فصلنامه علمی مطالعات اقتصادیِ کاربردی ایران
سال هشتم، شماره‌ی ۳۲، زمستان ۱۳۹۸
صفحات: ۸۱-۱۰۱
DOI: 10.22084/aes.2019.19871.2928

بررسی کارایی معادلات دیفرانسیل تصادفی تحت فرآیند لوی در مدلسازی نوسانات نرخ ارز (رویکردی از مدل‌های COGARCH)

میثم رافعی[۱]
محبوبه کریمی شوشتری[۲*]

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۰۴/۲۴ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۰۸/۱۹

چکیده

توجه به قیمت نرخ ارز و نوسانات آن، نقش بسزایی در تصمیم‌گیری‌های مالی و معاملات اقتصادی متأثر از آن در گروه‌های بزرگ و کوچک اقتصادی دارد. در این مقاله سعی کرده‌ایم به کمک یک معادله دیفرانسیل تصادفی تحت فرآیند لوی (که مدل GARCH پیوسته نامیده می‌شوند)، برای اولین بار یک مدل‌سازی پیوسته برای داده‌های نرخ ارز در ایران ارائه دهیم و برازش نوسانات نرخ ارز را بر این مدل بررسی کنیم. بر این اساس از داده‌های روزانه نرخ ارز غیر رسمی (ارزش دلار امریکا در برابر ریال ایران در بازار آزاد) در دوره زمانی اول فروردین ماه سال ۱۳۸۸ تا پایان اسفند ماه سال ۱۳۹۶استفاده نمودیم. همچنین کارایی مدل‌های پیوسته در زمان، در مقایسه با مدل GARCH گسسته به چالش کشیده می‌شود. در نهایت جهت بررسی کارایی مدل مطابق با نتایج حاصل از سنجه‌های معیارهای خطای اندازه گیری، ارجحیت مدل پیوسته جدید بیان می‌شود.

کلید واژه‌ها: معادلات دیفرانسیل تصادفی، فرآیند لوی، مدل گارچ، مدل گارچ پیوسته، بازار ارز.

طبقه‌بندی JEL: C22, C29, C58, C59, E44.

۱. استادیار گروه اقتصاد امور عمومی، دانشگاه خوارزمی — **Email:** m.rafei@khu.ac.ir
۲. کارشناسی ارشد ریاضی مالی، دانشگاه خوارزمی (*نویسنده مسئول) — **Email:** karimi.sh69@gmail.com

۱. مقدمه

در اقتصاد مبتنی بر بازار، تخصیص منابع اقتصادی برآمد بسیاری تصمیمات خصوصی است. در چنین اقتصادی، قیمت‌ها علائمی هستند که بهترین استفاده از منابع اقتصادی را راهنمایی می‌کنند. یکی از مهمترین این بازارها که تخصیص بهینه منابع در آن اهمیت به سزایی دارد، بازارهای مالی می باشند و قیمت‌ها نقش تعیین کننده‌ای در تصمیمات سرمایه‌گذاران حاضر در این بازارها دارند (فبوزی[۱] و همکاران، ۱۹۹۴).

امروزه با جهانی شدن بازارهای مالی و به تبع آن بازار ارز در سراسر دنیا، همراستا با بحث تأمین مالی بنگاه‌ها، واحدهای اقتصادی که در هر کشور متقاضی وجوه هستند، ناچار نیستند خود را به بازار داخلی محدود کنند. سرمایه‌گذاران یک کشور نیز ملزم نمی‌باشند خود را به دارایی‌های مالی منتشر شده در بازار داخلی محدود کنند. ازاین‌رو رقابت‌های جهانی دولت‌ها را واداشته است که از جنبه‌های گوناگون بازارهای مالی خود را آزاد بگذارند تا واحدهای مالی آنها بتوانند رقابتی موثر در سراسر جهان داشته باشند و این خود منجر به گسترش روزافزون این بازارها شده است(فبوزی و همکاران، ۱۹۹۴). اما همزمان با گسترش این بازارها به ویژه بازار ارز، کشورهای در حال توسعه اغلب دچار آشفتگی بازار ارز خارجی شده‌اند و از این روی انتخاب سیاست‌ها برای ثبات اقتصاد کلان آنها مهم است. لذا بازار ارز نیز مانند هر بازار دیگری می‌تواند از پسِ تکانه‌های اقتصادی متلاطم شود و دستخوش تغییرات قرار گیرد. ازجمله عواملی که بر تغییرات و نوسانات نرخ ارز تأثیر می‌گذارند و دلایل نوسان آنها را توضیح می‌دهند، عبارتند از: نرخ تورم، نرخ بهره، حساب جاری کشور یا میزان پرداخت‌ها، بدهی دولت، شرایط تجارت، ثبات سیاسی و عملکردی، رکود اقتصادی و سفته بازی. همه این عوامل نوسانات نرخ ارز خارجی را تعیین می‌کنند، پس به روز بودن در مورد این عوامل به ما کمک خواهد کرد که بهترین زمان بهینه برای انتقال پول بین المللی را ارزیابی کنیم. از طرف دیگر بی‌ثباتی نرخ ارز ممکن است باعث عدم اطمینان در میان معامله‌گران به حداکثر سود و کاهش سطح مشارکت آنها در بخش صادرات و واردات شود، بنابراین منجر به کاهش حجم تجارت و تضعیف رشد اقتصادی خواهد شد (بهمنی اسکویی و گلن[۲]، ۲۰۱۸).

لزوم شناخت نوسانات نرخ ارز آنجا اهمیت می‌یابد که پیش‌بینی و جهت‌گیری نوسانات آن یک عامل کلیدی در قیمت‌گذاری مشتقات، محاسبه ارزش در معرض ریسک و تعیین نسبت‌های هزینه‌ی بهینه عنوان می‌شود. علاوه‌براین، پیش‌بینی آن برای موسسات مالی به‌منظور ارزیابی ریسک ارز، افزایش سود و نظارت بر برنامه‌ریزی مالی استراژیک بسیار مهم است. همچنین دولت‌ها، اقتصاددانان و

1. Frank J. Fabozzi, Franco Modigliani, Michael G. Ferri
2. Abera Gelan

شرکت‌کنندگان در بازار ارز نیز به‌طور فزاینده‌ای علاقه‌مند به مدل‌هایی هستند که امکان پیش‌بینی دقیق نرخ ارز را فراهم می‌کند (لمیری[۱]، ۲۰۱۷).

مدل‌های متنوعی برای نیل به این هدف در حوزه ریاضیات مالی و فرآیندهای تصادفی وجود دارند، از جمله فرآیندهای مبتنی بر گارچ (GARCH)[۲]، محبوب‌ترین مدل برای پیش‌بینی نوسانات داده‌های مالی به دلیل توانایی آنها در جذب خوشه‌بندی و پایداری در نوسانات سری‌های زمانی است. همچنین استفاده از معادلات دیفرانسیل تصادفی[۳] در مدلسازی‌های پیچیده‌ی احتمال از جمله مدلسازی نوسانات بازار بسیار گسترده است. معادلات دیفرانسیل تصادفی، مدلی پویا به‌منظور توضیح رفتار متغیرهای اقتصادی ارائه می‌دهد و در واقع از حل معادله دیفرانسیل تصادفی، معادله‌ای به دست می‌آید که رفتار متغیر مورد مطالعه را نشان می‌دهد.

آنچه در این تحقیق دنبال می‌شود انجام یک مدلسازی برای نوسانات نرخ ارز بر پایه یک معادله دیفرانسیلی تصادفی تحت فرآیند لوی[۴] است. در این مدلسازی، از یک مدل پیوسته که مبنای آن یک نسخه گسسته از فرایند گارچ است استفاده شده و پارامترهای آن با روش شبه حداکثر درستنمایی[۵] برآورد می‌شوند. طبق نتایج تحقیق، نوسانات بازار ارز ایران از این مدل پیوسته تبعیت می‌کنند و این مدل در گرفتن نوسانات موفق عمل کرده است. بر اساس این نتیجه، جهت سنجش قدرت پیش‌بینی و کارایی آن، این مدل را با مدل گارچ که مبنایی برای به‌دست آوردن این مدل بود مقایسه می‌کنیم. سپس به کمک سه ابزار اندازه‌گیری خطای، میانگین خطای مطلق(MAE)[۶]، جذر میانگین خطای ریشه(RMSE)[۷] و میانگین خطای مربع هتروسکدستیک(MHSE)[۸] خطای دو مدل را به‌دست آورده و مقایسه می‌نماییم.

ساختار مقاله حاضر به این ترتیب است که در بخش دوم مبانی نظری و ادبیات موضوع، پیشینه پژوهش و مطالعات تجربی داخلی و خارجی حول موضوع پژوهش مطرح می‌گردد. در بخش سوم روش‌شناسی تحقیق بیان شده و در بخش چهارم به کمک داده‌ها مدل برآورد شده و کارایی آن بررسی می‌شود. در پایان، در بخش پنجم نیز نتیجه‌گیری مقاله آورده شده است.

---

1. Salim Lahmiri
2. Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity
3. stochastic differential equations (SDE)
4. Levy Process
5. Quasi-maximum Likelihood Estimation (QMLE)
6. Mean absolute error
7. Root mean squared error
8. Mean heteroskedastic squared error

۲. ادبیات موضوع

در این بخش ابتدا به مرور مدلسازی با معادلات دیفرانسیل تصادفی و سپس مدلسازی با مدل GARCH پیوسته پرداخته خواهد شد. پس از آن، به بررسی ادبیات موضوع و پیشینه تحقیق با توجه به مقالات داخلی و خارجی می‌پردازیم.

۲-۱. مبانی نظری

یکی از روش‌هایی که برای پیش‌بینی و مدلسازی سری‌های زمانی اقتصادی مورد استفاده قرار می‌گیرد، بهره‌گیری از معادلات دیفرانسل تصادفی می‌باشد. مدلسازی متغیرهای اقتصادی و مالی به وسیله معادلات دیفرانسیل تصادفی با کار اوسبورن[۱] (۱۹۶۴) و ساموئلسون[۲] (۱۹۶۵) آغاز شد. سپس اولین بار به وسیله تئوری قیمت‌گذاری اختیار معامله بلک–شولز[۳] (۱۹۷۳) و همزمان با مرتون[۴] (۱۹۷۳) در زمینه مدلسازی قیمت سهام در قالب یک معادله دیفرانسیل تصادفی حرکت براونی[۵] وارد ادبیات اقتصادی شد.

در مدل قیمت سهام بلک–شولز و مرتون در صورتی که $S(t)$ بیانگر قیمت سهام در لحظه t باشد، قیمت سهام در معادله دیفرانسل تصادفی خطی حرکت براونی زیر صدق می‌کند:

$$dS(t) = \mu S(t).dt + \sigma S(t).dw(t)\ , \quad S(0) = S_0 \qquad (۱)$$

در این رابطه $w(t)$ فرایند حرکت براونی استاندارد یا فرایند وینر[۶] است که بیانگر رفتار نوسانی سری زمانی $S(t)$ می‌باشد. لازم به ذکر است که در رابطه (۱)، μ به عنوان امید ریاضی بازدهی لحظه‌ای سهام و σ به عنوان انحراف معیار بازدهی لحظه‌ای سهام معرفی شده‌اند (مرتون، ۱۹۷۳).

اکنون با استفاده از روش‌های موجود در آنالیز تصادفی، می‌توان معادلاتی که بر مبنای ایده مدل قیمت گذاری بلک–شولز ایجاد می‌شوند را حل کرد که به منظور حل آنها از لم ایتو[۷] استفاده می‌شود (آلن[۸]، ۲۰۰۷). در نهایت از حل یک معادله دیفرانسیل تصادفی، می‌توان به فرایند تصادفی رسید که رفتار متغیر را در طول زمان نشان می‌دهد.

غیر از مدلسازی با معادلات دیفرانسیل تصادفی، مدل‌های سری زمانی معروفی نظیر ARCH و GARCH مدل‌های مناسبی جهت مدلسازی داده‌های سری زمانی می‌باشند. این مدل‌ها به طور گسترده برای مدل‌سازی نوسانات استفاده شده‌اند و نشان‌دهنده پایداری نوسانات در درجه‌های بسیار

1. Osborne
2. Samuelson
3. Black, F and Scholes, M.
4. Merton, R.C.
5. Brownian Motion
6. Wiener Process
7. Ito Lemma
8. Allen

بالا هستند. استفاده از مدل‌های ARCH توسط انگل[۱] (۱۹۸۲) معرفی شد، سپس توسط بلرسلف[۲] (۱۹۸۶) به GARCH تعمیم داده شد و نلسون[۳] نیز آن را به EGARCH (GARCH نمایی) بسط داد (نلسون، ۱۹۹۰–b). فرآیندهای مبتنی بر GARCH، محبوب‌ترین مدل برای پیش‌بینی نوسانات داده‌های مالی به‌دلیل توانایی آنها در جذب خوشه‌بندی و پایداری در نوسانات سری‌های زمانی هستند. در واقع، فرآیندهای مبتنی بر GARCH اساساً مدل‌های خطی هستند که شامل برآورد مشترک معادله میانگین شرطی و معادله واریانس شرطی هستند. با این حال فرآیندهای خانواده GARCH مدل‌های پارامتری هستند که ساختار همبستگی خطی را در داده‌ها فرض می‌کنند. علاوه‌براین، آنها به پایداری و توزیع نرمال متغیرها و خطاها محدود می‌شوند. همچنین مدل‌های GARCH فرض می‌کنند که پارامترهای معادله واریانس که برای پیش‌بینی نوسانات آینده استفاده می‌شوند، به طور مناسبی توسط روش تخمین شبه حداکثر احتمال برآورد می‌شوند (لمیری، ۲۰۱۷).

از طرف دیگر، با مدل GARCH می‌توان داده‌های سری زمانی مالی که دارای داده‌های زمانی در یک زمان است را تحلیل کرد، مثلاً یک رکورد داده در هر روز یا هر ۵ دقیقه. اما به خاطر رشد و توسعه سریع ظرفیت‌های حافظه بالاتر و بالاتر کامپیوترها، ثبت اطلاعات بیشتر و بیشتر در طول سال‌های گذشته امکان پذیر بوده است. این مقدار اطلاعات فقط در فواصل زمانی ثابت ثبت نمی‌شود.گرفتن این اطلاعات تنها در فواصل زمانی معین، برخی از اطلاعات موجود را نادیده می‌گیرد. به‌منظور تجزیه و تحلیل و مدل کردن این مقدار عظیم داده‌ها که می‌توانند به‌طور نامنظم در زمان فاصله داشته باشند، بسط مدل‌های زمان گسسته به مدل‌های زمان پیوسته ضروری است.

برای مدلسازی نوسانات تصادفی رویکردهای مختلفی برای پیدا کردن یک مدل مناسب پیوسته وجود داشته است. اولین بار نلسون (۱۹۹۰) سعی در گسترش مدلسازی داده‌های سری زمانی از فرم گسسته به پیوسته داشته است و تلاش کرد تا مدل زمان گسسته GARCH را با مدلسازی زمان پیوسته پیوند دهد. (نلسون، ۱۹۹۰–a) در این زمینه، فرایند قیمت و نوسانات مدل او که توسط دو فرایند براونی مستقل هدایت می‌شوند در فرم دیفرانسیلی زیر آورده شده است:

$$dG_t = \sigma_t dw_t$$
$$d\sigma_t^2 = \theta(\gamma - \sigma_t^2)dt + \rho\sigma_t^2 dB_t \qquad t \geq 0$$

پس از نلسون، برندورف– نیلسن و شپرد[۴](۲۰۰۱) یک مدل تلأطم تصادفی را توسعه دادند، که در آن فرآیند نوسانات $(\sigma_t^2)_{t\geq0}$ توسط یک نوع فرآیند ارنست–اولمبک[۵] توصیف می‌شود، که توسط فرآیند

---

1. Engle
2. Bollerslev
3. Nelson
4. Barndorff-Nielsen and Shepard
5. Ornstein-Uhlenbeck (OU)

لوی $(L_t)_{t\geq 0}$ هدایت می‌شود. معادله قیمت و نوسانات مدل آنها فرمی از معادله دیفرانسیل تصادفی به‌صورت زیر است:

$$dG_t = \mu dt + \sigma_t dw_t$$
$$d\sigma_t^2 = -\alpha\sigma_t^2 dt + dL_t \qquad t \geq 0$$

از آنجا که محدودیت انتشار مستقیم بیشترین خواص مدل GARCH را از دست می‌دهد و همچنین وجود دو منبع تصادفی، مکانیزم بازخورد بین قیمت و فرایند نوسانات را از بین می‌برد؛ اشخاصی همچون کلوپلبرگ[1]و همکارانش (۲۰۰۴) ایده ساخت مدل پیوسته جدیدی را عنوان کردند که در آن مدل پیوسته‌ی جدید برگرفته از یک مدل گسسته‌ی GARCH بوده و معادله قیمت و فرایند نوسانات آن یک معادله دیفرانسیل تصادفی تحت فرایند پیوسته‌ی لوی می‌باشد. این معادلات در فرم دیفرانسیلی به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$dG_t = \sigma_{t-} dL_t$$
$$d\sigma_t^2 = (\omega - \eta\sigma_t^2)dt + \varphi\sigma_{t-}^2 d[L,L]_t^{(d)}$$

مدل فوق که از جدیدترین و کاربردی‌ترین مدلسازی‌ها برای داده‌های سری زمانی است، به دلیل اینکه از مدل گسسته GARCH نشأت گرفته است در ادبیات مالی به مدل GARCH پیوسته یا مدل COGARCH[2] شهرت یافته است. در این مقاله از مدل پیوسته‌ی به دست آمده توسط کلوپلبرگ و همکارانش (۲۰۰۴) و معادلات دیفرانسل تصادفی مستخرج از آن استفاده می‌کنیم و در سراسر پژوهش از آن با عنوان COGARCH(1,1) نام می‌بریم.

۲-۲. پیشینه پژوهش

در زمینه سری‌های زمانی مالی، نوسانات فرآیند قیمت بسیار مورد توجه است. در طول سال‌ها، نوسانات تحت فرض نوسانات ثابت مدل‌سازی شده بود. توسعه مدل‌های زمان گسسته برای تغییر نوسانات توسط انگل (۱۹۸۲) و بلرسلف (۱۹۸۶) نقطه عطفی در تحلیل سری‌های زمانی مالی بود. انگل (۱۹۸۲) مدل معروف ARCH را توسعه داد و بلرسلف(۱۹۸۶)تعمیم این مدل را مدل GARCH معرفی کرد. مدل‌هایی با هتروسکدسیتی‌های شرطی اتورگرسیو تعمیم‌یافته، نوسانات را با مقادیر قبلی این فرآیند ایجاد می‌کنند.

اولین رویکرد برای ایجاد یک مدل GARCH زمان پیوسته به نلسون (۱۹۹۰) باز می‌گردد. او سعی کرد تا مدل زمان گسسته را با ایجاد تقریب انتشار گسترش دهد. او در مقاله‌ی "مدل‌های ARCH به عنوان تقریب انتشار" سعی کرد شکاف بین سیستم‌های دیفرانسیلی تصادفی غیرخطی زمان پیوسته و

1. Kluppelberg
2. Continuous GARCH.

رابطه آن‌ها با سیستم‌های معادله تفاضلی تصادفی ARCH را پرکند. مدل‌های GARCH زمان گسسته تنها یک منبع تصادفی دارند، در حالی که مدل‌های تلاطم تصادفی مانند مدل نلسون (۱۹۹۰) دو منبع تصادفی دارند (نلسون، ۱۹۹۰-a). دراست و ورکر[1] (۱۹۹۶) نیز به دنبال ایجاد پلی بین مدل‌های زمان پیوسته و فرآیندهای GARCH گسسته بودند و مقاله‌ی "بستن شکاف GARCH: مدلسازی زمان پیوسته GARCH" را در همین مضمون ارائه دادند. آنها خواص فرآیندهای زمان پیوسته که رفتار GARCH را در همه‌ی فرکانس‌های گسسته نمایش می‌دهند، را مورد بحث قرار دادند و همچنین کلاس مدل‌های زمان پیوسته GARCH را به دو زیر گروه که یکی گروه انتشاری GARCH و دیگری پرش-انتشار GARCH بود، تقسیم کردند (دراست و ورکر، ۱۹۹۰).

علاوه‌براین، مدل تلاطم تصادفی زمان پیوسته نیلسن-برندورف و شپرد(۲۰۰۱) در مقاله‌ی "مدل ارنست-اولمبگ غیرگوسینی و برخی کاربردهای آن در اقتصاد مالی" نوسانات را با فرآیند ارنست-اولمبگ که توسط فرآیند لوی هدایت می‌شود، مدل‌سازی می‌کند. مدل‌سازی پرش با این مدل ممکن است اما شامل دو فرآیند تصادفی مستقل می‌باشد (نیلسن-برندورف و شپرد، ۲۰۰۱)

رویکرد جدید کلوپلبرگ و همکاران (۲۰۰۴) تنها شامل یک منبع تصادفی است. ایده ساخت مدل GARCH(1,1) زمان پیوسته‌ی آنها این است که ساختار و ویژگی‌های اصلی مدل GARCH زمان گسسته را حفظ کند. در مقاله‌ی آنها با عنوان "یک فرآیند زمان پیوسته GARCH که توسط فرآیند لوی استخراج شده: مانایی و رفتار مرتبه دوم"، مدل COGARCH(1,1) با مدلGARCH زمان گسسته به دست می‌آید و به فرآیند لوی بستگی دارد.(کلوپلبرگ، لیندنر و مالر،۲۰۰۴) پس از آنها، براکول[2] و همکاران (۲۰۰۶) این مدل را برای $1 \leq p \leq q$ تعمیم دادند.

در مطالعات اخیر، کالسن و وسنمایر[3] (۲۰۰۹) در مقاله‌ای با عنوان "COGARCH به عنوان یک حد زمان پیوسته از GARCH(1,1) " نشان دادند که هر فرایند COGARCH می‌تواند به عنوان حد یک دنباله از فرایندهای GARCH(1,1) نمایان شود. آنها به عنوان یک محصول جانبی، به دلیل اینکه فرآیندهای COGARCH مارکوف قوی هستند، مولد بی‌نهایت کوچک از نمایش فرایند مارکوف دوگانه COGARCH را استنتاج کردند. علاوه بر این، اذعان داشتند که COGARCH و حد انتشار دومتغیره کلاسیک نلسون احتمالاً تنها حدهای زمان پیوسته‌ی GARCH هستند (کالسن و وسنمایر، ۲۰۰۹).

در پژوهشی دیگر بایراجی و اونال[4] (۲۰۱۴) در مقاله‌ای تحت عنوان "مدل‌سازی نوسانات تصادفی نرخ بهره با یک مدل GARCH(1,1) پیوسته در زمان" یک مدل GARCH(1,1) پیوسته را با

1. Feike C. Drost, Bas J.M. Werker.
2. Brockwell
3. Jan Kallsen and Bernhard Vesenmayer.
4. Selcuk Bayraci, Gazanfer Unal.

استفاده از یا فرایند لوی-گاوسی نرمال معکوس[1] به منظور تحلیل ویژگی‌های نوسانات نرخ‌های بهره ترکیه توسعه دادند و آن را NIG-COGARCH نامیدند. این اولین کار با توجه به مدل‌سازی داده‌های نرخ بهره با مدل NIG-COGARCH بود که از روش استنتاج غیرمستقیم برای ارزیابی پارامتر استفاده می‌کرد. در این پژوهش برای تجزیه‌وتحلیل داده‌ها، نرخ‌های بهره روزانه‌ی اوراق قرضه‌ی دو ساله ترکیه برای دوره ۲۰۰۶/۱/۲ تا ۲۰۱۰/۱۲/۳۱ مورد استفاده قرارگرفته‌است. نتایج تجربی نشان می‌دهد که مدل NIG-COGARCH(1,1) به طور موفقیت‌آمیز از خوشه‌بندی نوسانات بهره می‌جوید و نتایج بسیار خوبی در مدل‌سازی سری‌های نرخ بهره ارائه می‌دهد، چرا که این مدل ویژگی‌های فرایند نوسانات را جذب می‌کند و برآوردهای نوسان‌پذیری شرطی بهتری را نسبت به همتایان گسسته‌اش انجام می‌دهد (بایراجی و اونال، ۲۰۱۴)

در پژوهش‌های جدید، نیه[2] (۲۰۱۸) با تحقیق در مورد فرآیندهای COGARCH مرتبه‌ی بالاتر، ویژگی‌های یک فرآیند زمان پیوسته GARCH را به عنوان راه حل معادله انتگرال تابعی تصادفی لوی بررسی کرد. او در مقاله‌ی خود با عنوان "یک فرآیند زمان پیوسته GARCH(p,q) با تأخیر" نشان داد فرآیند GARCH پیوسته به عنوان حد ضعیفی از توالی فرآیندهای GARCH گسسته رخ می‌دهد که زمان بین مشاهدات به صفر همگرا می‌شود و تعداد وقفه‌ها تا بینهایت رشد می‌کند. طبق نتایج این تحقیق، حد حاصل شده، فرآیند COGARCH را تعمیم می‌دهد و می‌تواند به عنوان فرآیند COGARCH با مرتبه بالاتر وقفه‌ها تفسیر شود (نیه، ۲۰۱۸).

از دیگر پژوهش‌های نزیک به زمینه این مقاله می‌توان به "مدلسازی نوسانات نرخ ارز با استفاده از مدل‌های GARCH نامتقارن" از تورلی و همکارانش (۲۰۱۴) اشاره کرد. در این مقاله به بررسی صحت و عملکرد مدل‌های نوسان‌پذیری برای بازده نرخ ارز لئون/ایالات متحده، با مدل‌های ARMA، GARCH و GARCH نامتقارن با توزیع نرمال و غیرنرمال پرداخته شده است. در تطبیق این مدل‌ها با داده‌های نرخ ارز در ماه ژانویه ۲۰۰۴ تا دسامبر ۲۰۱۳ این نتیجه حاصل شد که مدل نامتقارن GARCH و GARCH تحت توزیع غیرنرمال بهتر قابل تطابق هستند تا تحت توزیع نرمال و نیز برآورد کلی را برای اندازه‌گیری واریانس شرطی بهبود می‌بخشند. در نهایت مدل‌های ارائه شده در این پژوهش جهت مدلسازی نوسانات نرخ ارز لئون مناسب ارزیابی شدند و مدل‌های نامتقارن GARCH نامتقارنی را در بازده نرخ ارز نشان می‌دهند و نتیجه آن وجود اثر اهرمی است (تورلی و همکاران، ۲۰۱۴).

با توجه به نوساناتی که ارز در کشور ما دارد و نیز تأثیر آن بر بخش‌های مختلف اقتصادی و اجتماعی کشور، انتظار می‌رود در پیش‌بینی و مدلسازی این نوسانات و تلأطم‌های شدید تحقیقات فراوانی شده باشد. اما متأسفانه هیچ‌گونه مدل‌سازی تصادفی با مدل COGARCH نه تنها در بازار ارز بلکه در هیچ

1. NIG-levy (Normal Inverse Gaussian-Levy)
2. Adam Nie

کدام از بازارهای مالی ایران انجام نشده است؛ و بیشترین مطالعات نزدیک به این پژوهش تاکنون در حوزه‌ی تأثیرپذیری و تأثیرگذاری نوسانات بازار ارز ایران بوده است. از جمله مقالات داخلی، مقاله ابونوری و همکاران (۱۳۸۸) با این عنوان "اثر اخبار بر نوسانات نرخ ارز در ایران: کاربردی از خانواده ARCH" است که هدف اساسی آن، پس از بیان الگوی نظری، نحوه اثرپذیری نوسانات نرخ ارز از اخبار تحت مدل‌های ناهمسان واریانس شرطی بوده است. نتایجِ آنها، با استفاده از داده‌های روزانه نرخ ارز از تاریخ اول اسفند سال ۱۳۸۱ تا نوزدهم مهر ۱۳۸۶، حاکی از تأثیر نامتقارن اخبار بر نوسانات نرخ ارز در ایران است؛ به عبارت دیگر، تأثیر اخبار بد (منفی) بر نوسانات نرخ ارز بیشتر از تأثیر اخبار خوب (مثبت) می‌باشد (ابونوری، خانعلی‌پور و عباسی، ۱۳۸۸).

پدرام (۱۳۹۱) در مقاله "اثر نوسانات نرخ ارز بر روی نوسانات بازار سهام در ایران" ، رابطه بین بازارهای سهام و بازار ارز را بررسی می‌نماید و نشان می‌دهد که رابطه مثبتی میان تغییرات نرخ ارز و بازدهی‌های بازار سهام وجود دارد. علاوه‌برآن یک ثبات تغییر در اغلب متغیرهای اقتصاد کلان وجود دارد؛ از دیگر نتایج پژوهش وی، این بود که افزایش (کاهش) در کسری تجاری و انتظارات آتی در مورد کسری تجاری تغییرات بازار سهام را کاهش(افزایش) خواهد داد (پدرام، ۱۳۹۱).

امامی و ملکی (۱۳۹۳) در مقاله "بررسی اثر نوسانات نرخ ارز بر اشتغال در ایران" با به‌کارگیری مدل GARCH نوسانات نرخ ارز واقعی سال‌های ۱۳۵۳ تا ۱۳۸۶ را اندازه‌گیری نمودند و سپس با استفاده از روش حداقل مربعات معمولی، اثر نوسانات نرخ ارز واقعی بر اشتغال ایران را مورد ارزیابی قرار دادند. نتایج این پژوهش حاکی از اثر منفی و معنی‌دار نوسانات نرخ ارز واقعی بر اشتغال می‌باشد. همچنین براساس سایر نتایج، تولید ناخالص داخلی واقعی و موجودی سرمایه واقعی اثر مثبت و معنی‌دار بر اشتغال دارد (امامی و ملکی، ۱۳۹۳).

مطهری و همکاران (۱۳۹۴) با مطرح کردن مقاله "ارائه یک الگوی هشدار پیش از وقوع نوسانات ارزی در بازار ارز ایران: روش مارکوف سوئیچینگ گارچ" یک طرح جدید معرفی نمودند. به کمک داده‌های روزانه نرخ ارز بازار غیررسمی (آزاد) ارز در بازه زمانی بیست‌وپنجم اردیبهشت ۱۳۸۵ تا بیست‌ویکم تیرماه ۱۳۹۴ ، نتایج بدست آمده از این الگو نشان می‌دهد که احتمال ماندن در رژیم پرنوسان ارزی، احتمال انتقال از رژیم پرنوسان به کم‌نوسان ارزی، احتمال انتقال از رژیم کم‌نوسان به پرنوسان ارزی و احتمال ماندن در رژیم کم‌نوسان ارزی به‌ترتیب برابر با ۰/۱۴ ، ۰/۰۳، ۰/۸۶ و ۰/۹۷ است (مطهری، لطفعلی‌پور و احمدی شادمهری، ۱۳۹۴).

فلاح‌پور و هداوند میرزایی (۱۳۹۵) در مقاله‌ی "پیش بینی نوسانات بازده طلا با استفاده از مدل گارچ ناپارامتری و مقایسه با مدل های گارچ پارامتری"، از این مدل برای پیش‌بینی نوسانات استفاده کردند. آنها سری بازده قیمتی و نوسانات بازده طلا را تحت آزمون‌های مختلف بررسی کردند و از یک رویکرد ناپارامتری براساس مدل ارائه شده‌ی بولمن و مکنیل (۲۰۰۲) برای پیش‌بینی نوسانات بازدهی استفاده

نمودند. طبق نتایج به دست آمده از مقایسه مدل ناپارامتری با مدل‌های پارامتری دیگر، تابع خطای QLIKE برتری مدل GARCH ناپارامتری را در پیش‌بینی نوسانات نسبت به بقیه مدل‌های GARCH نشان داد (فلاح‌پور و هداوند میرزایی، ۱۳۹۵).

در مقاله‌های فارسی با مفاهیم مدلسازی، علیپور و همکاران (۱۳۹۷) در مقاله‌ای با عنوان "مدلسازی بازده مالی با استفاده از مدل مارکوف ترکیبی متغیر با زمان نرمال-گارچ" یک مدل قیمت‌گذاری براساس ترکیب توزیع‌ها را تخمین زده‌اند و یک الگوریتم نمونه‌گیری گیبس برای محاسبه چگالی پسین ایجاد کردند که کارایی آن با شبیه‌سازی آزموده شد. سپس مدل ارائه شده را برای بازده‌های روزانه S&P500 (۲۰۰۹-۲۰۱۵) و شاخص کل بورس تهران (۱۳۸۸-۱۳۹۴) به‌کار بردند و نشان دادند مدل مارکوف ترکیبی متغیر با زمان نرمال-گارچ با دو مؤلفه نتایج بهتری نسبت به حالت تک مؤلفه‌ای (مارکوف-گارچ) ارائه می‌دهد (علیپور، عزیززاده و منطقی، ۱۳۹۷).

۳. روش‌شناسی تحقیق

همان طور که در بخش دوم عنوان شد، در این مقاله بر روی یک رویکرد کاملا جدید تمرکز خواهیم کرد: مدل زمان پیوسته GARCH(1,1). این مدل توسط کلوپلبرگ و همکاران (۲۰۰۴) به عنوان تعمیمی از مدل GARCH زمان گسسته توسعه داده شده است. ابتدا نگاهی به مدل زمان گسسته GARCH(1,1) خواهیم داشت و همان‌طور که خواهیم دید می‌توان آن را به زمان پیوسته GARCH(1,1) تعمیم داد. فرآیند زمان گسسته GARCH(1,1) که توسط بلرسف (۱۹۸۶) توسعه داده شد به‌صورت زیر تعریف شد:

$$y_n = \varepsilon_n \sigma_n \qquad (۲)$$

$$\sigma_n^2 = \beta + \lambda y_{n-1}^2 + \delta \sigma_{n-1}^2 \quad , \quad n \epsilon N \qquad (۳)$$

با پارامترهای $\beta > 0$ ، $\lambda \geq 0$ ، $\delta \geq 0$ و $(\varepsilon_n)_{n\epsilon N}$ که دنباله نوسانات است. معادله (۲) مشخص کننده فرایند "سطح میانگین" (داده‌های مشاهدات) است و معادله (۳) فرآیند نوسانات شرطی را که وابسته به زمان است و به طور تصادفی نوسان دارد، مدل می‌کند.

از معادله (۳) به صورت بازگشتی به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}\sigma_n^2 &= \beta + \lambda Y_{n-1}^2 + \delta \sigma_{n-1}^2 = \beta + (\delta + \lambda \epsilon_{n-1}^2)\sigma_{n-1}^2 \\ &= \beta \sum_{i=0}^{n-1} \prod_{j=i+1}^{n-1} \left(\delta + \lambda \epsilon_j^2\right) + \sigma_0^2 \prod_{j=0}^{n-1} \left(\delta + \lambda \epsilon_j^2\right)\end{aligned} \qquad (۴)$$

سپس با نوشتن مجموع (۴) به عنوان یک انتگرال، می‌توانیم معادله‌ی (۴) را به‌صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\begin{aligned}
\sigma_n^2 &= \beta \int_0^n \exp\left(\sum_{j=\lfloor s \rfloor+1}^{n-1} \log\left(\delta + \lambda \epsilon_j^2\right)\right) ds + \sigma_0^2 \exp\left(\sum_{j=0}^{n-1} \log\left(\delta + \lambda \epsilon_j^2\right)\right) \\
&= \exp\left(\sum_{j=0}^{n-1} \log\left(\delta\left(1 + \frac{\lambda}{\delta}\epsilon_j^2\right)\right)\right)\Bigg[\sigma_0^2 \\
&\qquad + \beta \int_0^n \exp\left(-\sum_{j=0}^{\lfloor s \rfloor} \log\left(\delta\left(1 + \frac{\lambda}{\delta}\epsilon_j^2\right)\right)\right) ds\Bigg] \\
&= \exp\left(n \log(\delta) + \sum_{j=0}^{n-1} \log\left(1 + \frac{\lambda}{\delta}\epsilon_j^2\right)\right) \\
&\qquad \times \Bigg[\sigma_0^2 \\
&\qquad + \beta \int_0^n \exp\left(-\log(\delta)\left(\lfloor s \rfloor + 1\right) - \sum_{j=0}^{\lfloor s \rfloor} \log\left(1 + \frac{\lambda}{\delta}\epsilon_j^2\right)\right) ds\Bigg] \\
&= \exp\left(-n\eta + \sum_{j=0}^{n-1} \log\left(1 + \varphi \epsilon_j^2\right)\right) \\
&\qquad \times \Bigg[\sigma_0^2 \\
&\qquad + \beta \int_0^n \exp\Bigg(\eta\left(\lfloor s \rfloor + 1\right) \\
&\qquad - \sum_{j=0}^{\lfloor s \rfloor} \log\left(1 + \varphi \epsilon_j^2\right)\Bigg) ds\Bigg]
\end{aligned} \tag{۵}$$

این نوع نمایش فرصتی را برای جایگزینی نموهای ϵ_j با پرش‌های ΔL_t از فرایند لوی، ارائه می‌کند.
با توجه به رابطه (۵) فرآیند کمکی کدلگ[۱] $(X_t)_{t\geq 0}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$X_t = \eta t - \sum_{0<s\leq t} \log\left(1 + \varphi (\Delta L_s)^2\right) \quad , \qquad t \geq 0 \tag{۶}$$

1. Cadlag (continue a droite limite a gauche)

با $\eta, \varphi > 0$. در اینجا در مقایسه با معادله‌ی (۴) ما از پارامترهای $\eta = -\log\delta$ و $\varphi = \lambda/_{\delta}$ با $0 < \delta < 1$ و $\lambda \geq 0$ استفاده کردیم.

همچنین با فرض اینکه تقریباً بدون شک $\beta > 0$ و $\sigma_0 < \infty$ است و مستقل از $(L_t)_{t\geq 0}$ هستند، فرآیند نوسانات پیوسته از چپ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma_{t-}^2 = \left(\beta \int_0^t e^{X_s} ds + \sigma_0^2\right) e^{-X_{t-}} \quad , \qquad t \geq 0 \tag{۷}$$

با قرار دادن X_t در رابطه‌ی (۷) می‌توانیم شباهت آن با رابطه‌ی (۵) را ببینیم:

$$\sigma_{t-}^2 = \left[\sigma_0^2 + \beta \int_0^t \exp\left(\eta s - \sum_{0<u\leq s} \log(1+\varphi(\Delta L_u)^2)\right) ds\right] \times \exp\left(-\eta t + \sum_{0<u\leq t-} \log(1+\varphi(\Delta L_u)^2)\right).$$

فرآیند یکپارچه GARCH زمان پیوسته می‌تواند به‌عنوان یک معادله دیفرانسیل تصادفی تعریف شود:

$$dG_t = \sigma_{t-} dL_t \ , \ G_0 = 0 \, , \tag{۸}$$

که فرآیند نوسانات $(\sigma_t^2)_{t\geq 0}$ در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند:

$$d\sigma_t^2 = (\beta - \eta\sigma_{t-}^2)dt + \varphi\sigma_{t-}^2 d[L,L]_t^d \, . \tag{۹}$$

جهت نیل به اثبات آن، تعاریف زیر را بیان می‌کنیم:

$f(k,s) \coloneqq \mathrm{e}^k s$ و $S_t \coloneqq \prod_{0<s\leq t}\left(1 + \left(\lambda/\delta\right)(\Delta L_s)^2\right)$، $K_t \coloneqq t\log\delta$

سپس از لم ایتوی دو متغیره استفاده می‌کنیم ، از رابطه (۶):

$$\mathrm{e}^{-X_t} = f(K_t, S_t)$$
$$= 1 + \log\delta \int_0^t \mathrm{e}^{-X_s} ds + \frac{\lambda}{\delta} \sum_{0<s\leq t} \mathrm{e}^{-X_{s-}} (\Delta L_s)^2 \ , \qquad t \geq 0$$

انتگرال‌گیری با قطعات نشان می‌دهد:

$$\mathrm{e}^{-X_t}\int_{\mathbf{0}}^{t}\mathrm{e}^{X_s}ds=\int_{\mathbf{0}+}^{t}\mathrm{e}^{-X_{s-}}d\left(\int_{\mathbf{0}}^{s}\mathrm{e}^{X_y}dy\right)+\int_{\mathbf{0}+}^{t}\left(\int_{\mathbf{0}}^{s}\mathrm{e}^{X_y}dy\right)d(\mathrm{e}^{-X_s})+\left[\mathrm{e}^{-X_\cdot},\int_{\mathbf{0}}^{\cdot}\mathrm{e}^{X_s}ds\right],$$

که در آن کواریانس درجه دوم به صورت زیر است:

$$\left[\log\delta\int_{\mathbf{0}}^{\cdot}\mathrm{e}^{-X_{s-}}ds,\int_{\mathbf{0}}^{\cdot}\mathrm{e}^{X_s}ds\right]=\int_{\mathbf{0}}^{t}d[s\log\delta,s]=0,\quad t\geq 0\ .$$

بنابراین:

$$d\left(\mathrm{e}^{-X_t}\int_{0}^{t}\mathrm{e}^{X_s}ds\right)=dt+\left(\int_{0}^{t}\mathrm{e}^{X_s}ds\right)d(\mathrm{e}^{-X_t})\ ,t\geq 0\ ,$$

با استفاده از انتگرال تصادفی به دست می‌آید. پس از رابطه (۷) برقراری رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید، که این همان رابطه‌ی (۹) می‌باشد:

$$d\sigma_t^2=\beta dt+\sigma_t^2\mathrm{e}^{X_{t-}}d(\mathrm{e}^{-X_t})\ .$$

همچنین کلوپلبرگ و همکاران (۲۰۰۴) نشان دادند که فرایند نوسانات $(\sigma_t^2)_{t\geq 0}$ ماناست و علاوه‌برآن یک فرایند مارکوفی همگن است.

پس از مدلسازی، برای رسیدن به هدف بعدی مقاله، برآوردگر بازگشتی نوسانات به‌صورت زیر محاسبه شده است:

$$\hat{\sigma}_t^2=\hat{\beta}+(1-\hat{\eta})\hat{\sigma}_{t-1}^2+\hat{\varphi}\left(G_t^{(1)}\right)^2\qquad n\epsilon N$$

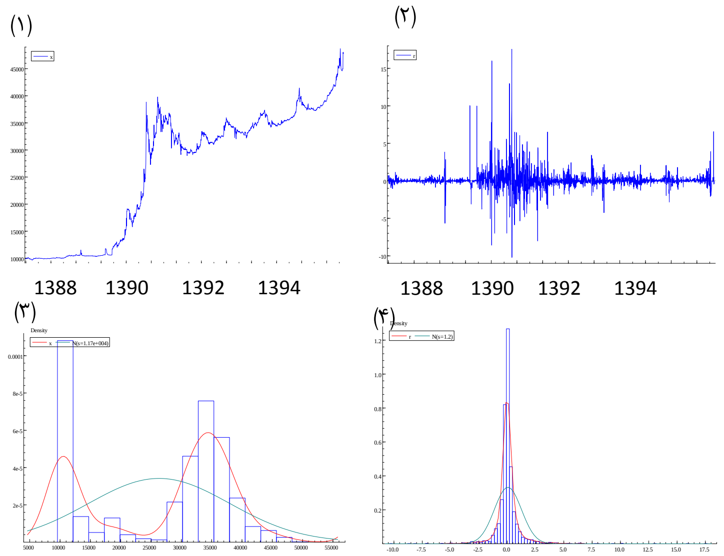
به‌طوری‌که $\left(G_t^{(1)}\right)^2$ مربع بازده نرخ ارز است. همچنین $\hat{\sigma}_0^2$ از رابطه‌ی $\hat{\sigma}_0^2=\frac{\widehat{\beta}}{\hat{\eta}-\widehat{\varphi}}$ به‌دست می‌آید.

سپس برای مقاصد مقایسه‌ای، از خطای جذر میانگین ریشه(RMSE)، میانگین خطای مطلق(MAE) و میانگین خطای مربع هتروسکدستیک(MHSE) برای عملکرد برآورد مدل استفاده می‌کنیم.

٤. برآورد مدل و تحلیل یافته‌ها

بازه زمانی مورد بررسی برای این پژوهش، داده‌های روزانه از اول فروردین ماه سال ۱۳۸۸ تا انتهای اسفند ماه سال ۱۳۹۶ در ایران، جمعاً با ۲۵۳۹ داده در نظر گرفته شده است و جهت گردآوری اطلاعات از داده‌های بانک مرکزی و صرافی‌های مجاز استفاده شده است. نمودارهای رسم شده از این سری

زمانی، حاکی از افزایش قیمت نرخ ارز در دورۀ ۸ ساله مورد بررسی است و همچنین جهش ناگهانی قیمت‌ها در اواسط این دوره را نشان می‌دهد. همچنین در طول این دوره بیشترین قیمت نرخ ارز در اواخر دوره در تاریخ ۱۳۹۶/۱۱/۲۴ با قیمت ۴۸۶۹۰ ریال بوده است و کمترین قیمت مربوط به اوایل دوره مورد بررسی در تاریخ ۱۳۸۸/۰۳/۱۳ با قیمت ۹۶۶۸ ریال می‌باشد. علاوه بر این، نرخ ارز طی دوره ۸ ساله (۱۳۸۸-۱۳۹۶) چوله به چپ یا دارای چولگی منفی است و در همین دوره بازدهی آن چوله به راست با میانگین حدود ۰/۰۶۲٪ می‌باشد. در مورد کشیدگی نیز می‌توان کشیدگی مثبت را در قیمت نرخ ارز دلار و بازده آن مشاهده نمود. لذا با توجه به این موارد، غیرنرمال بودن داده‌های نرخ ارز طی این دورۀ ۸ ساله مشخص می‌شود که این خود می‌تواند شواهدی از حضور تلاطم‌های متغیر در زمان در مجموعه داده‌ها باشد.



شکل ۱: نمودارهای بازده و قیمت روزانه نرخ ارز غیررسمی و هیستوگرام مربوط به آنها

(۱) نمودار قیمت روزانه نرخ ارز- (۲) نمودار بازده قیمت روزانه نرخ ارز- (۳) نمودار هیستوگرام قیمت روزانه نرخ ارز - (۴)نمودار هیستوگرام بازده قیمت روزانه نرخ ارز

اولین گام در راستای تعیین مانایی یک متغیر، مشاهده نمودار سری زمانی آن است. اما ناپایداری برخی از متغیرها از روی نمودارهای آن به صراحت مشخص نمی‌شود. برای این منظور، آزمون‌های ریشه واحد دیکی فولر[1]، فیلیپس-پرون[2] و زیوت-اندروز[3] را بر روی داده‌ها اجرا می‌کنیم. طبق آنچه از

1. Augmented Dickey Fuller (ADF).
2. Phillips-Perron (PP).
3. Zivot-Andrews.

نتایج آزمون‌ها در جدول ۱ به‌دست‌آمده، سری زمانی قیمت نرخ ارز در سطح مانا نیست ولی پس از یک‌بار تفاضل‌گیری هر سه معیار دیکی فولر، فیلیپس–پرون و زیوت–اندروز مانایی این سری را در تمام سطوح معنی‌داری تأیید می‌کنند.

جدول ۱: نتایج آزمون ریشه واحد برای قیمت روزانه نرخ ارز غیررسمی

نام آزمون	آماره آزمون در سطح		آماره آزمون با یک مرتبه تفاضل‌گیری	
	با عرض از مبدأ	با عرض از مبدأ و روند	با عرض از مبدأ	با عرض از مبدأ و روند
دیکی فولر	۰/۷۷۹۸	−۱/۰۵۲۸	−۴۱/۱۷۶۷	−۴۱/۱۷۱۱
فیلیپس–پرون	−۰/۸۲۵۷	−۱/۲۲۲۲	−۴۷/۹۵۵۸	−۴۷/۹۴۸۱
زیوت–اندروز	−۵/۰۲۱۳	−۴/۹۵۰۰	−۲۲/۰۴۴۹	−۲۳/۳۶۷۵

منبع: محاسبات محقق

پس از آنکه مانایی مورد تأیید قرار گرفت و آزمون واریانس ناهمسانی روی داده‌ها دال بر وجود یک همبستگی قابل توجه از مربع نوسانات انجام گرفت، نوبت به تخمین پارامترهای مدل گسسته و به تبع آن مدل پیوسته می‌رسد. از نتایج حاصل از برآورد مشهود است که مدل GARCH(1,1) در گرفتن رفتار خوشه‌بندی نوسان‌پذیری موفق است، زیرا ضرایب برای ARCH و GARCH از لحاظ آماری معنی‌دار هستند. مجموع ضرایب کمتر از یک است، که به این معنی است که فرآیند نوسانات کوواریانس ثابت (مانا) است. بنابراین مدلGARCH(1,1) زمان گسسته یک کاندید مناسب برای مدلسازی واریانس شرطی است. حال که پارامترهای مدل گسسته تخمین زده شدند، به کمک روابط بین مدل گسسته و پیوسته با روش شبه حداکثر درستنمایی پارامترهای مدل پیوسته نیز برآورد شدند. نتایج حاصل از این برآوردها در جداول ۲ و ۳ آورده شده است.

جدول۲: نتایج تخمین پارامترهای مدل گسسته

تخمین پارامترهای مدل GARCH(1,1)		
δ	λ	β
۰/۵۵۵۹	۰/۴۳۵۹	۰/۱۰۷۱

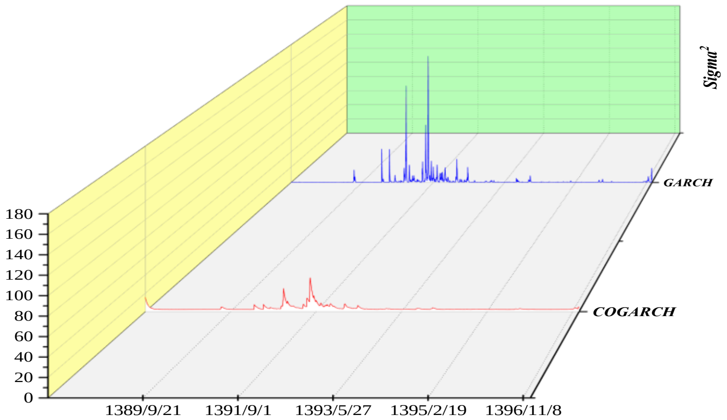
منبع: محاسبات محقق

جدول ۳: نتایج تخمین پارامترهای مدل پیوسته

تخمین پارامترهای مدل COGARCH(1,1)		
$\hat{\varphi}$	$\hat{\eta}$	$\hat{\beta}$
۰/۰۵۳۹	۰/۰۶۲۹	۰/۱۴۹۶

منبع: محاسبات محقق

تخمین نوسانات مدلCOGARCH(1,1) برای بازدهی نرخ ارز، کارایی و مقایسه خطای تخمینی آن با مدل گسسته‌ی GARCH(1,1) بسیار سودمند خواهد بود. لذا برای این منظور، از برآوردگر بازگشتی فرآیند نوسانات برای پارامترهای داده شده‌ی β ، η و φ استفاده می‌کنیم. همچنین به کمک روابط بازگشتی برای فرآیند نوسانات، برآورد بازگشتی فرآیند نوسانات مدل COGARCH(1,1) را همراه با نوسانات شرطی مدل GARCH(1,1) در شکل ۲ نمایش داده‌ایم. همانطور که از شکل ۲ مشخص است، مدل COGARCH(1,1) در گرفتن نوسانات موفق عمل کرده و ارتباط تنگاتنگ دو مدل به خوبی نشان داده شده است.



شکل ۲: نوسانات شرطی مدل‌های GARCH و COGARCH

در نهایت ما به دنبال دستیابی به یک مدل پیوسته بودیم که بتواند نوسانات بازار ارز ایران را به خوبی نشان دهد و داده‌ها به صورت مناسبی بر آن فیت شوند. حال که پارامترهای آن نیز برآورد شده‌اند، می‌خواهیم کارایی آن را در مقایسه با مدل گارچ گسسته بررسی کنیم. برای این منظور از خطای تخمین نوسانات دو مدل که در جدول۴ آمده است، استفاده می‌کنیم. به کمک این خطاها می‌توان قدرت پیش‌بینی دو مدل را مقایسه کرد و مشخص می‌شود که کدام مدل می‌تواند پیش‌بینی بهتری برای نوسان‌پذیری شرطی ارائه دهد.

این خطاها توسط فرمول‌های زیر ارائه می‌شوند:

$$\mathrm{RMSE} = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{n}(\sigma_t - \hat{\sigma}_t)^2}{n}} \qquad \mathrm{MAE} = \frac{\sum_{t=1}^{n}|\hat{\sigma}_t - \sigma_t|}{n}$$

$$\mathrm{MHSE} = \frac{\sum_{t=1}^{n}\left(\frac{\sigma_t}{\hat{\sigma}_t} - 1\right)^2}{n}$$

به‌طوری‌که $\hat{\sigma}_t$ نشان‌دهنده‌ی نوسانات پیش‌بینی شده‌ی GARCH یا COGARCH است و σ_t نشان دهنده‌ی بازده مطلق به‌عنوان یک نماینده برای نوسان واقعی است.

جدول ٤: نتایج خطای تخمین نوسانات

ارقام خطای تخمین نوسانات			
	RMSE	MAE	MHSE
GARCH(1,1)	۱/۷۱۸۷	۱/۰۲۴۹	۱/۸۵۳۵
COGARCH(1,1)	۲/۱۹۰۱	۱/۸۷۸۲	۱/۱۴۴۲

منبع: محاسبات محقق

طبق نتایج به دست آمده در جدول۴، معیارهای تشخیصی MAE و RMSE بیان می‌کنند که مدل GARCH(1,1) پیش‌بینی بهتری را برای نوسان‌پذیری شرطی ارائه می‌دهد زیرا این‌ها خطای کمتری نسبت به مدل زمان پیوسته دارند درحالی‌که معیار MHSE عکس این مطلب را بیان می‌دارد. هرچند RMSE یک ابزار اندازه‌گیری خطای بسیار معروف است اما وقتی خوشه‌بندی نوسانات رخ می‌دهد، برای مقایسه دقیق مدل کافی نیست زیرا خطا را از لحاظ انحراف از میانگین اندازه‌گیری می‌کند. ما MHSE را بیشتر از MAE و RMSE ترجیح می‌دهیم به این دلیل که MHSE خطا را به عنوان خطای نسبی متوسط اندازه‌گیری می‌کند و دوره‌های نوسانات بالا و پایین را در نظر می‌گیرد.

نتیجه‌گیری

نرخ ارز قیمت یک واحد پول رایج برحسب پول رایج دیگر است، لذا مقدار لازم از یک واحد پولی که می‌تواند مقداری از واحد پولی دیگر را خریداری کند، همان نرخ ارز است. بنابراین نرخ مزبور می‌تواند یک عامل تبدیل باشد. نرخ ارز قیمت نسبی پول خارجی به پول داخلی است که به عنوان یکی از عوامل کلان اقتصادی، همواره مورد توجه جامعه‌ی اقتصادی و مالی بوده است. در واقع این نرخ بیانگر شرایط اقتصادی کشور بوده و عاملی برای مقایسه‌ی اقتصاد ملی با اقتصاد سایر ملل است. همچنین نوسانات این نرخ بر رشد تولید و تقاضای کشور و برخی متغیرهای دیگر مؤثر است؛ به‌صورتی‌که امروزه بحث بر سر میزان مطلوب و بهینه نوسانات صورت می‌گیرد. ازاین‌رو، انتخاب سیاست‌های ارزی با توجه به شرایط اقتصادی، به گونه‌ای که منجر به استقرار سیستم مناسب نرخ ارز شود، نه تنها می‌تواند راهی برای نیل به رشد و توسعه باشد بلکه به نوبه‌ی خود بر عوامل کلان دیگر نیز اثرگذار خواهد بود.

در این بین، در ایران به‌دلیل اینکه عرضه ارز در انحصار دولت و بانک مرکزی است، به ناچار ارز بر اساس عرضه و تقاضا تعیین نمی‌شود و ازاین‌رو، قیمت ارز نشانه‌ای از توان واقعی اقتصاد ایران نبوده و مجموعه‌ای از قیمت‌های مصنوعی را به اقتصاد تحمیل می‌کند.

لذا طبق مطالب بیان شده، پیش‌بینی نوسانات نرخ ارز و به تبع آن مدلسازی این نوسانات، برای گروه‌های مختلف مالی و اقتصادی جهت ارزیابی ریسک ارز، افزایش سود و برنامه‌ریزی استراتژیک مالی حائز اهمیت خواهد بود. ما در این مقاله تلاش کردیم با بهره‌گیری از یک معادله دیفرانسیل تصادفی تحت فرایند لوی موسوم به مدل COGARCH(1,1) ، مدلسازی برای نوسانات بازار ارز ایران انجام داده و کاربردی نوین از مدل‌های پیوسته را ارائه دهیم. در این راستا، ابتدا پارامترهای مدل گسسته‌ی GARCH(1,1) را برآورد کردیم تا مطمئن شویم مدل GARCH(1,1) کاندیدی مناسب برای مدلسازی واریانس شرطی می‌باشد. نتایج حاصل از برآورد تأییدکننده این مطلب هستند و از مدل GARCH(1,1) گسسته به عنوان نسخه گسسته‌سازی شده برای به‌دست آوردن نسخه پیوسته استفاده می‌کنیم. سپس به تخمین پارامترهای مدل پیوسته می‌پردازیم. آنچه از مقایسه نوسانات دو مدل گسسته و پیوسته به دست می‌آید این است که مدل پیوسته نیز به خوبی نوسانات را ضبط می‌کند و نوسانات بازار ارز ایران از این مدل تبعیت می‌کنند. لذا مدل COGARCH(1,1) نتایج بسیار خوبی در مدلسازی سری بازده نرخ ارز ارائه داده است، زیرا این مدل ویژگی‌های فرآیند نوسانات را به دست می‌آورد و برآوردهای نوسان‌پذیری شرطی بهتری نسبت به همتایان زمان گسسته‌اش انجام می‌دهد. همچنین مزیت اصلی مدل COGARCH(1,1) نسبت به مدل‌های نوسانات تصادفی دو عاملی این است که از یک فرآیند یک لایه‌ی لوی گرفته شده است؛ بنابراین مکانیزم بازخورد بین قیمت و فرآیندهای نوسانی از بین نرفته است.

برای اینکه دریابیم کدام یک از دو مدل بهتر می‌توانند ویژگی‌های بازار ارز ایران را نشان دهند، از مقایسه‌ی خطای دو مدل استفاده کردیم تا کارایی و قدرت پیش‌بینی آنها را باهم بسنجیم. از این رو با سه ابزار اندازه‌گیری خطای RMSE ، MAE و MHSE خطای هر دو مدل را به دست آورده و مقایسه نمودیم. به دلیل ویژگی خوشه‌بندی نوسانات، معیار MHSE برای اندازه‌گیری خطا مناسب‌تر است. لذا طبق نتایج به دست آمده، معیار MHSE ، مدل COGARCH(1,1) را مدلی مناسب‌تر برای پیش‌بینی نوسان‌پذیری شرطی معرفی می‌کند.

منابع

ابونوری، اسمعیل، خانعلی‌پور، امیر و عباسی، جعفر. (۱۳۸۸). «اثر اخبار بر نوسانات نرخ ارز در ایران: کاربردی از خانواده ARCH»، *فصلنامه پژوهشنامه بازرگانی*، شماره ۵۰، ۱۰۱–۱۲۰.

امامی، کریم، و ملکی، الهه. (۱۳۹۳) . «بررسی اثر نوسانات نرخ ارز بر اشتغال در ایران»، *فصلنامه علوم اقتصادی*، سال ۸، شماره ۲۶ ، ۹۵–۱۱۲.

پدرام، مهدی. (۱۳۹۱). «اثر نوسانات نرخ ارز بر روی نوسانات بازار سهام ایران»، *فصلنامه علمی پژوهشی دانش مالی تحلیل اوراق بهادار*، شماره ۱۵، ۸۳–۹۶ .

علیپور، شیرین، عزیززاده، فاطمه، و منطقی، خسرو. (۱۳۹۷). «مدل‌سازی بازده مالی با استفاده از مدل «مارکوف ترکیبی متغیر با زمان نرمال–گارچ» ». *فصلنامه علمی پژوهشی دانش مالی تحلیل اوراق بهادار*، شماره ۳۷ ، ۹۱–۱۰۲.

فبوزی، فرانک؛ مودیلیانی، فرانکو و فری، مایکل. (۱۹۹۴). *مبانی بازارها و نهادهای مالی*، ترجمه عبده تبریزی حسین، نشر پیشبرد، تهران، چاپ سوم ۱۳۸۹ .

فلاح‌پور، سعید. و هداوند میرزایی، امید. (۱۳۹۵). «پیش‌بینی نوسانات بازده طلا با استفاده از مدل گارچ ناپارامتری و مقایسه با مدل های گارچ پارامتری». *مجله مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار*، شماره۲۶، ۱۶۱–۱۸۱.

مطهری، محب اله، لطفعلی پور، محمدرضا، و احمدی شادمهری، محمدطاها. (۱۳۹۴). «ارائه یک الگوی هشدار پیش از وقوع نوسانات ارزی در بازار ارز ایران: روش مارکوف سوئیچینگ گارچ»، *فصلنامه نظریه‌های کاربردی اقتصاد*، سال دوم، شماره ۴، ۷۱–۹۲.

Allen, E. (2007). *Modeling with Itô stochastic differential equations (Vol. 22)*. Springer Science & Business Media.

Bahmani-Oskooee, M., & Gelan, A. (2018). "Exchange-rate volatility and international trade performance: Evidence from 12 African countries". *Economic Analysis and Policy*, 58, 14–21.

Barndorff-Nielsen, O. E., Shephard, N. (2001). "Non-Gaussian Ornstein–Uhlenbeck-based models and some of their uses in financial economics". *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, 63(2), 167-241.

Bayracı, S., Ünal, G. (2014). "Stochastic interest rate volatility modeling with a continuous-time GARCH (1,1) model". *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 259, 464-473.

Drost, F. C., Werker, B. J. (1996). "Closing the GARCH gap: Continuous time GARCH modeling". *Journal of Econometrics*, 74(1), 31-58.

Granzer, M. (2013). *Estimation of COGARCH models with implementation in R. Technical University of Munich*. Master thesis from Marlit Granzer.

Kallsen, J., Vesenmayer, B. (2009). "COGARCH as a continuous-time limit of GARCH (1, 1)". *Stochastic Processes and their Applications*, 119(1), 74-98.

Klüppelberg, C., Lindner, A., & Maller, R. (2004). "A continuous-time GARCH process driven by a Lévy process: stationarity and second-order behavior". *Journal of Applied Probability*, 41(3), 601-622.

Lahmiri, S. (2017). "Modeling and predicting historical volatility in exchange rate markets". *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 471, 387-395.

Merton, R. C. (1973). “Theory of rational option pricing”. *Theory of Valuation*, 229-288.

Nelson, D. B. (1990a). “ARCH models as diffusion approximations”. *Journal of econometrics*, 45(1-2), 7-38.

Nelson, D. B. (1990b). “Stationarity and persistence in the GARCH(1,1) model”. *Econometric theory*, 6(3), 318-334.

Nie, A. (2018). *A Continuous Time GARCH (p,q) Process with Delay*. arXiv preprint arXiv:1804.08824.

Thorlie, M. A., Song, L., Wang, X., & Amin, M. (2014). “Modelling exchange rate volatility using asymmetric GARCH models (evidence from Sierra Leone)”. *International Journal of Science and Research*, 3(11), 1206-1214.

Applied Economics Studies, Iran (AESI) 101

Volume 8, Number 32, Wintre 2020

Investigation of Efficiency of Stochastic Differential Equations Driven by Levy Process in Modeling of Exchange Rate Volatility (COGARCH Approach)

Rafei, M.[1*], Karimi shoushtari, M.[2]

Abstract

Considering the price of the exchange rate and its volatility plays a significant role in financial decisions and economic transactions affected by large and small economic groups. In this study, we have tried to provide continuous modeling for exchange rate data in Iran with the support of a stochastic differential equation driven by the Levy process (that named continuous GARCH model) and check out the fitting exchange rate volatility on this model. Accordingly, we use the daily data of the unofficial exchange rate (the value of the US dollar against the Iranian Rial in the free market) from March 2009 to March 2018. We also challenge the performance of the models with time-varying volatility under the continuous features in comparison to the discrete GARCH model. Finally, according to investigating the efficiency of this model coinciding with the results of the measurement error criterion, the preference of the new continuous model is expressed.

Keywords: Stochastic Differential Equations, Levy Process, GARCH Model, Continuous GARCH Model, Exchange Market

Jel Classification: C22 ، C29 ، C58 ، C59 ، E44

1. Assistant Professor, Department of Economics, Kharazmi University **Email:** m.rafei@khu.ac.ir
2. MSc Financial Mathematics, Kharazmi University **Email:** karimi.sh69@gmail.com