rightarrowtail z)$،

۴. به ازای هر $x, y, x', y' \in [0,1]$، $(x \rightarrowtail y) \star (x' \rightarrowtail y') \geq (x \star x') \rightarrowtail (y \star y')$.

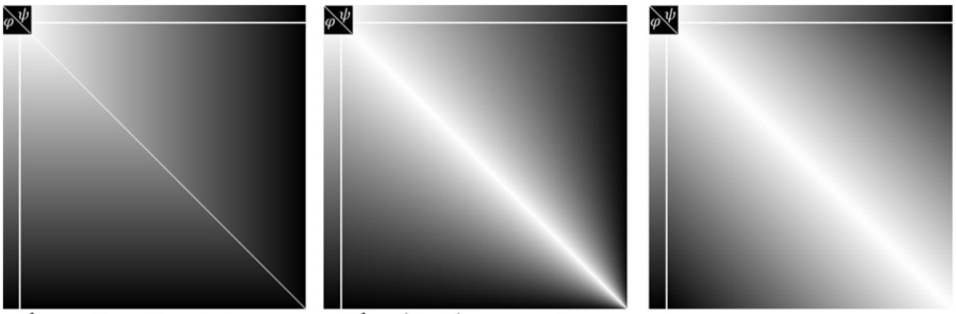
s–نرم لوکاسیویچ، حاصل‌ضربی و گودل و جفت الحاقی آنها عبارتند از:

جدول ۱. s–نرم و جفت الحاقی آن برای معنی‌شناسی متریک در سه منطق لوکاسیویچ، گودل و حاصل‌ضربی

لوکاسیویچ	حاصل‌ضربی	گودل	
$\min\{x+y,1\}$	$x+y-x\times y$	$\max\{x,y\}$	$x\star y$
$\begin{cases}0 & x\geq y\\ y-x & x<y\end{cases}$	$\begin{cases}0 & x\geq y\\ \frac{y-x}{1-x} & x<y\end{cases}$	$\begin{cases}0 & x\geq y\\ y & x<y\end{cases}$	$x\rightarrowtail y$

اما نکته جالبی که باعث شده است این معنی‌شناسی را «متریک» بنامیم تعبیر رابطه منطقی ↔ (و البته تعبیر محمول تساوی) با این معنی‌شناسی می‌باشد. محاسبه‌ای ساده نشان می‌دهد که تعبیر رابطه منطقی ↔ در هر سه منطق لوکاسیویچ، گودل و حاصل‌ضربی با معنی‌شناسی متریک، یک متر است.

در واقع می‌توان نشان داد اگر ⋆ یک s–نرم پیوسته و ضعیف‌تر از s–نرم لوکاسیویچ باشد، آنگاه در منطق اساسی مبتنی بر معنی‌شناسی متریک با s–نرم ⋆، تعبیر رابطه منطقی ↔ یک متر است که آن را با نماد $d_\star$ در حالت کلی و با نماد d_L یا d_G یا d_π در حالت‌های خاص نمایش می‌دهیم.



$\begin{cases}\max\{x,y\} & x\neq y\\ 0 & x=y\end{cases}$ $\begin{cases}\frac{|x-y|}{1-\min\{x,y\}} & x\neq y\\ 0 & x=y\end{cases}$ $|x-y|$

شکل۸ تعبیر x ↔ y برای t–نرم‌های لوکاسیویچ، حاصل‌ضربی و گودل در معنی‌شناسی متریک

برای اثبات فرض کنید ⋆ یک s–نرم پیوسته و ضعیف‌تر از s–نرم لوکاسیویچ و ↣ جفت الحاقی آن باشد. همچنین فرض کنید $d_\star(x,y)=(x\rightarrowtail y)\star(y\rightarrowtail x)$.

- اولاً: چون با توجه به خاصیت P۱ بـه ازای هـر x، $x \rightarrowtail x = 0$، لـذا $d_\star(x,x) = 0$. بعلاوه چنانچه $d_\star(x,y) = 0$ و به برهان خلف فرض کنیم $x < y$، آنگاه $y \rightarrowtail x = 0$ و لذا

$$x \rightarrowtail y = (x \rightarrowtail y) \star 0 = (x \rightarrowtail y) \star (y \rightarrowtail x) = d_\star(x,y) = 0$$

- اکنون چون $x \rightarrowtail y = \min\{z : z \star x \geq y\}$ پس $0 \in \{z : z \star x \geq y\}$ که به این معنی است که $0 \star x \geq y$ که با فرض خلف در تنـاقض اسـت. فـرض $y < x$ نیـز بطـور مشابه به تناقض می‌انجامد. لذا $x = y$.
- ثانیاً: با توجه به خاصیت جابجایی ⋆ بوضوح $d_\star(x,y) = d_\star(y,x)$.
- ثالثاً: از P۳ به ازای هر $x, y, z \in [0,1]$ داریم $(x \rightarrowtail y) \rightarrowtail (z \rightarrowtail y) \geq z \rightarrowtail x$ ، لـذا با توجه به خاصیت الحاقی $(x \rightarrowtail y) \geq (z \rightarrowtail y) \star (x \rightarrowtail z)$. اکنون ضعیف‌تر بودن ⋆ از s–نرم لوکاسیویچ ایجاب می‌کند که:

$$(x \rightarrowtail y) \leq (x \rightarrowtail z) \star (z \rightarrowtail y) \leq (x \rightarrowtail z) + (z \rightarrowtail y) \leq d_\star(x,z) + d_\star(z,y)$$

- و چون بطور مشابه می‌توان نتیجه گرفت $(y \rightarrowtail x) \leq d_\star(x,z) + d_\star(z,y)$ داریم $d_\star(x,y) \leq (x \rightarrowtail y) \star (y \rightarrowtail x) \leq d_\star(x,z) + d_\star(z,y)$.

موضوع جالب‌تری که باعث شده است منطق گودل با معنـی‌شناسـی متریـک را منطـق گودل پیوسته بنامیم این است که اگر [0,1] را با متریک d_G به عنوان یک فضای متریـک و همچنین $[0,1]^2$ را با متریک $\overline{d_G}((x,y),(x',y')) = max\{d_G(x,x'), d_G(y,y')\}$ به عنوان یک فضای متریک در نظر بگیریم، آنگاه تعابیر همه روابط منطقی، توابعی پیوسـته خواهنـد بود (Khatami and Pourmahdian, 2015: 101). در منطق پیوسته، بن‌یاکوف و همکارانش نیز متریـک $\overline{d_L}((x,y),(x',y')) = max\{|x-x'|, |y-y'|\}$ را روی $[0,1]^2$ در نظـر گرفتـه بودند که البته که معادل همان متریک اقلیدسی است. اما این متریک حاصل از مـاکزیممِ دو متریک روی $[0,1]^2$، حداقل در مورد منطق حاصل‌ضربی، جواب خوبی بـه مـا نمـی‌دهـد. نکته قابل توجه این است که $\overline{d_L}((x,y),(x',y'))$ در واقع معادل یک متریک دیگر، موسوم مترِ منهتن یا مترِ تاکسی (taxicab metric) به صورت $|x-x'| + |y-y'|$ است. اگر ⋆ یک s–نرم پیوسته و ضعیف‌تر از s–نرم لوکاسیویچ باشـد، و $d_\star$ متریـک القـایی حاصـل از ⋆ و جفت الحاقی آن باشد، آنگاه $\boldsymbol{d}_\star : [0,1]^2 \to [0,1]$ که به صورت

$$\boldsymbol{d}_\star((x,y),(x',y')) = d_\star(x,x') \star d_\star(y,y')$$

تعریف می‌شود یک متریک روی $[0,1]^2$ است. ما فقط نامساوی مثلثی را بررسی می‌کنیم. فرض کنید $\boldsymbol{x}=(x,x')$، $\boldsymbol{y}=(y,y')$ و $\boldsymbol{z}=(z,z')$. در این صورت:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{d}_\star(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &= \boldsymbol{d}_\star\big((x,x'),(y,y')\big)\\
&= d_\star(x,y)\star d_\star(x',y')\\
&\le d_\star(x,z)\star d_\star(z,y)\star d_\star(x',z')\star d_\star(z',y')\\
&= d_\star(x,z)\star d_\star(x',z')\star d_\star(z,y)\star d_\star(z',y')\\
&= \boldsymbol{d}_\star\big((x,x'),(z,z')\big)\star \boldsymbol{d}_\star\big((z,z'),(y,y')\big)\\
&= \boldsymbol{d}_\star(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})\star \boldsymbol{d}_\star(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})\\
&= \boldsymbol{d}_\star(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})+ \boldsymbol{d}_\star(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})
\end{aligned}$$

همانطور که گفتیم نکته اصلی که از در نظر گرفتن متر منهتن روی $[0,1]^2$ حاصل می‌شود، پیوستگی تعابیر روابط منطقی است. در واقع اگر $\star$ یک s–نرم پیوسته و ضعیف‌تر از s–نرم لوکاسیویچ و $\rightarrowtail$ جفت الحاقی $\star$ باشد، آنگاه هم $\star$ و هم $\rightarrowtail$ توابعی پیوسته از $([0,1]^2,\boldsymbol{d}_\star)$ به $([0,1],d_\star)$ هستند. فرض کنید $\boldsymbol{x}=(x,x')$، $\boldsymbol{y}=(y,y')$. برای پیوستگی $\star$ نشان می‌دهیم $d_\star(x\star x',y\star y')\le \boldsymbol{d}_\star(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$. از آنجا که $d_\star(a,b)=(a\rightarrowtail b)\star(b\rightarrowtail a)$ کافی است نشان دهیم

$$(x\star x')\rightarrowtail(y\star y')\le \boldsymbol{d}_\star(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \text{ و } (y\star y')\rightarrowtail(x\star x')\le \boldsymbol{d}_\star(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

که البته با توجه به استدلال زیر موضوع واضح است.

$$\begin{aligned}
(x\star x')\rightarrowtail(y\star y') &\le (x\rightarrowtail y)\star(x'\rightarrowtail y') && \text{بدلیل خاصیت P۴}\\
&\le d_\star(x,y)\star d_\star(x',y') && \text{بدلیل تعریف } d_\star \text{ و صعودی بودن } \star\\
&= \boldsymbol{d}_\star\big((x,x'),(y,y')\big)\\
&= \boldsymbol{d}_\star(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})
\end{aligned}$$

برای پیوستگی $\rightarrowtail$ نیز فقط بطور مشابه نشان می‌دهیم $(x\star x')\rightarrowtail(y\star y')\le \boldsymbol{d}_\star(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$. با توجه به خاصیت P۳، $y\rightarrowtail x\ge(x\rightarrowtail x')\rightarrowtail(y\rightarrowtail x')$ که با توجه به خاصیت الحاقی خواهیم داشت:

$$(y\rightarrowtail x)\star(x\rightarrowtail x')\ge(y\rightarrowtail x').$$

از طرفی مجدداً با توجه به خاصیت P۳ داریم $y\rightarrowtail x'\ge(x'\rightarrowtail y')\rightarrowtail(y\rightarrowtail y')$ که در کنار نامساوی فوق نتیجه می‌دهد:

$$(y\rightarrowtail x)\star(x\rightarrowtail x')\ge(x'\rightarrowtail y')\rightarrowtail(y\rightarrowtail y').$$

مجدداً خاصیت الحاقی ایجاب مـی‌کنـد $(y \rightarrowtail x) \star (x \rightarrowtail x') \star (x' \rightarrowtail y') \geq (y \rightarrowtail y')$. خواص $\star$ نتیجه مـی‌دهنـد $(y \rightarrowtail x) \star (x' \rightarrowtail y') \star (x \rightarrowtail x') \geq (y \rightarrowtail y')$ کـه بـا استفاده از خاصیت الحاقی خواهیم داشت $(y \rightarrowtail x) \star (x' \rightarrowtail y') \geq (x \rightarrowtail x') \rightarrowtail (y \rightarrowtail y')$. بالاخره با توجه به تعریف متریک $d_\star$ کار تمام است:

$$\begin{aligned}(x \rightarrowtail x') \rightarrowtail (y \rightarrowtail y') \quad & \leq (y \rightarrowtail x) \star (x' \rightarrowtail y') \\ & \leq d_\star(x,y) \star d_\star(x',y') \\ & = \boldsymbol{d}_\star\big((x,x'),(y,y')\big) \\ & = \boldsymbol{d}_\star(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\end{aligned}$$

اکنون می‌توان برای هر منطق اساسی خاصیت K–فشردگی را ثابت کرد. در واقع اگـر $\star$ یک s–نرم پیوسته و ضعیف‌تر از s–نرم لوکاسیویچ باشد و K یـک زیرمجموعـه فشـرده و هاسدورف $([0,1],d_\star)$ باشد، آنگاه منطق اساسیِ مبتنی بر معنی‌شناسی متریک بـا s–نـرم $\star$ دارای خاصیت K–فشردگی است. طرح اثبات می‌تواند به صورت زیر باشد:

- اگر مجموعه همه گزاره‌های اتمیک $\{p_i\}_{i\in I}$ باشد، آنگاه هر تابع ارزش روی گزاره‌ها مثـل $v:\{\text{گزاره‌ها}\} \to [0,1]$ بـا توجـه بـه خاصـیت MV–۱ از توسـیع یـک تـابع $v:\{p_i\}_{i\in I} \to [0,1]$ بدست می‌آید. پس مجموعه $[0,1]^I$ در واقع معرف همـه توابـع ارزش است.
- پیوسته بودن تعبیر همه روابط منطقی ایجاب می‌کند که به ازای هر گـزاره φ، تـابعی پیوسته مثل $\hat{\varphi}:[0,1]^{\mathrm{I}} \to [0,1]$ با ضابطه $\hat{\varphi}(v) = v(\varphi)$ داشته باشیم.
- اگر تئوری T متناهیاً K–سازگارباشد، آنگاه به ازای هر زیر مجموعه متناهی $T_0 \subseteq T$، $\bigcap_{\varphi\in T_0} \hat{\varphi}^{-1}(K) \neq \emptyset$.
- به ازای هر گزاره φ، فشرده بودن K و پیوستگی تابع $\hat{\varphi}$ ایجاب می‌کنند که مجموعـه $\hat{\varphi}^{-1}(K)$ نیز فشرده باشد. لذا با عنایت به خاصیت اشتراک متناهی برای مجموعه‌های فشرده، داریم $\bigcap_{\varphi\in \mathrm{T}} \hat{\varphi}^{-1}(K) \neq \emptyset$ و این یعنی تئوری T، K–سازگار است.

در حالت مرتبه اول نیز با استفاده از روش ابرضـرب مـی‌تـوان حکـم مشـابه را نتیجـه گرفت.

۷. نتیجه‌گیری

در ۵ بخش اول مقاله، مروری داشتیم بر توسعه منطق پیوسته از روی منطق لوکاسیویچ. در بخش آخر بعد از معرفی معنی‌شناسی متریک روی منطقِ اساسی، منطق پیوسته را به سایر منطق‌های چندمقداریِ مبتنی بر s–نرم پیوسته تعمیم دادیم و قضیه فشردگی را برای این نوع از منطق پیوسته اثبات کردیم. در عین حال باید توجه داشت که نتایجی مثل تمامیت تقریبی و یا وجود یک مجموعه کامل از روابط منطقی، آنچنان که برای منطق پیوسته حاصل از تعمیم منطق لوکاسیویچ برقرار می‌باشد، در حالتِ کلی منطق پیوسته برای منطقِ اساسی مبتنی بر s–نرم پیوسته بر قرار نیست. مطالعه این موضوع که چه نوعی از تمامیت تقریبی ممکن است با توجه به s–نرم اتخاذ شده حاصل شود، و یا اینکه چه انواعی از قضایای تمامیت ممکن است در اینجا برقرار باشند، می‌تواند یکی از اولین جنبه‌های ادامه دهنده این مقاله باشد. توجه دارید که برای بررسی نتایجی شبیه قضیه تمامیت تقریبی، لازم است که روابط منطقی صفر موضعی را به مجموعه روابط منطقی بیافزائیم. اما در صورتی که بخواهیم از K–فشردگی در کنار افزودن روابط منطقی صفر موضعی بهره ببریم بایستی تعبیر این روابط منطقی صفر موضعی در K قرار بگیرند. این موضوع باعث می‌شود که تنوع روابط منطقی صفر موضعی افزوده شده کم شود و لذا نتایجِ تقریبی محدودتری بدست آیند. همچنین کامل بودن روابط منطقی و یا تجهیز این منطق‌ها به روابط منطقی دیگر و نیز در نظر گرفتن مجموعه‌های مقادیر درستیِ غنی‌تر از [0,1] می‌تواند مورد مطالعه قرار بگیرد. مداقه روی حالت مرتبه اول این منطق‌ها و توسعه نظریه مدل آن‌ها که در نهایت منجر به مطالعه ساختارهای متریک با کمک این منطق‌ها گردد نیز از مباحث جذاب برای مطالعه است.

کتاب‌نامه

Belluce, L.P. and Chang, C.C. (1963), "A Weak Completeness Theorem for Infinite Valued First-Order Logic", Journal of Symbolic Logic, Vol. 28, No. 1, pp. 43-50

Ben Yaacov, I. and Berenstein, A. and Henson C.W. and Usvyatsov, A. (2008), "Model theory for metric structures", Model theory with applications to algebra and analysis, Vol. 2, London Mathematical Society Lecture Note Series, Vol. 350, Cambridge University Press, pp 315-427.

Ben Yaacov, I. and Pedersen, A.P. (2010), "A proof of completeness for continuous first-order logic", Journal of Symbolic Logic, Vol. 75, No. 1, pp 168-190.

Ben Yaacov, I. and Usvyatsov, A. (2010), "Continuous first order logic and local stability", Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 362, No. 10, pp 5213-5259.

Chang, C.C. (1959), "A New Proof of the Completeness of the Lukasiewicz Axioms", Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 93, No. 1, pp. 74-80.

Chang, C.C. and Keisler, H.J. (1966), Continuous Model Theory, Princeton University Press.

Cintula, P. and Navara, M. (2004), "Compactness of fuzzy logics", Fuzzy Sets and Systems, Vol. 143, No. 1, pp 59-73.

Hájek, P. (1998), Metamathematics of Fuzzy Logic, Springer Science.

Khatami, S.M.A. and Pourmahdian, M. (2015), "On the compactness property of extensions of first-order Gödel logic" , Iranian Journal of Fuzzy Systems, Vol. 12, No. 4, pp 101-121.

Khatami, S.M.A. and Pourmahdian, M., and Tavana, N.R. (2016), "From rational Gödel logic to ultrametric logic", Journal of Logic and Computation, Vol. 26, No. 5, pp 1743–1767.

Rose , A. and Rosser, J.B. (1958), "Fragments of Many-Valued Statement Calculi", Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 87, No. 1, pp. 1–53.

Pavelka, J. (1979) "On Fuzzy Logic I, II, and III", Mathematical Logic Quarterly, Vol. 25, pp 45-52, 119-134, and 447-464.

Tavana, N. R. and Pourmahdian, M., and Didehvar, F. (2011), "Compactness in first order Łukasiewicz logic", Logic Journal of the IGPL, Vol. 20, No. 1, pp 254–265.