فصلنامــه علمی پژوهشی دانش سرمایه‌گــذاری
سال هفتم/ شماره بیست‌وهشتم/ زمستان ۱۳۹۷

بررسی اثر افق سرمایه‌گذاری بر تناوب بهینه متوازن‌سازیِ مجددِ پرتفویی از سهام شرکت‌های پذیرفته شده در بورس اوراق بهادار تهران با فرض مجاز بودن فروش استقراضی

علیرضا ولیدی
کارشناس ارشد مهندسی مالی، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران (نویسنده مسئول)
Alireza.validi1991@gmail.com

جواد ولیدی
کارشناس ارشد مهندسی مالی، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران
validijavad@yahoo.com

تاریخ دریافت: ۹۶/۰۲/۲۲ تاریخ پذیرش: ۹۶/۰۶/۰۵

چکیده

در استراتژی فعالانه متوازن‌سازی که از آن با نام استراتژی بهینه لگاریتمی نیز یاد می‌شود، فرآیند متوازن‌سازی به صورت پیوسته‌زمان اجرا شده تا تابع مطلوبیت سرمایه‌گذار نوعی در بیشترین مقدار ممکن خود قرار داشته باشد. اما پیاده‌سازی این استراتژی از نظر وجود هزینه زیاد معاملات، عملاً توجیه‌ناپذیر و غیرممکن است. در این پژوهش، به دنبال معرفی استراتژی دیگری هستیم که بتوان با استفاده از پارامترهای مدل استراتژی فعالانه اما با تناوب‌های متوازن‌سازی کمتر، مطلوبیتی برابر یا بیشتر از این استراتژی به دست آورد. از طرفی افق سرمایه‌گذاری نیز عاملی تأثیرگذار در این موضوع است و با تغییر افق سرمایه‌گذاری مقدار تناوب بهینه نیز تغییر خواهد کرد. هدف این پژوهش یافتن بهترین تناوب متوازن‌سازی از میان تمامی تناوب‌های موجود در یک افق سرمایه‌گذاری معین است. به این منظور پس از معرفی استراتژی‌های مختلف متوازن‌سازی به بیان استراتژی نیمه فعالانه و تناوب بهینه در آن به صورت تابعی از افق سرمایه‌گذاری پرداخته و نتایج حاصل را بر روی پرتفویی از سهام بورس اوراق بهادار پیاده‌سازی خواهیم کرد. پیاده‌سازی این مدل با نادیده گرفتن محدودیت فروش استقراضی در بازار سرمایه ایران انجام شده است. نتایج نشان داد که تناوب‌های بهینه متفاوتی به ازای افق‌های سرمایه‌گذاری مختلف وجود داشته و حساسیت در انتخاب این تناوب برای افق‌های زمانی کوتاه‌تر، نسبت به افق‌های زمانی بلندتر، بیشتر خواهد بود. همچنین، انتخاب این تناوب و بکارگیری آن در استراتژی نیمه فعالانه، مطلوبیت بیشتری را برای سرمایه گذار نسبت به استراتژی فعلانه به همراه خواهد داشت.

واژه‌های کلیدی: متوازن‌سازی مجدد پرتفوی، استراتژی بهینه لگاریتمی، تابع بهینه متوازن‌سازی، استراتژی نیمه فعالانه.

۱- مقدمه

در بازارهای مالی امروزی، انتخاب یک استراتژی مناسب برای متوازن‌سازی مجدد پرتفوی پس از تشکیل آن، موضوعی حیاتی برای ادامه عمر پرتفوی تلقی می‌گردد. با گذشت زمان در پرتفویی شامل طبقات دارایی مختلف، نسبت وزنی دارایی‌های درون آن مرتباً تغییر کرده و این موضوع نیز ریسک سرمایه‌گذار در طول زمان را دستخوش تغییر می‌کند. در نتیجه می‌بایست در زمان‌هایی مناسب متوازن‌سازی و تغییر در ترکیب پرتفوی صورت گرفته و وزن دارایی‌های درون پرتفوی مجدداً به حالت اولیه و بهینه آن بازگردند. در استراتژی بهینه لگاریتمی، پیاده‌سازی فرایند متوازن‌سازی به صورت پیوسته‌زمان بوده و فاصله زمانی بین دو متوازن‌سازی متوالی بسیار کوتاه می‌باشد. به عبارت دیگر در هر مقطعی از زمان همواره می‌بایست اوزان بهینه محاسبه شده برای دارایی‌ها برقرار بوده تا بیشترین رشد در انتهای عمر پرتفوی برای سرمایه‌گذار حاصل شود. اما اجرای متوازن-سازی‌های متوالی به خصوص در بازارهایی که هزینه معاملات در آن بالا است عملاً غیرممکن است. بنابراین روشی معرفی خواهد شد تا بتوان با تعداد متوازن‌سازی‌های کمتر، به همان مطلوبیت مورد انتظار در استراتژی بهینه لگاریتمی و یا مقداری بیش از آن رسید. مقدار بهینه این تناوب متوازن‌سازی تابعی از افق سرمایه‌گذاری بوده و با تغییر مقدار افق سرمایه‌گذاری، مقدار آن نیز تغییر خواهد کرد. در این مقاله، لگاریتم رشد ارزش پرتفوی را به عنوان تابع مطلوبیت سرمایه‌گذار در نظر گرفته و به دنبال بیشینه‌سازی آن در تمامی استراتژی‌ها خواهیم بود. بنابراین اگر سرمایه‌گذاران بدانند در چه زمان‌هایی متوازن‌سازی را متوقف کنند، بازدهی بالاتری نصیبشان خواهد شد و اگر این زمان‌ها به درستی تعیین شده باشد سرمایه‌گذاران را از پرداخت هزینه‌های اضافی بازخواهد داشت.

۲- مبانی نظری و مروری بر پیشینه پژوهش

تغییر و تحولات اقتصادی، نظرات و دیدگاه‌های جدید حوزه مالی را دچار تغییرات عمده‌ای ساخته و به دنبال خود ظهور حوزه‌های جدید علمی را سبب گردیده است. این تحولات منجر به افزایش پویایی و رقابتی‌تر شدن تمامی بازارها گردیده و نیاز به تغییر و تحرک همسو با این شرایط را برای فعالان بازار سرمایه از جمله سرمایه‌گذاران ایجاد می‌کند. بازار سرمایه نیز که یکی از ابعاد حوزه مالی در هر اقتصاد می‌باشد به‌سوی یکپارچه شدن در حرکت است. یکی از مهم‌ترین وظایف یک مدیر سرمایه‌گذاری، سرمایه‌گذاری در ترکیبی از دارایی‌ها جهت از بین بردن ریسک ناشی از تغییرات و سپس تصمیم‌گیری برای متوازن‌سازی پرتفوهای سرمایه‌گذاری شده است و چنین تصمیماتی باید به‌سرعت اتخاذ شوند (فدایی نژاد و همکاران، ۱۳۸۹). این موضوع از این جنبه اهمیت دارد که اگر استراتژی‌های متوازن‌سازی پیوسته‌زمان به‌درستی به کار گرفته نشوند می‌توانند باعث تحمیل هزینه معاملاتی اضافی به سرمایه‌گذاران شوند. از طرفی استراتژی‌های متوازن‌سازی گسسته‌زمان نیز می‌توانند باعث از بین رفتن فرصت کسب سود از سهام و دارایی‌های دارای پتانسیل سوددهی شوند. لذا می-بایست توازنی بین این دو استراتژی ایجاد شده تا در نهایت به بیشینه شدن ارزش پرتفوی سرمایه‌گذار منجر شود.

بازار سرمایه ایران با حیات چهل‌ساله خود و با توجه به تحولات حاکم بر شرایط اقتصادی، اجتماعی و سیاسی همواره در معرض نوسانات مختلف بوده است. این نوسانات با توجه به تأثیرپذیری از شاخص‌های کلان و سازوکارهای بازار، بر روی میزان ریسک و بازده سرمایه‌گذاری اثربخش بوده و هستند (عبده تبریزی، ۱۳۷۷). این شرایط در بازار بیش از پیش بر اهمیت برقراری توازن مجدد در پرتفوی سرمایه‌گذار منطقی می‌افزاید. هرچند که بازار سرمایه ایران بعد از انقلاب به‌صورت جدی از دهه هفتاد شروع به شکل‌گیری و رونق عینی در اقتصاد کشور نمود، اما تاکنون تلاش‌های صورت گرفته توسط فعالین این بازار اعم از سرمایه‌گذاران حقیقی، شرکت‌های سرمایه‌گذاری و صندوق‌های مختلف در راستای دستیابی به اهداف سرمایه‌گذاری (کمینه کردن ریسک و بیشینه‌سازی بازده مورد انتظار) عمدتاً مبنی بر مهارت‌های تجربی اشخاص و مدیران سرمایه‌گذاری و گاهی تحت تأثیر ناکارایی‌های اطلاعاتی بازار صورت می‌گرفته است (فدایی نژاد و همکاران، ۱۳۸۹).

بیش از پنجاه سال پیش، مرتون [1](۱۹۷۱) اولین فردی بود که استراتژی تشکیل پرتفوی بهینه و پویا را با فرض پیوسته بودن زمان ارائه کرد. پس از او نیز سایر محققان با افزودن شرایطی به بهبود این استراتژی پرداختند. آلگوت[2] و کاور[3] (۱۹۸۸) به بهینه‌سازی این استراتژی برای توابع مطلوبیت مختلف پرداختند. لیو[4] و همکاران (۲۰۰۳) نیز با مدنظر قرار دادن شرایطی برای دارایی‌های پایه موجود در این استراتژی، به بهینه‌سازی آن پرداختند. موضوعی که در این استراتژی اهمیت زیادی دارد، نیاز به متوازن‌سازی‌های پی‌درپی برای پرتفوهای بهینه است. سان و همکاران (۲۰۰۶)، به توسعه یک الگوریتم برنامه‌ریزی پویا برای محاسبه زمان‌های متوازن‌سازی بهینه پرداختند. آن‌ها نشان دادند که هزینه استفاده از این برنامه پویا، در مقایسه با استفاده از یک برنامه متوازن‌سازی پیوسته‌زمان و بهینه، بسیار ناچیز است؛ اما محاسبات در این روش، زمانی که تعداد دارایی‌های درون پرتفوی افزایش پیدا کند زمان‌بر خواهد بود. پس از آن‌ها، کریژمان و همکاران (۲۰۰۹) برای حل مشکل مقیاس‌پذیری این برنامه از یک برنامه هیوریستیک درجه دو[5] استفاده کردند. کوهلر و ویتیگ (۲۰۱۴) در مطالعات خود روش جدیدی از متوازن‌سازی را در مقایسه با روش‌های مرسوم متوازن‌سازی (مانند متوازن‌سازی آستانه‌ای[6]) ارائه کردند. آن‌ها ملاک تصمیم‌گیری برای متوازن‌سازی را بررسی ریسک پرتفوی و نه مقادیر آستانه‌ای بازده‌های مورد انتظار معرفی کردند. در روش معرفی شده آن‌ها، ریسک دارایی‌ها به عنوان یک پارامتر متغیر در طول زمان معرفی شده و متوازن‌سازی بر اساس کنترل ریسک دارایی‌ها و پرتفوی صورت می‌گیرد. نتایج مدل آن‌ها، برتری نسبت شارپ در متوازن‌سازی ریسک – محور را در مقایسه با نسبت شارپ در متوازن‌سازی بازده – محور به دنبال داشت. میتال و محلاوات (۲۰۱۴) نیز در مطالعه خود، مدلی چندهدفه با در نظر گرفتن پارامترهای بازده، ریسک، نقدشوندگی و نیز در شرایط وجود هزینه معاملات پلکانی طراحی کردند. در مدل آن‌ها، هزینه معاملات با توجه به حجم معامله شده متغیر بوده و نتایج حاصل از پیاده‌سازی ژنتیک مدل آن‌ها بر روی سبدی از دارایی‌های بازار سهام هند، نشان از برتری مدل پیشنهادی در تصمیمات مربوط به متوازن‌سازی داشت. معلمی و شاگلام (۲۰۱۵) در مطالعه خود به بررسی جنبه‌های مختلف بهینه‌سازی پویای پرتفوی که در آن‌ها از مدل‌های پیچیده پیش‌بینی بازده، هزینه معاملات، محدودیت‌های مبادلات و ملاحظات ریسک استفاده شده است، پرداختند. آن‌ها طبقه‌ای از قوانین متوازن‌سازی خطی[7] و روش کار برای بهینه‌سازی

آن را ارائه کرده و نتایج حاصل از پیاده‌سازی روش آن‌ها بر روی پرتفویی انتخابی، نشان از برتری عملکرد قوانین متوازن‌سازی ارائه شده توسط آن‌ها در شرایط پویای بهینه‌سازی پرتفوی داشت. ژانگ و کیم (۲۰۱۶) در مطالعات خود یک استراتژی سرمایه‌گذاری جامع را ارائه کردند که نه تنها در تشکیل پرتفوی اولیه بلکه برای حفظ آن در طول زمان و در شرایط متغیر بازار نیز به‌کار برده می‌شود. مدل پویای انتخابی آن‌ها، خود را با اهداف سرمایه‌گذاریِ متغیر و وابسته به شرایط بازار تطبیق داده و سپس روشی خودکار برای متوازن‌سازی ارائه می‌دهد. ها (۲۰۱۷) در مطالعه خود به بررسی عملکرد «انتخاب پرتفوی ترتیبی[۸]» در شرایط در نظر گرفتن هزینه معاملات پرداخت. انتخاب پرتفوی ترتیبی به متوازن‌سازی پرتفوی در هر دوره (به‌عنوان مثال هفتگی و ...) با هدف شبیه‌سازی ارزش نهایی مورد انتظار پرتفوی در بلندمدت می‌پردازد. عملکرد این استراتژی به طور معمول و با فرض عدم در نظر گرفتن «هزینه‌های اثر بازار[۹]» و «هزینه معاملات تناسبی[۱۰]» و در شرایط «نقدینگی نامحدود بازار[۱۱]» غیرواقع بینانه برآورد می‌شود اما در این مطالعه یک مدل عاملی که بتواند این عملکرد را در شرایط واقع‌بینانه و در شرایط «نقدینگی محدود بازار[۱۲]» بررسی کند ارائه می‌شود. نتایج پیاده-سازی مدل آن‌ها بر روی سهام معامله شده بازار نزدک[۱۳] نشان داد که عملکرد انتخاب پرتفوی ترتیبی با فرض درنظرگیری هزینه اثر بازار، بدتر شده و در این شرایط روش جدید پیشنهاد شده عملکرد بهتری خواهد داشت.

طول افق سرمایه‌گذاری نیز نقش مهمی در متوازن‌سازی دارد. هرچه افق سرمایه‌گذاری طولانی‌تر باشد احتمال اینکه ترکیب وزنی دارایی‌های درون پرتفوی از حالت اولیه آن فاصله بگیرد بیشتر خواهد بود که این خود نیاز به متوازن‌سازی‌های پی‌درپی را ایجاد می‌کند. هال (۲۰۱۱) نیز در مطالعات خود به این نتیجه رسید زمانی که قیمت دارایی‌ها از فرایند قدم زدن تصادفی[۱۴] پیروی می‌کند، متوازن‌سازی با تناوب کمتر به‌منظور کسب بازدهی بیشتر ارجحیت دارد. داس[۱۵] و گویال[۱۶] (۲۰۱۲) در مطالعه خود به بررسی دو استراتژی فعالانه و منفعلانه با تابع هدف لگاریتمی پرداختند. آن‌ها با کمک اوزان بهینه دارایی‌ها در استراتژی فعالانه روشی را ارائه کردند که سرمایه‌گذار با پیاده‌سازی آن در استراتژی منفعلانه، بازدهی بیشتری در مقایسه با استراتژی فعالانه کسب کند.

فدایی نژاد و بنائیان (۱۳۸۹) با مدنظر قرار دادن متغیرهایی چون بازده، ریسک، نقد شوندگی و درجه ریسک پذیری و نیز لحاظ کردن هزینه‌های معاملاتی به طراحی مدلی برای متوازن‌سازی پرتفوی با کمک تصمیم‌گیری فازی پرداختند. زندیه و امیری (۱۳۹۲) به بررسی تأثیر متوازن‌سازی پرتفوی بر بازدهی و ریسک آن و نیز اثرگذاری عامل افق سرمایه‌گذاری بر متوازن‌سازی پرتفوی پرداخته و الگوریتم‌هایی فرا ابتکاری برای حل مسأله متوازن‌سازی در ابعاد بزرگ، پیشنهاد کردند. نتایج آن‌ها نشان داد که متوازن‌سازی بر بازدهی و ریسک پرتفوی اثرگذار است و ریسک پرتفوی را کنترل می‌کند. همچنین به این نتیجه رسیدند که افق سرمایه‌گذاری برای متوازن‌سازی پرتفوی یک عامل تأثیرگذار بوده و تعیین افق سرمایه‌گذاری و هدف سرمایه‌گذار برای متوازن‌سازی، موضوعی مهم به شمار می‌آید.

۳- روش شناسی پژوهش

این پژوهش با توجه به هدف آن مبنی بر ارائه الگوریتمی جهت متوازن‌سازی گسسته‌زمان پرتفوی، جزء پژوهش‌های کاربردی به‌حساب می‌آید. به‌علاوه، از نظر نوع روش نیز، توصیفی پیمایشی بوده و در آن از مدل‌سازی و ابزارهای ریاضی استفاده شده است. جامعه آماری پژوهش مجموعه ای از پرتفوهای متشکل از سهام عرضه شده در بورس اوراق بهادار تهران بوده و نمونه انتخابی برای پیاده سازی استراتژی ها نیز پرتفویی شامل ۱۰ سهم از سهام شرکت‌های مختلف بعلاوه یک دارایی بدون ریسک با نرخ سود ۱۵ درصدی معادل با نرخ سپرده سرمایه گذاری یکساله بانکی است. در این پژوهش از روش نمونه‌گیری طبقه‌ای استفاده شده است به گونه‌ای که صنایع دارای بیشترین ارزش در بورس اوراق بهادار به عنوان طبقات مختلف معرفی و از درون هر طبقه یک سهم به طور تصادفی انتخاب و در درون پرتفوی قرار داده شده است. هدف از این کار، تشکیل پرتفویی متنوع از سهام صنایع مختلف به منظور پیاده سازی استراتژی های متوازن‌سازی بوده و استراتژی هایی که در ادامه مطرح خواهند شد، بر روی هر نمونه انتخابی دیگر و با هر اندازه نیز قابل پیاده‌سازی می‌باشند. همچنین، پیاده سازی استراتژی ها بر روی این پرتفوی برای افق سرمایه گذاری ۳۰ ساله صورت گرفته است.

مدل استفاده شده در این پژوهش یک مدل بهینه‌سازی غیرخطی بوده که با حل آن، وزن بهینه دارایی ها در استراتژی فعلانه به عنوان پارامترهای ورودی به استراتژی های دیگر استفاده می‌شود. تمامی محاسبات صورت گرفته در این پژوهش با استفاده از نرم افزار MATLAB16 صورت گرفته و ملاک انتخاب بهترین استراتژی نیز، مطلوبیت نهایی سرمایه گذار در انتهای افق سرمایه گذاری در نظر گرفته شده است.

۴- مدل و متغیرهای پژوهش

در این بخش استراتژی های مختلف متوازن‌سازی به همراه فرضیات مدل، متغیرهای موجود در مدل و روابط حاکم بر آن‌ها بیان می شود.

۴-۱- فرضیات مدل

در این پژوهش فرض می‌کنیم قیمت دارایی‌ها در طول زمان از حرکت براونی هندسی[17] پیروی می‌کند که این موضوع در بسیاری از مطالعات صورت گرفته در حوزه ارزش‌گذاری دارایی‌های مالی و ابزارهای مشتقه[18] کاربرد دارد. همچنین فرض می‌کنیم ارزش اولیه پرتفوی برابر با یک ریال بوده و تمام محاسبات مربوط به استراتژی‌ها را با درنظر داشتن پرتفویی متشکل از N دارایی ریسکی و یک دارایی بدون ریسک و نیز فرض مجاز بودن فروش استقراضی[19] انجام می‌دهیم. با وجود اینکه فروش استقراضی در بازار سرمایه ایران امکان پذیر نمی باشد، اما لحاظ قرار دادن این فرض در مدل، به دلیل ماهیت ریاضیاتی مدل و ترتیبی بودن الگوریتم ارائه شده در رسیدن به پاسخ بهینه است، به گونه ای که با حذف این فرض، الگوریتم پیشنهادی در مرحله ابتدایی متوقف خواهد شد. دارایی‌های ریسکی را سهام بورس اوراق بهادار در نظر گرفته و محاسبات خود را با فرض معلوم بودن میانگین و انحراف معیار بازده دارایی‌ها انجام می‌دهیم. همچنین، $N + 1$ امین دارایی را به عنوان یک دارایی بدون ریسک که نرخ بازده ثابتی دارد در نظر گرفته و سایر نمادها را نیز به صورت جدول ۱ تعریف می‌کنیم.

جدول ۱- معرفی پارامترها

μ_i: نرخ بازده مورد انتظار دارایی i ام	w_i: وزن سرمایه‌گذاری در دارایی i ام
σ_i: انحراف معیار بازدهی دارایی i ام	$\mu_{p(t)}$: بازدهی مورد انتظار پرتفوی در زمان t
$V(t)$: ارزش پرتفوی در زمان t (ریال)	$\sigma_{p(t)}$: انحراف معیار بازدهی مورد انتظار پرتفوی در زمان t
T: افق سرمایه‌گذاری (سال)	σ_{ij}: کوواریانس میان بازدهی دارایی‌های i و j
φ_p: نرخ رشد لگاریتمی پرتفوی	ρ_{ij}: ضریب همبستگی میان بازده دارایی‌های i و j

۲-۴- استراتژی فعالانه متوازن‌سازی – استراتژی پایه

در حرکت براونی، قیمت دارایی در زمان t دارای توزیع لگاریتم نرمال[۲۰] بوده و آن را با $S(t)$ نمایش می دهیم. بر این اساس روابط زیر در مورد $S(t)$ برقرار می‌باشد (آرگین، ۲۰۱۳):

$$E\left[\ln\left\{\frac{S(t)}{S(0)}\right\}\right] = (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t \tag{۱}$$

$$Var\left[\ln\left\{\frac{S(t)}{S(0)}\right\}\right] = \sigma^2 t \tag{۲}$$

در رابطه (۱)، $(\mu - \frac{\sigma^2}{2})$ را نرخ رشد ارزش دارایی[۲۱] معرفی کرده و آن را با نماد φ نمایش می‌دهیم. در استراتژی فعالانه اوزان دارایی‌های درون پرتفوی به‌طور پیوسته متوازن‌سازی شده تا نرخ رشد لگاریتمی پرتفوی[۲۲] در بلندمدت بیشینه شود. اگر τ را مدت زمان بین دو متوازن‌سازی متوالی تعریف کنیم، در این استراتژی مقدار τ عددی بسیار کوچک و نزدیک به صفر خواهد بود. لیون برگر[۲۳] (۱۹۹۸) در مطالعات خود روش انجام این کار را ارائه کرده است. اگر $V(t)$ را ارزش پرتفوی در زمان t در نظر بگیریم، نرخ بازده آنی پرتفوی[۲۴] برابر است با جمع وزنی نرخ بازده آنی تک‌تک دارایی‌ها، و با توجه به رابطه تغییر قیمت دارایی‌ها در حرکت براونی خواهیم داشت:

$$\frac{dV(t)}{V(t)} = \sum_{i=1}^{N+1} w_i \frac{dS_i(t)}{S_i(t)} \Rightarrow \frac{dV(t)}{V(t)} = \sum_{i=1}^{N+1} (w_i\mu_i dt + w_i\sigma_i dz) \tag{۳}$$

از طرفی می‌توان رابطه فوق را به شکل حرکت براونی هندسی و به صورت رابطه (۴) نوشت:

$$dV(t) = \mu_p V(t)dt + \sigma_p V(t)dz \tag{۴}$$

$$\mu_p = \sum_{i=1}^{N+1} w_i\mu_i \tag{۵}$$

$$\sigma_p^2 = \sum_{i,j=1}^{N+1} w_i\sigma_{ij}w_j \tag{۶}$$

طبق حرکت براونی و با توجه به لم ایتو[۲۵]، لگاریتم ارزش پرتفوی ($\ln(V(t))$) دارای توزیع نرمال بوده (نفتچی[۲۶]، ۲۰۰۰) و روابط زیر برای آن برقرار خواهد بود:

$$E[\ln\{V(t)\}] = \left(\mu_p - \frac{\sigma_p^2}{2}\right)t = \varphi_p t \tag{۷}$$

$$Var[\ln\{V(t)\}] = \sigma_p^2 t \tag{۸}$$

در رابطه (۷)، $(\mu_p - \frac{\sigma_p^2}{2})$ را نرخ رشد لگاریتمی پرتفوی می‌نامیم. همچنین، لگاریتم ارزش پرتفوی در زمـان t را با نماد$\vartheta(t)$ نمایش داده و داریم:

$$\vartheta(t) = E[\ln\{V(t)\}] = \varphi_p t \tag{۹}$$

در استراتژی فعالانه، نرخ رشد ارزش پرتفوی با حل مسأله بهینه‌سازی زیر بیشـینه مـی‌شـود (داس و گویـال[۲۷]، ۲۰۱۲):

$$\max_w \varphi_p$$

$$s.t{:}\ \sum_{i=1}^{N+1} w_i = 1 \tag{۱۰}$$

با حل مسأله فوق به کمک ضرایب لاگرانژ[۲۸]، بردار وزن بهینه دارایی ها (w) به دست خواهد آمد که از این اوزان در سایر استراتژی‌ها نیز استفاده خواهیم کرد.

۳-۴- استراتژی منفعلانه متوازن‌سازی

در استراتژی منفعلانه رفتار پرتفوی در طول زمان و در حالت عدم متوازن‌سازی آن بررسی می شود. در این استراتژی، فاصله زمانی بین دو متوازن‌سازی متوالی$\tau = \infty$ بوده و برای ساده‌سازی فهم روابط، از اندیس∞ برای آن استفاده خواهد شد. طبق روش فنتون-ویلکینسون[۲۹]، جمع تعدادی متغیـر بـا توزیـع لگـاریتم نرمـال، خـود متغیری با همین توزیع می‌باشد. بنابراین رابطه واریانس لگاریتم رشد پرتفوی به‌صـورت زیـر خواهـد بـود (داس وگویال، ۲۰۱۲):

$$\gamma^\infty = Var\left[\ln\left(V^\infty(t)\right)\right] = \ln(1 + \frac{Var[V^\infty(t)]}{E[V^\infty(t)]^2})$$
$$= \ln(1 + \frac{\sum_{i,j=1}^{N+1} w_i w_j e^{(\mu_i+\mu_j)t}(e^{\sigma_{ij}t} - 1)}{\sum_{i=1}^{N+1} w_i e^{\mu_i t}}) \tag{۱۱}$$

از طرفی، با استفاده از خواص توزیـع لگـاریتم نرمـال و رابطـه (۱۱)، لگـاریتم ارزش پرتفـوی در اسـتراتژی منفعلانه نیز به صورت زیر محاسبه خواهد شد(داس وگویال، ۲۰۱۲):

$$\vartheta^{\infty}(t) = E\left[\ln\left(V^{\infty}(t)\right)\right] = \ln\left(\sum_{i=1}^{N+1} w_i e^{\mu_i t}\right) - \frac{1}{2}\gamma^{\infty}(t) \tag{۱۲}$$

رابطه (۱۲) تابع مطلوبیت مورد انتظار سرمایه‌گذار در استراتژی منفعلانه را نشان می‌دهد. یکی دیگر از نکات فرض لگاریتم نرمال بودن روش فنتون (۱۹۶۰)، ماهیت مشابه رشد ارزش پرتفـوی در دو اسـتراتژی منفعلانـه و فعالانه است. با مقایسه دو رابطه (۹) و (۱۲)، نرخ رشد لگاریتمی پرتفوی در استراتژی منفعلانه (φ_p^{∞}) مطابق بـا رابطه (۱۳) بوده و در آن میانگین و واریانس پرتفویی با استراتژی منفعلانه (به ترتیب، $\mu_p^{\infty}(t)$ و $\sigma_p^{\infty^2}$) با توجه به رابطه (۱۳) محاسبه خواهد شد.

$$\varphi_p^{\infty}(t) = \frac{\vartheta^{\infty}(t)}{t} = \underbrace{\frac{1}{t}\ln\left(\sum_{i=1}^{N+1} w_i e^{\mu_i t}\right)}_{\mu_p^{\infty}(t)} - \frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{1}{t}Var\left[\ln\left(V^{\infty}(t)\right)\right]\right)}_{\sigma_p^{\infty^2}} \tag{۱۳}$$

با مقایسه این رابطه با رابطه مشابه آن در استراتژی فعالانه مشاهده می‌شود کـه میـانگین و انحـراف معیـار بازدهی پرتفوی در استراتژی منفعلانه در طول زمان متغیر بوده، در حالی که ایـن مقـادیر در اسـتراتژی فعالانـه ثابت می‌باشند. همچنین، مشتق لگاریتم ارزش پرتفوی نسبت به زمان را «نرخ رشد آنی پرتفـوی[۳۰]» نامیـده و از نمادθ برای نمایش آن استفاده می‌کنیم. این نرخ رشد برای استراتژی‌های فعالانه و منفعلانه به ترتیب برابرند با:

$$\theta = \frac{d\vartheta(t)}{dt} = \varphi_p \tag{۱۴}$$

$$\theta^{\infty}(t) = \frac{d\vartheta^{\infty}(t)}{dt} \tag{۱۵}$$

۴-۴- شرایط وجود اولین زمان متوازن‌سازی

با تلاقی دادن نمودار توابع مطلوبیت در دو استراتژی فعالانه و منفعلانـه، زمـانی را بـه عنـوان اولـین زمـان متوازن‌سازی محاسبه کرده و آن را با نماد τ_c نمایش می‌دهیم.اگر چنین نقطه‌ای وجود داشته باشد، می‌تـوان از ابتدای عمر پرتفوی تا نقطه τ_c به پیاده‌سازی استراتژی منفعلانه پرداخته و پس از آن تغییر استراتژی از منفعلانه به فعالانه صورت بگیرد. و در غیر اینصورت می‌بایست در کـل افـق زمـانی، از اسـتراتژی فعالانـه اسـتفاده شـود. برقراری دو شرط زیر برای وجودτ_c الزامی است:

$$\vartheta^{\infty}(\tau_c - d\tau_c) > \vartheta(\tau_c - d\tau_c)\,, 0 < d\tau_c < \tau_c\,, d\tau_c \to 0 \tag{۱۶}$$

$$\vartheta^{\infty}(\tau_c + d\tau_c) < \vartheta(\tau_c + d\tau_c)\,, 0 < d\tau_c < \tau_c\,, d\tau_c \to 0 \tag{۱۷}$$

طبق مطالعات کازناچی (۲۰۱۲) استراتژی منفعلانه زمانی در ابتدای عمر پرتفوی وجود دارد که نرخ رشد آنی پرتفوی برای این استراتژی در زمان صفر بیشتر از استراتژی دیگر باشد. این شرط را می توان با استفاده از الگوریتم ۱ (که در پیوست ارائه شده است) در زمان صفر و با توجه به خروجی «بلی- خیر» آن بررسی کرد.

۴-۵- پایایی اولین زمان متوازن‌سازی

پایایی اولین زمان متوازن‌سازی به‌گونه‌ای تعریف می‌شود که در بازه زمانی $(0,\tau_c)$ همواره لگاریتم ارزش پرتفوی در استراتژی منفعلانه بیشتر از استراتژی فعالانه باشد. به بیان ریاضی، وجود این شرط به صورت رابطه زیر تعریف می‌شود (داس، ۲۰۱۴):

$$E\left[\ln\left(\frac{V^{\infty}(t,t+dt)}{V^{\infty}(t,t)}\right)\right] \geq E\left[\ln\left(\frac{V(t,t+dt)}{V^{\infty}(t,t)}\right)\right], \forall t\in(0,\tau_c), dt\to 0 \quad (۱۸)$$

$V(t,t')$ را به صورت ارزش پرتفوی برآورد شده در مقطع زمانیt و برای زمان t' تعریف می‌کنیم. با محاسبه و بسط دادن طرفین نامساوی فوق، پایایی اولین زمان متوازن‌سازی از طریق رابطه (۱۹) تعیین و محاسبه اولین زمان متوازن‌سازی پایا که آن را با نمادτ_s نمایش می‌دهیم با استفاده از تلاقی نمودارهای نرخ رشد آنی پرتفوی در دو استراتژی فعالانه و منفعلانه طبق رابطه (۲۰) میسر خواهد شد(داس، ۲۰۱۴):

$$\frac{d\vartheta^{\infty}(0,t)}{dt} \geq \varphi_p \quad (۱۹)$$

$$\theta^{\infty}(\tau_s) = \varphi_p \quad (۲۰)$$

۴-۶- استراتژی نیمه فعالانه متوازن‌سازی – استراتژی تلفیقی

در این استراتژی اگر تناوب متوازن‌سازی مقداری دلخواه و برابر با τ باشد مقدار لگاریتم ارزش پرتفوی در انتهای افق سرمایه‌گذاری $T = k'\tau + t'$ برابر است با (داس و گویال، ۲۰۱۲):

$$\vartheta^{\tau}(k'\tau + t') = k'\vartheta^{\infty}(\tau) + \vartheta^{\infty}(t');\ k' = \left\lfloor\frac{T}{\tau}\right\rfloor, t' = T \bmod \tau \quad (۲۱)$$

طبق رابطه فوق، در هر استراتژی نیمه فعالانه با تناوب متوازن‌سازیτ، لگاریتم ارزش پرتفوی در نقاط متوازن‌سازی بعدی برابر است با حاصل‌ضرب لگاریتم ارزش پرتفوی در اولین نقطه متوازن‌سازی در تعداد دفعات متوازن‌سازی (k). از طرفی، رشد پرتفوی پس از آخرین نقطه متوازن‌سازی ($k\tau$) و تا انتهای افق سرمایه‌گذاری به‌صورت منفعلانه خواهد بود. در این قسمت، تناوبی به عنوان پاسخ بهینه انتخاب خواهد شد که لگاریتم ارزش پرتفوی در انتهای افق سرمایه‌گذاری را بیشینه کند:

$$\tau_0(T) = \tau, s.t. \max_{0\le\tau\le T} \vartheta^{\tau}(T) \qquad (۲۲)$$

با مشتق گیری از رابطه فوق پاسخ بهینه آن بصورت رابطه (۲۳) خواهد بود:

$$\Rightarrow \tau_o = \frac{T}{k+1} \xrightarrow{k'=k+1} \tau_o = \frac{T}{k'} \qquad (۲۳)$$

در نتیجه، در پرتفوهای بهینه لگاریتمی، دامنه تناوب متوازن‌سازی تابعی از T و عددی صحیح و مثبت مانند k' بوده و به‌صورت زیر تعریف می‌شود (داس و گویال ۲۰۱۲):

$$\pi_k(T) = \{\frac{T}{k'} : \forall k' \in \mathbb{N}^+\} \qquad (۲۴)$$

۷-۴- بهینگی مقسوم علیه متوازن‌سازی

اگر تابع $\theta^{\infty}(t)$ در بازه $[0,T]$ فقط دارای یک بیشینه در τ_m باشد، مقدار لگاریتم ارزش پرتفوی در نقطه $\tau_o \in \pi_k(T)$ بیشینه خواهد بود و در این شرایط خواهیم داشت $\tau_m \ge \tau_o \ge \tau_s$. در نتیجه می‌توان حدود بالا و پایین مقسوم علیه متوازن‌سازی (k) را طبق روابط (۲۵) و (۲۶) محاسبه کرد.

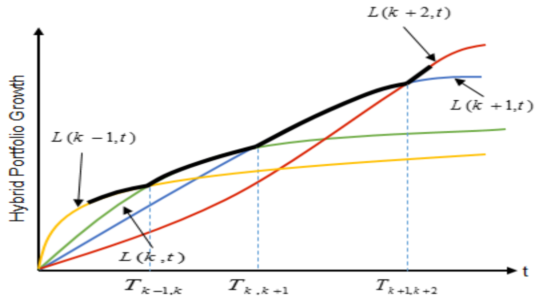
$$k_{mx} = \max(1, \left\lfloor\frac{T}{\tau_m}\right\rfloor) \qquad (25)$$

$$k_{mn} = \max(1, \left\lceil\frac{T}{\tau_s}\right\rceil) \qquad (26)$$

به منظور محاسبه تناوب بهینه کافیست مقدار مقسوم علیه بهینه (k_o) را از دامنه بیان شده در رابطه (۲۷) تعیین و با کمک رابطه $\tau_o = \frac{T}{k_o}$ مقدار این تناوب را محاسبه کرد (داس، ۲۰۱۴):

$$\pi_k(T) = \{\frac{T}{k} : \forall k \in \mathbb{N}^+ \; and \; k_{mn} \le k \le k_{mx}\} \qquad (۲۷)$$

تابع هدف پرتفویی با استراتژی نیمه فعالانه، با کمک رابطه $l(k,t) = k\vartheta^{\infty}\left(\frac{t}{k}\right), \forall k \in \mathbb{N}^+, \forall t \in \mathbb{R}^+$ محاسبه شده و نشان دهنده لگاریتم ارزش پرتفوی در شرایطی است که سرمایه‌گذار از یک استراتژی نیمه فعالانه بعد از هر فاصله زمانی به اندازه $\frac{t}{k}$ استفاده می‌کند. برای یک افق زمانی دلخواه تنها تعداد محدودی از مقسوم‌علیه‌های متوازن‌سازی وجود دارند. شکل (۱) نشان‌دهنده توابع مطلوبیت به ازای مقسوم علیه‌های متفاوت مانند k، $k+1$ و $k+2$ هستند.



شکل ۱- توابع مطلوبیت مرتبط با مقسوم‌علیه‌های متوازن‌سازی متفاوت

۸-۴- نقاط تقاطع و تابع بهینه متوازن‌سازی

محل تلاقی نمودارهای دو تابع مطلوبیت با مقسوم علیه‌های متوازن‌سازی متفاوت، نقطه تقاطع متوازن‌سازی اطلاق شده و در این نقاط ($T_{k,k'}$)، یک شمارشگر (l) عملکرد بهتری نسبت به شمارشگرهای دیگر دارد. چنانچه افق سرمایه‌گذاری در بازه $[T_{k-1,k}, T_{k,k+1}]$ قرار داشته باشد، با انتخاب مقسوم‌علیه متوازن‌سازی k مقدار لگاریتم ارزش پرتفوی بیشینه خواهد شد (داس و گوپال، ۲۰۱۲). با بیان ریاضی:

$$l(k,t) \geq l(k',t), \forall t \in \left(T_{k-1,k}, T_{k,k+1}\right], k' \neq k, \{k,k'\} \in \mathbb{N}^+ \quad (۲۸)$$

مقادیر بهینه مقسوم‌علیه‌های متوازن‌سازی وابسته به افق زمانی سرمایه‌گذاری می‌باشد. افق زمانی را می‌توان توسط نقاط تقاطع به بخش‌های مجزا تقسیم کرد و برای هر کدام از این بخش‌ها مقدار بهینه مقسوم‌علیه متوازن‌سازی را به منظور دستیابی به بیشترین مقدار لگاریتم ارزش پرتفوی در کل افق زمانی محاسبه کرد. بالاترین نمودار مطلوبیت میان دو نقطه تقاطع متوازن‌سازی از دو تابع مطلوبیت متفاوت، تعیین کننده بیشترین مقدار لگاریتم ارزش پرتفوی در استراتژی نیمه فعالانه می‌باشد. رابطه (۲۹) نشان دهنده تابع متوازن‌سازی بهینه است.

$$\tau_o(t) = \begin{cases} 0 & if\ t = 0 \\ \frac{t}{k} & if\ t \in \left(T_{k-1,k}, T_{k,k+1}\right], \forall k \in \mathbb{N}^+ \end{cases} \quad (۲۹)$$

۵- یافته‌های پژوهش

به منظور پیاده سازی مدل و استراتژی های مطرح شده، مقادیر بازدهی مورد انتظار و انحراف معیار ۱۰ سهم انتخابی با استفاده از مدل قیمت‌گذاری دارایی‌های سرمایه‌ای[۳۱] و نیز سری زمانی قیمت سهام در بورس اوراق بهادار از ابتدای سال ۱۳۹۲ تا انتهای سال ۱۳۹۴، محاسبه و مقادیر آن در جدول شماره (۲) ارائه شده است. اطلاعات مربوط به قیمت سهام، از سایت شرکت مدیریت فناوری بورس تهران[۳۲] استخراج گردیده است.

۱-۵- پیاده‌سازی استراتژی فعالانه و محاسبه وزن بهینه دارایی‌ها

با حل مدل استراتژی فعالانه برای پرتفوی معرفی شده، اوزان بهینه دارایی‌ها به صورت جدول شماره (۲) محاسبه خواهند شد.

جدول ۲- بازدهی مورد انتظار، انحراف معیار بازدهی و وزن بهینه سهام در پرتفوی

ردیف	نماد سهم	نرخ بازده مورد انتظار	انحراف معیار بازدهی	وزن بهینه (w)
1	پکرمان	0.052	0.185	-7.784
2	پارسان	0.163	0.094	3.713
3	خودرو	0.169	0.204	-0.065
4	سفارس	0.162	0.168	4.120
5	دکیمی	0.185	0.440	-0.118
6	غبشهر	0.169	0.312	-0.671
7	فملی	0.161	0.137	-1.789
8	کاذر	0.172	0.250	0.488
9	همراه	0.154	0.054	-7.695
10	وصنعت	0.162	0.159	3.250
11	دارایی بدون ریسک	0.150	0	7.551

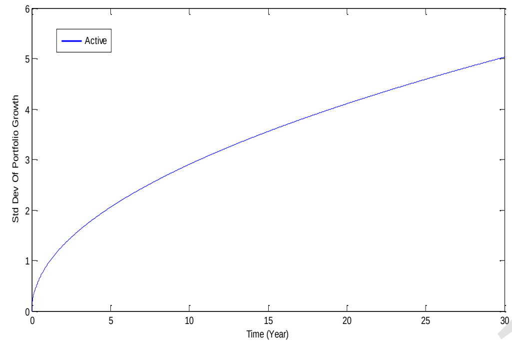
منبع: محاسبات پژوهش

مطابق جدول (۲)، برای دارایی‌هایی که وزن منفی دارند در طول عمر پرتفوی فروش استقراضی صورت می‌گیرد. اگر این اوزان همواره در طول عمر پرتفوی برای دارایی‌ها برقرار باشند لگاریتم ارزش پرتفوی در پایان مدت ۳۰ سال به بیشینه مقدار ممکن خود خواهد رسید. با محاسبه وزن بهینه دارایی‌ها میانگین بازدهی، انحراف معیار بازدهی و نرخ رشد لگاریتمی بهینه برای پرتفوی در طول زمان ثابت و مقادیر آن به صورت جدول شماره (۳) خواهد بود.

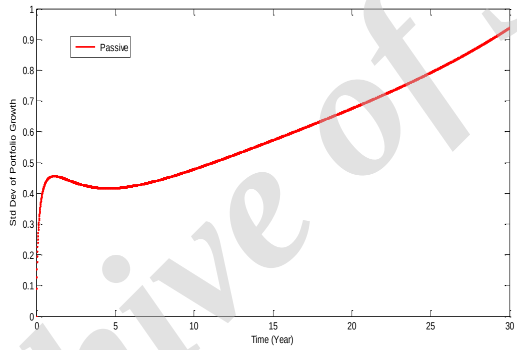
جدول ۳- میانگین بازدهی، انحراف معیار بازدهی و نرخ رشد لگاریتمی بهینه

ردیف	پارامتر	نماد	مقدار
1	میانگین بازدهی پرتفوی	μ_p	0.992
2	انحراف معیار بازدهی پرتفوی	σ_p	0.842
3	نرخ رشد لگاریتمی پرتفوی	φ_p	0.571

منبع: محاسبات پژوهش



شکل ۲- انحراف معیار لگاریتم ارزش پرتفوی در استراتژی فعالانه



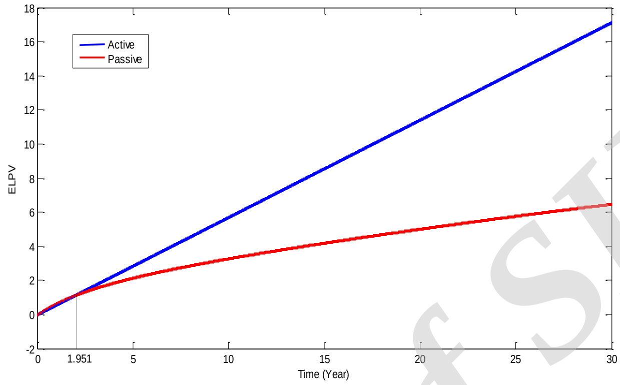
شکل ۳- انحراف معیار لگاریتم ارزش پرتفوی در استراتژی منفعلانه

نمودار آبی رنگ در شکل (۴) و نمودار شکل (۲) به ترتیب نشان‌دهنده تغییرات مقدار لگاریتم ارزش پرتفوی و انحراف معیار لگاریتم ارزش پرتفوی در طول عمر آن است. مطابق نمودار آبی رنگ شکل (۴)، لگاریتم ارزش پرتفوی دارای شیبی ثابت بوده و چنانچه سرمایه‌گذار فقط از استراتژی فعالانه استفاده کند در پایان عمر پرتفوی مقدار لگاریتم ارزش پرتفوی نهایی برابر با ۱۷,۱۳ خواهد بود.

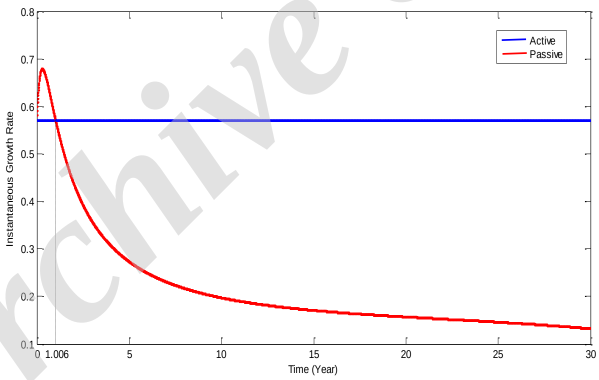
۲-۵- پیاده‌سازی استراتژی منفعلانه و محاسبه اولین زمان متوازن‌سازی

در این استراتژی با انتخاب $\tau = \infty$، تغییرات مقادیر لگاریتم ارزش پرتفوی و انحراف معیار آن در طول عمر پرتفوی مطابق با شکل‌های (۴) و (۳) خواهند بود. مطابق شکل (۴) چنانچه سرمایه‌گذار از استراتژی منفعلانه استفاده کند در پایان عمر ۳۰ ساله پرتفوی، مقدار لگاریتم ارزش پرتفوی نهایی او برابر با ۶,۴۸ خواهد بود.

اولین زمان متوازن‌سازی با تلاقی نمودار های لگاریتم ارزش پرتفوی در دو استراتژی فعالانه و منفعلانه مطابق شکل (۴) برابر با $\tau_c = 1.951$ و مقدار پایای آن نیز با تلاقی نمودارهای نرخ رشد آنی مطابق شکل (۵) برابر با $\tau_s = 1.006$ محاسبه خواهند شد.



شکل ۴- لگاریتم ارزش پرتفوی در دو استراتژی فعالانه و منفعلانه

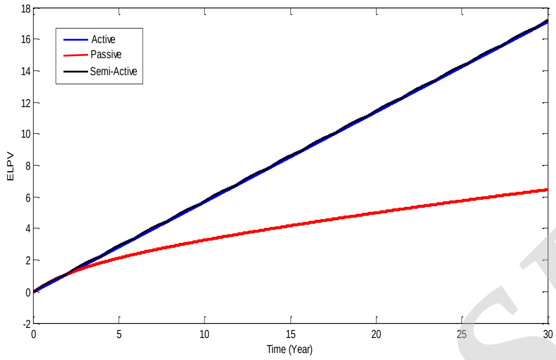


شکل ۵- نرخ رشد آنی ارزش پرتفوی در دو استراتژی فعالانه و منفعلانه

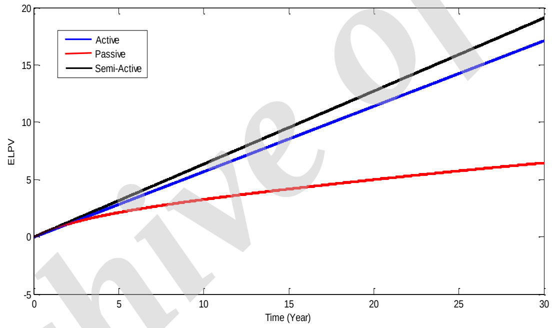
۳-۵- پیاده‌سازی استراتژی نیمه فعالانه و محاسبه تناوب بهینه

پس از بررسی شرط وجود یا عدم وجود استراتژی منفعلانه در ابتدای عمر پرتفوی طبق الگوریتم ۱ (پیوست)، این الگوریتم وجود استراتژی ترکیبی برای پرتفوی معرفی شده را تأیید می‌کند. اگر استراتژی نیمه فعالانه با فواصل زمانی $\tau_c = 1.951$ و $\tau_s = 1.006$ تا انتهای عمر پرتفوی اجرا شود، لگاریتم ارزش پرتفوی در انتهای ۳۰ سال به ترتیب برابر با 17.192 (شکل ۶) و ۱۹,۱۱۸ (شکل ۷) به دست خواهند آمد. اما این مقادیر

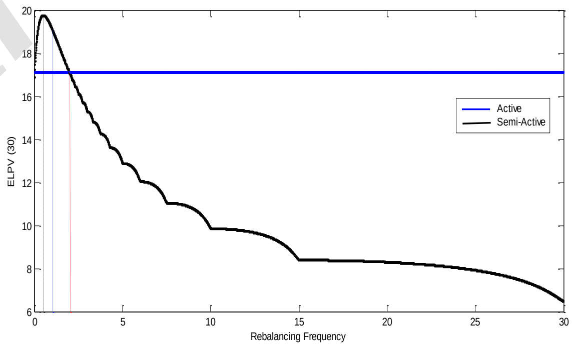
بهینه نبوده و مقادیر تناوب بهینه (τ_o) و لگاریتم ارزش پرتفوی در آن با کمک روابط (۲۳) و (۲۱) به ترتیب برابر با ۰,۵ و ۱۹,۷۵۰ خواهند بود (شکل ۸).



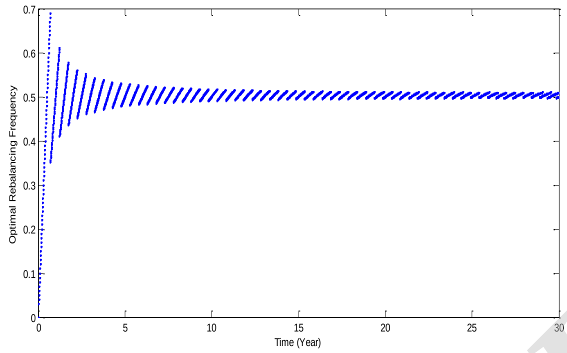
شکل ۶- لگاریتم ارزش پرتفوی در استراتژی‌های فعالانه، منفعلانه و نیمه فعالانه



شکل ۷- لگاریتم ارزش پرتفوی در استراتژی‌های فعالانه، منفعلانه و نیمه فعالانه



شکل ۸- لگاریتم ارزش پرتفوی در پایان عمر پرتفوی به ازای تناوب‌های مختلف



شکل ۹- تغییرات تناوب بهینه به ازای افق‌های زمانی متفاوت مختلف

۴-۵- تعیین تابع تناوب بهینه به ازای افق‌های سرمایه‌گذاری کمتر از ۳۰ سال

نتایج ارائه شده تا این بخش، برای پرتفویی با پارامترهای بیان شده در جدول (۲) و افق سرمایه‌گذاری ۳۰ ساله صادق است. از آنجایی که تناوب بهینه، طبق رابطه (۲۳) تابعی از افق سرمایه‌گذاری است، با تغییر افق سرمایه‌گذاری مقدار تناوب بهینه نیز تغییر خواهد کرد. همان‌طور که در شکل (۹) مشاهده می‌شود تغییرات تناوب بهینه برای افق‌های سرمایه‌گذاری کوتاه‌تر شدیدتر بوده و این حساسیت با بزرگ‌تر شدن افق سرمایه‌گذاری، کمتر و تناوب بهینه به مقداری تقریبی همگرا خواهد شد. اگر افق سرمایه‌گذاری ۳۰ ساله را با کمک نقاط تقاطع متوازن‌سازی به بازه‌های مختلف افراز کنیم با کمک مقسوم علیه متوازن‌سازی بهینه برای هر بازه می‌توان تناوب بهینه برای هر افق سرمایه‌گذاری را به راحتی طبق رابطه $\tau_o = \frac{T}{k_o}$ محاسبه کرد. برای مثال، طبق جدول شماره (۴) اگر افق سرمایه‌گذاری به ۲۰,۹ سال تغییر پیدا کند، مقدار مقسوم علیه بهینه برای آن ۴۲ بوده و در نتیجه تناوب بهینه برای این افق سرمایه‌گذاری برابر با $\frac{20.9}{42} = 0.497$ محاسبه خواهد شد.

جدول ۴- مجموعه نقاط تقاطع و مقسوم‌علیه‌های بهینه برای هر بازه

نقطه بحرانی (T_k)	افق زمانی (T)	مقسوم‌علیه بهینه (k_o)	نقطه بحرانی (T_k)	افق زمانی (T)	مقسوم‌علیه بهینه (k_o)
0.697	(۰,۶۹۷-۰)	1	15.850	(۱۵,۳۴۷ – ۱۵,۸۵۰]	31
1.224	(۰,۶۹۷ – ۱,۲۲۴]	2	16.354	(۱۵,۸۵۰ – ۱۶,۳۵۴]	32
1.737	(۱,۲۲۴ – ۱,۷۳۷]	3	16.857	(۱۶,۳۵۴ – ۱۶,۸۵۷]	33
2.246	(۱,۷۳۷ - ۲,۲۴۶]	4	17.360	(۱۶,۸۵۷ – ۱۷,۳۶۰]	34
2.753	(۲,۲۴۶ – ۲,۷۵۳]	5	17.864	(۱۷,۳۶۰ – ۱۷,۸۶۴]	35
3.258	(۲,۷۵۳ – ۳,۲۵۸]	6	18.367	(۱۷,۸۶۴ – ۱۸,۳۶۷]	36
3.763	(۳,۲۵۸ – ۳,۷۶۳]	7	18.870	(۱۸,۳۶۷ – ۱۸,۸۷۰]	37

نقطه بحرانی (T_k)	افق زمانی (T)	مقسوم‌علیه بهینه (k_o)	نقطه بحرانی (T_k)	افق زمانی (T)	مقسوم‌علیه بهینه (k_o)
4.268	(۳,۷۶۳ – ۴,۲۶۸]	8	19.374	(۱۸,۸۷۰ – ۱۹,۳۷۴]	38
4.772	(۴,۲۶۸ – ۴,۷۷۲]	9	19.877	(۱۹,۳۷۴ – ۱۹,۸۷۷]	39
5.276	(۴,۷۷۲ – ۵,۲۷۶]	10	20.380	(۱۹,۸۷۷ – ۲۰,۳۸۰]	40
5.780	(۵,۲۷۶ – ۵,۷۸۰]	11	20.884	(۲۰,۳۸۰ – ۲۰,۸۸۴]	41
6.284	(۵,۷۸۰ – ۶,۲۸۴]	12	21.387	(۲۰,۸۸۴ – ۲۱,۳۸۷]	42
6.788	(۶,۲۸۴ – ۶,۷۸۸]	13	21.890	(۲۱,۳۸۷ – ۲۱,۸۹۰]	43
7.292	(۶,۷۸۸ – ۷,۲۹۲]	14	22.394	(۲۱,۸۹۰ – ۲۲,۳۹۴]	44
7.795	(۷,۲۹۲ – ۷,۷۹۵]	15	22.897	(۲۲,۳۹۴ – ۲۲,۸۹۷]	45
8.299	(۷,۷۹۵ – ۸,۲۹۹]	16	23.400	(۲۲,۸۹۷ – ۲۳,۴۰۰]	46
8.802	(۸,۲۹۹ – ۸,۸۰۲]	17	23.904	(۲۳,۴۰۰ – ۲۳,۹۰۴]	47
9.306	(۸,۸۰۲ – ۹,۳۰۶]	18	24.407	(۲۳,۹۰۴ – ۲۴,۴۰۷]	48
9.809	(۹,۳۶۰ – ۹,۸۰۹]	19	24.910	(۲۴,۴۰۷ – ۲۴,۹۱۰]	49
10.313	(۹,۸۰۹ – ۱۰,۳۱۳]	20	25.414	(۲۴,۹۱۰ – ۲۵,۴۱۴]	50
10.816	(۱۰,۳۱۳ – ۱۰,۸۱۶]	21	25.917	(۲۵,۴۱۴ – ۲۵,۹۱۷]	51
11.320	(۱۰,۸۱۶ – ۱۱,۳۲۰]	22	26.420	(۲۵,۹۱۷ – ۲۶,۴۲۰]	52
11.823	(۱۱,۳۲۰ – ۱۱,۸۲۳]	23	26.923	(۲۶,۴۲۰ – ۲۶,۹۲۶]	53
12.327	(۱۱,۸۲۳ – ۱۲,۳۲۷]	24	27.427	(۲۶,۹۲۶ – ۲۷,۴۲۷]	54
12.830	(۱۲,۳۲۷ – ۱۲,۸۳۰]	25	27.930	(۲۷,۴۲۷ – ۲۷,۹۳۰]	55
13.334	(۱۲,۸۳۰ – ۱۳,۳۳۴]	26	28.433	(۲۷,۹۳۰ – ۲۸,۴۳۳]	56
13.837	(۱۳,۳۳۴ – ۱۳,۸۳۷]	27	28.937	(۲۸,۴۳۳ – ۲۸,۹۳۷]	57
14.340	(۱۳,۸۳۷ – ۱۴,۳۴۰]	28	29.440	(۲۸,۹۳۷ – ۲۹,۴۴۰]	58
14.844	(۱۴,۳۴۰ – ۱۴,۸۴۴]	29	29.943	(۲۹,۴۴۰ – ۲۹,۹۴۳]	59
15.347	(۱۴,۸۴۴ – ۱۵,۳۴۷]	30	30.447	(۲۹,۹۴۳ – ۳۰,۴۴۷]	60

منبع: محاسبات پژوهش

۶- نتیجه‌گیری و بحث

در پژوهش حاضر تلاش شد ابتدا رویکردهای متفاوت متوازن‌سازی مجدد پرتفوی به عنوان یکی از مؤلفه‌های اساسی فرآیند مدیریت پرتفوی، بیان و در ادامه روشی واقع‌بینانه در جهت تعیین استراتژی بهینه تعریف شود. افرادی که به دنبال سرمایه‌گذاری و تشکیل پرتفوی در شرکت‌های سرمایه‌گذاری هستند معمولاً دارای آستانه تحمل ریسک مشخصی بوده و مدیران پرتفوی نیز موظف‌اند به‌گونه‌ای ترکیب سبد سرمایه‌گذاری

آن‌ها را تشکیل دهند که سطح ریسک آن در طول زمان از سطح ریسک مطلوب آنان فراتر نرود. مطالعات انجام شده در حوزه متوازن‌سازی مجدد پرتفوی را به طور کلی می‌توان به دو دسته تقسیم کرد. دسته اول، مطالعات انجام شده در شرایط پیوسته‌زمان بودن متوازن‌سازی با رویکرد تشکیل پرتفوی بهینه و پویا، و دسته دوم، مطالعات انجام شده با رویکرد متوازن‌سازی گسسته‌زمان و فرض ثابت و معین بودن فواصل زمانی متوازن‌سازی. هدف اغلب مطالعات انجام شده در دسته اول، ابتدا تشکیل پرتفویی بهینه و پویا، و سپس متوازن‌سازی آن به صورت پی در پی طی زمان است؛ به گونه‌ای که پرتفوی تشکیل شده، با کمک قوانین از پیش طراحی شده به صورت مرتب در طول زمان متوازن‌سازی شود. هدف مطالعات انجام شده در دسته دوم نیز پیاده‌سازی استراتژی-های رایج متوازن‌سازی از جمله متوازن‌سازی آستانه‌ای و یا تعیین تناوبی معین مانند ماهانه، سالانه و یا فصلی به عنوان تناوب بهینه متوازن‌سازی می‌باشد. در این مطالعات، تناوب بهینه بدون در نظر داشتن تاثیر افق سرمایه‌گذاری تعیین شده‌اند. پژوهش حاضر نیز در این دسته قرار داشته به گونه‌ای که بر خلاف اغلب مطالعات پیشین، اثر افق سرمایه‌گذاری در تعیین تناوب بهینه را در قالبی الگوریتمی پویا با قابلیت پیاده‌سازی برای افق-های زمانی مختلف در نظر می‌گیرد.

مطابق یافته‌های این پژوهش، برای دوره‌های زمانی محدود، مقدار افق سرمایه‌گذاری در مقدار تناوب بهینه اثرگذار بوده و این حساسیت برای افق‌های زمانی کوتاه‌تر شدیدتر می‌باشد. در نتیجه، سرمایه‌گذاران و مدیران شرکت‌های سرمایه‌گذاری می‌بایست به این موضوع توجه داشته و پس از تشکیل و بهینه‌سازی پرتفویی با پارامترهای معین از جمله افق سرمایه‌گذاری، به محاسبه تناوب بهینه مرتبط با آن پرداخته و فواصل زمانی مناسب برای متوازن‌سازی‌های پی‌درپی را با هدف کاهش هزینه معاملات و افزایش مطلوبیت سرمایه‌گذار محاسبه کنند. به کارگیری تناوب بهینه در استراتژی نیمه فعلانه و برای تمامی افق های زمانی نسبت به استراتژی فعلانه، علاوه بر بیشینه کردن تابع هدف در نظر گرفته شده، سهولت در اجرای فرآیند متوازن‌سازی را نیز از طریق کاهش تعداد دفعات متوازن‌سازی به همراه خواهد داشت. همچنین، بکارگیری این تناوب در مقایسه با تناوب استراتژی منفعلانه نیز برتری خواهد داشت چرا که ماهیت رشد ارزش پرتفوی در طول زمان و در فرایند منفعلانه ترکیب بهینه دارایی ها را تغییر داده و در نتیجه نیاز به بازگشت به حالت بهینه در زمانهایی کوتاه تر وجود خواهد داشت. یافته های این پژوهش با فرض مجاز دانستن فروش استقراضی استنتاج شده است که این موضوع در حال حاضر در بازار سرمایه ایران امکان پذیر نمی باشد. بدیهی است چنانچه در آینده شرایط و ضوابطی برای تسهیل این موضوع مهیا شود الگوریتم معرفی شده کاربردی تر بوده و در عمل قابل پیاده سازی خواهد بود.

با توجه به نتایج این پژوهش و به منظور جامعیت بهتر موضوع متوازن‌سازی پرتفوی، پرداختن به موارد زیر در مطالعات آتی پیشنهاد می‌شود:

۱) بررسی ماهیت استراتژی‌های متوازن‌سازی با حذف فرض ثابت بودن میانگین و انحراف معیار بازده دارایی‌ها در طول زمان.

۲) تدوین مدلی مناسب برای هزینه معاملات و بررسی اثر آن بر تابع مطلوبیت و مقدار تناوب‌های متوازن‌سازی.

۳) بررسی شرایطی برای افزودن و یا حذف دارایی‌ها از درون پرتفوی در طول زمان و تأثیر آن بر استراتژی‌های مختلف.

فهرست منابع

* زندیه، مصطفی. امیری، مقصود و ربانی، معصومه (۱۳۹۲). «تأثیر متوازن‌سازی مجدد مدل چند دوره‌ای پرتفوی سرمایه‌گذاری، بر روی بازدهی پرتفوی، با استفاده از الگوریتم فرا ابتکاری»، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، موسسه آموزش عالی غیرانتفاعی و غیردولتی رجاء قزوین.
* فدایی نژاد، محمد اسماعیل و بنائیان، حمید (۱۳۸۹). «طراحی مدل متوازن‌سازی مجدد پرتفوی سرمایه‌گذاری با در نظر گرفتن هزینه‌های معاملاتی بر مبنای رویکرد تصمیم‌گیری فازی»، هشتمین کنفرانس بین‌المللی مدیریت، گروه پژوهشی آریانا.
* Algoet, P. Cover, T. (1988). "Asymptotic optimality and asymptotic equipartition properties of log-optimum investment". The Annals of Probability
* Arguin, L.P. Bovier, A. Kistler, N. (2013). “The extremal process of branching Brownian motion”, Probability Theory and Related Fields, 535–574
* Das, S. Goyal, M. (2012). "Discrete-Time Log-Optimal Portfolio Rebalancing: A Scalable Efficient Algorithm". IEEE Computational Intelligence for Financial Engineering and Economics
* Das, S. (2014). "Scalable, Efficient and Optimal Discrete-Time Rebalancing Algorithms for Log-Optimal Investment Portfolio". Theses and Dissertations. Paper 455.
* Fenton, L. (1960). "The sum of log-normal probability distributions in scatter transmission systems". Communications Systems, IRE Transactions on 8 (1)
* Ha, Y. (2017). “Review of online portfolio selection: Performance comparison with transaction costs including market impact costs”. Ha, Youngmin, Review of Online Portfolio Selection: Performance Comparison with Transaction Costs Including Market Impact Costs. Available at: SSRN: https://ssrn.com/abstract=2763202
* Hull, J. (2011). "Options, Futures, and Other Derivatives". Prentice Hall, New Jersey
* Jung, J. Kim, S. (2016). “Developing a dynamic portfolio selection model with a self-adjusted rebalancing method”, Journal of the Operational Research Society, 1-14
* Kaznachey, D. Das, S. Goyal, M. (2012). “Computing Optimal Rebalance Frequency for Log-Optimal Portfolio", journal of Quantitative Finance
* Kritzman, S. Page, S. (2009). "Optimal rebalancing: a scalable solution". Journal of Investment Management 7 (1)
* Kohler, A. Wittig, H. (2014). "Rethinking Portfolio Rebalancing: Introducing Risk Contribution Rebalancing as an Alternative Approach to Traditional Value-Based Rebalancing Strategies”, The Journal of Portfolio Management. 34-46
* Liu, J. Longstaff, F. Pan, J. (2003). "Dynamic asset allocation with event risk". Journal of Finance
* Luenberger, D. (1998). "Investment science". Oxford Univ. Press, New York
* Mittal, G. Mehlawat, M.K. (2014). “A multiobjective portfolio rebalancing model incorporating transaction costs based on incremental discounts”, Optimization: A Journal of Mathematical Programming and Operations Research, 1595-1613

* Merton, R. (1971). "Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model". Journal of Economic Theory 3 (4)
* Moallemi, C.C. Sa˘glam, M. (2015). "Dynamic Portfolio Choice with Linear Rebalancing Rules". Available at SSRN: https://ssrn.com/abstract=2011605
* Neftci, S. (2000). "An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives". Advanced Finance, Academic Press, London
* Sun, W. Fan, A. Chen, L. Schouwenaars, T. Albota, M. (2006). "Using dynamic programming to optimally rebalance portfolios". The Journal of Trading 1 (2)

پیوست

الگوریتم شماره ۱- شرط وجود استراتژی ترکیبی

```
Given: w, μ, S, N
1: X′ ← 0, X′′ ← 0, Y′ ← 0, Y′′ ← 0
2: for i = 1 to N + 1 do
3:     X′ ← X′ + w_i μ_i
4:     X′′ ← X′′ + w_i μ_i^2
5:     for j = 1 to N + 1 do
6:         Y′ ← Y′ + w_i w_j σ_ij
7:         Y′′ ← Y′′ + w_i w_j σ_ij (2(μ_i + μ_j) + σ_ij)
8:     end for
9: end for
10: if (X′′ − X′^2) − 1/2 (Y′′ − Y′^2) + 2X′Y′ ≥ 0 then
11:    Return true
12: else
13:    Return false
14: end if
```

$$X'(0) = \sum_{i=1}^{N+1} w_i\mu_i \,, Y'(0) = \sum_{i,j=1}^{N+1} w_i w_j \sigma_{ij}$$

$$, X''(0) = \sum_{i=1}^{N+1} w_i\mu_i^2 \,, Y''(0) = \sum_{i,j=1}^{N+1} w_i w_j \sigma_{ij}[2(\mu_i + \mu_j) + \sigma_{ij}]$$

یادداشت‌ها

[1] Merton
[2] Algoet
[3] Cover
[4] Liu
[5] Quadratic Heuristic
[6] Threshold Rebalancing
[7] linear rebalancing rules
[8] Sequential portfolio selection
[9] Market impact costs
[10] proportional transaction costs
[11] unlimited market liquidity

[12] limited market liquidity
[13] NASDAQ stock market
[14] Random Walk
[15] Das
[16] Goyal
[17] Geometric Bronian Motion
[18] Derivatives
[19] Short Sell
[20] Log-Normal
[21] Asset Growth Rate
[22] Growth Rate Of Log Of Portfolio Return
[23] luenberger
[24] Instantaneous Rate Of Return Of Portfolio
[25] Ito's Lemma
[26] Neftci
[27] Das
[28] Lagrange Multipliers
[29] Fenton-Wilkinson Approach
[30] Expected Instantaneous Portfolio Growth
[31] CAPM
[32] www.tsetmc.com