فصلنامــه علمی پژوهشی دانش سرمایه‌گــذاری
سال سوم/ شماره دهم/ تابستان ۱۳۹۳

کاربرد مدل پایدار در انتخاب پرتفوی بهینه سهام

سعید فلاح‌پور
استادیار دانشکده مدیریت، دانشگاه تهران

فرید تندنویس
دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی مالی، دانشکده مدیریت، دانشگاه تهران (مسئول مکاتبات)

تاریخ دریافت: ۹۲/۶/۲۶ تاریخ پذیرش: ۹۲/۱۱/۳۰

چکیده

در این مقاله، با استفاده از رویکرد بهینه‌سازی پایدار، که بر خلاف سایر رویکردهای بهینه‌سازی در شرایط عدم اطمینان، فرضی در مورد توزیع احتمال پارامترهای مدل نمی‌نماید و برای هر پارامتر یک مجموعه عدم قطعیت تعریف می‌کند؛ به بررسی مساله انتخاب پرتفوی پرداخته شده است. مدل ارائه شده در مقاله دارای پارامتری است که میتواند میزان محافظه‌کاری سرمایه‌گذار در انتخاب پرتفوی را کنترل نماید. به منظور بررسی عملکرد مدل از داده‌های مربوط به ۵۰ شرکت فعال‌تر سه ماه اول سال ۱۳۹۲ بورس اوراق بهادار تهران استفاده شده است. نتایج آزمون خارج از نمونه در پژوهش نشان دادند که پرتفوی پایدار نسبت پرتفوی روی مرز کارای مارکویتز (که بازده مورد انتظار آن برابر با بازده مورد انتظار پرتفوی پایدار است) بر اساس شاخص شارپ، عملکرد بهتری داشته است.

واژه‌های کلیدی: بهینه‌سازی پرتفوی، بهینه‌سازی پایدار، مدل مارکویتز، معیار شارپ.

۱- مقدمه

سرمایه‌گذاران به دنبال انتخاب ترکیب بهینه‌ی دارایی‌ها و تخصیص ثروت خود در میان آن‌ها به گونه‌ای هستند که بتوانند به هدف سرمایه‌گذاری (افزایش درآمد قابل تصرف در دوره‌های آتی) دست یابند. مساله انتخاب دارایی‌ها و تعیین میزان سرمایه‌گذاری در هرکدام از آنها، با نام مساله انتخاب پرتفوی شناخته می‌شود. این مساله می تواند به صورت یک مساله بهینه‌سازی کمی مورد بررسی قرار گیرد. هری مارکویتز اولین کسی بود که مساله فوق را به صورت کمی مطرح نموده و روش حداقل واریانس او به عنوان اساس توسعه نظریه مالی مدرن قرار گرفته است. در دنیای تئوریک مسائل بهینه‌سازی، فرض بر این است که پارامترهای ورودی مدل دارای قطعیت هستند. اما واضح است که برای به کار بردن روش‌های بهینه‌سازی در دنیای واقعی فرض قطعیت پارامترها فرض صحیحی نیست. در مساله بهینه‌سازی پرتفوی اگر بازده واقعی دارایی‌ها نسبت به مقدار تخمین زده شده (پارامترهای مدل) نوسان کنند، جوابی که به عنوان جواب بهینه برای مساله ارائه شده است ممکن است حتی از محدوده جواب های موجه خارج شود. بهینه‌سازی پایدار یکی از روش‌هایی است که عدم قطعیت پارامترهای مدل بهینه‌سازی را، بدون اینکه نیازی به تعریف توزیع احتمال پارمترها باشد؛ در نظر می‌گیرد. در این پژوهش سعی بر این است که با استفاده از رویکرد بهینه‌سازی پایدار در مدل بهینه‌سازی پرتفوی، عدم قطعیت پارامترها (بازده دارایی‌ها) را در نظر گرفته و تاثیر این عدم قطعیت بر مدل ارائه شده بررسی گردد. همچنین پس از بررسی مدل پایدار بهینه‌سازی پرتفوی، عملکرد آن، توسط معیار شارپ، با مدل مارکویتز مقایسه خواهد شد.

۲- مبانی نظری و مروری بر پیشینه پژوهش

۲-۱- مدل‌های بهینه سازی کمی

بر اساس تعاریف موجود در ریاضیات کاربردی، بهینه سازی عبارت است از کمینه سازی (یا بیشینه سازی) یک تابع از متغیرهای تصمیم که با نام تابع هدف شناخته می‌شود؛ تحت شرایطی که جواب مساله در مجموعه‌ای از محدودیت‌ها صدق نماید. (Cornuejols. G and Tutuncu. R, 2005, 5)

$$
\begin{aligned}
&\min_x f(x) \\
&st: \\
&g_i(x) = 0 \; \forall i \in \xi \\
&g_i(x) \geq 0 \; \forall i \in \tau
\end{aligned}
$$

در این فرم، $f(x)$ تابع هدف؛ $g_i(x)$ محدودیت‌های مساله و x متغیرهای تصمیم هستند. مسائل بهینه سازی دارای فرم‌ها مختلف خطی، غیر خطی، با اعداد صحیح و... هستند. این مسائل دارای کاربردهای بسیاری در علوم مختلف از جمله برنامه ریزی و کنترل تولید و موجودی‌ها، مسائل مالی و... می‌باشند. یکی از مهم ترین کاربردهای این مدلها در علوم مالی، مدل بهینه سازی پرتفوی است که در ادامه به آن پرداخته می شود.

۲-۲- مدل بهینه‌سازی پرتفوی

در بخش قبل اشاره شد که هری مارکویتز در سال ۱۹۵۲ مساله انتخاب پرتفوی را به صورت کمی مطرح نمود.(Markowitz. H, 1952, 77-91) مدل مارکویتز صورت زیر فرموله می‌شود:

- کمینه‌سازی ریسک، تحت شرایطی که بازده پرتفوی از حد مورد نظر سرمایه‌گذار بیشتر باشد.

فرم کمی مساله بهینه سازی پرتفوی به شکل زیر است:

$$\min_x \ \sigma_p$$
$$s.t:$$
$$\sum_{i=1}^{n} \overline{r_i}.x_i \geq r_p$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$
$$x_i \geq 0$$

در مدل فوق σ_p نشان‌دهنده ریسک پرتفوی، r_p نشان‌دهنده بازده مورد انتظار پرتفوی، $\overline{r_i}$ نشان دهنده بازده مورد انتظار هر دارایی و x_i نشاندهنده وزن سرمایه گذاری در هر دارایی است. در واقع مارکویتز در مدل خود، پرتفوی‌هایی را معرفی می‌کند که در یک سطح مشخص بازدهی مورد انتظار، کمترین ریسک را دارند. مساله مهمی که در بهینه‌سازی پرتفوی وجود دارد این است که بازده و ریسک، به عنوان ورودی مدل، چگونه تعریف می‌شوند. در مدل مارکویتز، میانگین بازده تاریخی به عنوان معیار بازدهی هر دارایی و انحراف استاندارد بازده تاریخی به عنوان معیار رسیک در نظر گرفته می‌شود. (Markowitz. H, 1952, 77-91) تحقیقات بعدی که در مورد بهینه‌سازی پرتفوی انجام شده است بر روی چگونگی تعاریف ریسک و بازده تمرکز دارند.

برخی از پژوهش‌های انجام شده بر روی مساله بهینه‌سازی پرتفوی بر روی تعریف ریسک تمرکز کرده‌اند. یکی از مهمترین نقص‌های مطرح شده نسبت به انتخاب واریانس به عنوان معیار ریسک این است که واریانس، نسبت به بازده‌های بالا و پایین دید یکسانی دارد. به عبارتی، از نظر مدلی که

واریانس را به عنوان معیار ریسک در نظر می‌گیرد؛ مقدار بازده خیلی بالا و خیلی پایین برای سرمایه-گذار ریسک یکسانی را در پی خواهند داشت. ولی در واقعیت، سرمایه‌گذاران فقط نوسانات قسمت نامطلوب بازده را به عنوان ریسک در نظر می‌گیرند. (Rom. B. M. and Ferguson.K. W, 1994, 11-17) مطالعات بسیاری نیز نشان می‌دهند که بازده دارایی‌ها درای توزیع متقارن نیست.(Chunhachinda. P et. al, 1993, 143-167) نوسانات زیر میانگین بازده می‌تواند معیار مفیدی برای بیان ریسک باشد. یکی از معیارهایی که در این رابطه استفاده می‌شود، نیم‌واریانس است که ابتدا توسط مارکویتز به عنوان معیار ریسک استفاده شد. (Markowitz.H,1959) و بعد از آن توسط محققان دیگری مورد استفاده قرار گرفت. (Grootveld. H. and Hallerbach. W, 1999, 304-319)

تحقیقات دیگری نیز بر روی تعریف بازده به عنوان یکی از پارامترهای مدل تمرکز نموده و در فضای قطعیت یا عدم قطعیت بازده دارایی‌ها بحث نموده‌اند. در دنیای تئوریک مسائل بهینه‌سازی، فرض بر این است که پارامترهای ورودی مدل دارای قطعیت هستند. اما واضح است که برای به کار بردن روش‌های بهینه‌سازی در دنیای واقعی فرض قطعیت پارامترها فرض صحیحی نیست.(BenTal, et. al, 2004, 3-4) زیرا:

- ✓ برخی از داده‌های ورودی (مثل تقاضا برای یک کالای خاص در مسائل تولیدی و یا بازده دارایی‌ها در مسائل مالی)؛ در زمانی که مساله مورد تحلیل قرار می‌گیرد موجود نیستند و باید پیش‌بینی شوند. مقدار حقیقی پارامتر مورد نظر می‌تواند از مقدار پیش‌بینی شده نوسان کند. این داده‌ها، در برگیرنده خطای پیش‌بینی هستند.
- ✓ برخی از داده‌های ورودی (مثل پارامترهای مربوط به فرایندهای تکنولوژیکی) نمی‌توانند به طور دقیق مورد اندازه‌گیری قرار گیرند. در واقع این پارامترها حول یک مقدار اسمی نوسان می‌کنند. این داده‌ها، در برگیرنده خطای اندازه‌گیری هستند.

با توجه به توضیحات ارائه شده در نظر گرفتن عدم اطمینان پارامترهای مدل‌های بهینه سازی، برای به کار بردن آنها در واقعیت، مساله مهمی است.

۲-۳- بهینه‌سازی در شرایط عدم اطمینان

اشاره گردید که در یک مساله بهینه‌سازی اگر پارامترهای مدل از مقدار اسمی‌خود نوسان کنند، امکان دارد جواب بهینه‌ای که بر اساس مقدار اسمی پارامترها محاسبه شده است، شرایط بهینگی را از دست بدهد و یا برخی از محدودیت‌ها را نقض کند و از محدوده جواب‌های موجه خارج شود.(Cornuejols. G and Tutuncu. R, 2005, 13) موضوع بهینه‌سازی در شرایط عدم اطمینان در

دهه ۱۹۵۰ توسط دانتزیک با ارائه بهینه‌سازی تصادفی(Dantzig. G,1955,197-206)؛ و کارنس و کوپر با ارائه بهینه‌سازی در شرایط محدودیت‌های احتمالی(Charnes.A and Cooper. W, 1959, 73-79)؛ مطرح گردید. با اینکه این دو رویکرد (بهینه‌سازی تصادفی و بهینه‌سازی در شرایط محدودیت‌های احتمالی) بر اصول و روش‌های تحلیل متفاوتی مبتنی هستند، بر فرض "مشخص بودن توزیع احتمال پارامترهای تصادفی مدل" بنا شده‌اند. به عبارتی از اطلاعات موجود برای این پارامترها، برای تبدیل مدل تصادفی به مدل قطعی استفاده می‌شود. (Bertsimas. D. and Thiele. A, 2006,2) مدل قطعی نهایی می‌تواند به صورت برنامه‌ریزی خطی، غیر خطی و ... باشد. امروزه بهینه‌سازی تصادفی، خود را به عنوان یکی از ابزارهای توانمند مدل‌سازی عدم اطمینان تحت شرایطی که اطلاعات کافی و مشروح در مورد توزیع احتمال پارامترهای مدل مشخص باشد، توسعه داده است. اما واضح است که در مسائل دنیای واقعی، تصمیم‌گیرنده چنین اطلاعات دقیقی را در اختیار ندارد. (Bertsimas. D. and Thiele. A, 2006,2) این مساله نیاز به تکنیک‌های کمی - که عدم اطمینان پارامترهای مدل را بدون نیاز به بررسی توزیع احتمال آنها در نظر می‌گیرند- را آشکار می سازد. این رویکرد در ادبیات موضوع با عنوان بهینه‌سازی پایدار مورد بررسی قرار گرفته است.

۲-۴- بهینه‌سازی پایدار

بهینه‌سازی پایدار زمانی مورد استفاده قرار می‌گیرد که تحلیل‌گر به دنبال جوابی است که به ازای تمامی‌مقادیر ممکن برای پارامتر دارای عدم قطعیت خوب رفتار کند. (شدنی باقی بماند.) بر خلاف برنامه‌ریزی تصادفی که بر اساس تئوری احتمالات با عدم قطعیت پارامترها رفتار می‌کند، این رویکرد به تمامی مقادیر ممکن برای پارامتر دارای عدم قطعیت، اهمیت یکسان می‌دهد. (به عبارتی این رویکرد، فرضی در مورد توزیع پارامترهای مدل نمی نماید) عدم اطمینان پارامترهای مدل در این رویکرد توسط مجموعه عدم قطعیت؛ که در برگیرنده تمامی‌مقادیر ممکن برای پارامترهای مدل است، توضیح داده می‌شود.(Cornuejols. G and Tutuncu. R, 2005, 13)

در یک مساله برنامه‌ریزی خطی به فرم زیر، فرض می شود پارامترهای ماتریس ضرایب مدل در یک بازه‌ی متقارن نوسان می‌کنند. (فرضی در مورد توزیع پارامترها انجام نمی‌شود.)

$$\max_x \sum_{j=1}^{n} \overline{r_j}.x_j - \Gamma p - \sum_{j=1}^{n} q_j$$

$$p + q_j \geq s_j.x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$$

$$p, q_j, x_j \geq 0$$

$$a_{ij} \in [\overline{a_{ij}} - s_{ij}, \overline{a_{ij}} + s_{ij}]$$

سویستر (Soyster. A, 1973,1154-1157) اولین کسی بود که رویکرد بهینه‌سازی پایدار را برای یک مساله خطی مطرح نمود. با این رویکرد که

- ✓ جواب مساله بهینه‌سازی باید به ازای تمامی مقادیر ممکن برای پارامترهای مدل، شدنی باقی بماند. پس به ازای بدترین حالت ممکن پارامترها شدنی باقی خواهد ماند. (چون سمت راست ماتریس محدودیت‌ها به صورت $\geq b$ تعریف شده است، بدترین حالت ممکن برای محدودیت ها زمانی رخ می‌دهد که هرکدام از a_{ij}ها کمترین مقدار خود، یعنی $\overline{a_{ij}} - s_{ij}$ را اختیار کنند.)

با این تفاسیر رویکرد سویستر به تمامی پارامترهای مدل اجازه می‌دهد که از مقدار اسمی خود نوسان نموده و بدترین مقدار خود را اختیار نمایند. به عبارتی این مدل برای اینکه بتواند محافظه‌کارانه ترین حالت ممکن را برای تصمیم‌گیرنده ایجاد کند، بدبینانه ترین شرایط را در نظر می‌گیرد.

رویکرد برتسیماس و سیم (Bertsimas. D. and Sim. M, 2004, 35-53) به تصمیم گیرنده این اختیار را می‌دهد که میزان محافظه‌کاری را با تعریف یک پارامتر تعیین نماید. مقدار z_{ij} را به صورت زیر معرفی می‌شود.

$$z_{ij} = \frac{a_{ij} - \overline{a_{ij}}}{s_{ij}}$$

چون فرض بر این است که پارامتر a_{ij} قطعا در بازه رابطه (۲-۲) نوسان می‌کند، مقدار z_{ij} در بازه [-1,1] نوسان خواهد نمود. با این توضیح:

$$-n \leq \sum_{j=1}^{n} z_{ij} \leq n, \forall i$$

در بدترین حالت ممکن به پارامترها اجازه بیشترین نوسان داده می‌شود:

$$\sum_{j=1}^{n} |z_{ij}| = n, \forall i$$

$\sum_{j=1}^{n} |z_{ij}| \leq \Gamma_i, \forall i$ اما رویکرد برتسیماس و سیم (Bertsimas.D. andSim.M, 2004, 35-53) با تعریف پارامتر Γ برای هر محدودیت، مقدار انحراف پارامترها از مقدار مرکزی خود را محدود می‌کند. به عبارتی:

- اگر $\Gamma_i = 0$ تمامی z_{ij}ها برابر با صفر می‌باشند. پس محدودیت i در حالت قطعیت کامل تحلیل می‌گردد.
- اگر $\Gamma_i = n$ در واقع پارامترهای محدودیت i ام می‌توانند بیشترین مقدار نوسان، از مقدار مرکزی خود را داشته باشند. محدودیت iام در این شرایط، در محتاطانه‌ترین حالت خواهد بود.

با این توضیحات مدل پایدار برنامه ریزی خطی (مشتمل بر دو مساله بهینه‌سازی اصلی و داخلی) به صورت زیر ارائه خواهد شد:

$$\begin{aligned}
&\min_x c'x \\
&s.t.: \\
&\sum_{j=1}^{n} \overline{a_{ij}}.x_j + \min_{z_i \in \square_i} \sum_{j=1}^{n} s_{ij}.x_j.z_{ij} \ge b_i \\
&x \in X \\
&\square_i = \{z \,\|z_{ij}| \le 1, \forall i,j; \sum_{j=1}^{n} |z_{ij}| \le \Gamma_i, \forall i\}
\end{aligned}$$

مساله کمینه‌سازی داخلی در این فرم عبارت است از:

$$\begin{aligned}
&-\max_{z_{ij}} \sum_{j=1}^{n} s_{ij} |x_j| z_{ij} \\
&s.t. \sum_{j=1}^{n} z_{ij} \le \Gamma_i \\
&0 \le z_{ij} \le 1
\end{aligned}$$

با استفاده از قضیه قوی دوگانگی در این مساله بهینه‌سازی داخلی، مساله اصلی به شکل زیر تبدیل خواهد شد:

$$\begin{aligned}
&\min c^T x \\
&s.t. \\
&\overline{a'_i}.x - \Gamma_i.p_i - \sum_{j=1}^{n} q_{ij} \ge b_i \\
&p_i + q_{ij} \ge s_{ij}.y_j \\
&-y_j \le x_j \le y_j \\
&p_i, q_{ij} \ge 0 \\
&x \in X
\end{aligned}$$

در شرایط بهینگی:

- ✓ مقدار y_j برابر با $|x_j|$ خواهد بود. $y_j = |x_j|$
- ✓ برای هر i مقدار p_i برابر با $\lceil \Gamma_i \rceil$ امین مقدار بزرگ $s_{ij}.|x_j|$ خواهد بود.
- ✓ مقدار q_{ij} برابر خواهد بود با: $\max\{0, s_{ij}.|x_j| - p_i\}$

برای تکمیل این فرایند لازم است که مقدار مناسبی را برای پارامتر Γ که مقدار محافظه‌کاری برای هر محدودیت را مشخص می‌کند، انتخاب نمود. برای هر محدودیت به شکل $a'_i x \ge b_i$ مقدار $1-\varepsilon_i$ به عنوان سطح اطمینان تصمیم‌گیرنده نسبت به محدودیت iام، معرفی می‌شود. در چنین حالتی مقدار

مناسب برای Γ را می‌توان از رابطه زیر محاسبه نمود. که Φ نشان دهنده تابع توزیع تجمعی نرمال استاندارد است. (Bertsimas.D. and Sim. M, 2004, 35-53)

$$\Gamma_i = 1 + \Phi^{-1}(1 - \varepsilon_i)\sqrt{n}$$

۳- روش‌شناسی پژوهش

۳-۱- ساختار پژوهش

در این پژوهش مدل بیشینه‌سازی بازده پرتفوی، به عنوان مدلی که پارامترهای ورودی آن (بازده دارایی‌ها) دارای عدم قطعیت هستند؛ با رویکرد بهینه‌سازی پایدار مورد بررسی قرار می‌گیرد. ابتدا مساله به صورت زیر تعریف می‌شود:

مبلغ ۱ ریال را برای سرمایه‌گذاری در n سهم موجود است. مقدار بازده مورد انتظار سهم i ام در طول دوره سرمایه‌گذاری (مثلا یک ماه) با r_i نمایش داده می‌شود. در پایان دوره سرمایه‌گذاری کل پرتفوی تشکیل شده به فروش خواهد رسید. هدف این است که میزان سرمایه‌گذاری در هر دارایی به گونه ای تعیین شود که در پایان دوره میزان ثروت، بیشینه باشد.

$$\max\left\{\sum_{i=1}^{n} r_i x_i \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1, x_i \ge 0\right\}$$

بدون شک مشخص است که اگر مساله در شرایط قطعیت کامل تحلیل شود، جواب این مدل عبارت است از:

کل ۱ ریال باید در دارایی که بازده مورد انتظار آن بیشتر از سایر دارایی‌ها است، سرمایه‌گذاری شود. اما همانطور که اشاره شد به هیچ وجه نمی‌توان فرض نمود که بازده واقعی هر سهم برابر با بازده مورد انتظار (مقدار تخمین زده شده برای مدل) می‌باشد. از این رو ابتدا باید مدل پایدار بهینه‌سازی پرتفوی معرفی شده و بر اساس آن، مساله تحلیل شود. پس از تحلیل مدل پایدار انتخاب پرتفوی، مدل مارکویتز نیز مورد بررسی قرار گرفته و عملکر این دو مدل با یکدیگر مقایسه خواهد شد.

۳-۲- داده‌های مورد استفاده

در این پژوهش؛ مدل بهینه‌سازی پایدار، برای انتخاب پرتفوی سهام ۵۰ شرکت فعال‌تر بورس اوراق بهادار تهران مورد استفاده قرار گرفته است. از اطلاعات تاریخ ۱۳۸۸/۵/۱ الی ۱۳۹۱/۵/۱ برای تخمین مدل پایدار و مدل مارکویتز؛ و از اطلاعات تاریخ ۱۳۹۱/۶/۱ الی ۱۳۹۲/۵/۱ برای آزمایش خارج از نمونه هر دو مدل بهره گرفته شده است تا معیار مناسبی برای انجام مقایسات زوجی بین دو مدل در اختیار باشد. خلاصه اطلاعات سهام شرکت‌هایی که برای تخمین مدل مورد استفاده قرار گرفته‌اند، در جدول

شماره ۱ قابل بررسی است. (از اطلاعات شرکت‌هایی استفاده شده است که بازده مورد انتظار ماهانه آنها، بر اساس اطلاعات ۱۳۸۸/۵/۱ الی ۱۳۹۱/۵/۱ مثبت ارزیابی شده است. به همین دلیل تعداد سهم‌های مورد نظر از ۵۰ سهم به ۳۳ سهم کاهش یافت.)

۳-۳- معیار ارزیابی عملکرد

به منظور ارزیابی عملکرد پرتفوی از معیار شارپ (Sharpe. W. F. 1966, 119-136) استفاده می‌شود. این شاخص هر دو معیار ریسک و بازده که برای ارزیابی عملکرد پرتفوی مورد نیاز هستند را به طور همزمان در نظر می‌گیرد. این معیار از طریق رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$SH_p = \frac{R_p - R_f}{\sigma_p}$$

مقدار R_f نشان‌دهنده بازده بدون ریسک، R_p نشان‌دهنده بازده پرتفوی و σ_p نشان‌دهنده ریسک (انحراف معیار) پرتفوی است.

جدول شماره ۱: بازده و انحراف معیار تاریخی سهم‌های بررسی شده

سهم	بازده ماهانه مورد انتظار (درصد)	انحراف معیار ماهانه (درصد)	سهم	بازده ماهانه مورد انتظار (درصد)	انحراف معیار ماهانه (درصد)
۱	۱,۱۶۳	۱۱,۳۱۲	۱۸	۱,۶۹۰	۲۱,۳۱۲
۲	۳,۶۴۷	۲۵,۸۱۴	۱۹	۱,۹۸۹	۱۱,۹۲۶
۳	۰,۵۵۴	۱۱,۰۲۶	۲۰	۰,۷۲۵	۱۰,۰۸۴
۴	۳,۱۱۲	۱۲,۲۸۳	۲۱	۰,۲۹۸	۱۵,۳۱۳
۵	۰,۵۹۲	۱۱,۹۷۷	۲۲	۱,۲۹۹	۱۱,۳۶۶
۶	۰	۱۳,۸۱	۲۳	۱,۳۳۴	۱۱,۵۵۴
۷	۰,۸۵۲	۱۶,۳۶۸	۲۴	۰,۹۹۲	۱۲,۶۶۲
۸	۱,۰۲۰	۱۸,۸۰۹	۲۵	۰,۸۸۵	۷,۷۵۴
۹	۱,۱۶۴	۱۶,۴۳۸	۲۶	۰,۷۷۸	۱۳,۵۱
۱۰	۰,۰۰۲	۲۲,۰۲۴	۲۷	۱,۷۵۸	۹,۹۸۷
۱۱	۰,۷۷۹	۱۲,۶۳۹	۲۸	۱,۹۸۸	۱۳,۹۱۸
۱۲	۱,۸۵۲	۱۰,۱۴۸	۲۹	۰	۱۶,۳۷۷
۱۳	۱,۶۳۷	۱۳,۳۸	۳۰	۰,۸۳۶	۶,۳۹۶
۱۴	۲,۴۷۳	۱۴,۷۲۱	۳۱	۰,۴۴۷	۷,۷۳۴
۱۵	۶,۲۱۳	۱۴,۸۲۸	۳۲	۰,۹۷۱	۱۱,۵۹۱
۱۶	۱,۷۲۲	۱۶,۳۶۳	۳۳	۱,۷۰۴	۱۰,۹۳۴
۱۷	۱,۶۳۳	۱۳,۷۹۷	۳۴		

۴- مدل پایدار بهینه‌سازی پرتفوی

مدل پایدار بهینه سازی پرتفوی که در این پژوهش مورد استفاده قرار گرفته است، به صورت زیر استخراج می شود. به منظور بررسی عدم قطعیت بازده دارایی‌ها ابتدا برای بازده دارایی ها مجموعه عدم قطعیت، به فرم زیر تعریف می‌شود.

$$r_i \in [\overline{r_i} - s_i , \overline{r_i} + s_i]$$

$$z_j = \frac{r_j - \overline{r_j}}{s_j}$$

با این توضیحات مدل بیشینه‌سازی بازده پرتفوی به صورت زیر ارائه خواهد شد: در این حالت با استفاده از متغیر t تابع هدف که دارای عدم قطعیت است، به محدودیت ها انتقال داده می‌شود تا به راحتی بتوان از روش برتسیماس و سیم استفاده نمود.

$$\max_{t,x} t$$

$$s.t:$$

$$\sum_{j=1}^{n} r_j .x_j \geq t , \forall r_j \in \Upsilon$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$$

$$x_j \geq 0$$

$$\Upsilon = \{r_j \left| r_j = \overline{r_j} + s_j z_j , \forall j , z \in Z \right.\}$$

$$Z = \left\{ z \left\| z_j \right| \leq 1, \sum_{j=1}^{n} z_j \leq \Gamma \right\}$$

که این مدل هم‌ارز است با:

$$\max_{x,t} t$$

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{r_j}.x_j + \min_{z \in Z} \sum_{j=1}^{n} s_j .x_j .z_j \geq t$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$$

$$x_j \geq 0$$

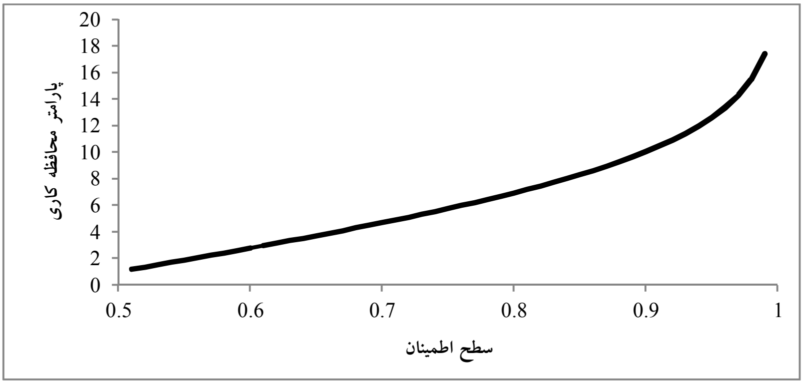
$$Z = \left\{ z \left\| z_j \right| \leq 1, \sum_{j=1}^{n} z_j \leq \Gamma \right\}$$

با استفاده از قضیه قوی دوگانگی برای مساله بهینه‌سازی داخلی مدل بهینه‌سازی پرتفوی به شکل زیر تبدیل خواهد شد:

$$\max_x \sum_{j=1}^{n} \overline{r_j}.x_j - \Gamma p - \sum_{j=1}^{n} q_j$$
$$p + q_j \geq s_j.x_j$$
$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$$
$$p, q_j, x_j \geq 0$$

در قدم پایانی تابع هدف که به محدودیت‌ها منتقل شده بود مجددا به محل قبلی خود بازگشته است. حاصل این فرایند، یک مساله برنامه‌ریزی خطی خواهد بود و جواب بهینه دقیق آن با استفاده از نرم افزارهای استاندارد بهینه‌سازی قابل محاسبه است.

در نمودار زیر رابطه سطح اطمینان و مقدار Γ(بر اساس رابطه ۲-۱۲) برای مساله‌ای با ۵۰ دارایی مشاهده می‌شود. برای مثال به ازای سطح اطمینان ۹۸ درصد مقدار Γ تقریبا برابر ۱۶ خواهد بود. به عبارتی اگر مقدار Γرا برابر ۱۶ در نظر بگیریم به احتمال ۹۸ درصد مقدار واقعی بازده پرتفوی از آنچه که مدل پایدار محاسبه کرده است کوچکتر نخواهد بود.



نمودار شماره ۱: رابطه سطح اطمینان و پارامتر محافظه کاری

۵- فرضیه‌های پژوهش

با توجه به توضیحات ارائه شده بر بخش‌های قبل، فرضیه پژوهش به صورت زیر قابل ارائه است:

- پرتفوی استخراجی از مدل پایدار، نسبت به پرتفوی مارکویتز، عملکرد بهتری دارد.

۶- یافته‌های پژوهش

همانطور که بیان شد، بر مبنای اطلاعات مربوط به سهام ۳۳ شرکت فعال‌تر بورس اوراق بهادار تهران، مجموعه عدم قطعیت برای بازده ماهانه هر کدام از سهم‌ها که با اندیس i نمایش داده می‌شوند به شکل زیر تعریف می‌گردد:

$$r_i \in [\overline{r_i} - \sigma_i , \overline{r_i} + \sigma_i]$$

مقدار $\overline{r_i}$ برابر میانگین بازده تاریخی ماهانه هر سهم و مقدار σ_i برابر انحراف استاندارد بازده ماهانه تاریخی هر سهم هستند. بر اساس این داده‌ها مدل ۴-۴ تحلیل می‌شود. ابتدا عملکرد مدل پایدار، با تحلیل حساسیت مدل بر روی پارامتر Γبررسی شده و پس از آن به مقایسه عملکرد مدل پایدار و مدل مارکویتز پرداخته می‌شود.

۶-۱- بررسی عملکرد مدل پایدار

در این قسمت عملکرد مدل پایدار را با استفاده از تغییر پارامتر محافظه‌کاری مورد بررسی قرار می‌گیرد. همانطور که بیان گردید پارامتر Γ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\sum_{j=1}^{n} \left| z_j \right| \le \Gamma \qquad z_j = \frac{r_i - \overline{r_j}}{s_j} \qquad -n \le \sum_{j=1}^{n} z_j \le n$$

به عبارتی این پارامتر نشان می‌دهد که تحلیل‌گر به پارامترهای مدل تا چه حدی اجازه انحراف از مقدار مرکزی خود را می‌دهد. هر چه این مقدار بیشتر باشد،مدل در حالت بدبینانه‌تری مورد بررسی قرار می‌گیرد. زیرا امکان اینکه پارامترهای مدل (بازده دارایی ها) مقدار کمتری را به خود تخصیص دهند، بیشتر می‌شود. نکته مهم اینجاست که اگر مقدار Γ را برابر صفر قرار باشد به پارامترها اجازه هیچ نوسانی داده نشده است. پس انتظار می‌رود که در این شرایط، مدل کل سرمایه را در دارایی سرمایه‌گذاری کندکه بیشترین بازدهی مورد انتظار (مقدار پیش بینی مرکزی هر دارایی) را داشته است. همچنین اگر مقدار Γ را برابر ۳۳ قرار دهیم، بدبینانه‌ترین حالت ممکن را در نظر گرفته‌ایم و به عبارتی تمامی پارامترهای مدل، بدترین مقدار خود ($\overline{r_i} - \sigma_i$) را اختیار نموده‌اند. در این حالت مدل کل سرمایه را در دارایی سرمایه‌گذاری می‌کند که بیشترین مقدار $\overline{r_i} - \sigma_i$ را دارد.

جدول شماره ۲- تاثیر تغییرات سطح محافظه کاری بر بازده مورد انتظار پرتفوی پایدار

Γ	بازده مورد انتظار پرتفوی ٪
۰	۶٫۲۱۳
۱	۲٫۱۵۷
۲	۱٫۵۹۲
۳	۱٫۴۲۶
۴	۱٫۳۲۸
۵	۱٫۳۲۸
...	...
۳۳	۰٫۸۳۶

مشاهده می‌شود که هرچه میزان محافظه کاری مدل و به عبارتی ریسک‌گریزی سرمایه‌گذار بیشتر باشد، مقدار بازده مورد انتظار پرتفوی نیز کاهش پیدا نموده است. همچنین به ازای $\Gamma = 0$ کل سرمایه در دارایی شماره ۱۵ با بازده مورد انتظار ۶٫۲۱۳ درصد سرمایه‌گذاری می‌گردد. و به ازای $\Gamma = 33$ (محافظه‌کارانه ترین حالت ممکن) کل سرمایه در دارایی شماره ۳۰ که مقدار $\overline{r_i} - \sigma_i$ آن از بقیه دارایی‌ها بیشتر است، سرمایه‌گذاری شده است.

۶-۲- آزمون فرضیه (مقایسه عملکرد مدل مارکویتز و مدل پایدار)

در این قسمت پس از بررسی مدل پایدار و محاسبه مرز کارای مارکویتز بر اساس اطلاعات تاریخ ۱۳۸۸/۵/۱ الی ۱۳۹۱/۵/۱؛ به منظور انجام آزمایش خارج از نمونه، دو پرتفوی با عنوان‌های A و B معرفی می‌شوند.

پرتفوی A: پرتفوییی که وزن ها آن بر مبنای مدل پایدار استخراج شده است. (به منظور ایجاد سطح اطمینان ۹۵ درصدی مقدار پارامتر Γ برابر ۱۲ در نظر گرفته شده است.)

پرتفوی B: پرتفوییی از مرز کارای مارکویتز که بازده مورد انتظار آن برابر با بازده مورد انتظار پرتفوی استخراجی از مدل پایدار است.

بدین منظور ابتدا مدل ۴-۳ اجرا شده و وزن‌های پرتفوی پایدار(A) استخراج می‌شوند. بر اساس این وزن‌ها، بازده مورد انتظار پرتفوی پایدار محاسبه می‌شود. بازده مورد انتظار پرتفوی پایدار را، به عنوان بازده مورد انتظار پرتفوی مارکویتز قرار داده، و با اجرای مدل مارکویتز، وزن‌های پرتفوی مارکویتز (B) نیز استخراج می‌شوند. حال، براساس وزن‌های استخراجی هر کدام از دو پرتفوی و

اطلاعات واقعی سهم‌ها از تاریخ ۱۳۹۱/۶/۱ الی ۱۳۹۲/۵/۱؛ بازده وریسک ماهانه واقعی پرتفوهای A و B محاسبه شده و بر اساس شاخص شارپ به مقایسه زوجی پرتفوهای Aو B پرداخته شده است.

مقدار بازده بدون ریسک (برای محاسبه معیار شارپ) برابر میانگین بازده ماهانه اوراق مشارکت سال‌های ۱۳۸۸ الی ۱۳۹۲ در نظر گرفته شده است. (۱,۵۶ درصد)

در جدول شماره ۳ بازده، ریسک و معیار شارپ هر کدام از ۲ پرتفوی برای ۱۲ ماه قابل بررسی است.

جدول شماره ۳: بازده واقعی، ریسک و معیار شارپ پرتفوهای A، B

ماه	پرتفوی A			پرتفوی B		
	بازده ٪	**ریسک ٪**	**معیار شارپ**	**بازده ٪**	**ریسک ٪**	**معیار شارپ**
۱	-۱,۳۲	۵,۵۱	-۰,۵۲۳	-۲,۴۱	۴,۲۶	-۰,۹۳۲
۲	۵,۶۷	۵,۵۸	۰,۷۳۷	۲,۱۲۸	۴,۳۳	۰,۱۳۱
۳	۱,۲۵	۶,۹۴	۱,۵۸	۱۱,۸۵	۵,۶۵	۱,۸۲۲
۴	۰,۶۶۳	۶,۴	-۰,۱۴۲	۰,۴۳۱	۵,۳۹	-۰,۲۱۰
۵	۳,۳۱۷	۶,۱۶	۰,۲۸۵	۰,۰۸	۴,۶۴	-۰,۳۱۹
۶	-۳,۱۵	۶,۲۲	-۰,۷۵۷	۱,۴۸۷	۴,۶۴	-۰,۰۱۶
۷	۱,۱۶۹	۶,۲۳	-۰,۰۶۲	۰,۶۳	۴,۶۵	-۰,۴۲۷
۸	-۰,۰۰۲	۶,۲۱	-۰,۲۵۵	-۳,۳۸	۴,۸	-۱,۰۲۹
۹	۶,۳۰۴	۶,۴۵	۰,۷۳۵	-۵,۷۹	۵,۰۹	۰,۸۲۹
۱۰	۱,۶۲۵	۶,۳۸	۰,۰۱۰	۰,۶۴	۵,۰۶	-۰,۱۸۰
۱۱	۲۰,۷۷	۷,۵۲	۲,۵۵	۱۵,۹۳	۶,۴۲	۲,۲۳۹
۱۲	۱۸,۰۳	۷,۷۱	۲,۱۳	۱۴,۸۸	۷,۲۹	۱,۸۲۷
جمع بندی	میانگین بازده ماهانه واقعی	انحراف معیار بازده ماهانه واقعی	معیار شارپ	میانگین بازده ماهانه واقعی	انحراف معیار بازده ماهانه واقعی	معیار شارپ
	۵,۴۷	۷,۷۱	۰,۵۰۶	۳,۹۰	۷,۲۹	۰,۳۲۱

جدول شماره ۳ از دو قسمت تشکیل شده است. قسمت اول جدول؛ بازده واقعی، ریسک واقعی و معیار شارپ هر دو پرتفوی برای ۱۲ ماه (از ۱۳۹۱/۶/۱ الی ۱۳۹۲/۵/۱) را نشان می‌دهد. قسمت دوم جدول اطلاعات این ۱۲ ماه را جمع بندی نموده است. در قسمت دوم جدول میانگین بازده ماهانه واقعی و انحراف معیار ماهانه واقعی محاسبه شده و بر اساس این اطلاعات شاخص شارپ محاسبه شده است. مشاهده می‌شود شاخص شارپ پرتفوی A از پرتفوی B بیشتر است. به منظور مقایسه دقیق‌تر عملکرد دو پرتفوی بر مبنای اطلاعات ۱۲ ماه (بخش اول جدول شماره ۳) به مقایسه زوجی (فروند،

جان، ۲۰۰۵، ۵۲۱) پرتفوی A و B پرداخته می‌شود. هدف آزمون مقایسات زوجی بررسی فرضیه "برتری عملکرد پرتفوی پایدار نسبت به پرتفوی مارکویتز"است. چون معیار ارزیابی عملکرد در این پژوهش شاخص شارپ پرتفوی است، باید این فرضیه که "شاخص شارپ پرتفوی پایدار از شاخص شارپ پرتفوی مارکویتز بیشتر است"؛ آزمون شود.

مقایسه زوجی بر روی شاخص شارپ ۱۲ ماه دو پرتفوی انجام خواهد شد. به منظور انجام آزمون مقایسات زوجی ابتدا باید شرط نرمال بودن توزیع احتمال آنچه که مورد آزمون قرار می‌گیرد (در اینجا شاخص شارپ دو پرتفوی) بررسی شود. بدین منظور ابتدا بر روی شاخص شارپ هر کدام از دو پرتفوی تست نرمالیتی انجام می‌شود.

بر روی داده‌های شاخص شارپ پرتفوی پایدار، آزمون کولموگروف – اسمرینف انجام می‌شود. فرض صفر این آزمون، را با این عنوان که "شاخص شارپ پرتفوی پایدار دارای توزیع نرمال است" ارائه می‌شود. در جدول شماره ۴ مقدار p-value آزمون قابل بررسی است:

جدول شماره ۴: نتایج آزمون نرمالیتی بر روی شاخص شارپ پرتفوی پایدار

آزمون	کلموگروف – اسمرینف
p-value	۰٫۱۵>

با توجه به مقدار p-value در آزمون، در سطح معنا داری ۰٫۰۵ فرض "نرمال بودن شاخص شارپ پرتفوی پایدار" را نمی‌توان رد نمود.
همین فرایند برای شاخص شارپ پرتفوی مارکویتز نیز انجام می‌شود:

جدول شماره ۵: نتایج آزمون نرمالیتی بر روی شاخص شارپ پرتفوی مارکویتز

آزمون	کلموگروف – اسمرینف
p-value	۰٫۰۸

با توجه به مقدار p-value در آزمون، در سطح معنا داری ۰٫۰۵ فرض "نرمال بودن شاخص شارپ پرتفوی مارکویتز" را نمی توان رد نمود. با توجه به آزمون‌های انجام شده و اینکه شاخص شارپ برای هر دو پرتفوی پایدار و مارکویتز دارای توزیع نرمال است، می‌توان از آزمون مقایسات زوجی استفاده نمود. به منظور انجام این آزمون ابتدا اختلاف بین شاخص شارپ پرتفوی پایدار و پرتفوی مارکویتز

برای هر ماه (j) محاسبه شده و با D_j نمایش داده می‌شود. آزمون فرضیه به صورت زیر انجام خواهد شد:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_D = 0 \\ H_1 : \mu_D > 0 \end{cases}$$

$$t_0 = \frac{\overline{D}}{S / \sqrt{n}}$$

در این آزمون،پذیرش فرض صفر به این مفهوم است که مدل پایدار نسبت به مدل مارکویتز برتری **نداشته** است. آماره آزمون به صورت زیر محاسبه خواهد شد:

که $\overline{D}$ برابر با میانگین D_jها و S برابر با انحراف استاندارد D_jها می‌باشد.

اگر فرض صفر صحیح باشد آماره t_0 دارای توزیع t با n-1(در اینجا ۱۱) درجه آزادی خواهد بود. ناحیه پذیرش فرض صفر در سطح اطمینان ۹۵ درصد به صورت $(-\infty, ۱.۷۹۵۸) = (-\infty, t_{.۹۵,۱۲-۱})$ می‌باشد.

جدول شماره ۶: اختلاف معیار شارپ بین دو پرتفوی A و B

J	معیار شارپ A SH_A		معیار شارپ B SH_B		$SH_A - SH_B(D_j)$
۱	-۰,۵۲۳		-۰,۹۳۲		۰,۴۰۹
۲	۰,۷۳۷		۰,۱۳۱		۰,۶۰۶
۳	۱,۵۸		۱,۸۲۲		-۰,۲۳۳
۴	-۰,۱۴۲		-۰,۲۱۰		۰,۰۶۹
۵	۰,۲۸۵		-۰,۳۱۹		۰,۶۰۴
۶	-۰,۷۵۷		-۰,۰۱۶		-۰,۷۲۴
۷	-۰,۰۶۲		-۰,۴۲۷		۰,۴۰۹
۸	-۰,۲۵۵		-۱,۰۲۹		۰,۷۷۴
۹	۰,۷۳۵		۰,۸۲۹		-۰,۰۹۳
۱۰	۰,۰۱۰		-۰,۱۸۰		۰,۱۹۱
۱۱	۲,۵۵		۲,۲۳۹		۰,۳۱۶
۱۲	۲,۱۳		۱,۸۲۷		۰,۳۰۶

جدول شماره ۶: نتیجه آزمون مقایسات زوجی

$\overline{D}_{A,B}$	$S_{A,B}$	مقدار آماره (A و B)	p-value
۰,۲۱۸	۰,۴۲۰	۱,۷۹۷	%۴,۹۹

با توجه به مقدار p-value و مقدار آماره آزمون مقایسات زوجی، فرض صفر در سطح معنا داری ۵ درصد رد می‌شود. این مساله به این مفهوم است که مدل پایدار نسبت به مدل مارکویتز عملکرد بهتری داشته است.

۷- نتیجه گیری و بحث

در این پژوهش عملکرد مدل پایدار بهینه سازی پرتفوی مورد بررسی قرار گرفت. خروجی این مدل، وزن‌های پرتفویی هستند که اگر بر مبنای آنها، در دارایی‌ها سرمایه گذاری کنیم؛ در یک سطح اطمینان مشخص، بازده واقعی پرتفوی از بازده مورد انتظار معرفی شده توسط مدل کمتر نخواهد بود. سطح اطمینان، توسط پارامتر محافظه‌کاری در مدل کنترل می‌شود که به وسیله سرمایه گذار قابل تغییر است. هرچه سطح اطمینان مدل و به عبارتی پارامتر محافظه کاری بیشتر باشد، بازده مورد انتظار پرتفوی کاهش می‌یابد.

همچنین در این پژوهش ، عملکرد پرتفوی پایدار و پرتفوی مارکویتز (که بازده مورد انتظارآن برابر با بازده مورد انتظار پرتفوی پایدار است)، توسط آزمون خارج از نمونه مقایسه گردید. در بخش پیشینه پژوهش به این مطلب اشاره گردید که پرتفوی‌هایی که بر روی مرز کارای مارکویتز قرار می‌گیرند، در هر سطح بازدهی مورد انتظار دارای مینیمم ریسک هستند. اما بر مبنای آزمون خارج از نمونه که وزن‌های استخراجی دو پرتفوی را در واقعیت مورد تحلیل و بررسی قرار می‌دهد مشاهده شد که به دلیل در نظر گرفتن عدم قطعیت پارامترها در مدل پایدار، آزمون مقایسات زوجی رای به برتری عملکرد مدل پایدار نسبت به مدل مارکویتز می‌دهد.

فهرست منابع

- فروند، جان؛ (۲۰۰۵)؛ "آمار ریاضی و کاربردهای آن" (ترجمه محمد قاسم وحیدی اصل، علی عمیدی)، چاپ اول، مرکز نشر دانشگاهی
- BenTal. A and ElGhaoui. L and Nemirovski. A, (2004), “Robust optimization”, Princeton University Press
- Bertsimas. D. and Sim. M.(2004) “The price of robustness”, Operations Research,35-53
- Bertsimas. D and Thiele. A (2006), “Robust and Data-Driven Optimization: Modern Decision-Making Under Uncertainty”, Tutorials in Operations Research, 95–122
- Charnes. A and Cooper. W,(1959) “Chance-constrained programming” ,Management Science, 73- 79,
- Chunhachinda. Pet. al,(1997)“Portfolio selection and skewness, Evidence from international stock markets”, Journal of Banking & Finance,143-167

- Cornuejols. G and Tutuncu. R (2005), “Optimization Methods in Finance”, Carnegie Mellon University
- Dantzig. G.(1955) “Linear programming under uncertainty”, Management Science, 197-206,
- Grootveld. H. and Hallerbach. W.(1999) “Variance vs downside risk: Is there really that much difference?”, European Journal of operational research,304-319
- Markowitz. H, (1952) “Portfolio selection”, The journal of finance, 77-91,
- Markowitz. H, (1959) “Portfolio selection: efficient diversification of investments” Yale university press,
- Rom. B. M. and Ferguson. K. W. (1994) “Post-modern portfolio theory comes of age” ,The Journal of Investing, 11-17
- Sharpe. W. F,(1966) “mutual fund performance” , the journal of business , 119-136

Soyster. A, (1973) “Convex programming with set-inclusive constraints and applications to inexactlinear programming”, Operations Research, 1154-1157