



استفاده از تبدیل موجک جهت بررسی میزان همبستگی نرخ ارزهای مختلف ، قیمت نفت ، قیمت طلا و شاخص بورس اوراق بهادار تهران در مقیاسهای زمانی مختلف

نیما پازوکی

کارشناس ارشد مدیریت مالی، مدیریت اکتشاف شرکت ملی نفت ایران (مسئول مکاتبات)
nima_pazoki@yahoo.com

اکرم حمیدیان

کارشناس ارشد مدیریت مالی

شاپور محمدی

استادیار دانشکده مدیریت دانشگاه تهران

وحید محمودی

دانشیار دانشکده مدیریت دانشگاه تهران

تاریخ دریافت: ۹۱/۱۱/۲۰ تاریخ پذیرش: ۹۲/۰۲/۲۵

چکیده

یکی از مسائل قابل توجه در عرصه بازارهای مالی رابطه تنگاتنگ میان بازارهای مختلف میباشد. در این مقاله جهت بررسی میزان ارتباط و همبستگی بازارهای مالی از تبدیل موجک جهت تجزیه سریهای زمانی قیمت نفت ، قیمت طلا، نرخ ارزهای مختلف و شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران به مولفه های با مقیاسهای زمانی مختلف آنها استفاده شده و در نهایت میزان همبستگی متغیرهای مذکور در بازه های زمانی مختلف محاسبه و مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است. بازه زمانی مورد مطالعه از ابتدای سال ۱۳۸۳ تا شهریور ماه سال ۱۳۸۹ بوده و تعداد ۳۳۴ نمونه میانگین هفتگی برای هر یک از متغیرها مورد استفاده قرار گرفته است. نتایج نشان میدهد که میزان همبستگی این متغیرها در بازه های زمانی مختلف متفاوت بوده و با میزان همبستگی مستقیم محاسبه شده بین متغیرها نیز تفاوت دارد. ضمنا با توجه به نتایج حاصله حتی در موقعی که همبستگی مستقیم معنی داری میان دو متغیر وجود ندارد ، همبستگی های معنی داری در بازه های زمانی مختلف وجود دارد.

واژه های کلیدی: تبدیل موجک، همبستگی، شاخص کل بورس، مقیاسهای زمانی.

۱- مقدمه

یکی از مسائل بسیار قابل توجه در عرصه بازارهای مالی رابطه تنگاتنگ بازارهای مختلف با یکدیگر میباشد بطوریکه در هیچ بازاری نمی توان بصورت منفرد عمل کرد و به اخبار و اطلاعات مربوط به آن بازار بسنده کرد و باید اطلاعات جامعی را از تعداد قابل توجهی از آنها گردآوری و تحلیل کرد تا به نتیجه ای مطلوب رسید. امروزه تحلیل یک بازار بصورت مجزا از سایر بازارها تقریباً فاقد اعتبار بوده و نیاز است تحلیلگران تحلیلهای خود را براساس روابط میان بازارهای مختلف انجام دهند. بازارهای ارز، سهام، نفت و طلا سیستمهای اقتصادی پیچیده، متغیر با زمان، غیر خطی و چند متغیره میباشند. عوامل مختلفی مانند عوامل سیاسی، اقتصادی، نظامی، عرضه و تقاضا و شرایط آب و هوایی بر روی آنها موثر میباشد^[۲]. بازار نفت یکی از اصلی ترین بازارهای جهانی است که معمولاً در رابطه با دیگر بازارها پیشرو است. به عبارت دیگر تغییرات نفت موجب تحول در دیگر بازارها از جمله ارز می شود. این مسئله اهمیت بررسی تحولات نفت را دوچندان می کند. عوامل تاثیر گذار بر قیمت نفت خارج از بازارهای مالی هستند و بیشتر به مسائل سیاسی جاری در کشورهای تولید کننده و به تقاضا از طرف مصرف کنندگان بزرگ مثل چین و هند و ایالات متحده آمریکا مربوط می شود. تغییرات قیمت نفت تاثیر شدیدی بر بازارهای مالی دارد. بر اثر گران شدن نفت سهام بسیاری از شرکتها و ارزهای رایج ضربه می بینند که از آن میان می توان به عنوان مثال به سهام شرکتهای اتموبیل سازی اشاره کرد که قیمت نفت از فاکتورهای تاثیر گذار بر آنها است. نفت در بازار ارز نیز تاثیر خود را می گذارد و با گران شدن نفت ارز رایج کشورهایی که مصرف کنندگان بزرگ نفت هستند با کاهش ارزش روپرتو می شود که از بین آنها می توان به دلار و ین اشاره کرد. از دیگر کالاهای حیاتی و بسیار مهم در عرصه مبادلات جهانی که نفت تاثیر زیادی بر آن دارد می توان به طلا اشاره کرد. بالا رفتن قیمت نفت موجب افزایش تورم جهانی می شود و در این شرایط سرمایه گذاران علاقه مند هستند تا سرمایه خود را به چیزی تبدیل کنند تا بیشترین مقاومت را در برابر افزایش تورم داشته باشد، طلا یکی از بهترین انتخابهای آنان است و به همین دلیل تقاضا برای طلا بالا رفته و موجب گرانی آن میشود. از طرف دیگر طلا و نفت عوامل تاثیر گذار مشترک یکسانی دارند که موجب می شود قیمت این دو کالای حیاتی هم جهت باشد. تغییرات قیمت طلا نیز تأثیر زیادی بر بازارهای مالی جهان دارد. در بازار ارز عمدۀ ارزهایی که رابطه تنگاتنگی با طلا دارند عبارت اند از دلار، فرانک سوئیس و دلار استرالیا. برخلاف نفت که در تمامی روابط خود با دیگر بازارها نقش پیشرو را دارد طلا در رابطه خود با بازار ارز گاه نقش پیشرو و گاه نقش پیرو را بازی می کند. بنابراین ارزیابی میزان همبستگی نرخ ارزهای مختلف، قیمت نفت، طلا

و شاخص بورس، جهت پاسخ به مسائل تصمیم‌گیران بورس اوراق بهادار از اهمیت بالایی برخوردار است که در این مقاله هدف‌گذاری شده است.

۲- مبانی نظری و مرواری بر پیشینه پژوهش

موجک‌ها توابع ریاضی‌اند که داده‌ها را به مولفه‌های فرکانسی تشکیل دهنده آنها تفکیک کرده و هر مولفه را با قدرت تفکیک یا رزولوشن مناسب با مقیاس آن مولفه مورد مطالعه قرار میدهند. موجک‌ها نمونه‌های انتقال یافته و مقیاس شده یک تابع (موجک مادر) با طول متناهی و نوسانی شدیداً میرا هستند. مزیت اصلی تبدیل موجک نسبت به تبدیل فوریه توان بالای تحلیل آن در شرایطی است که داده‌ها دارای گسستگی و جهش‌های سریع باشند^[۱]. در نظریه موجک‌ها اگر پنجره موجک باشد جزیات بزرگ باشد ویژگی‌های کلی سری زمانی دیده می‌شود و اگر پنجره مورد مطالعه کوچک باشد موجک باشد زمانی موردن توجه بیشتری خواهد بود. در این تبدیل با استفاده از موجک پایه و با مقیاس کردن و انتقال زمانی آن، داده‌ها تجزیه و تحلیل می‌گردند. هرچه مقیاس مورد استفاده بزرگ‌تر باشد موجک پایه بیشتر کشیده شده و تجزیه و تحلیل بر روی مولفه‌های فرکانس پایین اطلاعات انجام خواهد شد. بر عکس هرچه مقیاس مورد استفاده کوچک‌تر باشد موجک پایه بیشتر فشرده شده و تجزیه و تحلیل بر روی مولفه‌های فرکانس بالا انجام می‌گردد. مولفه‌های فرکانس پایین (مقیاس بزرگ) نشانگر روند یک سری زمانی و مولفه‌های فرکانس بالا (مقیاس کوچک) نشانگر تغییرات فصلی، دوره‌ای و نامنظم یک سری زمانی می‌باشند.

وجود رابطه نزدیک میان بازارهای مالی ارز، نفت، طلا و سهام و تاثیرپذیری هر یک از آنها از دیگری سبب می‌گردد تا سرمایه‌گذاران و معامله‌گران در این بازارها حساسیت خاصی نسبت به تغییرات بازارهای دیگر داشته باشند. از طرفی وجود سرمایه‌گذارانی که برای کاهش ریسک سرمایه‌گذاری خود اقدام به تشکیل پرتفوی نموده و در بیش از یک بازار سرمایه‌گذاری مینمایند، لزوم بررسی و مطالعه دقیق روابط موجود بین این بازارها را نمایان مینماید. استفاده از ابزارهای ریاضی مانند تبدیل موجک سبب دقیق‌تر شدن تجزیه و تحلیلهای انجام شده بر روی سریهای زمانی مالی می‌گردد. هدف اصلی از انجام این تحقیق بررسی و دستیابی به رابطه و میزان همبستگی میان تغییرات نرخ ارزهای مختلف، قیمت نفت، قیمت طلا و شاخص‌های بورس اوراق بهادار تهران در مقیاسهای مختلف زمانی می‌باشد.

مطالعات مختلفی در زمینه کاربرد نظریه موجک در تجزیه و تحلیل سری‌های زمانی بویژه در حوزه‌های اقتصادی و مالی ارائه شده است. در سال ۱۹۹۷ رمزی^۱ و لمپارت^۲ تجزیه روابط اقتصادی در

مقیاسهای زمانی مختلف با استفاده از تبدیل موجک را ارائه نمودند. پرسیوال^۳ و والدن^۴ در سال ۲۰۰۰ کتاب روشهای موجک برای تحلیل سری های زمانی را ارائه نمودند. در سال ۲۰۰۱ لی^۵ در مقاله ای با عنوان حرکت بین المللی بازار سهام ، تحلیل موجک بر روی بازارهای سهام کشورهای خاورمیانه و شمال آفریقا، همبستگی حرکتی شاخصهای بورس سهام کشورهای مذکور را با حرکت بازارهای کشورهای توسعه یافته مانند آمریکا ، ژاپن و آلمان مورد بررسی قرارداده است. در سال ۲۰۰۲ رمزی موجکها در حوزه اقتصاد و مالی، از گذشته تا آینده را ارائه نمود. در سال ۲۰۰۲ گنکای^۶، سلکاک^۷ و ویتچر^۸ کتاب مقدمه ای بر موجکها و سایر روشهای فیلترینگ در حوزه مالی و اقتصادی را منتشر کردند. در سال ۲۰۰۵ یوسفی^۹، وینریش^{۱۰} و رینارز^{۱۱} در مقاله ای با عنوان پیش بینی قیمت نفت بر پایه موجک ، به تجزیه سری زمانی قیمت نفت به مولفه های فرکانسی مختلف پرداخته و سپس با استفاده از روشهای پیش بینی مختلف ، قیمت نفت را پیش بینی نمودند. در سال ۲۰۰۵ گالکاتی^{۱۲} به تحلیل و بررسی حرکت همسوی بازارهای سهام کشورهای خاورمیانه و شمال آفریقا با استفاده از نظریه موجکها در فاصله سالهای ۱۹۹۷ تا ۲۰۰۵ پرداخت. در سال ۲۰۰۶ ونگ^{۱۳} و آندرسون^{۱۴} در مقاله ای با عنوان تحلیل دلار استرالیا با استفاده از مفاهیم تبدیل موجک تغییرات متقابل دلار استرالیا در مقابل چهار ارز دیگر را در مقیاسهای مختلف زمانی بررسی نمودند. در سال ۲۰۰۷ رائیم^{۱۵} ، آمو^{۱۶} و مبروک^{۱۷} مقاله ای با عنوان تخمین ریسک سیستماتیک در مقیاسهای زمانی مختلف با استفاده از تبدیل موجک، استفاده در بازار سهام فرانسه را ارائه نمودند. در سال ۲۰۰۷ آواریتسیوتی^{۱۸} در قالب تز دکترای خود مقاله ای با عنوان روشی بر پایه تبدیل موجک برای پیش بینی بازار سهام آتن ارائه نمود. در سال ۲۰۰۸ هانگ^{۱۹} و یان^{۲۰} مقاله ترکیب تبدیل موجک و مدلهای پیش بینی برای قیمت آینده گاز را ارائه نمودند. در سال ۲۰۰۹ سوهارتونو^{۲۱} و سوبانار^{۲۲} با استفاده از تبدیل موجک و شبکه عصبی مدلی را برای پیش بینی سریهای زمانی ناپایدار ارائه نمودند. در سال ۲۰۰۸ یوگو^{۲۳} در مقاله ای با عنوان اندازه گیری سیکلهای تجاری ، تحلیل سریهای زمانی اقتصادی با استفاده از موجک ، سری زمانی تولید ناخالص داخلی را در مقیاسهای مختلف زمانی به منظور تعیین روند و سیکل آن بررسی نمود.

در سال ۱۳۸۶ محمد علی زاده در تحقیقی با عنوان بررسی رابطه بین بازده سهام و تورم در بورس اوراق بهادار تهران در زمان - مقیاسهای مختلف با استفاده از تبدیل موجک ، با استفاده از موجک با حداقل همپوشانی^{۲۴} رابطه میان متغیرهای مذکور را مورد بررسی قرار داد. در سال ۱۳۸۶ انصاری به بررسی تاثیر استفاده از مقیاسهای زمانی متفاوت در محاسبه ارزش در معرض ریسک با استفاده از تئوری موجک پرداخت. در سال ۱۳۸۷ شکیبايی ، افلاطونی و نیکبخت به بررسی رابطه بلند مدت بین نرخ ارز و قیمت‌های نفت در کشورهای عضو اوپک پرداختند. آنها نتیجه گرفتند که قیمت‌های نفت ممکن است منبع عمده نوسانات نرخ ارز باشد. در سال ۸۴ عباسی نژاد و محمدی مقاله ای با عنوان تحلیل

سیکلهای تجاری ایران با استفاده از نظریه موجکها ارائه نمودند. در این مقاله از تبدیل موجک بمنظور تجزیه تولید ناخالص داخلی ایران استفاده شده است. در سال ۱۳۸۷ شمس در تحقیق خود با عنوان "بررسی زمان مقیاس مدل قیمت گذاری دارایی سرمایه ای با مدل موجک" هم تغییری بازده بازار و بازده سهام شرکتهای فعال در بورس های ایران و هفت کشور دنیا را با استفاده از تبدیل موجک انجام داد.

این تحقیق بر پایه فرضیه وجود ارتباط و همبستگی میان تغییرات نرخ ارز های مختلف ، قیمت نفت ، قیمت طلا و شاخصهای بورس اوراق بهادار تهران در مقیاسهای زمانی مختلف انجام شده است.

-۳- روش‌شناسی پژوهش

به طور کلی در تحلیل طیفی ، یک سری زمانی از طریق یک تبدیل متعامد به یک سری از اجزا با دامنه و فرکانسهای متفاوت تبدیل میگردد که هر یک از این اجزاء خود سریهای زمانی جدیدی میباشند که علاوه بر حفظ انرژی سری زمانی اصلی دارای ویژگیهای اضافه دیگری میباشند[۴]. روشهای تحلیل طیفی سنتی مانند تحلیل فوریه دارای محدودیتهاست که از آن جمله میتوان به نامناسب بودن آنها برای تحلیل تغییرات ناگهانی ، گسستگی ها و یا سایر تغییرات محلی و موضعی در سریهای زمانی اشاره کرد. بطور خلاصه میتوان گفت ابزارهای تحلیل طیفی سنتی در مورد سریهای زمانی نامانا دارای عملکرد مناسبی نمیباشند. تبدیل موجک یک تابع پایه جدید بنام تابع مادر^{۲۵} را بکار میبرد که با کشیده شدن و انتقال بر روی محور زمان امکان تشخیص ویژگیها و خصوصیات محلی را در حوزه های زمان و فرکانس مهیا مینماید. طول تابع پایه تبدیل موجک وقتیکه پدیده های با فرکانس پایین را تشخیص میدهد در حوزه زمان بلند است و لذا دارای قدرت تفکیک فرکانسی خوبی است. بطور عکس وقتیکه پدیده های با فرکانس بالا را تشخیص میدهد طول تابع پایه تبدیل موجک در حوزه زمان کوتاه است و لذا دارای قدرت تفکیک زمانی مناسبی برای این پدیده ها است. با ترکیبی از کشیدگی ها و شیفتهدای زمانی مختلف تابع پایه مادر در تبدیل موجک امکان تشخیص و گرفتن کلیه اطلاعات موجود در یک سری زمانی و مرتبط کردن آنها با افقهای زمانی مشخص و مکان زمانی آنها وجود دارد.

در حالیکه تبدیل فوریه تابعی از فرکانس است تبدیل موجک تابعی از مقیاس میباشد. البته در واقع مقیاس در تبدیل موجک مرتبط با فرکانس میباشد. بطور کلی مقیاس رابطه معکوس با فرکانس دارد. اگر پارامتر مقیاس افزایش یابد تابع پایه تبدیل موجک در حوزه زمان کشیده میشود و در حوزه فرکانس بسمت فرکانسهای پایین شیفت پیدا میکند. بطور عکس با کاهش مقدار پارامتر مقیاس ، تابع

پایه تبدیل موجک در حوزه زمان فشرده میگردد ، فرکانسهای مورد تشخیص آن افزایش میابد و بسمت فرکانسهای بالا شیفت پیدا میکند.

بطور خلاصه یکتابع موجک $\psi(t)$ تابعی از زمان است که از قاعده زیر که به آن شرط پذیرش میگویند پیروی مینماید :

$$C_\psi = \int_0^\infty \frac{|\Psi(f)|}{f} df < \infty,$$

که در فرمول فوق $(f)\psi$ تبدیل فوریه $(t)\psi$ میباشد. این شرط تضمین میکند که وقتی f به سمت صفر میل میکند ، $(f)\psi$ نیز به سرعت به صفر نزدیک شود. در واقع برای تضمین اینکه $C_\psi < \infty$ باشد باید این شرط را تحمیل کنیم که $0 = \psi(0)$ که معادل است با [۸] :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0.$$

شرط دومی که بر تابع موجک اعمال میگردد واحد بودن انرژی آن است :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt = 1$$

$$W(u, s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi_{u,s}(t) dt$$

$$\psi_{u,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right)$$

تبدیل موجک پیوسته تابعی از دو متغیر u و s بوده و بطور ساده از ضرب تابع مورد نظر در تابع موجک و انتگرالگیری از حاصلضرب بدست می آید. اگر فرض کنیم تابع مورد نظر $x(t)$ ما تابعی از زمان باشد تبدیل موجک آن بصورت زیر است :

که در آن $(t)\psi_{u,s}$ در واقع همان تابع موجک ابتدایی است که به اندازه s اتساع داده شده و به اندازه u در محور زمان حرکت داده شده است. ضرایب حاصله در واقع تابعی از دو پارامتر s (مقیاس) و u (مقدار شیفت زمانی) هستند. با اعمال موجکهای مادر مختلف بر روی یک تابع که در محور زمان حرکت داده شده و اتساع نیز یافته اند ، ساختار پیچیده موجود در تابع را به اجزای کوچکتر تقسیم میکنیم. به این کار تحلیل یا تجزیه تابع میگوییم. اگر توابع موجک مورد استفاده در تحلیل شرط

پذیرش موجک را تامین کنند میتوان با استفاده از فرمول زیر و با عملیات معکوس بر روی ضرایب موجک به تابع اصلی رسید.

به این عمل سنتز یا بازسازی تابع میگوییم. خاصیت کلیدی تبدیل های موجک این است که میتوانند توابع انتگرال پذیر مرتبه دوم را بطور کامل بازسازی نمایند.

$$x(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty W(u, s) \psi_{u,s}(t) du \frac{ds}{s^2}$$

اگر از u و s نمونه برداری کنیم (یعنی یک تعداد معین مقیاس و تعداد معینی شیفت زمانی) باز هم میتوان ضرایب موجک را بنحوی بدست آورد که بتوان تابع اصلی را از روی آنها بازسازی نمود. تبدیل حاصل از نمونه گیری گستته از u و s را تبدیل موجک گستته یا ناپیوسته مینامند. حداقل نمونه گیری از قاعده نایکوئیست^{۲۶} بدست می آید که به آن نمونه گیری بحرانی^{۲۷} میگویند :

$$u = k2^{-j} \quad \text{and} \quad s = 2^{-j}$$

با استفاده از جبر ماتریسی میتوان تبدیل موجک گستته را بطور مستقل از تبدیل موجک پیوسته بدست آورد [۸].

تقریب هر تابع گستته و یا سری زمانی با استفاده از توابع موجک بصورت زیر بدست می آید [۱۰] :

$$f(t) = \sum S_{J,K} \varphi_{J,K}(t) + \sum d_{J,K} \psi_{J,K}(t) + \sum d_{J-1,K} \psi_{J-1,K}(t) + \dots + \sum d_{I,K} \psi_{I,K}(t)$$

که در فرمول فوق J تعداد سطوح آنالیز یا مقیاسها و K مقدار شیفت زمانی در هر سطح را نشان میدهند. توابع φ و ψ توابع متعامد موجک هستند که بصورت زیر تعریف میگردند :

$$\varphi_{j,k} = 2^{-\frac{j}{2}} \phi\left(\frac{t - 2^j k}{2^j}\right)$$

$$\psi_{j,k} = 2^{-\frac{j}{2}} \psi\left(\frac{t - 2^j k}{2^j}\right)$$

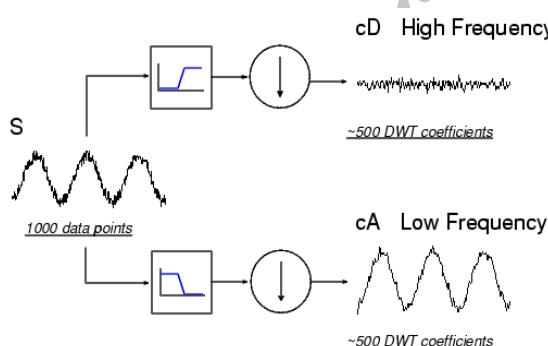
$$s_{j,k} \approx \int x(t) \varphi_{j,k}(t) dt$$

$$d_{j,k} \approx \int x(t) \psi_{j,k}(t) dt$$

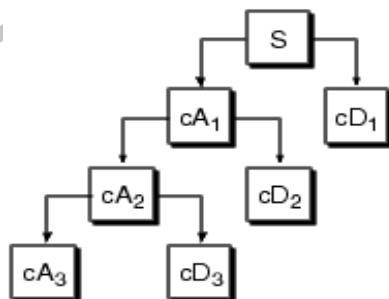
که در روابط فوق موجک (t) و φ را اصطلاحاً موجک پدر و موجک (t) و ψ را موجک مادر مینامند. در کل به توابع φ توابع مقیاسگر و به توابع ψ توابع موجک میگویند. ضرایب موجک نیز از روابط زیر بدست می آیند :

که $s_{j,k}$ ها را هموار^{۲۸} یا تخمین سطح زام و $c_{j,k}$ ها را جزئیات^{۲۹} سطح زام می‌نامند. تخمین‌ها در واقع مولفه‌های با اتساع یا مقیاس بالا و فرکانس بالای سری زمانی اصلی می‌باشند. جزئیات مولفه‌های اتساع یا مقیاس پایین و فرکانس بالای سری اصلی می‌باشند. در عمل برای بدست آوردن این تخمین‌ها و جزئیات از فیلترهای پایین گذر و بالاگذر استفاده می‌گردد. البته در این میان بمنظور کاهش حجم اطلاعات و بدست آوردن تعداد نمونه مشابه سری اصلی اطلاعات تعداد نمونه‌ها پس از عبور از فیلترهای مربوطه نصف می‌گردد.

کار تجزیه اطلاعات می‌تواند بیش از یکبار انجام و تکرار گردد که در این صورت پس از عبور سری زمانی اصلی از فیلترهای پایین گذر و بالاگذر و جدایش سری هموار و جزئیات در هر سطح، سریهای هموار مجدد از فیلترهای مشابه عبور داده می‌شوند تا هموارها و جزئیات سطح بعدی حاصل گردد.



فیلترهای پایین گذر و بالاگذر



تجزیه چند باره سریهای زمانی

باید توجه نمود که تعداد سطوحی که میتوان تا آن سطح اطلاعات را بکمک تبدیل موجک گسسته تجزیه نمود وابسته به تعداد مشاهدات سری زمانی اصلی دارد و شرط زیر همواره بایستی صادق باشد :

$$N \leq 2^j$$

یکی از محدودیتهای تبدیل موجک گسسته آنست که تعداد مشاهدات میباشند مضری از ۲ باشد. تبدیل موجک با حداکثر همپوشانی نسخه اصلاح شده تبدیل موجک گسسته میباشد. تبدیل موجک با حداکثر همپوشانی میتواند در مورد سریهای زمانی با هر تعداد مشاهده بکار رود. بر خلاف تبدیل موجک گسسته که پس از هر مرحله از انجام الگوریتم سری زمانی اصلی به دو سری با طول نصف سری مرحله قبل تقسیم میگردد، در این تبدیل در هر مرحله اندازه سری جزئیات و سری هموار برابر با سری اصلی است.

در این تحقیق ابتدا سری زمانی روزانه قیمت جهانی نفت خام اوپک ، قیمت جهانی طلا ، مقدار شاخص کل (قیمت و بازده نقدی) بورس اوراق بهادار تهران و نرخ هفت ارز دلار آمریکا ، یورو ، دلار کانادا ، دلار استرالیا ، پوند انگلستان ، فرانک سویس و ۱۰۰ یen ژاپن اعلام شده از طرف بانک مرکزی جمهوری اسلامی ایران از منابع اطلاعاتی استخراج و سپس با توجه به عدم تطابق روزهای تعطیل در ایران و خارج از ایران و جهت اجتناب از تاثیر مشکلات ناشی از این عدم تطابق بر نتایج تحقیق ، میانگین هفتگی برای هر یک از متغیرهای فوق محاسبه شده است. میانگین هفتگی بر مبنای مقدار موجود برای هر متغیر در طول یک هفته و در پایان روز جمعه هر هفته محاسبه شده است. بازه زمانی مورد مطالعه از ۱۳۸۳/۰۱/۱۴ (۲۰۰۴/۰۴/۰۲) الی ۱۳۸۹/۰۵/۲۹ (۲۰۱۰/۰۸/۲۰) میباشد که حاصل آن تعداد ۳۳۴ مشاهده هفتگی میباشد.

جهت انجام تحقیق از نرم افزار Matlab استفاده شده است. برای انجام تبدیل موجک گسسته با حداکثر همپوشانی از مجموعه نرم افزارهای نوشته شده تحت عنوان ^{۳۰} WMTSA که در دانشگاه واشنگتن و توسط چارلی کورنیش ^{۳۱} و با توجه به کتاب "روشهای موجک برای تحلیل سری های زمانی" که توسط پرسیوال ^{۳۲} و والدن ^{۳۳} در سال ۲۰۰۰ میلادی نوشته شده است ، استفاده شده است.

۴- نتایج پژوهش

پس از ورود سریهای زمانی هفتگی هر یک از متغیرهای مورد مطالعه به نرم افزار مطلب ، از روش تبدیل موجک ناپیوسته با حداکثر همپوشانی جهت تجزیه هر یک از سری های زمانی مورد مطالعه به مولفه های با مقیاسهای مختلف زمانی آنها استفاده شده است. جهت تبدیل سریهای زمانی به مولفه های با مقیاسهای زمانی مختلف با توجه به نامتقارن بودن اطلاعات سری های زمانی مورد مطالعه از

موجک دابچیز ۸ استفاده شده و با توجه به تعداد نمونه ها (۳۳۴ نمونه) کار تجزیه اطلاعات در ۸ سطح انجام شده است.

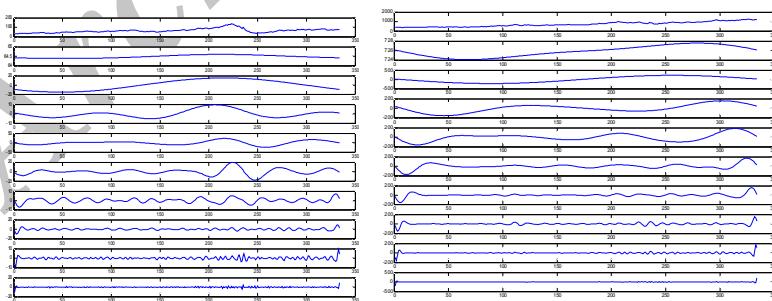
$$2^8=256 \quad 256 < 334 < 512 \quad 2^9=512$$

$$\begin{aligned} A &= s_8 + d_8 + d_7 + d_6 + d_5 + d_4 + d_3 + d_2 + d_1 \\ A &: \text{سری زمانی اصلی} \quad s_8 : \text{مولفه تخمین سطح ۸} \\ d_8, d_7, d_6, d_5, d_4, d_3, d_2, d_1 &: \text{مولفه های جزئیات سطح ۱ تا ۸} \end{aligned}$$

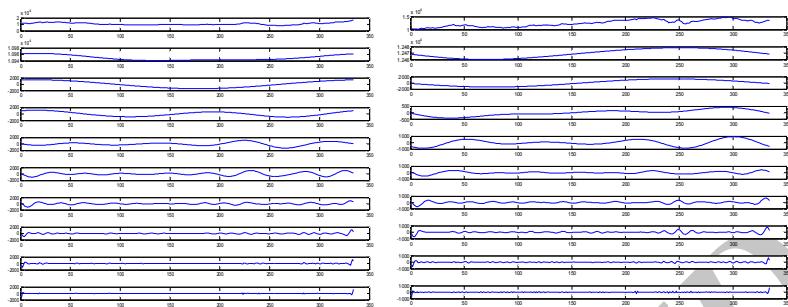
در سطح ز مقدار مقیاس 2^j و قدرت تفکیک یا دقت با استفاده از فرمول زیر محاسبه می‌گردد:
 j , $a=2^j$, resolution = $(1/a)*N$

$$\begin{aligned} \text{با توجه به این فرمول بازه زمانی در سطوح مختلف بدین شرح می‌باشد:} \\ \text{سطح ۱: ۱۱۶۹ روز} & \quad \text{سطح ۲: ۵۸۵ روز} \quad \text{سطح ۳: ۲۹۲ روز} \\ \text{سطح ۴: ۱۴۶ روز} & \quad \text{سطح ۵: ۷۳ روز} \quad \text{سطح ۶: ۳۷ روز} \\ \text{سطح ۷: ۱۸ روز} & \quad \text{سطح ۸: ۹ روز} \end{aligned}$$

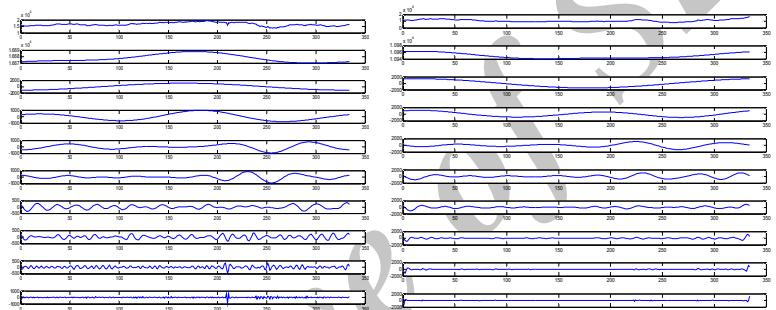
پس از تجزیه سریهای زمانی به مولفه های با مقیاسهای زمانی مختلف آنها ، ضریب همبستگی مولفه های با مقیاسهای زمانی مشابه برای سری های زمانی مختلف بصورت دو به دو محاسبه شده است. ضریب همبستگی سریهای زمانی اصلی نیز دو به دو محاسبه شده است. جهت آزمون معنی دار بودن ضرایب همبستگی بدست آمده از آماره تی در سطح اطمینان ۵ درصد استفاده شده است. در ادامه بعنوان نمونه تعدادی از جداول و نتایج حاصله آورده شده است.



سری زمانی قیمت نفت اوپک (راست) ، قیمت طلا (چپ) و مولفه های مقیاسهای زمانی مختلف آنها



سری زمانی مقدار شاخص کل بورس تهران (چپ) و نرخ یورو (راست) و مولفه های مقیاسهای زمانی مختلف آنها



سری زمانی نرخ پوند انگلستان (چپ) و نرخ دلار امریکا (راست) و مولفه های مقیاسهای زمانی مختلف آنها

ضرایب همبستگی مولفه های مقیاس زمانی سری های زمانی مختلف در سطح اول (1169 روز)

| d1 | AUD | CAD | CHF | Euro | GBP | Gold | JPY100 | Oil | Stock | USD |
|--------|------|------|------|------|-------|------|--------|------|-------|------|
| AUD | 1.00 | 0.90 | 0.82 | 0.84 | 0.33 | 0.80 | 0.54 | 0.68 | 0.82 | 0.74 |
| CAD | 0.90 | 1.00 | 0.87 | 0.78 | 0.21 | 0.86 | 0.70 | 0.67 | 0.87 | 0.83 |
| CHF | 0.82 | 0.87 | 1.00 | 0.87 | 0.19 | 0.89 | 0.82 | 0.66 | 0.86 | 0.85 |
| Euro | 0.84 | 0.78 | 0.87 | 1.00 | 0.49 | 0.83 | 0.53 | 0.70 | 0.79 | 0.68 |
| GBP | 0.33 | 0.21 | 0.19 | 0.49 | 1.00 | 0.22 | -0.24 | 0.25 | 0.18 | 0.16 |
| Gold | 0.80 | 0.86 | 0.89 | 0.83 | 0.22 | 1.00 | 0.73 | 0.76 | 0.87 | 0.84 |
| JPY100 | 0.54 | 0.70 | 0.82 | 0.53 | -0.24 | 0.73 | 1.00 | 0.43 | 0.70 | 0.76 |
| Oil | 0.68 | 0.67 | 0.66 | 0.70 | 0.25 | 0.76 | 0.43 | 1.00 | 0.63 | 0.53 |
| Stock | 0.82 | 0.87 | 0.86 | 0.79 | 0.18 | 0.87 | 0.70 | 0.63 | 1.00 | 0.88 |
| USD | 0.74 | 0.83 | 0.85 | 0.68 | 0.16 | 0.84 | 0.76 | 0.53 | 0.88 | 1.00 |

ضرایب همبستگی مولفه‌های مقیاس زمانی سری‌های زمانی مختلف در سطح چهارم(۱۴۶ روز)

| d4 | AUD | CAD | CHF | Euro | GBP | Gold | JPY100 | Oil | Stock | USD |
|--------|------|------|------|------|------|------|--------|------|-------|------|
| AUD | 1.00 | 0.87 | 0.87 | 0.93 | 0.59 | 0.78 | 0.74 | 0.72 | 0.72 | 0.57 |
| CAD | 0.87 | 1.00 | 0.91 | 0.85 | 0.61 | 0.89 | 0.84 | 0.62 | 0.64 | 0.80 |
| CHF | 0.87 | 0.91 | 1.00 | 0.93 | 0.66 | 0.88 | 0.93 | 0.55 | 0.66 | 0.77 |
| Euro | 0.93 | 0.85 | 0.93 | 1.00 | 0.69 | 0.77 | 0.81 | 0.64 | 0.60 | 0.61 |
| GBP | 0.59 | 0.61 | 0.66 | 0.69 | 1.00 | 0.55 | 0.53 | 0.47 | 0.28 | 0.46 |
| Gold | 0.78 | 0.89 | 0.88 | 0.77 | 0.55 | 1.00 | 0.84 | 0.62 | 0.71 | 0.80 |
| JPY100 | 0.74 | 0.84 | 0.93 | 0.81 | 0.53 | 0.84 | 1.00 | 0.41 | 0.58 | 0.84 |
| Oil | 0.72 | 0.62 | 0.55 | 0.64 | 0.47 | 0.62 | 0.41 | 1.00 | 0.41 | 0.36 |
| Stock | 0.72 | 0.64 | 0.66 | 0.60 | 0.28 | 0.71 | 0.58 | 0.41 | 1.00 | 0.46 |
| USD | 0.57 | 0.80 | 0.77 | 0.61 | 0.46 | 0.80 | 0.84 | 0.36 | 0.46 | 1.00 |

ضرایب همبستگی مولفه‌های مقیاس زمانی سری‌های زمانی مختلف در سطح هفتم(۱۸ روز)

| d7 | AUD | CAD | CHF | Euro | GBP | Gold | JPY100 | Oil | Stock | USD |
|--------|------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|-------|-------|-------|
| AUD | 1.00 | 0.89 | 0.59 | 0.63 | 0.40 | 0.72 | 0.31 | 0.24 | 0.27 | 0.41 |
| CAD | 0.89 | 1.00 | 0.84 | 0.79 | 0.00 | 0.94 | 0.65 | 0.12 | -0.19 | 0.75 |
| CHF | 0.59 | 0.84 | 1.00 | 0.89 | -0.45 | 0.95 | 0.93 | -0.04 | -0.49 | 0.92 |
| Euro | 0.63 | 0.79 | 0.89 | 1.00 | -0.16 | 0.80 | 0.70 | 0.28 | -0.35 | 0.69 |
| GBP | 0.40 | 0.00 | -0.45 | -0.16 | 1.00 | -0.31 | -0.73 | 0.43 | 0.82 | -0.63 |
| Gold | 0.72 | 0.94 | 0.95 | 0.80 | -0.31 | 1.00 | 0.86 | -0.10 | -0.41 | 0.92 |
| JPY100 | 0.31 | 0.65 | 0.93 | 0.70 | -0.73 | 0.86 | 1.00 | -0.30 | -0.67 | 0.96 |
| Oil | 0.24 | 0.12 | -0.04 | 0.28 | 0.43 | -0.10 | -0.30 | 1.00 | 0.33 | -0.33 |
| Stock | 0.27 | -0.19 | -0.49 | -0.35 | 0.82 | -0.41 | -0.67 | 0.33 | 1.00 | -0.70 |
| USD | 0.41 | 0.75 | 0.92 | 0.69 | -0.63 | 0.92 | 0.96 | -0.33 | -0.70 | 1.00 |

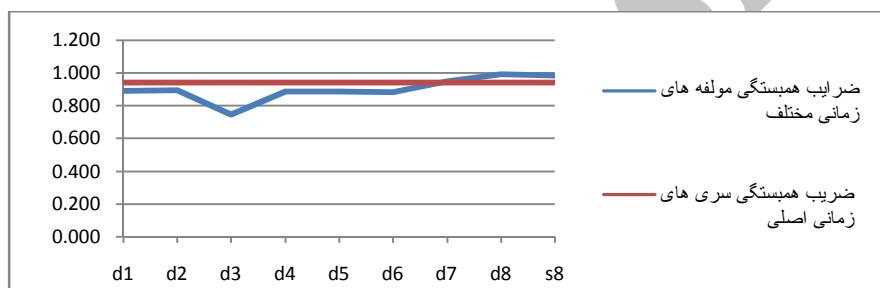
ضرایب همبستگی سری‌های زمانی اصلی

| A | AUD | CAD | CHF | Euro | GBP | Gold | JPY100 | Oil | Stock | USD |
|--------|------|------|-------|-------|-------|-------|--------|------|-------|-------|
| AUD | 1.00 | 0.92 | 0.82 | 0.84 | 0.30 | 0.84 | 0.57 | 0.77 | 0.24 | 0.63 |
| CAD | 0.92 | 1.00 | 0.82 | 0.84 | 0.27 | 0.88 | 0.58 | 0.75 | 0.01 | 0.76 |
| CHF | 0.82 | 0.82 | 1.00 | 0.92 | -0.08 | 0.94 | 0.88 | 0.56 | 0.16 | 0.84 |
| Euro | 0.84 | 0.84 | 0.92 | 1.00 | 0.24 | 0.86 | 0.65 | 0.72 | -0.05 | 0.69 |
| GBP | 0.30 | 0.27 | -0.08 | 0.24 | 1.00 | -0.08 | -0.49 | 0.52 | -0.16 | -0.26 |
| Gold | 0.84 | 0.88 | 0.94 | 0.86 | -0.08 | 1.00 | 0.83 | 0.59 | 0.05 | 0.88 |
| JPY100 | 0.57 | 0.58 | 0.88 | 0.65 | -0.49 | 0.83 | 1.00 | 0.17 | 0.26 | 0.87 |
| Oil | 0.77 | 0.75 | 0.56 | 0.72 | 0.52 | 0.59 | 0.17 | 1.00 | 0.00 | 0.30 |
| Stock | 0.24 | 0.01 | 0.16 | -0.05 | -0.16 | 0.05 | 0.26 | 0.00 | 1.00 | 0.01 |
| USD | 0.63 | 0.76 | 0.84 | 0.69 | -0.26 | 0.88 | 0.87 | 0.30 | 0.01 | 1.00 |

در این قسمت ضرایب همبستگی میان سریهای زمانی اصلی هر یک از دو متغیر مورد مطالعه با ضرایب همبستگی آنها در مولفه‌های زمانی مختلف مورد بررسی قرار گرفته است. عنوان نمونه تعدادی از تحلیلهای انجام شده آورده شده است.

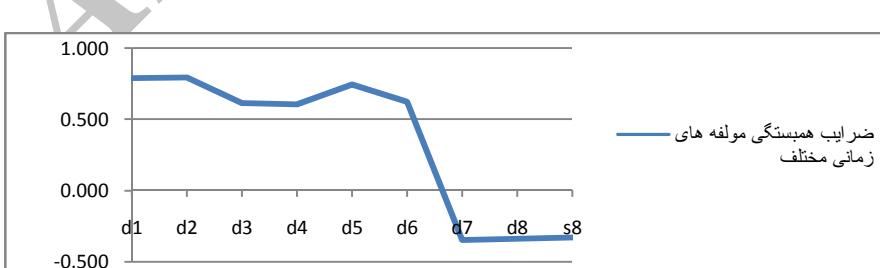
فرانک سویس و قیمت طلا

مقدار ضریب همبستگی در مولفه‌های زمانی سطوح ۷ و ۸ بیشتر از ضریب همبستگی مستقیم میان دو متغیر میباشد. بیشترین ضریب همبستگی مربوط به بازه زمانی ۹ روز بوده و کمترین آن مربوط به بازه زمانی ۲۹۲ روز میباشد.



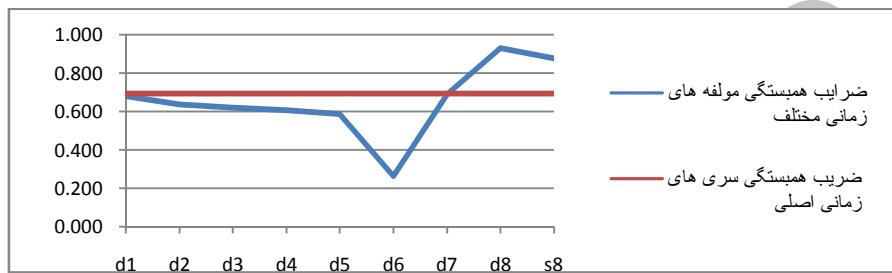
یورو و شاخص کل بورس تهران

مقدار ضریب همبستگی مستقیم میان دو متغیر با توجه به آزمون معنی داری انجام شده فاقد اعتبار میباشد. بیشترین مقدار همبستگی مربوط به بازه زمانی ۱۱۶۹ روز بوده و برای بازه های کمتر از ۱۸ روز این مقدار منفی میگردد که معرف حرکت در جهت خلاف این دو متغیر در بازه های زمانی کمتر از ۱۸ روز است.



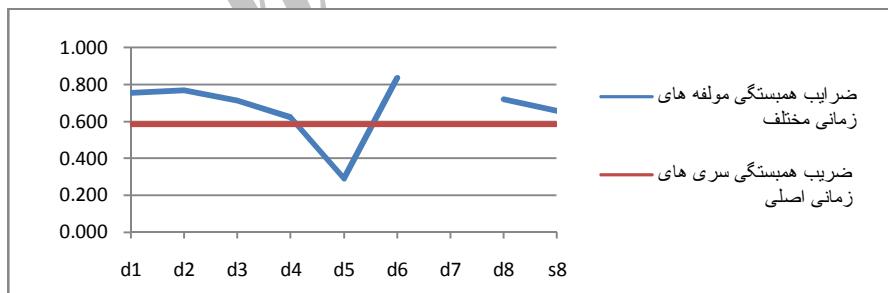
یورو و دلار آمریکا

مقدار ضریب همبستگی در مولفه های زمانی سطوح ۷ و ۸ بیشتر از ضریب همبستگی مستقیم میان دو متغیر میباشد. بیشترین ضریب همبستگی مربوط به بازه زمانی ۹ روز بوده و کمترین آن مربوط به بازه زمانی ۳۷ روز میباشد.



قیمت طلا و قیمت نفت

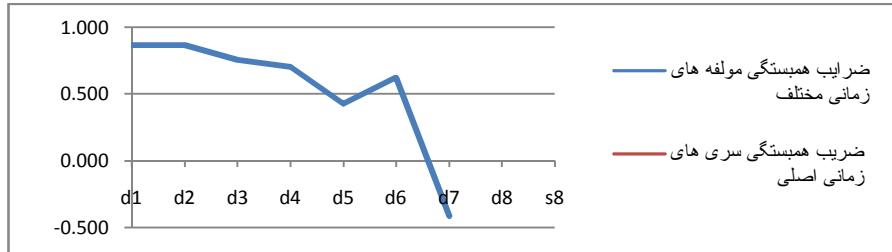
مقدار ضریب همبستگی در مولفه های زمانی در کلیه سطوح به غیر از سطح ۵ بیشتر از ضریب همبستگی مستقیم میان دو متغیر میباشد. بیشترین ضریب همبستگی مربوط به بازه زمانی ۳۷ روز بوده و کمترین آن مربوط به بازه زمانی ۲۳ روز میباشد. ضریب همبستگی مربوط به مولفه سطح ۷ پس از آزمون معنی داری انجام شده مورد قبول قرار نگرفت.



قیمت طلا و شاخص کل بورس تهران

مقدار ضریب همبستگی مستقیم میان دو متغیر با توجه به آزمون معنی داری انجام شده فاقد اعتبار میباشد. بیشترین مقدار همبستگی مربوط به بازه زمانی ۱۱۶۹ روز بوده و برای بازه های کمتر از

۱۸ روز این مقدار منفی میگردد که معرف حرکت در جهت خلاف این دو متغیر در بازه های زمانی مذکور است.



در جدول زیر مشخص شده است که هر یک از متغیرهای مورد مطالعه در سری های زمانی اصلی با کدامیک از متغیرهای دیگر دارای همبستگی بیشتری میباشد.

حداکثر ضرایب همبستگی سریهای زمانی مختلف

| حداکثر همبستگی | سری زمانی | حداکثر همبستگی | سری زمانی |
|----------------|-------------|----------------|---------------|
| فرانک سویس | طلاء | دلار کانادا | دلار استرالیا |
| فرانک سویس | ین ژاپن | دلار استرالیا | دلار کانادا |
| دلار استرالیا | نفت | طلاء | فرانک سویس |
| ین ژاپن | شاخص بورس | فرانک سویس | یورو |
| طلاء | دلار آمریکا | نفت | پوند نگلستان |

در جدول زیر مشخص شده است که هر یک از متغیرهای مورد مطالعه در سطوح مختلف یا بازه های زمانی مختلف با کدامیک از متغیرهای دیگر دارای همبستگی بیشتری میباشد.

حداکثر ضرایب همبستگی سریهای زمانی مختلف در مقیاسهای زمانی مختلف

| سطح ۸ تابع نرم | سطح ۸ | سطح ۷ | سطح ۶ | سطح ۵ | سطح ۴ | سطح ۳ | سطح ۲ | سطح ۱ | |
|-------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| طلاء | یورو | دلار کانادا | دلار کانادا | یورو | یورو | دلار کانادا | دلار کانادا | دلار استرالیا | دلار استرالیا |
| یورو | یورو | طلاء | طلاء | دلار آمریکا | فرانک سویس | دلار استرالیا | دلار استرالیا | دلار کانادا | دلار کانادا |
| طلاء | دلار آمریکا | دلار آمریکا | طلاء | طلاء | ین ژاپن | یورو | یورو | طلاء | فرانک سویس |
| دلار کانادا | دلار کانادا | فرانک سویس | فرانک سویس | فرانک سویس | دلار استرالیا | دلار استرالیا | فرانک سویس | فرانک سویس | یورو |

| سطح ۸ تابع نرم | سطح ۸ | سطح ۷ | سطح ۶ | سطح ۵ | سطح ۴ | سطح ۳ | سطح ۲ | سطح ۱ | پوند نگلستان |
|----------------|-------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|-------------|-------------|--------------|
| نفت | نفت | شاخص بورس | یورو | شاخص بورس | یورو | دلار استرالیا | یورو | یورو | دلار آمریکا |
| فرانک سویس | دلار آمریکا | فرانک سویس | دلار کانادا | فرانک سویس | دلار کانادا | دلار کانادا | فرانک سویس | فرانک سویس | فرانک سویس |
| فرانک سویس | دلار آمریکا | دلار آمریکا | دلار آمریکا | فرانک سویس | دلار آمریکا | دلار کانادا | دلار آمریکا | دلار آمریکا | بن ژاپن |
| بن ژاپن | دلار کانادا | دلار استرالیا | پوند انگلستان | دلار استرالیا | دلار کانادا | دلار کانادا | دلار | دلار آمریکا | نفت |
| بن ژاپن | بن ژاپن | پوند انگلستان | بن ژاپن | نفت | دلار استرالیا | دلار کانادا | طلا | دلار آمریکا | شاخص بورس |
| طلا | فرانک سویس | بن ژاپن | بن ژاپن | بن ژاپن | دلار کانادا | دلار کانادا | بن ژاپن | شاخص بورس | دلار آمریکا |

۵- نتیجه گیری و بحث

با استفاده از تبدیل موجک و تجزیه یک سری زمانی به مولفه های با مقیاسهای زمانی مختلف آن میتوان به اطلاعاتی دسترسی پیدا کرد که در سری زمانی اصلی این اطلاعات قابل مشاهده نمیباشدند. در این تحقیق از تبدیل موجک جهت بررسی میزان همبستگی سری های زمانی مختلف مالی در مقیاسهای زمانی مختلف استفاده گردید. در پایان مشخص گردید

- مقدار ضریب همبستگی دو سری زمانی در مقیاسهای زمانی مختلف میتواند با مقدار ضریب همبستگی مستقیم سریهای اصلی متفاوت باشد. این مقدار در بعضی از بازه های زمانی بیشتر و در برخی دیگر کمتر از مقدار ضریب همبستگی دو سری اصلی میباشد.
- در مورد بعضی از سریهای اگرچه میان دو سری زمانی اصلی همبستگی معنی داری حاصل نشد اما در مقیاسهای زمانی مختلف آنها ضرایب همبستگی معنی داری حاصل گردید.
- حداقل همبستگی برای هر سری زمانی در سطوح مختلف مورد مطالعه (بازه های زمانی مختلف) ممکن است با سریهای متفاوتی اتفاق بیافتد.

نتایج پژوهش حاضر، شواهدی فراهم کرد که پیشنهادات زیر قابل ارائه است:

- استفاده از تبدیل موجک بعنوان یک ابزار ریاضی قدرتمند برای مطالعه ویژگیهای سریهای زمانی مختلف مالی اقتصادی در بازه های زمانی مختلف ، توصیه میگردد.
- برای پیش بینی سریهای زمانی میتوان از ابزار موجک بعنوان تجزیه کننده سریهای کننده مولفه های با مقیاسهای زمانی متفاوت استفاده و سپس با استفاده از مدلهای مختلف مناسب برای مقیاسهای مختلف زمانی کار پیش بینی اطلاعات را با دقت بالاتر انجام داد.
- پیشنهاد میگردد از تبدیل موجک برای بررسی روابط میان متغیرهای مختلف مالی- اقتصادی مانند تورم ، رشد اقتصادی ، تولید ناخالص ملی و ... در مقیاسهای مختلف زمانی استفاده گردد.

فهرست منابع

- * انصاری ، حجت الله ، ۱۳۸۶ ، "بررسی تاثیر استفاده از مقیاسهای زمانی متفاوت در محاسبه ارزش در معرض ریسک با استفاده از تئوری موجک " ، پایان نامه ، دانشکده مدیریت دانشگاه تهران.
- * شکیبایی ، علیرضا ، افلاطونی ، عباس ، نیکبخت ، لیلی ، ۱۳۸۷ ، " بررسی رابطه بلند مدت بین نرخ ارز و قیمت‌های نفت در کشورهای عضو اوپک " ، مجله دانش و توسعه (علمی - پژوهشی) سال پانزدهم، شماره ۲۵ ، زمستان ۱.
- * عباسی نژاد ، حسین ، محمدی ، شاپور ، ۱۳۸۴ ، " تحلیل سیکل های تجاری ایران با استفاده از نظریه موجک ها " ، مجله تحقیقات اقتصادی / شماره ۷۵ / صفحات ۱ - ۲۰ .
- * علی زاده ، محمد ، ۱۳۸۶ ، " بررسی رابطه بین بازده سهام و تورم در بورس اوراق بهادار تهران در زمان - مقیاس های مختلف با استفاده از تبدیل موجک " ، پایان نامه ، دانشکده مدیریت دانشگاه تهران.
- * مزینی ، امیرحسین ، یاوری ، کاظم ، ۱۳۸۳ ، " اثر تغییرات نرخ ارز بر بخش تجاری کشور " . فصلنامه پژوهش‌های اقتصادی شماره ۱۴ زمستان ۱۳۸۳ .
- * Alexandridis, Zapranis, Livanis3, 2009 , " Analyzing Crude Oil Prices and Returns Using Wavelet Analysis and Wavelet Networks " , <http://www.ssrn.com>.
- * Dowd, Kevin, 2006, "U.S. Core Inflation: A Wavelet Analysis", Nottingham University Business School.
- * Gencay R., Selcuk F., Whitcher B., 2002, "An Introduction to Wavelets and Other Filtering Methods in Finance and Economics", Academic Press.
- * Hahn Shik Lee, 2001, "International Transmission of Stock Market Movements: A Wavelet Analysis on MENA Stock Markets", Department of Economics, Sogang University, Seoul, KOREA.
- * James B. Ramsey, 2002, " Wavelets in Economics and Finance: Past and Future ", Department of Economics Faculty of Arts and Science New York University.
- * Laidi A., 2009, "Currency Trading and Intermarket Analysis " , WILEY.
- * Mallat S., 1999,"A wavelet tour of signal processing", Academic Press.
- * Marco Gallegati, 2005, "A Wavelet Analysis of MENA stock Markets", DEA and SIEC, Universita Politecnica Marche, Ancona, Italy.
- * Murphy J., 2004,"Intermarket analysis", WILEY.
- * Percival D., Walden A., 2000, "Wavelet methods for time series analysis", Cambridge university press.
- * Shelley G., Wallace F., 2005, " The relation between U.S. money growth and inflation: evidence from a band-pass filter " , Economic Bulletin, Vol. 5, No. 8, pp. 1-13.
- * Tomomichi Nakamura, Michael Small, 2007, "Correlation structures in short-term variability's of stock indices and exchange rates", Physica A 383 p 96-101, Science Direct.

- * Xun ZHANG, K.K. LAI, Shouyang WANG, 2007, "Empirical Mode Decomposition with an Application to Crude Oil Price Analysis ", Center for Forecasting Science, Chinese Academy of Sciences.
- * Yousefi Sh., Weinreich L., Reinarz D., 2005, "Wavelet-based prediction of oil prices", Chaos, Solitons and Fractals 25, 265–275

یادداشت‌ها

- ¹ Ramsey
- ² Lampart
- ³ Percival
- ⁴ Walden
- ⁵ Lee
- ⁶ Gencay
- ⁷ Selcuk
- ⁸ Whitcher
- ⁹ Yousefi
- ¹⁰ Weinreich
- ¹¹ Reinarz
- ¹² Gallegati
- ¹³ Wong
- ¹⁴ Anderson
- ¹⁵ Rhaeim
- ¹⁶ Ammou
- ¹⁷ Mabrouk
- ¹⁸ Avaritsioti
- ¹⁹ Hang
- ²⁰ Ian
- ²¹ Suhartono
- ²² Subanar
- ²³ Yogo
- ²⁴ Maximal overlap discrete wavelet transform
- ²⁵ Mother wavelet
- ²⁶ Nyquist rule
- ²⁷ Critical sampling
- ²⁸ smooth
- ²⁹ details
- ³⁰ Wavelet method for time series analysis
- ³¹ Charlie Cornish
- ³² Percival
- ³³ Walden