فصلنامــه علمی پژوهشی دانش سرمایه‌گــذاری
سال هشتم/ شماره بیست‌ونهم/ بهار ۱۳۹۸

مدل پرتفوی بر مبنای میانگین–آنتروپی در محیط فازی: آنالیز حساسیت، هزینه های معامله بر پایه تئوری اعتبار

محمود لاری دشت بیاض
استادیار گروه حسابداری، دانشگاه فردوسی مشهد،مشهد ایران
m.lari@um.ac.ir

شعبان محمدی
کارشناسی ارشد حسابداری، موسسه آموزش عالی حکیم نظامی قوچان،قوچان، ایران(نویسنده مسئول)
shaban1362@gmail.com

نادر نقش بندی
استادیار گروه حسابداری،موسسه آموزش عالی حکیم نظامی قوچان،قوچان، ایران
nader_naghshbandi@yahoo.com

تاریخ دریافت: ۹۶/۰۹/۲۶ تاریخ پذیرش: ۹۶/۱۲/۲۲

چکیده

هدف این پژوهش بررسی مدل پرتفوی سهام بر مبنای میانگین-آنتروپی در محیط فازی با هزینه های معامله بر پایه تئوری اعتبار برای ۱۰ سهام از بورس اوراق بهادار تهران در سال۱۳۹۶ است. پژوهش حاضر تنها مبتنی بر مدل های بر مبنای میانگین-آنتروپی نیست، بلکه آنالیز حساسیت درباره ضرائب تابع هدف و ضرائب محدودیت بویژه در حداکثرسازی مدل بازگشتی و مدل ریسک مینیمم را انجام داده است. از آنتروپی و آنالیز حساسیت برای اندازه گیری میزان ریسک و ضرائب تابع هدف و محدودیت استفاده شد. نتایج بدست آمده نشان می دهد زمانی که ضرایب در محدوده مقادیر تغییر می کند یا جواب بهینه شده یا مقادیر ثابتی از تابع هدف بدست می آید. نتایج پژوهش به سرمایه گذاران کمک می کند تا بتوانند با اطمینان بیشتر انتخاب خود راانجام دهند.

واژه‌های کلیدی: آنالیز حساسیت، آنتروپی، هزینه های معامله، فازی.

۱- مقدمه

تشکیل پرتفوی دارایی ها همواره یکی از موضوع های مهم در مباحث مالی بوده است. تا اواخر قرن بیستم عمده تئوری های مالی به صورت موردی و غیر سیستماتیک مطرح شده بود. روش مبتنی بر میانگین-واریانس توسط ماکوویتز(۱۹۸۲) برای مساله انتخاب سبد سهام پیشنهاد شده است. قواعد اساسی مدل بر مبنای میانگین-واریانس این است که از بازده قابل انتظار سبد سهام به عنوان بازده سرمایه و از واریانس بازده سبد سهام به عنوان ریسک سرمایه گذاری استفاده شود. مدل های مبتنی بر مبنای میانگین-واریانس ماکوویتز، به دنبال ریسک مینیمم و بازده ماکزیمم، با استفاده از بعضی محدودیت ها، می باشند. اکثر مدل های منتخب پرتفوی موجود، بر پایه تئوری های احتمال هستند. مشکل انتخاب سبد سهام بر مبنای میانگین-واریانس توسط بسیاری از محققان عالی از جمله مرتون وهمکاران (۱۹۸۴)مورد مطالعه قرار گرفته است. در بازار سرمایه گذاری واقعی، بسیاری از فاکتورهای غیراحتمالی بر روی بازار سرمایه گذاری اثرگذار می باشند .بعنوان مثال عدم قطعیت دارایی های پرخطر، بیشتر در عدم قطعیت محیط فازی دیده می شود. عدم قطعیت محیط فازی از عدم قطعیت احتمالی مهم تر است. لیو(۲۰۱۰) تئوری اعتبار را بر پایه ی سیستم معنی دار تعداد محیط فازی ارائه داد. براساس تئوری اعتبار، بسیاری از محققان میانگین ها و واریانس های محیط فازی را در مدل پرتفوی مورد بررسی قرا داده اند. مفهوم آنتروپی در محیط فازی توسط لیو(۲۰۱۰)، برای اندازه گیری عدم قطعیت متغیرهای محیط فازی تعریف شده است. لیو(۲۰۱۰) بحث و مطالعه عمیقی در مورد تئوری اعتبار با استفاده از بعضی از مفاهیم پایه و نظریه های اساسی ارائه داد. لیو(۲۰۱۰) همچنین یک مدل برنامه ریزی محدود تصادفی را پیشنهاد داد و یک الگوریتم ژنتیک طراحی کرد تا بتواند آن را حل کند. بیشترکارهای تحقیقاتی طوری صورت گرفته است که نرخ بازده به عنوان تعداد محیط فازی در نظر گرفته شده است (امیری و همکاران، ۲۰۱۱). همزمان به این نکته توجه شده که ریسک می تواند توسط آنتروپی هم اندازه گیری شود. فیلیپاتوس(۱۹۷۲) به این نکته اشاره دارد که آنتروپی جامع تر از واریانس برای اندازه گیری ریسک است، به این خاطر که، آنتروپی هیچگونه وابستگی به توزیع های احتمالی متقارن ندارد و می تواند از داده های غیرقابل اندازه گیری محاسبه شود. هوآنگ(۲۰۱۱) مدل های بر مبنای میانگین-آنتروپی را برای انتخاب پرتفوی در محیط فازی و مدل های بر مبنای میانگین-ریسک را برای مدل های پرتفویی دارای عدم قطعیت مورد مطالعه قرار داد. موکش(۲۰۱۶) مدل های بر مبنای میانگین-آنتروپی را برای انتخاب پرتفوی چند مرحله ای با سطوح جذب چندمنظوره ارائه داد. ژو(۲۰۱۵) یک مدل آنتروپی ترکیبی بر مبنای میانگین-واریانس برای انتخاب پرتفوی با بازده در محیط فازی را ارائه داد. نتایج بدست آمده نشان می دهد که مدل های پیشنهادی عموماً بهتر از مدل های انتخاب پرتفوی سنتی اجرا می شود. در گذشته، بسیاری از محققان مدل های انتخاب پرتفوی در محیط فازی را با وجود تمام محدودیت های پیچیده مورد مطالعه قرار می دادند. ژانگ (۲۰۱۱) مدل های پرتفوی پیچیده تری با هزینه های معامله و وام و استقراض در نظر گرفته شده است. لی(۲۰۰۷) کارهای تحقیقاتی برروی آنتروپی توزیع اعتبار متغیرهای محیط فازی که پایه و اساس آنتروپی در محیط فازی بوده انجام داده است. لیو(۲۰۱۱) مشکل انتخاب پرتفوی را با بازده با فاصله ارزشمند که در آن ریسک با انحراف معیار اندازه گیری شده است حل کرد.

لیو(۲۰۱۱) همچنین یک مدل بهینه پرتفوی در محیط فازی را مورد مطالعه قرار داد. کین(۲۰۰۹) آنتروپی-ضربدری در محیط فازی را در انتخاب پرتفوی در نظر گرفت. ژو(۲۰۱۵) یک مدل بهینه پرتفوی را که بر پایه آنتروپی اطلاعات با سری های زمانی نامعین بود را مورد مطالعه قرار داد، هردو مدل که براساس آنتروپی هستند بهتر از مدل های سنتی هستند و مدل های پیش بینی سری های زمانی در محیط فازی به بهبود بیشتر عملکرد واقعی کمک می کند. یوئه(۲۰۱۷) یک مدل چند هدفه محیط فازی و مدل انتخاب پرتفوی لحظات سفارش بالا برای پرتفوی های مختلف را مورد مطالعه قرار داد و یک الگوریتم متحول شده چندهدفه موثر طراحی کرد. چن(۲۰۰۴) کارهای تحقیقاتی برروی یک اگوریتم ترکیبی برای پرتفوی در محیط فازی با هزینه های معامله انجام داد. از آنجایی که در واقع مدل پرتفوی یک مدل بهینه است. آنالیز حساسیت نقش مهمی را در متدهای بهینه سازی ایفا می کند. اکثر محققان توجه کمی به آنالیز حساسیت در مدل پرتفوی داشتند. در این پژوهش از بازده مورد انتظار پرتفوی به عنوان بازده سرمایه گذاری و آنتروپی در محیط فازی بازده پرتفوی به عنوان ریسک سرمایه گذاری استفاده می شود. همچنین به این نکته توجه شده که هزینه های معامله یک عامل مهم در سرمایه گذاری پرتفوی است.

۲- مبانی نظری و پیشینه پژوهش

۲-۱- اعتبار، ارزش مورد انتظار و آنتروپی

مفهوم دسته ها در محیط فازی توسط زاده(۱۹۷۸) ارائه شد. به منظور اندازه گیری یک دسته در محیط فازی مفهوم اندازه گیری احتمالی را پیشنهاد داد. اگرچه اندازه گیری احتمالی به صورت گسترده ای استفاده می شود، اما از قانون بیان حقیقت پیروی نمی کند و با قانون میانه رویی و قانون تناقض سازگاری ندارد. دلیل اصلی آن است که اندازه گیری احتمالی هیچ گونه ویژگی خود دوگانگی ندارد. با این حال، اندازه گیری خود دوگانگی به طور کامل هم در تئوری و هم در عمل لازم است.لیو(۲۰۱۰) اندازه گیری اعتبار را با خود دوگانگی و با اصول ریاضی سختگیرانه ای تعریف کرد. نقطه حیاتی تئوری اعتبار خود دوگانگی است. زمانی که مقدار اعتبار یک رویداد با محیط فازی۱ بدست می آید، رویداد با محیط فازی به طور قطع اتفاق خواهد افتاد. بنابراین، اعتبار را به عنوان اندازه گیری امکان رخداد یک رویداد با محیط فازی در این پژوهش اتخاذ شده است.آقایی وهمکاران(۱۳۹۵) به بررسی جامع روابط درونی ساختار سرمایه، جریان‌های وجه نقد آزاد، انتروپی تنوع‌پذیری محصولات و عملکرد شرکت‌پرداختند.نتایج نشان داد اهرم بدهی بر روی تنوع‌پذیری محصولات تأثیر مثبت و معنادار، شاخص کیوتوبین بر تنوع‌پذیری محصولات تأثیر منفی و معنادار، تنوع‌پذیری محصولات و شاخص کیوتوبین بر اهرم بدهی تأثیر مثبت و معنادار می‌گذارند. بهزادی و بختیاری(۱۳۹۳) مدلی بر مبنای میانگین - آنتروپی -چولگی برای حل مساله بهینه سازی پرتفوی ارائه دادند که دارای شاخص عملکرد اقتصادی بالاتری است.

تعریف ۱-۲-۱- فرض کنیم ξ یک متغیر در محیط فازی با درجه عضویت μ و عدد حقیقی x باشد. آنگاه برای هر دسته A عضو R اعتبار یک رویداد در محیط فازی به صورت زیر تعریف می شود:

$$Cr\{\xi\epsilon A\} = \frac{1}{2}\left(\underset{x\epsilon A}{\sup}\,\mu(x) + 1 - \underset{x\epsilon A^c}{\sup}\,\mu(x)\right)$$ رابطه (۱)

فرمول بالا همچنین به عنوان قضیه اعتبار معکوس شناخته می شود، برعکس اگر ξیک متغیر در محیط فازی باشد سپس درجه عضویت آن نشأت گرفته از اندازه گیری اعتبار است بوسیله:

$$\mu(x) = (2cr\{\xi = x\} \wedge 1, \quad x\epsilon R$$ رابطه (۲)

تعریف۱-۲-۲-فرض کنیم ξ یک متغیر در محیط فازی باشد، سپس ارزش مورد انتظار آن به صورت زیر است:

$$[\xi] = \int_0^{+\infty} Cr\{\xi \geq x\}dx - \int_{+\infty}^{0} Cr\{\xi \leq x\}dx$$ رابطه (۳)

به شرطی که حداقل یکی از دو انتگرال بالا محدود باشد.

تعریف ۱-۲-۳- فرض کنیم ξ یک متغیر در محیط فازی پیوسته باشد، سپس آنتروپی آن به صورت زیر است:

$$H[\xi] = \int_{-\infty}^{+\infty} S(Cr\{\xi = x\})dx$$

رابطه (۴)

که

$$S(t) = -tlnt - (1-t)\ln(1-t)$$

آنتروپی در محیط فازی برای اندازه گیری عدم قطعیت مربوط به هریک از متغیرها در محیط فازی استفاده می شود. اگر ξ درجه عضویت پیوسته μدارد، آنگاه داریم $Cr\{\xi = x\} = \frac{\mu(x)}{2}$برای هر x عضو R. در این مورد به سادگی می توان اثبات کرد که آنتروپی آن است:

$$H[\xi] = -\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\mu(x)}{2} ln\frac{\mu(x)}{2} + \left(1 - \frac{\mu(x)}{2}\right)\ln\left(1 - \frac{\mu(x)}{2}\right)dx\right.$$ رابطه (۵)

مثال ۱-۲ یک متغیر در محیط فازی مثلثی شکل به صورت کامل توسط سه تایی (a,b,c) از اعداد حقیقی که a<b<c است اندازه گیری شده است و درجه عضویت آن به صورت زیر داده شده است:

$$\mu(x)=\begin{cases}\frac{x-a}{b-a}, & if\ a\le x\le b\\ \frac{x-c}{b-c}, & if\ b\le x\le c\\ 0, & otherwise\end{cases}$$ رابطه (۶)

با استفاده از فرمول $Cr\{\xi\le x\}+Cr\{\xi\ge x\}=1$ داریم:

$$Cr\{\xi\le x\}=\begin{cases}0 & ,if\ x\le a\\ \frac{x-a}{2(b-a)} & ,if\ a\le x\le b\\ \frac{x+c-2b}{2(c-b)} & ,if\ b\le x\le\le c\\ 1 & ,if\ x\ge c\end{cases}$$ رابطه (۷)

$$Cr\{\xi\le x\}=\begin{cases}1 & ,if\ x\le a\\ \frac{2b-a-x}{2(b-a)} & ,if\ a\le x\le b\\ \frac{c-x}{2(c-b)} & ,if\ b\le x\le\le c\\ 0 & ,if\ x\ge c\end{cases}$$ رابطه (۸)

مثال۲ -۲ متغیر در محیط فازی مثلث شکل $(a,b,c)=\xi$یک ارزش مورد انتظار دارد:

$$E[\xi]=\frac{a+2b+c}{4}$$ رابطه (۹)

مثال ۳-۲ فرض کنیم ξ یک متغیر در محیط فازی مثلثی شکل (a,b,c) باشد، آنگاه آنتروپی آن است:

$$E[\xi]=\frac{c-a}{2}$$ رابطه (۱۰)

قضیه ۱ -۲ فرض کنیم ξوη متغیرها در محیط فازی مستقل با مقادیر مورد انتظار محدود باشد. آنگاه برای هر عدد a و b داریم:

$$E[a\xi+b\eta]=aE[\xi]+bE[\eta]$$ رابطه (۱۱)

قضیه ۲-۲ فرض کنیم ξ یک متغیر در محیط فازی دارای عدم قطعیت باشد و c یک عدد حقیقی باشد، آنگاه:

رابطه (۱۲)
$$H[\xi + c] = H[\xi]$$

قضیه ۳ -۲ فرض کنیم ξ و η متغیرها در محیط فازی مستقل باشند. آنگاه برای هرکدام از اعداد حقیقی a و b داریم:

رابطه (۱۳)
$$E[a\xi + b\eta] = |a|H[\xi] + |b|H[\eta]$$

در مسأله انتخاب پرتفوی، از زمانی که عدم قطعیت باعث ضرر شود، از آنتروپی برای ارزیابی درجه ریسک یک پرتفوی استفاده می کنیم. در مدل پرتفوی به هر اندازه که ارزش پرتفوی کمتری داشته باشیم، عدم قطیت بازده پرتفوی کمتری داریم و در نتیجه پرتفوی ایمن تری داریم. بنابراین در این پژوهش، آنتروپی پرتفوی به عنوان معیار اندازه گیری ریسک در نظر گرفته شده است.

۳- روش شناسی پژوهش

۳-۱- مدل بر مبنای میانگین-آنتروپی با هزینه های معامله

ماکویتز(۱۹۸۲) مدل پرتفوی بر مبنای میانگین- واریانس کلاسیک را با سرمایه گذاری با بازده ماکزیمم برای یک سطح ریسک پیش فرض و با سرمایه گذاری با ریسک مینیمم برای یک سطح بازده سرمایه گذاری پیشفرض ، پیشنهاد شده کرد. در این پژوهش قواعد منتخب ماکویتز (۱۹۸۲)را حفظ می نماییم: استفاده کردن از مقدار مورد انتظار به عنوان معیار اندازه گیری بازده، اما آنتروپی را به عنوان معیار اندازه گیری ریسک استفاده می نماییم. مدل پرتفوی بر مبنای میانگین-آنتروپی در محیط فازی با هزینه های معامله پیشنهاد داده خواهد شد.برای راحتی کار، نشانه گذاری های زیر را معرفی می نماییم: فرض کنیم x_i سرمایه گذاری بروی دارای iام (i=1,2,3,…,n) باشد و فرض کنیم ξ_i iامین متغیر در محیط فازی که مشخص کننده نرخ بازده iمین دارایی است باشد. تصور کنید یک سرمایه گذار ثروت خود را بر روی n دارایی پرخطر با مقادیر سرمایه گذاری برداری $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$سرمایه گذاری می کند. فرض کنید که هزینه های معامله یک تابع V شکل که از تفاوت بین یک پرتفوی جدید $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$و پورتفولیوی مبنا $x = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)^T$است. به عبارت دیگر، هزینه معامله x از دارایی های پرخطر می تواند $c_i(x_i) = k_i|x_i - x_i^0|$توصیف شود، که در اینجا k_iنرخ ثابت هزینه های معامله برای دارایی های پرخطر است. بنابراین، هزینه معامله نهایی در پورتفولیو ب= x $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)^T$وسیله $c(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i) = \sum_{i=1}^{n} k_i|x_i - x_i^0|$بدست می آید. طبق نظر مارکوویتز بازده متناظر پرتفوی بعد از پرداخت هزینه های معامله بوسیله این فرمول بدست می آید، $r = \sum_{i=1}^{n} x_i\xi_i -$

$\sum_{i=1}^{n} k_i|x_i - x_i^0|$ بدین ترتیب، می توانیم مدل بازده ماکزیمم با هزینه های معامله برای یک مقدار ریسک پیش فرض به صورت زیر پیشنهاد کنیم:

$$\begin{cases} \max E[r] = E\left[\sum_{i=1}^{n} x_i\xi_i - \sum_{i=1}^{n} k_i|x_i - x_i^0|\right] \\ s.t. H[r] = H\left[\sum_{i=1}^{n} x_i\xi_i - \sum_{i=1}^{n} k_i|x_i - x_1^0|\right] \le \alpha \\ \quad x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1 \\ \quad x_i \ge 0\,, i = 1،۲، \ldots \ldots ،n \end{cases}$$ رابطه (۱۴)

که α بیشترین آنتروپی است که سرمایه گذاران می توانند متحمل شوند، که بدین معناست که ریسک بیشتر از مقدار α نیست و α توسط سرمایه گذاران طبق عملکردشان نسبت به ریسک کردن داده می شود.مدل ریسک سرمایه گذاری مینیمم با هزینه معامله برای یک حد پیش فرض از بازده برابر است با:

$$\begin{cases} \min E[r] = E\left[\sum_{i=1}^{n} x_i\xi_i - \sum_{i=1}^{n} k_i|x_i - x_i^0|\right] \\ s.t. H[r] = H\left[\sum_{i=1}^{n} x_i\xi_i - \sum_{i=1}^{n} k_i|x_i - x_1^0|\right] \ge \beta \\ \quad x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1 \\ \quad x_i \ge 0\,, i = 1،۲، \ldots \ldots ،n \end{cases}$$ رابطه (۱۵)

که β کمترین حد بازده است که برای سرمایه گذاران راضی کننده است، که بدین معناست که بازده کمتر از مقدار β نیست و β توسط سرمایه گذاران طبق عملکردشان نسبت به ریسک کردن داده می شود. اکنون، پرتفوی را در نظر می گیریم با n دارایی، تصور کنید بازده دارایی در محیط فازی متغیرهایی در محیط فازی مثلثی شکل هستند $\xi_i = (a_i, b_i, c_i)$با مقدار x_i که مستقل است برای i=1,2,3,…,n، آنگاه با توجه به فرمول (۱۱) و (۱۲) داریم:

$$E[r] = E\left[\sum_{i=1}^{n} x_i\xi_i - \sum_{i=1}^{n} k_i|x_i - x_i^0|\right] = \sum_{i=1}^{n} x_i(\frac{a_i + 2b_i + c_i}{4}) - \sum_{i=1}^{n} k_i|x_i - x_i^0|$$ رابطه (۱۶)

$$E[r] = E\left[\sum_{i=1}^{n} x_i\xi_i - \sum_{i=1}^{n} k_i|x_i - x_i^0|\right] = \sum_{i=1}^{n} |x_i| H[\xi_i] = \sum_{i=1}^{n} x_i(\frac{c_i - a_i}{2}) \qquad (x_i \ge 0)$$ رابطه (۱۷)

در فرمول(۱۷)، $x_i \geq 0$بدین معناست که پرتفوی بدون فروش کوتاه است. بنابراین، هنگامی که متغیرها در محیط فازی مثلثی شکل هستند، مدل های (۱۴) و (۱۵) می تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$\begin{cases} maxE[r] = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\frac{a_i + 2b_i + c_i}{4}\right) - \sum_{i=1}^{n} k_i |x_i - x_i^0| \geq \alpha \\ s.t. H[r] = \sum_{i=1}^{n} x_i (\frac{c_i - a_i}{2}) \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1 \\ x_i \geq 0 \ , i = 1،2، \dots ،n \end{cases}$$ رابطه (۱۸)

$$\begin{aligned} & minH[r] = \sum_{i=1}^{n} x_i (\frac{c_i - a_i}{2}) \\ & s.t. E[r] = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\frac{a_i + 2b_i + c_i}{4}\right) - \sum_{i=1}^{n} k_i |x_i - x_i^0| \geq \beta \\ & x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1 \\ & x_i \geq 0 \ , i = 1،2، \dots ،n \end{aligned}$$ رابطه (۱۹)

۴- یافته های پژوهش

۴-۱- آنالیز حساسیت

به منظور نشان دادن تاثیرگذاری مقدار مورد نظر پیشنهاد شده و آنتروپی، یک مثال واقعی پرتفوی را در نظر می گیریم. در این مثال ده سهام از بازار بورس اوراق بهادار تهران را در نظر گرفته ایم. بازده آنها$\xi = (a_i, b_i, c_i)$ به عنوان اعدادی در محیط فازی مثلی شکل در نظر گرفته شده اند و نرخ معامله دارایی های پرخطر $k_i \equiv 0.005 \ (i = 1,2, \dots ,10)$ می باشد. براساس داده های قدیمی، اطلاعات آینده، نظرات کارشناسان و سازمان «بانک اطلاعات مالی» داده های زیر را بدست می آوریم:

۴-۲- آنالیز حساسیت مدل پورتفولیو بازده ماکزیمم

طبق داده های جدول ۱ می توانیم بازده ماکزیمم مدل پورتفولیو خطی زیر را بدست آوریم:

$x = (x_1, x_2, \dots x_{10})^T , k_i = 0.005$ و $\propto = 1.875$

$$\begin{cases} \max r = 2.095x_1 + 1.570x_2 + 2.445x_3 + 1.595x_4 + 1.770x_5 + 2.12x_6 + \\ \quad 1.995x_7 + 2.745x_8 + 1.045x_9 + 1.945x_{10} \\ \\ s.t. H = 1.9x_1 + 1.35x_2 + 2.1x_3 + 1.7x_4 + 1.95x_5 + 1.85x_6 + 1.9x_7 + 2.3x_8 \\ \quad +1.7x_9 + 2.0x_{10} \leq 1.875 \\ \quad x_1 + x_2 + \cdots + x_{10} = 1 \\ \quad x_i \geq 0 , i = 1،2، \dots ، 10 \end{cases}$$

رابطه (۲۰)

طبق مدل (۲۰)، هنگامی که ضرایب تابع هدف معین یا محدودیت ها در سمت راست مساله تغییر می کنند، آنگاه: بیشتر بر روی راه حل های بهینه و اساسی تمرکز داریم و این که مقدار هدف چگونه تغییر می کند. در ادامه، به صورت کاملاً دقیق حساسیت مدل را آنالیز می کنیم(۲۰).

جدول ۱- بازده در محیط فازی ۱۰ اوراق بهادار و مقادیر قابل انتظار متناظر و آنتروپی ها (واحد در سهام)

Security i	a_i	b_i	c_i	$E[\xi_i] = \frac{a_i + 2b_i + c_i}{4}$	$H[\xi_i] = 0.5(c_i - a_i)$
1	-0.6	2.11	3.7	1.83	2.15
2	-0.2	1.8	2.5	1.47	1.35
3	-0.4	3.2	4.2	2.55	2.3
4	-0.7	2.4	3.1	1.80	1.9
5	-0.8	2.6	3.5	1.97	2.15
6	-0.2	2.4	4.1	2.17	2.15
7	-0.9	2.1	3.6	1.72	2.25
8	-0.3	3.3	4.8	2.77	2.55
9	-0.7	2.3	2.5	1.60	1.60
10	-0.2	2.6	3.4	2.10	1.80

۴-۳- آنالیز حساسیت ضرائب تابع هدف در مدل بازده ماکزیمم

در ابتدا با حل مدل (۲۰) جواب های بهینه زیررا به دست می آوریم:بدیهی است، متغیرهای اصلی مدل x_2 و x_8 هستند و بقیه متغیرهای فرعی می باشند. بعلاوه آنالیز حساسیت را برای ضرائب تابع هدف با استفاده از نرم افزار لینگو[۱] انجام می دهیم. نتایج آنالیز حساسیت متناظر مقدار ضریب c_1، در زمانی که متغیرهای اصلی غیرقابل تغییر هستند، میزان افزایش مجاز و میزان کاهش مجاز بی نهایت می باشد، بنابراین بازه ضریب را مشخص می کند. در این حالت، متغیرهای اصلی بدون تغییر هستند، شرایط محدودیت بدون تغییر هستند بنابراین جواب بهینه هم بدون تغییر می باشد. در واقع، ضریب تابع هدف مقداری تغییرات دارد و این بر روی مقدار تابع هدف تأثیر می گذارد. به طور کلی، دو حالت زیر در آنالیز حساسیت ضریب تابع هدف وجود دارد: ضریب متغیر اصلی و ضریب متغیر فرعی.حالت ۱ اگر ضریب متغیر اصلی در محدوده مورد نظر تغییر کند، متغیر اصلی بهینه و جواب بهینه ثابت خواهند ماند. اما مقدار تابع هدف زمانی که مقادیر متغیرهای اصلی غیر صفر باشند تغییر نخواهد کرد مثل x_2 و x_8. حالت ۲ اگر ضریب متغیر فرعی در محدوده مورد نظر تغییر کند، متغیر

اصلی بهینه و جواب بهینه بدون تغییر خواهند ماند. مقدار تابع هدف هم زمانی که مقدار متغیرهای فرعی صفر باشند تغییر نخواهد کرد $x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10}$و صفر با هر عددی که غیرصفر است تکثیر خواهد شد.طبق دو حالت ذکر شده، می توانیم داده های زیر را در جدول ۲ بدست آوریم: به منظور نشان دادن اهمیت آنالیز حساسیت، در ادامه به صورت کامل مقادیر مختلف C_1و C_2را در مدل های مورد بحث قرار می گیرد:طبق مدلها می توانیم داده های زیر را زمانی که C_1وC_2 در جدول ۳ و ۴ هستند، بدست آوریم. جدول ۳ نشان می دهد زمانی که c_1 تغییر می کند مقدار تابع هدف و جواب بهینه و متغیر اصلی بهینه بدون تغییر است.جدول ۴ نشان می دهد زمانی که c_2 تغییر می کند مقدار و جواب بهینه و متغیر اصلی بهینه بدون تغییر است. اما مقدار تابع هدف قابل تغییر است. بعلاوه می توانیم شکل ۱ را در مورد مقدار c_2و مقدار تابع هدف رسم نماییم:در مدل (۲۳)، از زمانی که x_2یک متغیر اصلی است، هرگاه ضریب c_2در محدوده آنالیز حساسیت تغییر می کند، جواب و متغیر های اصلی غیرقابل تغییر هستند اما تابع هدف تغییر خواهد کرد. از شکل ۱ می توانیم ببینیم زمانی که ضریب c_2 افزایش می یابد مقدار تابع هدف مورد نظر هم تغییر خواهد کرد.

۴-۴-آنالیز حساسیت محدودیت ها در سمت راست مساله درمدل بازده ماکزیمم

در ادامه، آنالیز حساسیت محدودیت در سمت راست مسأله با استفاده از نرم‌افزار لینگو در مدل بدست می آوریم:

$$\begin{cases} \max r = 2.148x_1 + 1.612x_2 + 2.751x_3 + 1.840x_4 + 2.029x_5 + 1.994x_6 + \\ \quad 2.018x_7 + 2.659x_8 + 1.361x_9 + 1.729_{10} \\ s.t. H = 1.9x_1 + 1.35x_2 + 2.1x_3 + 1.7x_4 + 1.95x_5 + 1.85x_6 + 1.9x_7 + 2.3x_8 \\ \quad +1.7x_9 + 2.0x_{10} \le \alpha_1 \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_{10} = 1 \\ x_i \ge 0 , i = 1،۲، \dots ، 10 \end{cases} \quad \text{رابطه (۲۴)}$$

جدول ۲- تغییرات زمانی ضرایب هدف در بعضی محدوده ها در مقایسه با جواب بهینه (۲۱)در مدل (۲۰)

متغیر هدف	ضریب هدف	متغیر اصلی	جواب بهینه	مقدار بهینه
x_1	2.148	بدون تغییر	بدون تغییر	بدون تغییر
x_2	1.612	بدون تغییر	بدون تغییر	تغییر
x_3	2.751	بدون تغییر	بدون تغییر	بدون تغییر
x_4	1.840	بدون تغییر	بدون تغییر	بدون تغییر
x_5	2.029	بدون تغییر	بدون تغییر	بدون تغییر
x_6	1.994	بدون تغییر	بدون تغییر	بدون تغییر
x_7	2.018	بدون تغییر	بدون تغییر	بدون تغییر
x_8	2.659	بدون تغییر	بدون تغییر	تغییر
x_9	1.361	بدون تغییر	بدون تغییر	بدون تغییر
x_{10}	1.729	بدون تغییر	بدون تغییر	بدون تغییر

جدول ۳- جواب های مشابه و مقادیر هدف مشابه با مقادیر مختلف C_1در مدل (۲۲)

مقدار بهینه،جواب،متغیر اصلی	r^*	c_1
بدون تغییر	2.3701	0
بدون تغییر	2.371	0.14
بدون تغییر	2.371	0.27
بدون تغییر	2.371	0.56
بدون تغییر	2.371	0.94
بدون تغییر	2.371	1.42
بدون تغییر	2.371	1.52
بدون تغییر	2.371	2.10
بدون تغییر	2.371	2.14

جدول ۴- جواب های مشابه و مقادیر هدف مشابه با مقادیر مختلف C_2 در مدل (۲۳)

مقدار بهینه	جواب،متغیر اصلی	r^*	c_1
تغییر	بدون تغییر	۲,۲۱۹	1.524
تغییر	بدون تغییر	۲,۳۶۴	1.754
تغییر	بدون تغییر	۲,۴۸۷	1.967
تغییر	بدون تغییر	۲,۵۹۴	2.157
تغییر	بدون تغییر	۲,۶۸۷	2.391
تغییر	بدون تغییر	۲,۷۸۳	2.558
تغییر	بدون تغییر	۲,۸۰۸	2.710
تغییر	بدون تغییر	۲,۹۱۱	2.862

در سمت راست مسأله اخیر مدل (۲۴) مقدار α مشخصاست. با استفاده از آنالیز حساسیت در زمانی که متغیرهای اصلی غیرقابل تغییر هستند. اگرچه متغیر اصلی بهینه بدون تغییر است، اما در این حالت شرایط محدودیت های موردنظر تغییر می کند، بنابراین جواب بهینه موردنظر و مقدار تابع به خوبی تغییر خواهد کرد. در راه حل مشابهی، آنالیز حساسیت سمت راست مسأله اخیر در محدودیت های $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$ است که توسط بدست آمده است. زمانی که متغیر اصلی بدون تغییر است میزان افزایش مجاز و میزان کاهش مجاز نیز مشخص است. جدول ۵ نشان می دهد زمانی که ∝ در بازه بازه مدنظر تغییر می کند، متغیر اصلی بهینه غیرقابل تغییر است، اما جواب بهینه و مقدار تابع هدف قابل تغییر هستند.

۴-۵-آنالیز حساسیت مدل پورتفوی ریسک مینیم

طبق داده های جدول۱، به عبارت دیگر با استفاده از مدل (۱۹) می توانیم مدل خطی پورتفوی ریسک مینیمم (۲۵) را براساس تئوری احتمال با $x = (x_1, x_2, \dots x_{10})^T$ بدست آوریم و فرض کنیم $\beta = 1.411$:

$$\begin{cases} minH = 1.8x_1 + 1.23x_2 + 2.4x_3 + 1.6x_4 + 1.87x_5 + 1.75x_6 + 1.6x_7 + 2.6x_8 \\ \quad +1.7x_9 + 2.0x_{10} \\ s.r.t = 2.012x_1 + 1.632x_2 + 2.328x_3 + 1.501x_4 + 1.702x_5 + 2.038x_6 + \\ \quad 1.875x_7 + 2.684x_8 + 1.085x_9 + 1.711x_{10} \geq 1.411 \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_{10} = 1 \\ x_i \geq 0 \, , i = 1،2، \dots ، 10 \end{cases} \qquad \text{رابطه (۲۵)}$$

طبق مدل ریسک مینیمم (۲۵) می توانیم یک بحث مشابه درباره ی آنالیز حساسیت برای ضرائب تابع هدف داشته باشیم. بدین ترتیب،حل کردن مدل و کار کردن بر روی دو حالت آنالیز حساسیت را انجام می دهیم.

۴-۶- آنالیز حساسیت ضریب تابع هدف در مدل ریسک مینیمم

در ابتدا جواب بهینه (۲۵) با اتخاذ $\beta = 1.411$ است با داشتن (۲۶) x^*, H^*, r^*، بدیهی است متوجه می شویم متغیرهای اصلی هنوز x_2 و x_8 هستند و بقیه آنها متغیر های فرعی هستند. با استفاده از نرم افزار تحت شرایطی که متغیرهای اصلی بدون تغییر هستند، آنالیز حساسیت ضریب x_1 تابع هدف را بدست می آوریم، در بازه مورد نظر، متغیر اصلی بدون تغییر می باشد، در همین زمان شرایط محدودیت ها بدون تغییر می باشد.

جدول ۵- راه حل های مختلف با توجه به مقادیر مختلف α در مدل (۲۴)

مقدار بهینه	جواب،متغیر اصلی	H^*	r^*	α
تغییر	بدون تغییر	1.420	1.658	1.420
تغییر	بدون تغییر	1.482	1.769	1.482
تغییر	بدون تغییر	1.654	1.894	1.654
تغییر	بدون تغییر	1.820	2.369	1.820
تغییر	بدون تغییر	1.889	2.458	1.889
تغییر	بدون تغییر	1.997	2.497	1.997
تغییر	بدون تغییر	2.314	2.658	2.314
تغییر	بدون تغییر	2.538	2.794	2.538
تغییر	بدون تغییر	2.600	2.836	2.600
تغییر	بدون تغییر	2.60	2.937	> 2.60

$$\begin{cases} minH = 1.8x_1 + 1.23x_2 + 2.4x_3 + 1.6x_4 + 1.87x_5 + 1.75x_6 + 1.6x_7 + 2.6x_8 \\ \qquad +1.7x_9 + 2.0x_{10} \\ s.r.t = 2.012x_1 + 1.632x_2 + 2.328x_3 + 1.501x_4 + 1.702x_5 + 2.038x_6 + \\ \qquad 1.875x_7 + 2.684x_8 + 1.085x_9 + 1.711x_{10} \geq 1.411 \\ \qquad x_1 + x_2 + \cdots + x_{10} = 1 \\ \qquad x_i \geq 0 \,, i = 1،۲، \dots ، 10 \end{cases}$$ رابطه (۲۶)

جدول ۶- بازه ها در جایی که پایه ها بدون تغییر هستند در مدل (۲۵)

مقدار بهینه	جواب ،متغیر اصلی	ضریب هدف	متغیر هدف
بدون تغییر	بدون تغییر	1.8	x_1
تغییر	بدون تغییر	1.23	x_2
بدون تغییر	بدون تغییر	2.4	x_3
بدون تغییر	بدون تغییر	1.6	x_4
بدون تغییر	بدون تغییر	1.87	x_5
بدون تغییر	بدون تغییر	1.75	x_6
بدون تغییر	بدون تغییر	1.6	x_7
تغییر	بدون تغییر	2.6	x_8
بدون تغییر	بدون تغییر	1.7	x_9
بدون تغییر	بدون تغییر	2	x_{10}

(فقط بعضی از ضرائب تابع هدف مقداری تغییرات دارند) بنابراین متغیرهای اصلی بهینه ی بدون تغییر به معنای جواب بهینه بدون تغییر می باشند(از زمانی که بعضی از ضرائب تابع هدف تغییر کند، مقدار هدف مورد نظر نیز تغییر خواهد کرد). دو حالت زیر در آنالیز حساسیت ضریب تابع هدف وجود دارد. حالت ۱ اگر ضریب متغیر اصلی در محدوده مورد نظر تغییر کند، متغیر اصلی بهینه و جواب بهینه ثابت خواهند ماند. اما مقدار تابع هدف زمانی که مقادیر متغیرهای اصلی غیر صفر باشند تغییر نخواهد کرد. حالت ۲ اگر ضریب متغیر فرعی در محدوده مورد نظر تغییر کند، متغیر اصلی بهینه و جواب بهینه بدون تغییر خواهند ماند. در همین حال، مقدار تابع هدف هم زمانی که مقدار متغیرهای فرعی صفر باشند تغییر نخواهد کرد مثل $x_1, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_9, x_{10}$و صفر با هر عددی که غیرصفر است تکثیر خواهد شد. طبق ایده های حالت ۱ و ۲که بدست آمده، می توانیم بازه های مقادیر زیر از مدل (۲۵) که در آن متغیر اصلی بدون تغییر می باشد، بدست می آوریم.

۴-۷- آنالیز حساسیت محدودیت سمت راست مسأله در مدل ریسک مینیمم

در ادامه، آنالیز حساسیت که بدست آمده و مربوط به سمت را ست مدل زیر می باشد را مورد بحث قرار می دهیم(۲۷):

رابطه (۲۷)

$$
\begin{cases}
minH = 1.82x_1 + 1.28x_2 + 2.4x_3 + 1.65x_4 + 1.88x_5 + 1.79x_6 + 2.3x_7 + 2.1x_8 \\
\quad +1.67x_9 + 2.0x_{10} \\
s.r.t = 2.19x_1 + 1.61x_2 + 2.36x_3 + 1.64x_4 + 1.82x_5 + 2.33x_6 + \\
\quad 2.1x_7 + 2.86x_8 + 1.16x_9 + 1.88x_{10} \geq \beta \\
x_1 + x_2 + \cdots + x_{10} = 1 \\
x_i \geq 0 \, , i = 1،2، \dots ، 10
\end{cases}
$$

سمت راست مسأله اخیر $\beta = 1.945$ می باشد. آنالیز حساسیت را برای β توسط نرم افزار بدست می آوریم، تحت شرایطی که متغیر اصلی بدون تغییر می باشد، میزان افزایش مجاز و میزان کاهش مجاز مشخص می باشد، بدین صورت بازه سمت راست مساله مشخص می گردد،اگرچه متغیراصلی بهینه بدون تغییر می باشد، از زمانی که شرایط محدودیت های مورد نظر تغییر کند، آنگاه جواب بهینه موردنظر و مقدار تابع هدف بهینه در مدل (۲۷) تغییر خواهد کرد(مراجعه به جدول ۷). طبق داده ها در جدول ۷، می توانیم مرز مؤثر مدل (۲۷) را برای مقادیر مختلف βرسم نماییم. با توجه به نمودار ۳، می فهمیم که مرز ریسک (آنتروپی) و بازده در پرتفوی تقریباً یک خط راست هستند، به عنوان نمونه زمانی که ریسک افزایش می یابد بازده هم افزایش می یابد. در همین راستا، می توانیم محدودیت را هم آنالیز کنیم. سمت راست مسأله اخیر برابر با ۱ است، تحت این شرایط متغیرهای اصلی بدون تغییر است، میزان افزایش مجاز و میزان کاهش مجاز برابر مشخص می باشد.

جدول ۷- جواب های مختلف در ازای مقادیر مختلف β در مدل (۲۷)

مقدار بهینه	جواب،متغیر اصلی	H^*	r^*	β
		1.421	1.63	< 1.63
تغییر	بدون تغییر	1.421	1.630	1.630
تغییر	بدون تغییر	1.442	1.687	1.687
تغییر	بدون تغییر	1.540	1.749	1.749
تغییر	بدون تغییر	1.681	2.036	2.036
تغییر	بدون تغییر	1.798	2.287	2.287
تغییر	بدون تغییر	2.036	2.461	2.461
تغییر	بدون تغییر	2.254	2.623	2.623
تغییر	بدون تغییر	2.311	2.776	2.776
تغییر	بدون تغییر	2.409	2.894	2.894
				> 2.90

۵- نتیجه گیری و بحث

انتخاب پرتفوی بهینه، یکی از مسایل مهم مورد بحث بوده و با پژوهشهایی که در این زمینه صورت گرفته، الگوهایی برای تعیین پرتفوی ارائه شده که به مرور زمان ایرادات هرکدام مشخص و الگویی دیگر، جایگزین آن گردیده است .بازده داراییها همواره با عدم اطمینان است و همواره در طی زمان نوسانات غیرمنتظره ای در بازدهی داراییها از جمله سهام روی میدهد. منطق فازی میتواند یکی از گزینه های مناسب برای مدل کردن بازده داراییها باشد.از مزایای استفاده از آنتروپی، عدم وابستگی این معیار به تقارن تابع توزیع است به این معنی که برخلاف واریانس به دلیل عدم تقارن توزیع بازده دارایی، کارایی خود را ازدست نمیدهد. از طرفی برخی دیگر از محققان به این نتیجه رسیدند که سرمایه گذاران ترجیح میدهند که درجه بالاتری از چولگی را انتخاب کنند(بهزادی و بختیاری،۱۳۹۳). در این پژوهش، مدل نمونه برداری میانگین انتروپی فازی با هزینه های مبادله بر اساس نظریه اعتبار ارائه شده است. آنتروپی به عنوان اندازه گیری خطر استفاده شد. علاوه بر این، تجزیه و تحلیل حساسیت برای ضرایب عملکرد هدف و ضرایب محدودیت در سمت راست در مدل های پیشنهادی مورد بحث قرار گرفته است. علاوه بر این، دو مثال عددی برای نشان دادن اثربخشی مدل پیشنهادی و امکان سنجی تحلیل حساسیت ارائه شد. مهمتر از همه، نتایج به دست آمده نیز نشان می دهد که وقتی ضریب خاصی در برخی از محدوده ارزش تغییر می کند، باز هم می توانیم راه حل های مطلوب بدون تغییر یا مقادیر تابع هدف بدون تغییر را بدست آورد. در مقایسه با هوانگ (۲۰۱۱)، این پژوهش نه تنها مدل های آنتروپی متوسط بلکه کار تحقیقاتی را بر روی تحلیل حساسیت در مورد هدف ضریب عملکرد و ضریب محدودیت در حداکثر رساندن مدل بازده و به حداقل رساندن مدل ریسک پیشنهاد می دهد.نتایج این پژوهش می تواند گزینه های بیشتری برای سرمایه گذاران در بازار مالی عملی ارائه دهد. مدل ها با مبنای میانگین-آنتروپی با هزینه های معامله بر پایه تئوری اعتبار در پژوهش در نظر گرفته شده است. بعلاه، عمیقاً در آنالیز حساسیت درباره ی محدودیت های هدف و ضرائب درست محدودیت تحقیق و بررسی شد. داده های و جدول های مثال عددی نشان داد که مدل پیشنهادی مؤثر و آنالیز حساسیت مفید است. لازم بذکر است که نتایج آنالیز حساسیت نشان داد زمانی که ضرائب هدف مورد نظر و ضرائب محدودیت ها در یک بازه تعیین شده تغییر می کنند، متغیرهای اصلی مورد نظر و جواب بهینه و مقادیر تابع هدف چگونه تغییر می کنند. خصوصاً نتایج دو مثال عددی نشان داد اگر نرخ بازده بعضی از دارایی های پرخطر در یک بازه تعیین شده تغییر کند و دیگر شرایط تغییر نکند، آنگاه سرمایه گذار کماکان می تواند مقادیر تابع هدف بهینه ی مشابهی را بدست می آورد و همچنین بازده مورد انتظار مشابهی خواهد داشت. هوانگ(۲۰۱۱) مدل ها بر مبنای میانگی-آنتروپی را پیشنهاد داد و یک الگوریتم هوشمند ترکیبی را برای مدل ها ارئه داد. هوانگ(۲۰۱۱)یک منحنی ریسک معرفی کرد و یک مدل بر مبنای میانگین-ریسک بوجود آورد. پژوهش حاضر فقط مدل های بر مبنای میانگین-آنتروپی در محیط فازی با هزینه های معامله بر پایه ی تئوری اعتبار را رائه نداد، بلکه تحقیقات گسترده ای در زمینه آنالیز حساسیت درباره مدل بازده ماکزیمم و مدل ریسک مینیمم انجام داده است. در مقایسه با هوانگ(۲۰۱۱) نتایج ما اطلاعات بیشتری راجع به استراتژی های سرمایه گذاری بهینه را فراهم کرد و این پژوهش می تواند شانس های سرمایه گذاری

بیشتری را به سرمایه گذاران بدهد. نتایج آنالیز حساسیت برای سرمایه گذاران طبق عملکردشان برای بازده و ریسک در بازارهای مشترک مالی راهنمای نظری فراهم کرده است. در آینده ای نزدیک، چندین پارامتر از توابع هدف و شرایط محدودیت ها به صورت همزمان باهم تغییر می کنند. این محققان را وادار می کند تا بر روی چگونگی تأثیرگذاری اثر متقابل و محدودیت های مشترک میان پارامترها برروی جواب بهینه و ریسک و بازده سرمایه گذاری تحقیق کنند. این نتایج شانس های بیشتری را برای تصمیم گیرندگان سرمایه گذاری ایجاد می کند و برای تحقیقات مشابه پرتفوی می تواند به عنوان راهنما باشد. برای پژوهش های آتی پیشنهاد میگردد از سایر روش ها مانند سیستمهای عصبی، روشهای هیبریدی و ..برای آنالیز حساسیت مدل پرتفوی در محیط فازی استفاده شود و نتایج حاصله با هم مقایسه گردند. همچنین میتوان محدودیتهای مانند محدودیت بودجه را به مدل اضافه کرد.

فهرست منابع

* بهزادی، عادل؛ بختیاری، مصطفی(۱۳۹۵). ارائه مدلی بر مبنای میانگین– آنتروپی– چولگی برای بهینه سازی سبد سهام در محیط فازی، مجله مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار،شماره نوزدهم،صص۳۹-۵۵.
* آقایی، محمد علی؛ سپاسی، سحر؛ کاظم‌پور، مرتضی.(۱۳۹۵). بررسی جامع روابط درونی ساختار سرمایه، جریان وجه نقد آزاد، انتروپی تنوع‌پذیری محصولات و عملکرد (شرکت‌های پذیرفته شده در بورس اوراق بهادار تهران)،فصلنامه دانش سرمایه گذاری، دوره ۵، شماره ۲۰، صص ۲۲۳-۲۴۲.
* Markowitz H,(1952), Portfolio selection. J. Financ. 7, 77–91.
* * Markowitz, H,(1959), Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investment. Wiley, New York.
* Markowitz, H.: Mean-Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets. Basil Blackwell, Oxford (1987).
* Best J., Hlouskova J.,(2000), The efficient frontier for bounded assets. Math. Methods Oper. Res. 52, 195–212.
* Merton R.,(1972), An analytic derivation of the efficient frontier. J. Financ. Quantit. Anal. 9, 1851–1872.
* Pang J.,(1980), A new efficient algorithm for a class of portfolio selection problems. Oper. Res. Int. J. 28, 754–767.
* Perold, A.F.: Large-scale portfolio optimization. Manag. Sci. 30, 1143–1160.
* Sharpe W.,(1970), Portfolio Theory and Capital Markets. McGrawHill, New York.
* Stein M., Branke J., Schmeck H.,(2008), Efficient implementation of an active set algorithm for large-scale portfolio selection. Comput. Oper. 35, 3945–3961.
* Anagnostopoulos K., Mamanis G.,(2011),The mean-variance cardinality constrained portfolio optimization problem: an experimental evaluation of five multiobjective evolutionary algorithms. Expert Syst. 38, 14208–14217.
* Liu B.,(2010), Uncertainty Theory, 3rd edn. Spring-Verlag, Berlin.
* Liu B., 2006, A survey of credibility theory. Fuzzy Optim. Decis. 5, 387–408.
* Liu B., Iwamura K., 1998, Chance constrained programming with fuzzy parameters. Fuzzy Sets Syst. 94, 227–237.

* Amiri M., Ekhtiari M., Yazdani M., 2011, Nadir compromise programming: a model for optimization of multi-objective portfolio problem. Experts Syst. Appl. 38, 7222–7226.
* Bhattacharyya R., Kar S., Majumder, D., 2011, Fuzzy mean-variance-skewness portfolio selection models by interval analysis. Comput. Math.. 61, 126–137.
* Dastkhan H., Gharneh N., Golmakani H., 2011, A linguisticbased portfolio selection model using weighted max-min operator and hybrid genetic algorithm. Expert Syst. Appl. 38, 11735–11743.
* Philippatos G., Wilson C., 1972, Entropy, market risk, and the selection of efficient portfolios. Appl. Econ. 4, 209–220.
* Huang, X., 2008, Mean-Entropy models for fuzzy portfolio selection. IEEE Trans. Fuzzy Syst. 16, 1096–1101.
* Huang, X., 2011, Mean-risk model for uncertain portfolio selection. Fuzzy Optim Decis Mak 10, 71–89.
* Mukesh K.,2016, Credibilistic mean-entropy models for multi-period portfolio selection with multi-choice aspiration levels. Inf. Sci. 345, 9–26.
* Zhou R., Zhan Y., Cai R., Tong G., 2015, A mean-variance hybrid-entropy model for portfolio selection with fuzzy returns. Entropy 17, 3319–3331.
* Zhang W., Zhang X., Chen Y.,2011, Portfolio adjusting optimization with added assets and transaction costs based on credibility measures. Insur. Math. Econ 49, 353–360.
* Sadjadi S., Seyedhosseini S., Hassanlou, K.,2011, Fuzzy multi period portfolio selection with different rates for borrowing and lending. Appl. Soft Comput. 11, 3821–3826.
* Li P., Liu, B.,2007, Entropy of credibility distributions for fuzzy variables. IEEE Trans. Fuzzy Syst. 16, 123–129.
* Liu, S.,2011, The mean-absolute deviation portfolio selection problem with interval-valued returns. J. Comput. Appl. Math. 235, 4149–4157.
* Liu S.,2011, A fuzzy modeling for fuzzy portfolio optimization. Experts Syst. Appl. 38, 13803–13809.
* Qin Z., Li X., Li X.,2009, Portfolio selection based on fuzzy cross-entropy. J. Comput. Appl. Math. 228, 139–149.
* Zhou R., Yang Z., Yu M.,2015, A portfolio optimization model based on information entropy and fuzzy time series. Fuzzy Optim Decis. 14, 381–397.
* Yue W., Wang Y.,2017, A new fuzzy multi-objective higher order moment portfolio selection model for diversified portfolios. Phys. A 465, 124–140.
* Chen W., Wang Y., Mehlawat M., A hybrid FA-SA algorithm for fuzzy portfolios selection with transaction costs. doi:10.1007/s9-016-2365-3.
* Zadeh L.,1978, Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. Fuzzy Sets Syst. 1, 3–28.

یادداشت‌ها

[1] Lingo