

جنبه‌های توپولوژیک از منطق مرتبه اول کلاسیک

کریم خانکی*

چکیده

منطق مرتبه اول کلاسیک رایج‌ترین منطق در کاربردهای ریاضیات و همچنین در مطالعه بنیادهای منطقی می‌باشد. از دیر باز تنها ارتباط بین منطق و توپولوژی ریاضی محدود به مفهوم فضاهای تاپ بوده و پیوندهای دیگری بین این دو حوزه متصور نبوده است. اخیراً پیوندهای اساسی بین این دو شاخه (یعنی منطق و توپولوژی) ایجاد شده است که کاربردهای زیادی در هر دو حوزه منطق و همچنین در توپولوژی را موجب شده‌اند. در این مقاله به مطالعه برخی از مهمترین پیوندهای این دو شاخه از ریاضیات و همچنین کاربردهای آنها خواهیم پرداخت. یکی از مفاهیم کلیدی در منطق ریاضی و نظریه مدل‌ها مفهوم پایداری می‌باشد که بیانی کاملاً ترکیبیاتی دارد. در این مقاله نشان می‌دهیم که این مفهوم معادل یک مفهوم توپولوژیک برای مجموعه مشخصی از توابع می‌باشد و با استفاده از آن قضیه‌ای بنیادین در نظریه پایداری سلاح را ثابت می‌کنیم. همچنین ارتباط بین مفهوم وابستگی و یک خاصیت توپولوژیک از مجموعه‌ای از توابع را بیان می‌کنیم و اثباتی توپولوژیک از برخی از دستاوردهای مهم نظریه مدل‌ها را ارائه خواهیم داد. برخی از نتایج ارائه شده در این مقاله در هر دو حوزه منطق و توپولوژی کاملاً جدید هستند و احتمال کاربردهای بیشتر از آنها در مطالعات آتی متصور می‌باشد.

کلیدواژه‌ها: منطق مرتبه اول کلاسیک؛ تعریف‌پذیری؛ پایداری؛ خاصیت وابستگی؛

هم‌ارث

* دکترای ریاضی، استادیار دانشگاه صنعتی اراک، اراک (نویسنده مسئول)، khanaki@arakut.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۰۴/۱۴، تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۰۷/۲۸

۱. مقدمه

آغاز منطق تمایز بین صورت و معنا است. منطق مرتبه اول کلاسیک به خوبی این تمایز را تبیین کرده است و نتایج مهم و شگفت‌انگیزی را به هر دو حوزه ریاضیات و مبانی منطق تقدیم کرده است. یکی از امکان‌های فراهم شده از این تمایز، مطالعه صوری قضایا و فرمول‌ها و بدست آوردن نتایجی در معناشناسی و نظریه مدل‌ها می‌باشد. در این مقاله ارتباط ذاتی بین صورت و معنا با حوزه دیگری از ریاضیات موسوم به "توپولوژی" را مطالعه می‌کنیم. از پیدایش نظریه مدل‌ها ارتباط ذاتی مجموعه‌های خاصی از فرمول‌ها، به نام تایپ‌ها، با مفهوم دیگری، به نام فضای توپولوژیک استون، در توپولوژی عمومی شناخته شده بوده است. در واقع، خواص نظریه مدلی از تئوری‌های منطق مرتبه اول در قالب این فضاها، توپولوژیک قابل ارائه و مطالعه می‌باشند. برای چندین دهه تنها ارتباط کشف شده بین منطق ریاضی با توپولوژی، منحصر به توپولوژی استون از فضای تایپ‌ها بود. اخیراً پیوندهای عمیق‌تری بین منطق ریاضی و نظریه مدل‌ها و مفاهیم توپولوژیک کشف شده‌اند که ضمن آشکار کردن جنبه‌های دیگری از منطق ریاضی، نتایج مهم و شگفت‌انگیزی را هم به خود منطق و نظریه مدل‌ها و هم به دیگر حوزه‌های ریاضیات تقدیم کرده‌اند. در این مقاله به برخی از جدیدترین و مهمترین قضایا و نتایج بدست آمده در این موضوع خواهیم پرداخت و پیوندهای اساسی بین این دو حوزه از ریاضیات (یعنی منطق و توپولوژی) که تصور رایج بر این بوده است که ارتباط چندانی بین آنها وجود ندارد را ارائه خواهیم داد. در ابتدا از منظر کلاسیک، مروری کوتاه بر مفاهیم اولیه از جمله فضای تایپ‌ها یا فضای توپولوژی استون خواهیم داشت و سپس ارائه‌ای مدرن از این مفاهیم خواهیم داشت که برای درک بهتر ارتباط بین نظریه مدل‌ها و توپولوژی ضروری است. نتایج و مشاهدات اصلی این مقاله از آنجایی آغاز خواهند شد که مفاهیم ترکیباتی در نظریه مدل‌ها، از جمله خاصیت ترتیب و خاصیت وابستگی، با مفاهیم توپولوژیک روی فضاها، خاصی از توابع جایگزین می‌شوند. در واقع، نشان خواهیم داد که بسیاری از مفاهیم ترکیباتی مورد استفاده در نظریه پایداری شلاح، جنبه‌های توپولوژیکی ناشناخته‌ای دارند که منجر به درک بهتر نظریه مدل‌ها و همچنین نتایج شگفت‌انگیزی در حوزه‌های مختلف می‌شوند. یکی از مهمترین مفاهیم در نظریه مدل‌ها، مفهوم تعریف‌پذیری تایپ‌ها است. نشان خواهیم داد که این مفهوم معادل یک مفهوم توپولوژیک، یعنی پیوستگی مجموعه خاصی از توابع، می‌باشد. همچنین یک مفهوم دیگر از

جنبه‌های توپولوژیک از منطق مرتبه اول کلاسیک ۱۳۳

تعریف‌پذیری ارائه خواهیم داد و بیان خواهیم کرد که این مفهوم نیز معادل یک مفهوم دیگر توپولوژیک است. در نهایت نتایجی از این مطالعه را بیان خواهیم کرد که تعمیمی از نتایج کلاسیک می‌باشند و بیان خواهیم کرد که این پیوندها منجر به حل مسائل مهمی خواهند شد که در این مقاله و همچنین در کارهای آتی مورد مطالعه قرار خواهند گرفت. مطالب مقاله به شرح زیر است. ابتدا مفاهیم اولیه و پیش‌نیازها را در فصل ۲ ارائه می‌دهیم. بیان مسائل و نتایج اصلی این مقاله از فصل ۳ آغاز می‌شود و نتایج در فصول ۳ و ۴ و ۵ ارائه خواهند شد. در فصل ۳ مفهوم پایداری و ارتباط آن با مفاهیم توپولوژیک را مطالعه می‌کنیم. در فصل ۴ مفهوم وابستگی و پیوند آن با توپولوژی و همچنین نتایج آن را مورد بررسی قرار می‌دهیم، و سرانجام در فصل ۵ یکی از دستاوردهای جدید مفهوم وابستگی در نظریه مدل‌ها را ارائه خواهیم داد.

۲. فضای تایپ‌ها

در این فصل برخی از مفاهیم اولیه منطق و نظریه مدل‌های کلاسیک را بیان می‌کنیم و این مفاهیم را در یک زبان توپولوژیک که مناسب با اهداف این مقاله است ارائه خواهیم داد. از آنجا که بحث این مقاله منطق مرتبه اول کلاسیک است، فرض بر این است که خواننده با مقدمات منطق از قبیل زبان، فرمول و مدل آشنایی دارد. (برای اطلاعات بیشتر به کتاب‌های مقدماتی منطق ریاضی یا نظریه مدل‌ها مراجعه کنید.)

تایپ یکی از مهمترین مفاهیم در نظریه مدل‌ها می‌باشد. در واقع این مفهوم، ناتوانی منطق کلاسیک برای بیان خواصی با جمله‌های با طول نامتناهی را جبران می‌کند. اکنون تعریف دقیقی از این مفهوم را ارائه می‌دهیم. فرض کنید L یک زبان منطق مرتبه اول، T یک تئوری کامل در این زبان، و n یک عدد طبیعی دلخواه باشند. یک n -تایپ برای تئوری T (یا یک n -تایپ روی مجموعه تهی) مجموعه‌ای است از فرمول‌هایی با حداکثر n متغیر آزاد که با تئوری T سازگار هستند. اگر این مجموعه نسبت به رابطه شمول (\subseteq) ماکزیمال باشد، آن را تایپ کامل گویند. تایپ‌ها را معمولاً با p یا q نشان می‌دهیم. اگر M یک مدل از تئوری T باشد و $a \in M$ آنگاه مجموعه همه L -فرمول‌های $\varphi(x)$ بطوری که $\varphi(a)$ در M درست باشد را تایپ a می‌نامیم و با نماد $tp(a)$ نشان می‌دهیم. بوضوح تایپ‌هایی از این نوع کامل هستند.

اگر $L_M = L \cup \{a: a \in M\}$ و T_M مجموعه همه L_M -جمله‌هایی باشد که در M درست هستند، آنگاه یک n -تایپ برای تئوری T_M را یک n -تایپ روی M می‌نامیم. بطور مشابه اگر N یک مدل از T_M باشد و $a \in N$ ، آنگاه مجموعه همه L_M -فرمول‌های $\varphi(x)$ بطوری که $\varphi(a)$ در N درست باشد را تایپ a می‌نامیم و با نماد $tp(a/M)$ نشان می‌دهیم. مجموعه همه n -تایپ‌های کامل روی M را با $S_n(T_M)$ نمایش می‌دهیم و فضای تایپ‌های روی M می‌نامیم. بطور مشابه، مجموعه همه n -تایپ‌های کامل روی مجموعه تهی با $S_n(T)$ نمایش داده می‌شود.

استفاده از کلمه "فضا" در تعریف فوق بی‌دلیل نیست. در واقع مجموعه همه تایپ‌های کامل تشکیل یک فضای توپولوژیک می‌دهند با تعریفی که در ادامه ارائه خواهد شد. برای هر فرمول $\varphi(x)$ با n متغیر آزاد، مجموعه $[\varphi] = \{p \in S_n(T_M): \varphi \in p\}$ را تعریف می‌کنیم. مجموعه همه $[\varphi]$ ‌ها تشکیل پایه‌ای برای یک توپولوژی روی $S_n(T_M)$ می‌دهند که به آن توپولوژی منطقی (یا توپولوژی استون) روی $S_n(T_M)$ می‌گویند. بررسی این مطلب که مجموعه مذکور خواص پایه یک توپولوژی را دارد ساده است. توپولوژی منطقی دارای خواص مهمی است از جمله اینکه این فضا فشرده و تماماً ناهمبند است. فشردگی این فضا معادل است با قضیه فشردگی در منطق مرتبه اول کلاسیک، و دو ارزشی بودن منطق کلاسیک (یعنی $0-1$) منجر می‌شود که این فضا تماماً ناهمبند باشد. (برای تعریف مفاهیم "فشردگی" و "تماماً ناهمبند" به کتاب‌های توپولوژی عمومی مراجعه کنید.)

بدلیل اهمیت مطلب فوق آنرا بصورت یک گزاره ارائه می‌دهیم.

گزاره ۱: فضای توپولوژیک $S_n(T_M)$ فشرده و تماماً ناهمبند است.

فشردگی فضای تایپ‌ها برای هر منطقی که قضیه فشردگی دارد برقرار است، اما ضرورتی ندارد که این فضا برای منطق‌های غیر کلاسیک تماماً ناهمبند باشد.

تعاریف فوق کلاسیک هستند و زبان مناسبی برای اهداف این مقاله که ایجاد پیوند بین منطق و توپولوژی است نمی‌باشند. اکنون این مفاهیم را در قالب زبانی مناسب بیان می‌کنیم. فرض کنید $\varphi(x)$ یک فرمول با n متغیر در زبان L و M یک L -ساختار باشد. می‌توان تعبیر φ در M را بصورت یک تابع $\varphi: M^n \rightarrow \{0,1\}$ در نظر گرفت که $\varphi(a) = 1$ اگر $\varphi(a)$ در M درست باشد و $\varphi(a) = 0$ در غیر اینصورت. بطور مشابه می‌توان تایپ‌ها را بصورت زیر تعریف کرد. فرض کنید $L_{M,n}$ مجموعه همه L_M -فرمول‌های با n

متغیر آزاد باشد. یک n -تایپ کامل p روی M تابعی است مانند $I_p: L_{M,n} \rightarrow \{0,1\}$ که $I_p(\varphi) = 1$ اگر $\varphi \in p$ و $I_p(\varphi) = 0$ در غیر اینصورت. تابع I_p که به این صورت تعریف می‌شود دارای خواص جالبی است. مجموعه همه توابع به صورت I_p (که p یک n -تایپ کامل است) را با $\sigma(M)$ نمایش می‌دهیم و آن را با توپولوژی موسوم به توپولوژی ضعیف ستاره‌دار بصورت زیر مجهز می‌کنیم: $I_{p_\alpha} \rightarrow I_p$ اگر و فقط اگر برای هر L_M -فرمول φ با n متغیر آزاد داشته باشیم $I_{p_\alpha}(\varphi) \rightarrow I_p(\varphi)$. به آسانی می‌توان نشان داد که $\sigma(M)$ با فضای توپولوژی منطقی $S_n(T_M)$ یکسان است. این مطلب را در گزاره زیر تصریح می‌کنیم.

گزاره ۲: (۱) نگاشت $p \rightarrow I_p$ یک تناظر دوسویی بین $S_n(T_M)$ و $\sigma(M)$ می‌باشد.

(۲) اگر $p \in S_n(T_M)$ یک تایپ باشد آنگاه یک توسیع مقدماتی N از M و یک عنصر $a \in N$ وجود دارد بطوری که تایپ a روی M دقیقاً p می‌باشد؛ یعنی $p = tp(a/M)$.

در فصل بعد یکی از مهمترین مفاهیم نظریه مدل‌ها به نام پایداری را که تعریفی ترکیبیاتی دارد مطالعه خواهیم کرد و ارتباط آن با مفاهیم توپولوژیک را مشخص می‌کنیم.

۳. خاصیت ترتیب و محک گروتندیک

مفهوم پایداری یکی از مرکزی‌ترین مفاهیم در نظریه مدل‌ها می‌باشد. این مفهوم که توسط ساهارون شلاح (Shelah, 1971: 271-362) در اوایل دهه ۱۹۷۰ معرفی گردید، کاربردهای فراوانی در نظریه مدل‌ها و نیز در شاخه‌های دیگر ریاضیات داشته است. پیدایش مفهوم پایداری یک تئوری (و سپس پایداری یک فرمول) بر مبنای شمردن تعداد تایپ‌های آن تئوری (یا تعداد تایپ‌های موضعی) شکل گرفته است، اما خیلی زود ارتباط این مفهوم با یک مفهوم ترکیبیاتی مشخص شد. از آن زمان تا این اواخر، فرض بر این بوده است که مفهوم پایداری ماهیتی کاملاً ترکیبیاتی دارد و هیچ ارتباطی با حوزه‌های دیگر ریاضیات ندارد. مشاهدات اخیر این فرض را نقض می‌کند و نشان می‌دهد که این مفهوم ماهیتی توپولوژیک نیز دارد. در ادامه به این مطلب خواهیم پرداخت.

ابتدا برخی از مفاهیم اولیه را ارائه می‌دهیم.

فرض کنید $\varphi(x, y)$ یک L -فرمول و M یک L -ساختار باشد. یک φ -تایپ (با متغیر x) روی M عبارت است از مجموعه همه فرمول‌های $\varphi(x, a)$ که در M درست هستند و $a \in M$. $S_\varphi(M)$ را مجموعه همه φ -تایپ (با متغیر x) روی M در نظر می‌گیریم و آن را

فضای φ -تایپها (با متغیر x) روی M می‌نامیم. به سادگی می‌توان نشان داد که این فضا با توپولوژی منطقی که از فضای تایپ‌های کامل به ارث می‌برد، یک فضای توپولوژیک فشرده است. فرض کنید $\varphi^*(x, y)$ فرمولی باشد که از تغییر نقش متغیرهای x, y از فرمول $\varphi(x, y)$ حاصل شده باشد؛ یعنی $\varphi^*(x, y) = \varphi(y, x)$. بطور مشابه φ^* -تایپ‌های روی M و همچنین فضای توپولوژی $S_{\varphi^*}(M)$ تعریف می‌شوند.

اکنون تعریف کلاسیک از مفهوم پایداری یک فرمول را ارائه می‌دهیم.

تعریف: فرض کنید $\varphi(x, y)$ یک L -فرمول و M یک L -ساختار باشد.

۱. گوییم $\varphi(x, y)$ روی M خاصیت ترتیب دارد اگر دنباله‌های a_n, b_n از عناصر M موجود باشند بطوریکه:

$$\lim_m \lim_n \varphi(a_n, b_m) \neq \lim_n \lim_m \varphi(a_n, b_m).$$

۲. فرمول $\varphi(x, y)$ را پایدار در M گوییم اگر $\varphi(x, y)$ روی M خاصیت ترتیب نداشته باشد.

قضیه ۳: فرض کنید $\varphi(x, y)$ یک فرمول در زبان L ، T یک L -تئوری کامل باشد. آنگاه شرایط زیر معادل هستند:

۱. $\varphi(x, y)$ در هر مدل M از T پایدار است.

۲. تعداد φ -تایپها (با متغیر x) روی هر مدل M از T برابر کاردینال M است؛ یعنی

$$|S_{\varphi}(M)| = |M|$$

قضیه فوق کلاسیک است و در ۱۹۷۱ بوسیله شلاح (Shelah, 1971: 271-362) اثبات شده است. یادآوری می‌کنیم که تعریف اصلی پایداری بر مبنای شمردن تایپ‌ها می‌باشد، یعنی شرط (۲) در قضیه فوق، گرچه با گذشت زمان، تعریف ارائه شده بوسیله خاصیت ترتیب نیز رایج گشته است. توجه داریم که قضیه فوق پایداری در یک تئوری T را بیان می‌کند و در مورد پایداری در یک مدل صحبت نمی‌کند. در این مقاله دستاوردی قویتر از قضیه فوق را ثابت خواهیم کرد؛ یعنی نشان می‌دهیم که یک فرمول $\varphi(x, y)$ در یک L -ساختار M پایدار است اگر و فقط اگر $|S_{\varphi}(M)| = |M|$. در واقع، مطلب اخیر از دو جنبه موضعی است؛ اولاً پایداری یک فرمول (و نه یک تئوری) را بیان می‌کند، دوماً پایداری در یک مدل (و نه همه مدل‌ها) را بررسی می‌کند؛ بنابراین مطلبی کاملاً جدید است. برای اثبات تعمیم قضیه فوق می‌بایست از مفهوم تعریف‌پذیری تایپ‌ها که

بطور مستقل توسط گایفمن (Gaifman, 1976: 223-306) و شلاح (Shelah, 1971: 271-362) معرفی شده است استفاده کنیم. در ادامه مفهوم تعریف‌پذیری تایپ‌ها را ارائه می‌دهیم. تایپ p در $S_\varphi(M)$ را تعریف‌پذیر (روی M) گوییم اگر یک L_M -فرمول $\theta(x)$ موجود باشد بطوریکه برای هر $a \in M$ ، $\varphi(x, a)$ متعلق به p است اگر و فقط اگر $\theta(a)$ در M درست باشد. با زبانی که بوسیله توابع تعریف کردیم این مطلب را می‌توان به این صورت بیان کرد: $\theta(a) = \varphi(p, a)$ که در آن $\varphi(p, a) = 1$ اگر $\varphi(x, a)$ متعلق به p باشد، و $\varphi(p, a) = 0$ در غیر اینصورت.

بنابراین می‌توان یک مجموعه A شامل همه توابعی به صورت $\{0,1\}$ را $\varphi^a: S_{\varphi^*}(M) \rightarrow \{0,1\}$ در نظر گرفت که $a \in M$ و $\varphi^a(p) = 1$ اگر $\varphi(a, p) = 1$ و $\varphi^a(p) = 0$ در غیر اینصورت. توابع موجود در A پیوسته هستند و نقشی کلیدی در ادامه خواهند داشت. فرض کنید M^* یک توسیع مقدماتی ایشباع از M باشد. یک تایپ $p(x)$ در $S_\varphi(M^*)$ را متناهی ارضاء شده در M گوییم اگر هر فرمول $\sigma(x)$ در M محقق شود، یعنی عنصر $b \in M$ موجود باشد که $\sigma(b)$ درست باشد. نام دیگر تایپ‌های متناهی ارضاء شده در M تایپ‌های هم‌ارث می‌باشد و این تایپ‌ها کاربردهای زیادی در نظریه مدل‌ها دارند. ارتباط مفاهیم فوق با تایپ‌های متناهی ارضاء شده اولین بار توسط آناند پیلی (Pillay, 1982: 147-160) در ۱۹۸۲ مشخص شد. برای توضیحات بیشتر به مقاله (Pillay, 2016: 1-6) مراجعه کنید. گزاره ۴ (پیلی): یک تابع $f: S_{\varphi^*}(M) \rightarrow \{0,1\}$ در بستار توپولوژیک مجموعه A (با توپولوژی همگرایی نقطه‌ای) قرار دارد اگر و فقط اگر یک تایپ $p(x)$ در $S_\varphi(M^*)$ که متناهی ارضاء شده در M است موجود باشد که $f(q) = \varphi(p, q)$ برای هر $q \in S_{\varphi^*}(M)$ اولین بار آناند پیلی متوجه ارتباط بین پایداری در یک مدل و تعریف‌پذیری تایپ‌های هم‌ارث شد. در واقع، گزاره فوق امکان ترجمه مفاهیم نظریه مدل‌ها به مفاهیم توپولوژیک و برعکس را فراهم می‌کند.

گزاره ۵ (محک گروتندیک): فرض کنید X یک فضای توپولوژیک دلخواه باشد و X_0 یک زیرمجموعه چگال از آن باشد. آنگاه شرایط زیر برای یک مجموعه A از توابع پیوسته و کراندار روی X معادل هستند:

۱. هر تابع در بستار مجموعه A (نسبت به توپولوژی همگرایی نقطه‌ای) پیوسته است.
۲. مجموعه A کراندار است و برای هر دنباله $f_n \in A$ و هر دنباله $\alpha_n \in X_0$ حدهای مکرر در صورت وجود برابر هستند؛ یعنی

$$\lim_m \lim_n f_m(x_n) \neq \lim_n \lim_m f_m(x_n).$$

اکنون از ترکیب محک گروتندیک و مشاهد پیلی، می توان نتیجه زیر در مورد تعریف پذیری تایپ های هم ارث را بدست آورد.

قضیه ۶ (قضیه بنیادین نظریه پایداری صلاح): فرض کنید $\varphi(x, y)$ یک L -فرمول و M یک L -ساختار باشد. آنگاه شرایط زیر معادل هستند:

۱. $\varphi(x, y)$ در M پایدار است.

۲. هر φ -تایپ هم ارث در $S_\varphi(M^*)$ تعریف پذیر روی M است.

۳. تعداد φ -تایپ های هم ارث در $S_\varphi(M^*)$ برابر کاردینال M است.

برهان: با توجه به محک گروتندیک اگر خاصیت ترتیب وجود نداشته باشد آنگاه هر تابع در بستار مجموعه A پیوسته است. اکنون با توجه به ارتباط بین تعریف پذیری تایپ های هم ارث و پیوستگی توابع در بستار A ، بوضوح (۱) و (۲) معادل هستند. اگر هر تایپ هم ارث تعریف پذیر باشد آنگاه به وضوح تعداد این تایپ ها حداکثر برابر کاردینال M است زیرا تعداد L_M -فرمول ها حداکثر برابر کاردینال M است. اینکه شرط (۳) شرط (۱) را نتیجه می دهد یک مطلب شناخته شده و کلاسیک است.

تذکر: در انتهای این فصل ذکر چند نکته ضروری است.

۱. همانطور که در بالا اشاره شد، مفهوم پایداری در یک تئوری و مفهوم پایداری یک فرمول (یا پایداری موضعی) توسط صلاح ارائه گردید، اما اولین بار مفهوم پایداری (فرمول های بدون سور) در یک مدل توسط کریوین و مائوری (Krivine and Maurey, 1981: 273-295) در مقاله معروف آنها در زبان نظریه فضاهای باناخ ارائه گردید. در واقع، مفهوم پایداری یک فرمول در یک مدل از دو جنبه موضعی است؛ اول اینکه پایداری برای یک فرمول است و نه یک تئوری، و دوم اینکه پایداری در یک مدل است و نه در تمام مدل های یک تئوری.

۲. به وضوح تعریف پذیری تایپ های هم ارث در $S_\varphi(M^*)$ تعریف پذیری تایپ ها در $S_\varphi(M)$ را نتیجه می دهد (زیرا هر تایپ در مجموعه اخیر، متناهی ارضاء شونده در M می باشد) اما برعکس برقرار نیست. در واقع بن یاکوف در مقاله (Ben Yaacov, 2014: 491-496) نشان داد که پیش فشردگی مجموعه A نتیجه می دهد که φ در M پایدار است، ولی نتوانست ثابت کند که پایداری φ نیز پیش فشردگی مجموعه A را نتیجه می دهد.

جنبه‌های توپولوژیک از منطق مرتبه اول کلاسیک ۱۲۹

درواقع همان‌طور که قبلاً اشاره کردیم، دوطرفه بودن این مطلب (در زبان نظریه مدل‌ها) اولین بار توسط پیلی مشاهده شد.

۳. ارتباط بین پایداری یک فرمول در یک مدل و پیوستگی توابع برای منطق‌های با ارزش‌های پیوسته توسط خوزه یوینو در مقاله (Iovino, 1999: 1595-1600) مشاهده شد. در واقع مشاهده یوینو معادل محک گروتندیک می‌باشد، البته بیان صریح و روشن از ارتباط بین عدم وجود خاصیت ترتیب و مفهوم تایپ‌های هم‌ارث در کار او دیده نمی‌شود. در فصل بعد یکی دیگر از خواص ترکیباتی در نظریه مدل‌ها موسوم به "وابستگی" را مطالعه می‌کنیم و نشان می‌دهیم که این مفهوم نیز با مفاهیم توپولوژیک ارتباطی نزدیک دارد.

۴. خاصیت وابستگی و محک بورگین-فرملین-تالاگراند

در این فصل مفهوم وابستگی یک فرمول در یک مدل را مطالعه می‌کنیم. این مفهوم کاملاً جدید است و نتایج حاصل از آن تعمیمی از همه‌ی دستاوردهای پیشین در مورد وابستگی در یک تئوری در نظریه مدل‌ها می‌باشد. در ادامه این تعریف را ارائه می‌دهیم.

تعریف: یک فرمول $\varphi(x, y)$ خاصیت وابستگی در مدل M دارد اگر برای هر دو عدد حقیقی $r < s$ و هر دنباله (a_n) از عناصر M ، زیرمجموعه‌های متناهی و مجزا از اعداد طبیعی مانند E, F وجود داشته باشند بطوریکه

$$\{b \in M: \varphi(a_n, b) \leq r, \quad \forall n \in E\} \cap \{b \in M: \varphi(a_n, b) \geq s, \forall n \in F\} = \emptyset.$$

اگر فرمول $\varphi(x, y)$ در M وابسته نباشد گوئیم خاصیت استقلال در M دارد.

تذکر: ذکر چند نکته در مورد مفهوم فوق ضروری است.

۱. تعریف کلاسیک خاصیت وابستگی در نظریه مدل‌ها برای یک تئوری ارائه شده‌است (یعنی برای همه مدل‌های آن تئوری)، ولی در اینجا این مفهوم فقط برای یک مدل ارائه گردیده‌است. بنابراین، مفهوم فوق از دو جنبه موضعی است: اول اینکه برای یک فرمول بیان شده است، و دوم اینکه فقط برای یک مدل تعریف شده است. به‌سادگی می‌توان بررسی کرد که یک فرمول φ خاصیت وابستگی برای یک تئوری T دارد (به معنای رایج آن در نظریه مدل‌ها) اگر و فقط اگر این فرمول در هر مدل از تئوری T خاصیت وابستگی داشته باشد.

۲. اگر M یک مدل ω -اشباع باشد، آنگاه φ خاصیت وابستگی برای یک تئوری T دارد اگر و فقط اگر φ در M خاصیت وابستگی داشته باشد.
۳. خاصیت وابستگی در یک مدل نسبت به متغیر حساس است، به این معنا که، فرمول $\varphi(x, y)$ می‌تواند در یک مدل وابسته باشد اما فرمول $\varphi^*(x, y) = \varphi(y, x)$ در آن مدل وابسته نباشد. برای مشاهده مثالی از این مطلب به (Khanaki and Pillay, 2018) رجوع کنید.
۴. مفهوم وابستگی در یک مدل اولین بار توسط خانکی در مقاله (Khanaki, 2015) ارائه گردید. این مفهوم پیوندهایی با آنالیز تابعی دارد و کاربردهایی برای آن ارائه شده است. یادآوری می‌کنیم که ارتباط بین وابستگی در نظریه مدل‌ها و نظریه یادگیری برای زمانی طولانی است که شناخته شده است.
- اکنون یکی از دستاوردهای مهم در حوزه فضاهای تابعی را ارائه می‌دهیم و پیوند آن با مفهوم وابستگی در یک مدل را بیان می‌کنیم.
- گزاره ۷ (محک بورگین-فرملین-تالاگراندا): فرض کنید X یک فضای توپولوژیک هاسدورف و فشرده باشد، و A یک زیرمجموعه از توابع پیوسته و کراندار روی X باشد. آنگاه شرایط زیر معادل هستند:
۱. فرض کنید $r < s$ و (f_i) دنباله‌ای از توابع در A باشد. آنگاه یک زیرمجموعه I از اعداد طبیعی وجود دارد بطوریکه
- $$\{x \in X: f_i(x) \leq r, \forall i \in I\} \cap \{x \in X: f_i(x) \geq s, \forall i \notin I\}$$
- مجموعه‌ای تهی است.
۲. هر دنباله از توابع در A دارای زیردنباله‌ای همگرا است (نسبت به توپولوژی همگرایی نقطه‌ای).
- علاوه بر این اگر A شمارا باشد، آنگاه (۱) و (۲) با شرایط زیر نیز معادل هستند.
۳. هر تابع در بستار توپولوژیک A (نسبت به توپولوژی همگرایی نقطه‌ای) یک تابع بورل است.
۴. هر تابع در بستار توپولوژیک A (نسبت به توپولوژی همگرایی نقطه‌ای) برابر با حد یک دنباله از توابع در A است.
۵. بستار A دارای کاردینال کوچکتر از $2^{2^{\aleph_0}}$ است.

جنبه‌های توپولوژیک از منطق مرتبه اول کلاسیک ۱۳۱

گزاره فوق یکی از دستاوردهای بورگین، فرملین و تالاگراند در مقاله (Bourgain, Fremlin, and Talagrand, 1978: 845-886) می‌باشد، که کاربردهای زیادی در آنالیز تابعی دارد. اکنون این گزاره را به زبان نظریه مدل‌ها ترجمه می‌کنیم و نتایج مطلوب را بدست می‌آوریم.

نتیجه ۸: شرایط زیر معادل هستند:

۱. $\varphi(x, y)$ در M وابسته است.

۲. هر دنباله (a_n) از عناصر M یک زیردنباله (a_{m_n}) وجود دارد بطوریکه برای هر $b \in M^*$ ، مقادیر ارزشی از دنباله $\varphi(a_{m_n}, b)$ سرانجام عددی ثابت می‌شود، به عبارتی دیگر این دنباله همگرا است.

علاوه بر این اگر M شمارا باشد، آنگاه (۱) و (۲) با شرایط زیر نیز معادل هستند:

۱. هر $p \in S_\varphi(M^*)$ که در M بطور متناهی ارضاء می‌شود بول تعریف‌پذیر روی M است؛ یعنی $\{b \in M^* : q \text{ را ارضاء می‌کند}, \varphi(x, b) \in p, q \in S_\varphi(M^*)\}$ مجموعه‌ای بول است.

۲. برای هر $p \in S_\varphi(M^*)$ که در M بطور متناهی ارضاء می‌شود، یک دنباله (a_n) از عناصر M وجود دارد بطوریکه برای هر $b \in M^*$ ، ارزش $\varphi(p, b)$ برابر است با ارزش نهایی $\varphi(a_n, b)$ ؛ یعنی برابر است با حد مقادیر ارزشی از این دنباله.

۳. تعداد تاپ‌های $p \in S_\varphi(M^*)$ که در M بطور متناهی ارضاء می‌شوند حداکثر برابر با 2^{\aleph_0} است.

توجه داریم که با استفاده از مشاهده پیلی، امکان ترجمه محک بورگین-فرملین-تالاگراند به نظریه مدل‌ها میسر می‌شود، و براحتی می‌توان دید که نتیجه فوق ترجمه مستقیمی از این محک است.

در فصل بعد اثباتی جدید از یکی از قضایای مهم نظریه مدل‌ها که توسط برونو پوآزآ (Poizat, 1981: 513-522) اثبات شده است را ارائه می‌دهیم.

۵. شمردن تایپ‌های متناهی ارضاء شده

در این فصل تعمیمی از یک قضیه معروف در نظریه مدل‌ها که اولین بار توسط برونو پوآزآ (Poizat, 1981: 513-522) در ۱۹۸۱ اثبات شده است را ارائه می‌دهیم. قضیه پوآزآ

بیان می‌کند که در تئوری‌هایی که خاصیت وابستگی دارند، تعداد تایپ‌های هم‌ارث روی هر مدل دلخواه حداکثر برابر با کاردینال آن مدل است. در این فصل ثابت خواهیم کرد که شرط وابستگی تئوری ضروری نمی‌باشد و فقط کافیست که شرط وابستگی در یک مدل را در نظر بگیریم. در واقع، دستاورد این فصل (مشابه با حالت پایداری) از دو جنبه موضعی است؛ یعنی، اول اینکه وابستگی یک فرمول است و نه یک تئوری، و دوم اینکه فقط وابستگی در یک مدل مطالعه می‌شود و نه همه‌ی مدل‌های یک تئوری. بنابراین، قضیه پوآزآ نتیجه‌ای از قضیه این فصل می‌باشد. در ادامه این مطلب را بصورت دقیق بیان و اثبات می‌کنیم. در ابتدا نیاز به مفهومی از آنالیز تابعی داریم.

تعریف: فرض کنید X یک فضای توپولوژیک هاسدورف و فشرده باشد. یک $f: X \rightarrow \{0,1\}$ را بخش شده گوئیم اگر برای هر زیرمجموعه بسته D یک زیرمجموعه باز G وجود داشته باشد که با D اشتراک ناتهی دارد و همچنین قطر مجموعه $f[F \cap G]$ صفر باشد. مجموعه همه توابع بخش شده روی X را با $B_r(X)$ نشان می‌دهیم. یادآوری می‌کنیم که $f[F \cap G] = \{r \in \{0,1\}; \exists x \in F \cap D, f(x) = r\}$. همچنین، قطر $f[F \cap G]$ صفر است اگر و فقط اگر تصویر مجموعه $F \cap G$ تحت نگاشت f مجموعه‌ای تک عضوی باشد.

اکنون گزاره‌ای مهم از مقاله‌ی (Bourgain, Fremlin, and Talagrand, 1978: 845-886) را بیان می‌کنیم که در اثبات قضیه اصلی استفاده خواهد شد.

گزاره ۹: فرض کنید X یک فضای توپولوژیک هاسدورف و فشرده، و A زیرمجموعه‌ای کراندار از مجموعه همه توابع پیوسته روی X باشد. آنگاه شرایط زیر معادل هستند:

۱. برای هر دنباله (f_n) از توابع در A ، یک زیرمجموعه I از اعداد طبیعی N وجود دارد بطوریکه

$$\{x \in X: f_n(x) = 0 \forall n \in I, f_n(x) = 1 \forall n \in N - I\} = \emptyset.$$

۲. بستار مجموعه A (نسبت به توپولوژی همگرایی نقطه‌ای) زیرمجموعه‌ای از $B_r(X)$ است.

برای مشاهده اثبات گزاره فوق به قضیه 2F مقاله (Bourgain, Fremlin, and Talagrand, 1978: 845-886) مراجعه کنید.

تذکر: شرط (۱) در گزاره فوق معادل با خاصیت وابستگی در نظریه مدل‌ها می‌باشد. درواقع، از این مطلب استفاده خواهیم کرد و نشان خواهیم داد که در حالتی که یک فرمول

جنبه‌های توپولوژیک از منطق مرتبه اول کلاسیک ۱۳۳

در یک مدل وابسته باشد، آنگاه بستار مجموعه A (که در واقع متناظر با تایپ‌های هم‌ارث است) زیرمجموعه‌ای از $B_r(X)$ می‌باشد. سرانجام نشان می‌دهیم که کاردینال $B_r(X)$ از تعداد مطلوب تجاوز نمی‌کند و در نتیجه اثبات کامل می‌شود. گزاره زیر کلید اصلی برای اثبات قضیه این فصل می‌باشد که ایده آن از مقاله سیمون (Simon, 2015: 81-92) اخذ شده است.

گزاره ۱۰: فرض کنید $f: X \rightarrow \{0,1\}$ یک تابع پیوسته روی فضای تماماً ناهمبند و فشرده X باشد که پایه‌ای از کاردینال κ دارد. آنگاه شرایط زیر معادل هستند:

$$1. f \in B_r(X)$$

۲. $f^{-1}(0)$ را می‌توان بصورت $\bigcup_{i < \kappa} F_i$ بیان کرد که هر F_i زیرمجموعه‌ای بسته است.

برای مشاهده اثبات گزاره فوق به قضیه 2.3 در مقاله (Simon, 2015: 81-92) مراجعه شود.

از گزاره فوق بسرعت می‌توان نتیجه زیر را بدست آورد.

نتیجه ۱۱: اگر X فضای تماماً ناهمبند و فشرده با پایه‌ای از کاردینال κ باشد، آنگاه کاردینال $B_r(X)$ حداکثر 2^κ است.

برهان: توجه داریم که تمام توابعی چون f که $f^{-1}(0)$ را می‌توان بصورت $\bigcup_{i < \kappa} F_i$ بیان کرد حداکثر برابر 2^κ است، زیرا تعداد زیرمجموعه‌های به صورت $\bigcup_{i < \kappa} F_i$ حداکثر برابر این تعداد است. بنابراین طبق گزاره فوق حکم ثابت می‌شود. اکنون آماده‌ایم که قضیه اصلی این فصل را ثابت کنیم.

قضیه ۱۲: فرض کنید $\varphi(x, y)$ یک فرمول وابسته در یک مدل M باشد. آنگاه تعداد تایپ‌هایی در $S_\varphi(M^*)$ که بطور متناهی در M محقق می‌شوند حداکثر برابر کاردینال $2^{|M|}$ است.

برهان: قرار دهید $X = S_\varphi(M)$. آنگاه X فشرده و تماماً ناهمبند است. همچنین، زیرمجموعه‌ای چگال از کاردینال $|M|$ دارد. اکنون با توجه با مشاهده‌ی پیلی که در فصل قبل اشاره کردیم، تناظری بین همه توابع در بستار مجموعه

$$A = \{\varphi^a: S_\varphi(M) \rightarrow \{0,1\}: a \in M\}$$

و همه تایپ‌های هم‌ارث روی M وجود دارد. اکنون با توجه به اینکه $\varphi(x, y)$ در M وابسته است، بستار مجموعه A زیرمجموعه‌ای از $B_r(X)$ می‌باشد و در نتیجه دارای

کاردینال حداکثر 2^M است. بنابر این، تعداد تایپ‌های هم‌ارث روی M حداکثر برابر 2^M می‌باشد.

۶. نتیجه‌گیری

استفاده از روش‌های توپولوژیک نتایج بسیار مهمی را به منطق مرتبه اول کلاسیک و نظریه مدل‌ها تقدیم می‌کند و جنبه‌های دیگری از منطق را آشکار می‌نماید. پیوند بین حوزه‌های مختلف ریاضیات از مهمترین دستاوردهای ریاضیدانان است. این پیوندها ابزارهای جدیدی در اختیار آنان قرار می‌دهند و منجر به حل مسائلی خواهند شد که با ابزارهای محدود قابل حل نیستند. در این مقاله، پیوند بین منطق ریاضی کلاسیک و توپولوژی و فضاهای تابعی بیان شد. دستاوردهای ارائه شده در این مقاله کاملاً جدید هستند و نوید نتایج و کاربردهای بسیاری را در آیند نزدیک می‌دهند.

در انتها ذکر چند نکته در مورد قضیه اصلی فصل قبل و همچنین کاربردها و تعمیم‌های آتی آن ضروری است.

۱. توجه داریم که در حالتی که مدل M شمارا باشد، حکم قضیه فوق از نتایج فصل قبل نتیجه می‌شود. در واقع قضیه این فصل اثباتی برای حالت کلی که در آن M مدلی با کاردینال دلخواه می‌باشد ارائه داده است.

۲. در اثبات قضیه فوق روش‌های توپولوژیک استفاده شده است و این اثبات در نوع خود حائز توجه و اهمیت است.

۳. از آنجا که دستاوردهای توپولوژیک مورد استفاده در این مقاله برای توابع با ارزش حقیقی (نه لزوماً توابع دو ارزشی) نیز برقرار هستند، می‌توان دستاوردهای فوق را به منطق‌های چندارزشی و فازی نیز تعمیم داد.

۴. همانطور که پروفیسور دیوید فرملین (David Fremlin) به نویسنده این مقاله متذکر شد، شمردن تعداد توابع بخش شده (که در این مقاله انجام پذیرفت) حتی برای متخصصان آنالیز تابعی نیز جدید می‌باشد.

کتاب‌نامه

Ben-Yaacov I. (2014), Model theoretic stability and definability of types, after A. Grothendieck, *Bulletin of Symbolic Logic*, 20, pp 491-496.

جنبه‌های توپولوژیک از منطق مرتبه اول کلاسیک ۱۳۵

- Bourgain J., Fremlin D. H., and Talagrand M. (1978). Pointwise compact sets of baire-measurable functions. *American Journal of Mathematics*, 100(4): pp. 845-886.
- Gaifman H. (1976), Models and types of Peano's arithmetic. *Ann. Math. Logic*, 9(3):223-306.
- Grothendieck A. (1952), Critères de compacité dans les espaces fonctionnels généraux, *American Journal of Mathematics* **74**, 168-186.
- Iovino I. (1999), Stable models and reexive Banach spaces. *J. Symbolic Logic*, 64(4):1595-1600.
- Khanaki K. (2015), Stability, NIP, and NSOP; Model Theoretic Properties of Formulas via Topological Properties of Function Spaces, , *Mathematical Logic Quarterly*, submitted.
- Khanaki K. and Pillay A. (2018), Remarks on NIP in a model, *Mathematical Logic Quarterly*, to appear.
- Krivine, J.-L., and Maurey B. (1981), Espaces de Banach stables. *Israel J. Math.*, 39(4):273-295.
- Pillay A, (1982), Dimension theory and homogeneity for elementary extensions of a model, *J. Symbolic Logic*, vol 47, 147-160.
- Pillay A. (2016), Generic stability and Grothendieck, *South American Journal of Logic*, Vol. 2, n. 2, p. 1-6.
- Poizat B. (1981), Theories instables. *J. Symbolic Logic*, 46(3):513-522.
- Shelah S. (1971), Stability, the f.c.p., and superstability; model theoretic properties of formulas in first order theory, *Annals of Mathematical Logic*, vol. 3, no. 3, pp. 271-362.
- Simon P. (2015), Rosenthal compacta and NIP formulas, *Fund. Math.* vol. 231, 81-92.