فصلنامـــه دانش سرمایه‌گـــذاری
سال اول/ شماره اول/ بهار ۱۳۹۱

فرآیندهای موجکی ایستای موضعی و کاربرد آن در تحلیل شاخص بهای مصرف کننده

بیستون حسینی
مربی دانشگاه جامع علمی کاربردی
bistoon.hosseini@gmail.com

رضا پورطاهری
استادیار دانشکده اقتصاد، دانشگاه علامه طباطبایی
taher121@yahoo.com

تاریخ دریافت: ۹۱/۱/۱۸ تاریخ پذیرش: ۹۱/۳/۲۴

چکیده

در این مقاله به معرفی مدل جدید فرایندهای *موجکی ایستای موضعی*[۱] پرداخته می‌شود که بر مبانی بازسازی توابع توسط موجک‌ها استوار است. این مدل کلاس جدیدی از سری‌های زمانی را ایجاد می‌کند که می‌توانند رفتار ناایستایی داشته باشند. خواهیم دهید که مدل LSW، ساختاری شبیه به مدل میانگین متحرک دارد. در انتها با استفاده از این مدل، داده‌های سری زمانی *شاخص بهای مصرف کننده*[۲] (CPI) کشور را در بازه زمانی مشخصی بررسی می‌شود.

واژه‌های کلیدی: موجک، موجک‌های بدون تلفات گسسته[۳]، فرایندهای ایستای موضعی، فرایندهای موجکی ایستای موضعی، شاخص بهای مصرف کننده.

۱- مقدمه

با گسترش تکنیک‌های ریاضی و آماری،ساختن مدل‌های جدید، پیشرفت قابل توجهی داشته و البته تصمیم‌گیری درباره پذیرش بهترین مدل نیز سخت‌تر شده است. در این میان مدل‌بندی و تحلیل پدیده‌های وابسته،از جمله بحث‌برانگیزترین مباحث در علم آمار است. در سال‌های اخیر با گسترش تئوری موجک‌ها، پژوهشگران به بسط مدل‌های فوریه سری‌های زمانی به مدل‌های بر پایه موجک پرداخته‌اند. در واقع سری‌های فوریه برای موجک‌ها مانند ردپایی در برف هستند که راه را برای مباحثی که موجک‌ها می‌توانند در آن وارد شوند،نشان می‌دهند.تحلیل طیفی سری‌های زمانی که ریشه در بازنویسی سیگنال‌ها بر پایه توابع سینوسی دارد، از ردپاهایی است که پژوهشگران شاخه موجک را برای ابداع مدل‌های کارامد راهنمایی می‌کند.

فرض کنید می‌خواهید یک سیگنال را در یک بازه زمانی مشخص مطالعه کنید. می‌توانید با یک نگاه به تمام بازه، تابع را بررسی کنید و یا اینکه به تحلیل سیگنال در بازه‌های کوچک‌تر بپردازید. برای بررسی‌های دقیق احتیاج به وسیله‌ای مانند ذره‌بین داریم که قسمت‌های کوچک را به ما نشان دهد و در کنار آن با حرکت دست می‌توانیم ذره‌بین را به قسمت‌های مختلف بازه ببریم. موجک‌ها از دو ابزار ذره‌بین و دست برای تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها بهره می‌گیرند. در واقع ابتدا میزان دقت با انتخاب نوع ذره‌بین مشخص می‌گردد (مقیاس) و سپس با حرکت دست تمام قسمت‌های سیگنال بررسی می‌شود (انتقال).

با آنکه هنوز سری‌های زمانی ایستا برای اغلب مدل‌ها، مبنا هستند اما استفاده از آنها در تحلیل سری‌های زمانی ناایستا ما را با نتایج گمراه کننده مواجه می‌کند. این موضوع در سری زمانی حوزه اقتصاد و مالی بارزتر است. برای رفع این مشکل، تحقیقات بسیاری صورت گرفته است که مدل‌های ARCH و GARCH از نتایج برجسته این حوزه پژوهشی است. اخیراً استفاده از موجک‌ها در تحلیل طیفی سری‌های زمانی رو به گسترش است و نتایج ممتازی برای استفاده کارشناسان علوم اقتصادی و مهندسان پردازش سیگنال انتشار یافته است. این مقاله سعی در معرفی یکی از این مدل‌ها و اعمال آن بر سری‌های زمانی اقتصادی واقعی دارد، لکن با وجود تحلیل نمونه‌ای از داده‌های اقتصادی (سری زمانی شاخص بهای مصرف کننده)، تمرکز آن بر ارائه‌ای مناسب از مبانی آماری و ریاضی مدل مورد نظرخواهد بود.

۲- مبانی نظری تحقیق

نیسن[۴] و همکاران (۲۰۰۰) با ارائه فرایندهای موجکی ایستای موضعی (LSW)،مدل‌بندی رده‌های خاصی از سری‌های زمانی ناایستا را با پایه‌های موجکی معرفی کردند. فرایندهای LSW دنباله کارهای *دالهوس*[۵] (۱۹۹۷) برای توسعه مدل‌های *نوسانی*[۶] است که توسط*سیلورمن*[۷] (۱۹۵۷) وپریستلی[۸] (۱۹۶۵) معرفی شده بودند. مدل‌های ارائه شده توسط دالهوس بر پایه فوریه و مدل‌های نیسن و همکاران با همان تکنیک استفاده شده توسط دالهوس و البته برپایه موجک هستند.

۳- مدل‌ها و ابزارهای تحقیق

۳-۱- سری‌های زمانی ایستا

به طور شهودی سری زمانی ایستا، سری است که ویژگی‌های آماری آن با تغییر زمان، تغییر نکند. به طور رسمی‌تر یک سری زمانی ایستای اکید است اگر توزیع توأم $(X_{t_1},\dots,X_{t_n})$ همان توزیع توأم $(X_{t_1+\tau},\dots,X_{t_n+\tau})$ برای هرt_i، n و τ، باشد.

شرط ایستایی اکید بسیار سخت‌گیرانه است و در اغلب مسائل عملی، برقرار نیست. یک سری زمانی ایستای مرتبه دوم یا ایستای ضعیف خوانده می‌شود اگر، $\mathbb{E}(X_t)=\mu$ و اتوکوواریانس $\gamma(\tau)=\mathrm{Cov}(X_t,X_{t+\tau})$ فقط تابعی از τ باشد.از این پس منظور ما از ایستا بودن سری، ایستای مرتبه دوم است. شرط آخر باعث می‌شود واریانس مقدار ثابتی باشد. $\gamma(\tau)$ توسط اتوکوواریانس نمونه،$c(\tau)$، که با پیچش مقادیر نمونه$\{X_t\}_{t=1}^{T-\tau}$ با مقادیر تأخیر یافته $\{X_{t+\tau}\}_{t=1}^{T-\tau}$ به دست می‌آید، براورد می‌شود.Tدر اینجا حجم نمونه یا همان تعداد مشاهدات است. اتوکوواریانس اندازه‌ای است که میزان ارتباط خطی بین مقادیر x_t و $x_{t+\tau}$ را بیان می‌کند؛ از این‌رو به عنوان اندازه‌ای از درجه وابستگی‌های *خطی درونی*[۹] مطرح است.

فرایند تصادفی محض[۱۰]$\{Z_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$، مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی هم‌توزیع و مستقل است. برای مثال متغیر تصادفی مورد نظر می‌تواند به صورت $Z_t\sim N(0,\sigma^2)$ باشد. با استفاده از فرایند محض، رده مهمی از فرایندهای تصادفی تعریف می‌شود. X_t یک فرایند اتورگرسیومیانگین متحرک[۱۱] (ARMA) از مرتبه (p,q) است، اگربرای هرp و q طبیعی، نمایشی به صورت زیر داشته باشد:

$$X_t = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i X_{t-i} + Z_t + \sum_{j=1}^{q} \beta_j Z_{t-j}$$

مدل ARMA یکی از رایج‌ترین مدل‌ها در سری‌های زمانی است که تحت شرایط مناسبی ایستا خواهد بود و تحلیل‌های موجود در مورد آن با فرض ایستا بودن مدل ارائه شده است. اگر مجموعه ضرایب $\{\alpha_i\}_{i=1}^{p}$ صفر باشد، مدل میانگین متحرک (MA) و اگر مجموعه ضرایب $\{\beta_i\}_{i=1}^{q}$ صفر باشد، مدل اتورگرسیو (AR) خواهیم داشت. مدل MA بر ترکیب خطی از تغییرات ناهمبسته در زمان‌های قبل تاکید دارد و در نقطه مقابل آن مدل ARبر ترکیب خطی از مقادیر فرایند در زمان‌های قبل نظر داردکه عموماً وابسته هستند.

اگر سری زمانی $\{X_t\}_{t\epsilon\mathbb{Z}}$ یک فرایند تصادفی ایستا باشد، آنگاه نمایشی به صورت زیر خواهد داشت:

$$X_t = \int_{-\pi}^{\pi} A(\omega)\exp(i\omega t)d\xi(\omega) \quad (1)$$

که در آن $A(\omega)$*دامنهٔ*[۱۲] فرایند و $d\xi(\omega)$فرایندی با نموهای متعامدیکه است. فرایند X_tرا می‌توان به عنوان جمع (انتگرال) گردایه‌ای از توابع سینوسی، $\exp(i\omega t)$، در فرکانس‌های مختلف $\omega\epsilon(-\pi,\pi)$ در نظر گرفت که میزان نوسان فرایند در فرکانس ω، با $A(\omega)$تنظیم می‌شود. اگر $A(\omega)$برای فرکانس مشخصی مانند ω^* بزرگ‌تر از سایر $A(\omega)$هاباشد، آنگاه یک نوسان (تصادفی) در فرکانس ω^*، به صورت ویژگی غالبی ار نظر میزان نوسان در تحققی از فرایند، ظاهر می-شود(پریستلی (۱۹۸۳)).

نکته مهم در فرایندهای ایستا و مدل (۱) این است که $A(\omega)$به زمان بستگی ندارد؛ یعنی برای یک فرکانس مشخص، دامنه نوسان در کل زمان یکسان است. برای بسیاری از فرایندها شرط ایستا بودن برقرار نیست و مدل (۱) نمی‌تواند پاسخگو باشد. یکی از راه‌های توسعه دادن این مدل جایگزین کردن $A(\omega)$با تابعی وابسته به زمان، مانند $A_t(\omega)$است. این ایده توسط پریستلی (۱۹۶۵) و دالهوس (۱۹۹۷) با معرفی مدل *زمان ـ فرکانس*[۱۳] رواج یافت.

۳-۲- سری‌های زمانی موجکی ایستای موضعی

فرایندی تصادفی را در نظر بگیرید که ناایستا باشد ولی در عوض برای هر نقطه‌ای از فرایند بتوان بازهٔ زمانی هر چند کوچک در نظر گرفت که در آن بازه فرایند ایستا باشد. این فرض باعث می‌شود نوسان‌هایی که فرایند را در کل ناایستا می‌کند کنترل شود و تغییرات سری ملایم‌تر باشد. این ایدهبرخی از فرایندهای ناایستا را با فرایندهای ایستا در یک دسته قرار می‌دهد.

ایده فوق توسط پریستلی (۱۹۶۵) و با ایجاد تغییرات لازم در نمایش فوریهمدل (۱) معرفی شد وتوسط دالهوس (۱۹۹۷) توسعه یافت. رهیافت چند مقیاسی برای سری‌های زمانی ایستای موضعی توسط نیسن و همکاران (۲۰۰۰) با جایگزین کردن دستگاه موجک‌های گسسته بدون تلفات به جای دستگاه توابع فوریه $\{\exp(i\omega t), \omega\epsilon(-\pi,\pi)\}$ در ارائه مدل زمان ـ مقیاس معرفی گردید. درباره مدل‌های بر پایه موجک، در مقایسه با مدل‌های بر پایه فوریه می‌توان گفت:

۱) فرایندهای ایستای موضعی که بر پایه موجک‌ها هستند، برای مدل‌بندی و تحلیل سری-های زمانی که تغییرات طیفی زمان ـ مقیاس دارند، مناسب ظاهر شده‌اند.

۲) بیشتر توسعه‌هایی که برای سری‌های ناایستا ارائه شده است، شامل بهبود بخشیدن نمایش فوریه در مدل (۱) است. مدل‌های برپایه موجک تایید می‌کنند که برای فرایندهای ناایستا الزاماً نباید از فوریه استفاده کرد و ممکن است سایر تابع‌های پایه، مفیدتر باشند.

۳) مدل برپایه موجک براساس اصل سادگی مدل‌ها ساخته شده‌اند و در آن برخلاف مدل-های برپایه فوریه، لزومی به آشنایی با مفاهیم پیچیده‌ای مانند انتگرال‌های تصادفی نیست.

۳-۳- موجک‌های بدون تلفات گسسته

نیسن و همکاران (۲۰۰۰) نسخه گسسته موجک‌های دابیچز را با عنوان موجک‌های گسسته، برای بازسازی سیگنال‌های گسسته، ساختند. این موجک‌ها، همان نقش موجک‌های دابیچز را در توابع با دامنه پیوسته بازی خواهند کرد. موجک‌های گسسته $\psi_j = (\psi_{j,0}, \dots, \psi_{j,(N_{j-1}-1)})$ با تکیه‌گاه فشرده و به طول N_j برای مقیاس $j \leq -1$ با فرمول‌های زیر به دست می‌آیند:

$$\psi_{-1,n} = \sum_k g_{n-2k}\delta_{0,k} = g_n \qquad \text{for} \;\; n = 0, \dots, N_{-1} - 1$$

$$\psi_{(j-1),n} = \sum_k h_{n-2k}\psi_{j,n} \qquad \text{for} \quad n = 0, \dots, N_{j-1} - 1$$

$$N_j = (2^{-j} - 1)(N_h - 1) + 1$$

که در آن $\{h_k\}$ و $\{g_k\}$ فیلترهای استفاده شده در ساختن *تبدیلات موجک گسسته*[۱۴] (DWT)، $\delta_{0,k}$ دلتای کرونکر و N_h تعداد عناصر غیر صفر مجموعه $\{h_k\}$ است. در واقع این فرمول از معکوس DWT نتیجه شده است. به عنوان مثال موجک‌های گسستههار در مقیاس‌های ۱- و ۲- به صورت زیر هستند:

$$\psi_{-1} = (g_0, g_1) = (1, -1)/\sqrt{2}$$
$$\psi_{-2} = (h_0g_0, h_1g_0, h_0g_1, h_1g_1) = (1,1,-1,-1)/2$$

موجک‌های گسسته دقیقاً همان بردارهای ساخته شده توسط الگوریتم خوشه‌ای دابیچز است که برای ساختن تقریب‌های گسسته از موجک‌های زمان پیوسته در مقیاس‌های نازک‌تر پی‌درپی استفاده می‌شوند (دابیچز (۱۹۹۲)). استفاده از موجک‌های گسسته موجب می‌شود در به دست آوردن ضرایب موجک نازک‌ترین مقیاس، برای ساختن تقریبی از توابع که نسخه‌ای گسسته از آنها را در اختیار داریم، دیگر به انتگرال‌گیری احتیاج نداشته باشیم.

موجک‌های گسسته بدون تلفات، اجازه می‌دهند موجک‌های گسسته معمولی در هر نقطه زمانی و هر مقیاسی، با فرمول $\psi_{j,k}(\tau) = \psi_{j,(k-\tau)}$ظاهر شوند. در مقایسه با موجک‌های گسسته معمولی، برای حالت بدون تلفات، تعداد اعضای بردار ψ_jدر مقیاس‌های ضخیم‌تر به مراتب بیشتر از مقیاس‌های نازک‌تر است. نکته کلیدی در موجک‌های بدون تلفات گسسته این است که آنها می‌توانند به هر مکانی منتقل شوند (توسط τ) اما در موجک‌های گسسته معمولی انتقال‌های با اندازه 2^{-j} قابل انجام است.

۳-۴- فرایندهای موجکی ایستای موضعی (LSW)

فرایند $LSW\{X_{t,T}\}_{t=0,1,..,T-1}$، $T = 2^J \geq 1$، فرایند دو اندیسه‌ای است که نمایش زیر را دارد:

$$X_{t,T} = \sum_{j=-J}^{-1} \sum_{k} w_{j,k;T}\, \psi_{j,k}(t) \xi_{j,k} \qquad (2)$$

که در آن $\{\xi_{j,k}\}$ دنباله نموهای متعامدیکه تصادفی، $\{\psi_{j,k}(t) = \psi_{j,(k-t)}\}_{j,k}$دستگاه موجک‌های گسسته بدون تلفات و $\{w_{j,k;T}\}$مجموعه دامنه‌هاست. مدل (۲) در نگاه اول پیچیده به نظر می‌رسد؛ اما در واقع بسیار ساده است. نمایش فوق صرفاً سری زمانی $X_{t,T}$ را به صورت ترکیب خطی از توابع نوسانی $(\psi_{j,k})$ با دامنه‌های تصادفی $(w_{j,k;T}\xi_{j,k})$ است؛که معادل چندمقیاسی ساختن فرایندهای ایستا در مدل (۱) است.

نیسن و همکاران (۲۰۰۰) سه شرط را بر کمیت‌های مدل (۲) قرار دادند. *شرط اول* اینکه $\mathbb{E}\left(\xi_{j,k}\right) = 0$ و در نتیجه میانگین $X_{t,T}$ صفر خواهد بود. می‌دانیم که کاستن یک عدد ثابت در تحلیل سری‌های زمانی تغییری حاصل نمی‌کند؛ لذا شرط فوق با حذف میانگین فرایند، برای فرایندهایی که میانگین غیرصفر دارند و یا تفاضل‌گیری از فرایند، برای فرایندهایی که میانگین آنها به وسیله یک روند وابسته به زمان است، برقرار می‌گردد. *شرط دوم* این است که دنباله نموهای متعامدیکه، ناهمبسته باشند؛ یعنی $\mathrm{Cov}\left(\xi_{j,k}, \xi_{l,m}\right) = \delta_{j,l}\delta_{k,m}$.

نمایش LSW در مدل(۲) ویژگی وابسته به زمان بودن فرایند را داراست. در نگاه اول دامنه‌های $w_{j,k;T}$ فرایند، مستقیماً به زمان وابسته نیستند. با این حال به kوابسته هستند و برای زمان معلوم t، موجک گسسته $\psi_{j,k}(t)$، تکیه‌گاه فشرده‌ای در اطراف t دارد؛ بنابراین اجازه می‌دهد فقط برخی از $w_{j,k;T}$ها به tنزدیک باشند. سایر $w_{j,k;T}$ها نیز برای سایر tها به همین صورت اجازه حضور دارند. بنابراین دامنه‌ها در مدل LSW به طور غیر مستقیم به زمان وابسته هستند و این موضوع وجه تمایز اصلی مدل (۲) نسبت به (۱) است. این موضوع کاملاً شبیه به نقش *هسته*[۱۵]در مبحث هموارسازی توابع است.

ویژگی‌های آماری $X_{t,T}$ در هر مقیاس j کاملاً به سرعت تغییر شکل $w_{j,k;T}$ها به عنوان تابعی از k، بستگی دارد. برای کنترل سرعت تغییر شکل $w_{j,k;T}$ها با جلوگیری از انحراف خیلی زیاد آنها، نیسن و همکاران (۲۰۰۰) *شرط سوم*را به صورت زیر قرار دادند. فرض کنید برای هر $j \leq -1$ تابع $W_j(z)$ وجود داشته باشد؛ به طوری که $\sum_{j=-\infty}^{-1}\left|W_j(z)\right|^2 < \infty$به طور یکنواخت در $z\epsilon(0,T)$ و

دنباله ثابت $\{C_j\}$وجود داشته باشد به قسمی که ابتدا شرط $\sum_{j=-\infty}^{-1} C_j < \infty$ و در آخر رابطه زیر نیز برقرار باشد:

$$\sup_{k=0,..,T-1} \left| w_{j,k;T} - W_j(k) \right| \leq C_j/T$$

شرایط همواری که بر روی $W_j(z)$ اعمال شده است از نوسان‌های خیلی بزرگ سری جلوگیری می‌کند و با این شرط سرعت تغییر شکل $w_{j,k;T}$ها کنترل می‌شود. اگر میانگین سری زمانی تغییرات شدیدی از بازه کوچک به بازه همسایه‌اش نداشته باشد، شرط سوم با وجود فرضیات زیاد، به سادگی برقرار می‌شود.

نیسن و همکاران (۲۰۰۰) برای آنکه بتوانند براوردهای مفیدی از پارامترهای مدل ارائه دهند،از تغییرات سریع ویژگی‌های آماری $X_{t,T}$ جلوگیری می‌کردند. در فرایند با تغییرات آهسته‌تر، مجموعه بزرگ‌تری از مشاهدات می‌توانند برای به دست آوردن براورد W_j سازنده فرایند، سهیم باشند. برای درک شهودی بهتر،فرض کنید فرایندی مانند X_t داشته باشیم که در آن$\sigma_t^2 = \mathrm{Var}(X_t)$و برای هر t،σ_t^2متفاوت باشد.در این صورت برای براورد واریانس فرایند در هر زمان فقط یک مشاهده داریم؛ اما اگر σ_t^2با وجود وابستگی بهt،بسیار آرام تغییر کند، آنگاه می‌توانیم علاوه بر X_tاز مقادیر همسایه-اش برای به دست آوردن براوردهای بهتری از σ_t^2بهره بگیریم (نیسن و وان ساچز (۱۹۹۹) را ببینید).

مثال ۱ (فرایندهای MA هار). نیسن و همکاران (۲۰۰۰) فرایندهای میانگین متحرک هار، $\left\{X_t^{(r)}\right\}$ از مرتبه $2^r - 1$ را معرفی کردند. ساده‌ترین فرایند MA هار با $r = 1$ به صورت زیر است:

$$X_t^{(1)} = 2^{-1/2}(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})$$

که $\{\varepsilon_t\}$ فرایند تصادفی محض با میانگین صفر و واریانسσ^2 است. فرایند $X_t^{(1)}$، یک فرایند LSW است که $w_{j,k;T}$ها و $W_j(z)$ها برای $j = -1$ (در تمام حالات k و z) برابر یک هستند و در سایر jها برابر صفرند، $\xi_{-1,k} = \varepsilon_k$و $\psi_{j,k}(t)$ها موجک‌های گسسته بدون تلفات هار هستند. فرایند MA هار مرتبه دوم به صورت زیر است:

$$X_t^{(2)} = (\varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} - \varepsilon_{t-2} - \varepsilon_{t-3})/2$$

که مشابه حالت قبل،یک فرایند LSW است.

در مدل (۱) برای سری‌های زمانی ایستا، $A(\omega)$ شدت نوسانات سینوسی را در فرکانس ω کنترل می‌کند. آماره مربوط به $A(\omega)$ طیف است که با فرمول $f(\omega) = |A(\omega)|^2$ تعریف می‌شود. به طور مشابه کمیتی برای فرایند LSW تعریف شده است. *طیف موجکی تکاملی*[۱۶] (EWS)، $S_j(z)$، با رابطه:

$$S_j(z) = \left|W_j(z)\right|^2$$

برای $j = -1, -2, \ldots, -J(T)$ و $z \epsilon (0, T)$ تعریف می‌شود. با استفاده از شرط سوم می‌توان نتیجه گرفت که برای هر $z \epsilon (0, T)$، $S_j(z) = \lim_{T \to \infty} w_{j,[z];T}^2$ و در نتیجه رابطه $\sum_{j=-\infty}^{-1} S_j(z) < \infty$ به طور یکنواخت در $z \epsilon (0, T)$ برقرار است.

هر EWS یک فرایند LSW را به صورت یکتا مشخص می‌کند (نیسن و همکاران (۲۰۰۰) قضیه ۱). EWS تعیین می‌کند که چه مقدار توان در مختصات مربوط به مقیاس j و مکان $z \epsilon (0, T)$، توزیع شده است.

مثال ۲ (نیسن و همکاران (۲۰۰۰). فرض کنید $T = 1024 = 2^{10}$ باشد و $S_j(z)$ به صورت زیر تعریف شود:

$$S_j(z) = \begin{cases} \sin^2(4\pi z) & j = -6 \text{ و } z \epsilon (0,1024) \\ 1 & j = -1 \text{ و } z \epsilon (800,900) \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

نمودار EWS فوق در شکل ۱ و شبیه‌سازی تحققی از آنرا در شکل ۲ می‌بینید. مقدار EWS در سطح ۶- به صورت یک موج سینوسی است که باعث نوسان‌های کلی در سری شبیه‌سازی شده، می‌شود. این موضوع به این علت رخ می‌دهد که در سطح ۶- داده‌ها به صورت $2^{-(-6)} = 64$ تایی مورد توجه قرار می‌گیرند (در حالت کلی در سطح jام داده‌ها در گروه‌هایمجاورهم 2^{-j} تایی تحلیل می‌شوند). در سطح ۱- همانگونه که در شکل ۱ می‌بینید EWS مورد نظر در زمان‌های ۸۰۰ الی ۹۰۰ مقدار ۱ را می‌گیرد و در سایر نقاط برابر صفر است. در سطح ۱- داده‌ها به صورت ۲ تایی مطالعه می‌شوند؛ لذا انتظار داریم این وضعیت باعث ایجاد نوسانات شدید در فاصله عنوان شده، گردد که البته این وضعیت در نمودار شکل ۲ مشهود است.

در فرایندی معکوس اگر براورد EWS از یک سری‌زمانی واقعی داشته باشیم، می‌توان گفت در سطوحنزدیک به ۱- هر گونه نوسان در EWS نشان‌دهنده نوسان‌های متعدد در بازه کم، و نوسان

در سطوح بالاتر (منفی‌تر) EWS، بیانگر وجود شدت نوسان در بازه‌های بزرگ است. به عنوان مثال اگر سری‌زمانی با داده‌های روزانه داشته باشیم، نوسان در سطح ۱- نشان‌دهنده نوسان‌های روزانه و نوسان در سطوح بالاتر، نشان دهنده نوسان در میانگین‌های چند روزه مانند هفتگی، ماهانه و ... است.

۴- نتایج تحقیق

۴-۱- برآورد EWS

یکی از مباحث مهم در تحلیل سری‌های زمانی، براورد پارامترهای معرفی شده در مدل است. نیسن و همکاران (۲۰۰۰) *دوره‌نگار موجکی اولیه*[۱۷] را به عنوان ابزاری برای براورد EWSدر سری‌های زمانی LSWمعرفی کردند.

به طور شهودی مدل (۲) نشان می‌دهد که X_t تبدیلات معکوس ضرایب$w_{j,k;T}\xi_{j,k}$است. از این رو در اولین قدم برای براورد $S_j(z)$به صورت معکوس عمل کرده و تبدیل موجک $\{x_t\}$را به دست می‌آوریم. البته چون در مدل (۲) از تبدیل بدون تلفات استفاده شده است، به تبدیل بدون تلفات از $\{x_t\}$احتیاج داریم. نکته دیگر آن است که چون$S_j(z)$مربع $W_j(z)$است، آن را باید به کمک مربع ضرایب موجک بدون تلفات$\{x_t\}$براورد کنیم.

نیسن و همکاران (۲۰۰۰) ضرایب موجک بدون تلفات تجربی x_tرا به صورت تعریف کردند.

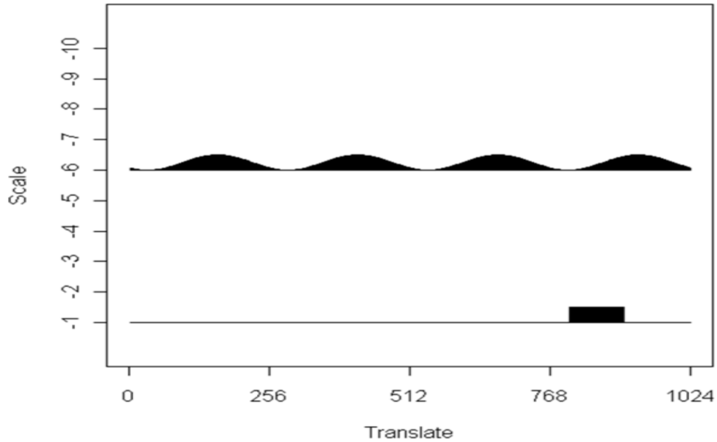
$$d_{j,k;T} = \sum_{t=1}^{T} x_t \psi_{j,k}(t)$$

دوره‌نگار موجکی اولیه را نیز با فرمول $I_{k;T}^{j} = \left|d_{j,k;T}\right|^2$ معرفی کردند.

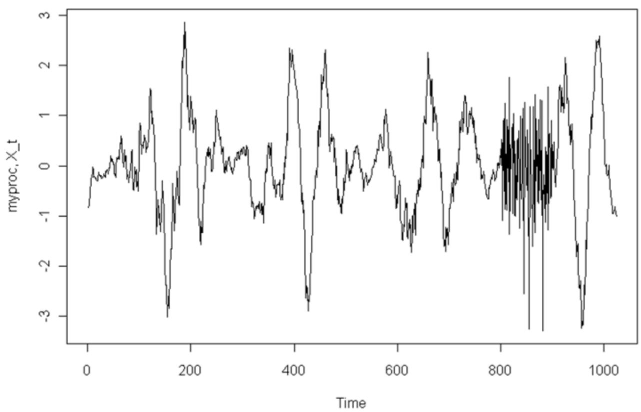
اگر داشته باشیم

$$S(z) \coloneqq \{S_j(z)\}_{j=-1,\dots,-J} ،\quad I(z) \coloneqq \{I_{[z];T}^{l}\}\ و$$

آنگاه برای تمام$z\epsilon(0,T)$



شکل ۱. نمودار EWS مثال ۲



شکل ۲. تحققی از فرایند LSW مربوط به EWS مثال ۲

که در آن مؤلفه‌های ماتریس A ضرب داخلی ماتریس خودهمبستگی موجک‌هاست؛ یعنی:

$$A_{jl} = \langle \Psi_j, \Psi_l \rangle = \sum_{\tau} \Psi_j(\tau)\Psi_l(\tau)$$

اکلی[۱۸] و نیسن (۲۰۰۵) با استفاده از ویژگی چندمقیاسی موجک‌های گسسته، الگوریتم سریعی را برای ساختن ماتریس A ارائه دادند. بنابر آنچه آمد، با تعریف:

$$L(z) = A^{-1}I(z)$$

رابطه

$$\mathbb{E}\big(L(z)\big) = S(z) + \mathcal{O}(T^{-1})$$

برقرار است.علاوه بر امید $L(z)$، نیسن و همکاران (۲۰۰۰) واریانس $I(z)$ را نیز محاسبه کردند که به صورت زیر است:

$$\mathrm{Var}\left(I_{[z];T}^{j}\right) = 2\left\{\sum_{m} A_{jm} S_m(z)\right\}^2 + \mathcal{O}(2^{-j}/T)$$

بنابراین واریانس $I(z)$با افزایش حجم نمونه، یعنی $T \to \infty$، به صفر میل نمی‌کند.چون $L(z)$ ترکیبی خطی از $I(z)$ است؛ لذا واریانس $L(z)$ نیز به سمت صفر میل نخواهد کرد. از این رو مانند موقعیتی که در تحلیل فوریه فرایندهای ایستا برای براورد تابع طیف داریم، براوردگر EWSهم سازگار نیست. برای حل این مشکل نیسن و همکاران (۲۰۰۰)، هموارسازی دوره‌نگار موجک اولیه را به عنوان تابعی از $[z]$برای هر مقیاس j، از هموارسازی تابع طیف اقتباس کردند. آنها ابتدا در $I(z)$از هموارسازی با روش *انقباض موجکی*[۱۹]استفاده کردند؛ سپس به تصحیح براوردگر (استفاده از $L(z)$) پرداختند. البته می‌توان ابتدا به تصحیح براوردگر $I(z)$پرداخت، سپس از تکنیک هموارسازی استفاده کرد؛ اما در این حالت تحلیل براوردگر از نظر تئوری، بسیار مشکل است.

۴-۲- تحلیل شاخص CPI با استفاده از فرایند LSW

در این بخش می‌خواهیم به عنوان کاربردی از مدل LSW به تحلیل سری‌زمانی شاخص بهای مصرف کننده(CPI) با استفاده از براورد EWS بپردازیم. تکیه این بخش بر تحلیل خروجی از منظر پردازش سیگنال[۲۰](و نه تحلیل اقتصادی) است. کارشناسان سایر حوزه‌ها می‌توانند با توجه به نیاز خود از تحلیل ارائه شده، استفاده نمایند.

شکل ۳ نمودار سری‌زمانی روزانه ۲۰۴۸ داده ثبت شده شاخص CPI در بازه زمانی ۱۳۸۰/۰۶/۱۰ الی ۱۳۸۸/۱۲/۰۱ را نمایش می‌دهد. برای استفاده از مدل LSW احتیاج داریم میانگین سری‌زمانی صفر باشد و البته به زمان هم بستگی نداشته باشد. جهت برقراری این فرض، همانند آنچه در مشیری و همکاران (۱۳۸۹) آمده است،از بازده روزانه شاخص CPIاستفاده می‌کنیم. اگر مقدار شاخص در زمانt،CPI_tباشد، بازده روزانه آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

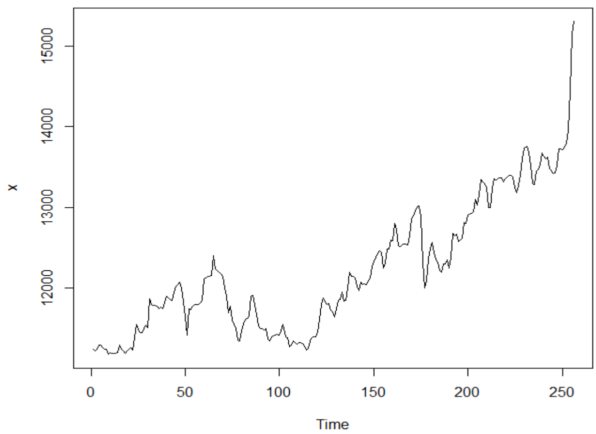
$$R_t = \frac{CPI_t - CPI_{t-1}}{CPI_{t-1}}$$

نمودار R_tدر شکل ۴ آمده است. در گام بعد نمودار براورد EWS را در شکل ۵ آورده‌ایم. در این نمودار برای هر مقیاس، بزرگ‌ترین مقدار را به عنوان واحد در نظر گرفته‌ایم و برای امکان مقایسه اندازه هر مقیاس با مقیاس دیگر، بزرگ‌ترین مقدار براورد شده برای $S_j(z)$در جدول ۱ ذکر شده است. براساس این جدول بزرگ‌ترین مقدار براورد شده $S_j(z)$، در مقیاس$j = -1$ قرار دارد که ۲.۸۷ برابر بزرگ‌ترین مقدار در مقیاس $j = -2$ است. بنابراین در نمودار شکل ۵اندازه واقعی سطح ۱-، ۲.۸۷ برابر سطح ۲- است. در نظر گرفتن این موضوع ما را از تفسیر اشتباه شدت نوسانات نمودار شکل ۵ در مقیاس‌های مختلف، برحذر خواهد داشت.

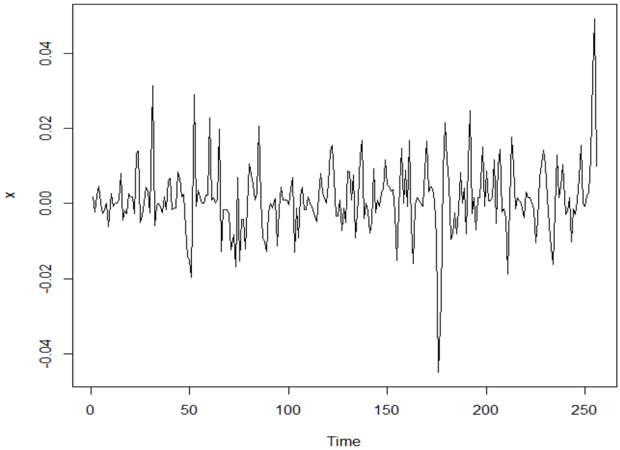
جدول ۱. مقادیر بزرگ‌ترین $S_j(z)$ براورد شده در مقیاس‌های مختلف

ردیف مقیاس	۱-	۲-	۳-	۴-	۵-	۶-
بزرگ‌ترین $S_j(z)$ براورد شده	109×10^{-6}	239×10^{-6}	113×10^{-6}	68×10^{-6}	18×10^{-6}	4×10^{-6}

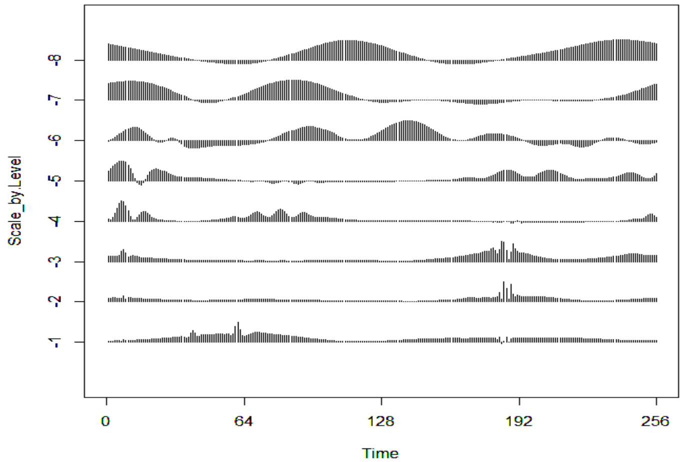
ردیف مقیاس	۷-	۸-
بزرگ‌ترین $S_j(z)$ براورد شده	4×10^{-6}	1×10^{-6}



شکل ۳. سری‌زمانی روزانه نرخ ارز از تاریخ ۱۳۹۰/۰۱/۲۱ الی ۱۳۹۰/۰۹/۳۰



شکل ۴. سری‌زمانی بازده روزانه نرخ ارز(R_t)از تاریخ ۱۳۹۰/۰۱/۲۱ الی ۱۳۹۰/۰۹/۳۰



شکل ۵. برآورد EWS نمودار شکل ۴

آنچه در نگاه اول از شکل ۵ برمی‌آید، این است که نمودار R_tبایستی نوسانات بیشتری در ابتدا و انتهای خود نسبت به قسمت میانی‌اش (همسایگی ۱۰۲۴امین مشاهده) داشته باشد؛ زیرا در مقیاس‌های ۱- تا ۸- تغییرات چندانی در قسمت میانی نموداروجود ندارد. تغییرات شدید در مقیاس‌های پایین در همسایگی ۵۱۲امین مشاهده، موجب نوسانات شدید در آن مکان ازR_tاست.

در همسایگی ۲۰۰۰امین نقطه نیز همین وضعیت، البته با شدت کمتر مشاهده می‌شود. از این رو مشابه آنچه در مثال ۲آمد، تغییرات همسایگی‌های ذکر شده ناشی ازترکیب نوسانات روزانه، هفتگی و حتی ماهانه است که با توجه به جدول ۱، سهم نوسانات روزانه و هفتگی جدی‌تر است. در سطوح ۹- و ۱۰-، نوسانات تا مشاهده ۱۰۲۴ام وجود دارد که نشان می‌دهد از ابتدا تا آن نقطه، نوسانات کلی سری R_tوجود داشته؛ ولی این وضعیت بعد از آن تغییر کرده است. البته در سطح ۸- نوساناتی در انتها مشاهده می‌شود که علاوه بر نوسانات کلی، نوسانات جزیی سری R_tرا نیز، در آن بخش توضیح می‌دهد.

۵- نتیجه‌گیری و بحث

پژوهش حاضر با هدف ارزیابی فرآیندهای موجکی و کاربرد آن بر شاخص بهای مصرف کننده، طراحی و اجرا شده است. در یک جمع‌بندی می‌توان گفت: تغییرات R_tمتأثر از عوامل روزانه تا سالانه است. به بیان دیگر نتایج ارائه شده در نمودار EWS رفتار ناهموار و غیرقابل پیش‌بینی دارد و پیشنهاد می‌شودبیش از آنکه در جستجوی تفسیرهای ریاضی و آماری مناسبی برای توضیح تغییرات آن به صورت مستقل باشیم، بهتر است به تحلیل ارتباط سایر عوامل (از قبیل عوامل اقتصادی و سیاسی) با نوسانات مورد نظر مراجعه کنیم. ضمناً نتایج پژوهش، تحلیل موجکی CPI را فراهم نموده است.

فهرست منابع

۱) مشیری، سعید و همکاران، (۱۳۸۹). بررسی رابطه میان بازدهی سهام و تورم با استفاده از تجزیه و تحلیل موجک در بورس اوراق بهادار تهران، فصل‌نامه پژوهش‌های اقتصادی ایران، شماره ۴۲، صفحات ۵۵-۷۴

2) Dahlhaus, R. (1997) Fitting time series models to non-stationary processes, Ann. Statist., 25, 1-37.
3) Daubechies, I. (1992) Ten Lectures on Wavelets, SIAM, Philadelphia.
4) Eckley, I. A. and Nason, G. P. (2005) Efficient computation of the discrete autocorrelation wavelet inner product matrix., Statistics and Computing, 15, 83-92.
5) Nason, G. P. and von Sachs, R. (1999) Wavelets in time series analysis, Phil. Trans. R. Soc. Lond. A, 357, 2511-2526.

6) Nason, G. P., von Sachs, R., and Kroisandt, G. (2000) Wavelet processes and adaptive estimation of the evolutionary wavelet spectrum, J. R. Statist. Soc. B, 62, 271-292.
7) Priestley, M. B. (1965) Evolutionary spectra and non-stationary processes, J. Roy. Stat. Soc. Series B, 27, 204-237.
8) Priestley, M. B. (1983) Spectral Analysis and Time Series, Academic Press, London.
9) Silverman, R. A. (1957) Locally stationary random processes, IRE Trans. Information Theory, IT-3, 182-187.

یادداشت‌ها

[1]Locally Stationary Wavelet
[2]Consumer Price Index
[3]DiscreteNon-Decimated Wavelets
[4]Nason
[5]Dahlhaus
[6]Oscillatory
[7]Silverman
[8]Priestley
[9]Internal Linear Relationships
[10]Purely Random Process
[11]Autoregressive Moving Average
[12]Amplitude
[13]Time-Frequency
[14]Discrete Wavelet Transform
[15]Kernel
[16]Evolutionary Wavelet Spectrum
[17]Raw Wavelet Periodogram
[18]Eckley
[19]Wavelet Shrinkage
[20]Signal Processing