



فصلنامه علمی پژوهشی دانش سرمایه‌گذاری
سال هشتم / شماره سی‌ویکم / پائیز ۱۳۹۸

بررسی کارایی انتخاب پرتفوی بهینه بر اساس مدل چولگی در محیط فازی

احسان قدردان

مربی گروه حسابداری دانشگاه پیام نور، ایران
e.gh.pnu@gmail.com

خسرو فغانی ماکرانی

دانشیار گروه حسابداری دانشگاه آزاد اسلامی واحد ساری، ساری، ایران
Kh.makrani@chmail.ir

سمیرا سلگی

کارشناس ارشد حسابداری دانشگاه آزاد اسلامی واحد همدان، همدان، ایران (نویسنده مسئول)
Samira_solgi@yahoo.com

تاریخ دریافت: ۹۶/۰۷/۱۳ تاریخ پذیرش: ۹۶/۱۱/۲۸

چکیده

مهمترین مسئله مطرح برای سرمایه‌گذاران به خصوص در آغاز فعالیت اقتصادی، مسئله نحوه تخصیص سرمایه به یک یا چند گزینه مختلف سرمایه‌گذاری است تا ضمن داشتن حداکثر بازده، حداقل ریسک را متحمل شوند. این موضوع در ادبیات اقتصادی به عنوان مسئله انتخاب پرتفوی مطرح است. در پژوهش حاضر، عملکرد بهینه‌سازی کلاسیک پرتفوی (مدل میانگین واریانس مارکویتز) در صورت استفاده از مدل مبتنی بر چولگی در محیط فازی به عنوان تابع هدف بررسی شده است. در این پژوهش به بررسی ۱۹۵ پرتفوی ماهانه در یک دوره ۱۰ ساله (۱۳۸۶-۱۳۹۵) در مورد شرکت‌های پذیرفته شده در بورس اوراق بهادار تهران پرداخته شده است و ریسک و بازدهی هر پرتفوی براساس دو مدل بهینه‌سازی چولگی در محیط فازی و کلاسیک تخمین زده شد. در مرحله بعد با استفاده از آزمون میانگین تفاوت، به بررسی وجود تفاوت معناداری بین ریسک و بازده پیش بینی شده در دو مدل پرداخته شد. نتایج پژوهش حاکی از آن است که، ریسک و بازده پیش بینی شده در مدل چولگی با ریسک و بازده پیش بینی شده در مدل کلاسیک تفاوت معناداری دارد.

واژه‌های کلیدی: پرتفوی بهینه، ریسک پیش بینی شده، بازده پیش بینی شده، مدل چولگی، مدل کلاسیک.

۱- مقدمه

در دهه‌های اخیر روند مباحث سرمایه‌گذاری از شیوه‌های انتخاب سهام به سمت مدیریت پرتفوی متمایل بوده که بدین منظور تلاش‌های زیادی در جهت یافتن شیوه‌هایی برای ارزیابی و انتخاب پرتفوی بهینه با بازده و ریسک مطلوب صورت گرفته است. از آنجا که کاهش ریسک و افزایش بازدهی دو روی سکه سرمایه‌گذاری هستند، موضوع انتخاب و تشکیل پرتفوی بهینه همواره بحثی اساسی در مباحث سرمایه‌گذاری بوده و یکی از مسائلی است که ذهن بسیاری از فعالان بازار سرمایه را به خود درگیر نموده است. همچنین، مساله انتخاب مجموعه بهینه‌ای از دارایی‌ها، یکی از نظریه‌های بازار سرمایه است که اهمیت خاصی نیز در مباحث اقتصاد خرد و کلان دارد.

در دنیای امروزی یکی از چالش‌های سرمایه‌گذاری در بازده دارایی‌ها، عدم اطمینان نسبت به وقایع آینده و پیامدهای آن می‌باشد. رویکرد سنتی در مدل کردن این عدم اطمینان، در نظر گرفتن ریسک دارایی‌ها به صورت یک متغیر تصادفی است؛ اما این رویکرد از یک سو باعث تحمیل شدن فرضیات غیر واقعی در انتخاب پرتفوی بهینه می‌شود و از سوی دیگر مشکلات زیادی را در پیدا کردن توزیع احتمال و پارامترهای مربوطه در پی خواهد داشت (بهزادی و بختیاری، ۱۳۹۳). آنچه که مدل‌های مختلف بهینه‌سازی پرتفوی را از یکدیگر متمایز می‌سازد، معیار محاسبه ریسک است. انحراف معیار به عنوان اولین معیار ریسک به کار گرفته شده در این زمینه به وسیله مارکوینز معرفی گردید. اما این معیار دارای کاستی‌هایی بود که محققان را بر آن داشت تا با به کار بردن معیارهای مختلف، مدل‌های انتخاب سبد سهام را توسعه دهند. در همین راستا، در پژوهش حاضر سعی شده است کارایی انتخاب پرتفوی بهینه با استفاده از مدل چولگی در محیط فازی، و همچنین مقایسه ریسک پرتفوی انتخاب شده با استفاده از مدل چولگی با ریسک پرتفوی انتخاب شده با استفاده از مدل کلاسیک (مدل میانگین - واریانس) بررسی و سنجیده شود. عدم وجود ابزار و مقیاسی برای سنجش، بررسی، و ارائه این چنین مدلی در داخل کشور سبب شد تا این پژوهش، تأثیر مدل چولگی در انتخاب پرتفوی بهینه را درک و پوشش دهد و منجر به توسعه مدیریت کاربردی و استفاده مدل چولگی در انتخاب پرتفوی بهینه شود.

تعیین ابعاد و متغیرهای اثرگذار بر شیوه انتخاب پرتفوی سرمایه‌گذاری در سطح کلان و بررسی چگونگی مدل‌سازی این متغیرها در قالب الگویی ریاضی جهت کاهش ریسک و بهبود تصمیم‌گیری سرمایه‌گذاران جهت انتخاب بهینه پرتفوی از اهداف اساسی این پژوهش به شمار می‌رود. ضمن اینکه از ویژگی‌های این الگو، استفاده از آن را به گروهی از سرمایه‌گذاران محدود نکرده، و کلیه سرمایه‌گذاران و کلیه مدیران شرکت‌های فعال در بورس اوراق بهادار، سهامداران حقوقی و حقیقی و مدیران شرکت‌های سرمایه‌گذاری می‌توانند از یافته این پژوهش که با در نظر گرفتن شرایط خاص بازار سرمایه ایران ارائه شده، استفاده کنند. با توجه به ارائه تعریف جدیدی از بهینه‌سازی مدل چولگی، این الگو می‌تواند حقایق بیشتری در خصوص بازار سرمایه ایران و تشکیل پرتفوی به خصوص در صندوق‌های سرمایه‌گذاری ارائه نماید. و همچنین با توجه به وارد کردن متغیری با عنوان نرخ بازدهی و ریسک به تقابل و تعامل بازار سرمایه و بازار پول پی برد.

۲- بیان مسئله

مفاهیم بهینه‌سازی سبد سهام و تنوع‌بخشی به مثابه ابزاری در راستای توسعه و فهم بازارهای مالی و تصمیم‌گیری مالی درآمده‌اند. انتشار نظریه پرتفوی سهام مارکویتز، اصلی‌ترین و مهمترین موفقیت در این راستا بود (فابوزی و دیگران، ۲۰۰۷). از زمانی که مارکویتز مدل خود را منتشر کرد (مدل کلاسیک)، این مدل تغییرات و بهبودهای فراوانی را در شیوه نگرش مردم به سرمایه‌گذاری و سبد سهام ایجاد کرد و به عنوان ابزاری کارا برای بهینه‌سازی سبد سهام به کار گرفته شد (لی و همکاران، ۲۰۰۹). مارکویتز پیشنهاد کرد که سرمایه‌گذاران ریسک و بازده را به صورت توأمان در نظر گیرند و میزان تخصیص سرمایه بین فرصت‌های سرمایه‌گذاری گوناگون را بر اساس تعامل بین این دو انتخاب نمایند (فابوزی و دیگران، ۲۰۰۷). در واقع، مدل پرتفوی مارکویتز که واریانس را به عنوان شاخص ریسک ارائه داد، مسئله بهینه‌سازی است که بر اساس دو معیار بازده منتظره و ریسک به دنبال پیدا کردن تعادل منطقی میان این دو معیار جهت به دست آوردن حداقل ریسک به ازای سطح معینی از بازده منتظره و یا حداکثر بازده منتظره در سطح مشخصی از ریسک می‌باشد. بعد از این مدل، محققان مدل‌های انتخاب سبد سهام را با استفاده از معیارهای ریسک مختلف توسعه دادند. از جمله مارکویتز (۱۹۵۹) در پژوهش دیگری نیمه واریانس را برای معیار ریسک بکار گرفت. کانو و یامازاکی (۱۹۹۱) قدر مطلق انحراف از میانگین را به عنوان معیار ریسک در نظر گرفتند و مدل میانگین - قدر مطلق انحراف از میانگین خود را ارائه دادند. روکافلر و یوراسر (۲۰۰۰) ریسک سرمایه‌گذاری را برای بازده از پیش تعیین شده ارائه نمودند و مدل میانگین - ارزش در معرض خطر شرطی را ارائه کردند. خصوصیت بارز تمامی این مدل‌ها در این است که در آن‌ها تنها دو گشتاور اول توزیع بازده یعنی میانگین و واریانس به حساب آورده شده است و با فرض تصادفی بودن بازده دارایی‌ها است (کانو و همکاران، ۱۹۹۳). و معمولاً بر این فرض حاکم است که سرمایه‌گذار تمام اطلاعات لازم برای تصمیم‌گیری را در اختیار دارد. اما اطلاعات معمولاً ناقص و تصمیم‌گیری در شرایط عدم اطمینان صورت می‌گیرد و همواره برخی عوامل غیرتصادفی بر بازده دارایی‌ها تاثیرگذار است (لیو و لیو، ۲۰۰۲). در حالی که بسیاری از محققان معتقد بودند که بدون داشتن اطلاعاتی مبنی بر متقارن بودن توزیع بازده، نمی‌توان گشتاورهای بالاتر از جمله گشتاور سوم را در نظر نگرفت. در نتیجه، در برخی مطالعات (مائو، ۱۹۷۰؛ کانو و سوزوکی، ۱۹۹۵) مفهوم تعادل منطقی میان میانگین و واریانس توسعه داده شد تا معیار چولگی توزیع بازده را نیز در برگیرد. بدین ترتیب مدل توسعه یافته میانگین - واریانس - چولگی به منظور انتخاب بهینه پرتفوی معرفی گردید، که در آن فرض بر این بود با توجه به بازارهای متغیر کنونی و هم‌چنین ناکافی بودن داده‌های در دست برای سرمایه‌گذار، منطقی است که بازده‌ها به صورت فازی در نظر گرفته شوند (آرناس و همکاران، ۲۰۰۱؛ لیو و همکاران، ۲۰۰۳). در نتیجه به دلیل کارایی منطقی فازی برای لحاظ کردن نظرات کارشناسی و عدم اطمینان موجود در بازارهای مالی، استفاده از این منطق می‌تواند یکی از راه‌حل‌های مفید برای مدل کردن بازده دارایی‌ها در مسئله پرتفوی باشد. منطق فازی برای اولین بار توسط لطفی زاده معرفی شد (لطفی زاده، ۱۹۶۵). منطق فازی ابزاریست قدرتمند برای توصیف عدم اطمینان در شرایطی که تصمیم‌گیرنده با عدم اطمینان مواجه است. پس از آن تئوری امکان برای مقابله با عدم اطمینان نیز توسط لطفی زاده معرفی شد و توسط دوبویس توسعه داده شد (دوبویس و

همکاران، ۱۹۹۸؛ لطفی زاده، ۱۹۹۹). با توجه به این مسائل محققان به این نتیجه رسیدند که استفاده از منطق فازی، که بازده‌ها در آن به عنوان یک عدد فازی در نظر گرفته می‌شود می‌تواند مفید واقع شود (تاناکا و جیو، ۱۹۹۹؛ کارلسون و همکاران، ۲۰۰۲). در ادامه چندی از تحقیقات انجام شده در این زمینه آمده است.

باتاچاریا و همکاران (۲۰۰۹) با استفاده از اندازه اعتبار مدل خود را مبتنی بر میانگین، آنتروپی و چولگی ارائه دادند و بازده‌داری‌ها را عدد فازی مثلثی در نظر گرفتند و در انتها بوسیله شبیه‌سازی فازی و الگوریتم ژنتیک مسئله را حل کردند. آراشیوگلو و همکاران (۲۰۱۱)، طی پژوهشی که روی بورس اوراق بهادار استانبول انجام دادند به این نتیجه رسیدند که بازده پرتفوی، در زمانی که چولگی به مدل میانگین - واریانس هری مارکوویتز اضافه گردد تغییرات قابل توجهی خواهد داشت. فیلد و همکاران (۲۰۱۲)، پرتفوی مارکوویتز را با ترکیب، میانگین-واریانس-چولگی در عملکرد سرمایه‌گذاران گسترش دادند و تحقیقات آنها نشان می‌دهد که علاوه بر بازده، نقد شوندگی نیز برای سرمایه‌گذاران یک نگرانی است و هر لحظه به عنوان یک عامل جداگانه در عملکرد سرمایه‌گذاران دخیل است. به این نتیجه رسیدند که اضافه کردن چولگی در هماهنگ‌سازی پرتفوی بهینه به همراه اضافه کردن ۴ مرحله اول نقد شوندگی الزامیست. کیم و همکاران (۲۰۱۴)، در پژوهش خود به این نتیجه رسیدند که روش کلاسیک در انتخاب پرتفوی بهینه مشکلات محاسباتی را نادیده گرفته است و برای رفع این مشکل پیشنهاد دادند که به مدل، واریانس-میانگین مارکوویتز باید عدم تقارن اضافه گردد. باتاچاریا و همکاران (۲۰۱۴) نیز در بررسی‌های خود دریافتند که با به حداکثر رساندن عدم تقارن و به حداقل رساندن واریانس و کراس آنتروپی، انتخاب پرتفوی بهینه معقول‌تر می‌باشد.

شاه محمدی و همکاران (۱۳۹۱)، در بررسی‌های خود از پرتفوی مبتنی بر مدل میانگین-واریانس-چولگی استفاده کرده و به منظور تطبیق هرچه بیشتر مدل با دنیای واقعی، بازده‌های سهام را به صورت متغیرهای فازی در نظر گرفته‌اند. در روش ارائه شده از الگوریتم ژنتیک به منظور جستجوی پرتفوی و از شبکه عصبی مصنوعی آموزش داده شده با شبیه‌سازی فازی جهت تخمین بازده و ریسک پرتفوی استفاده شده است. بهزادی و بختیاری (۱۳۹۳)، در پژوهش خود مدلی بر مبنای میانگین-آنتروپی-چولگی برای حل مسأله بهینه‌سازی پرتفوی ارائه داده‌اند، و برای مقایسه این مدل با مدل کلاسیک از شاخص عملکرد اقتصادی استفاده شده است. و با به کار بردن داده‌های بورس اوراق بهادار تهران دریافتند مدلی که بر مبنای میانگین-آنتروپی-چولگی است دارای شاخص عملکرد اقتصادی بالاتری است. رستمی و همکاران (۱۳۹۴) مدل‌هایی که گشتاورهای مراتب بالاتر (چولگی و کشیدگی) در آن‌ها در نظر گرفته شده باشد را برای انتخاب پرتفوی بهینه سهام در محیط فازی مورد استفاده قرار دادند. برای محاسبه گشتاورها از تئوری اعتبار و از شاخص عملکرد اقتصادی برای محاسبه کارایی مدل‌های ارائه شده استفاده نمودند. با بکار بردن داده‌های بورس اوراق بهادار تهران نشان داده شد که در نظر گرفتن گشتاورهای مراتب بالاتر موجب بهبود کارایی پرتفوی بدست آمده خواهد شد. شیری قه‌بی و همکاران (۱۳۹۶) در مطالعه تطبیقی مدل بهینه‌سازی پرتفوی چند دوره‌ای چند هدفه در محیط اعتبار فازی با معیارهای متفاوت ریسک از سه مدل بهینه‌سازی پرتفوی بهره گرفتند. نتایج حاصل از ارزیابی عملکرد پرتفوی‌های بهینه با در نظر

گرفتن معیارهای شارپ و ترینر نشان داد، مدل میانگین- ارزش در معرض خطر میانگین نسبت به دو مدل میانگین- نیم آنتروپی و میانگین- ارزش در معرض خطر عملکرد بهتری دارد.

۳- فرضیه های پژوهش

از آنجاییکه در پژوهش حاضر هدف مقایسه دو معیار بازده و ریسک پرتفوی در بهینه سازی کلاسیک و پرتفوی مبتنی بر چولگی می باشد، بنابراین فرضیه ها به شرح زیر بیان می گردند، که هر کدام نیز در سه سطح ۰/۹۰٪، ۰/۹۵٪ و ۰/۹۹٪ به طور جداگانه مورد بررسی قرار می گیرند:

فرضیه اول: بازده پیش بینی شده پرتفوی بر اساس بهینه سازی با مدل مبتنی بر چولگی از بازدهی پیش بینی شده پرتفوی بر اساس بهینه سازی کلاسیک کارا تر است.

فرضیه دوم: ریسک پیش بینی شده پرتفوی بر اساس بهینه سازی با مدل مبتنی بر چولگی از ریسک پیش بینی شده پرتفوی بر اساس بهینه سازی کلاسیک کارا تر است.

۴- روش شناسی پژوهش

روش پژوهش حاضر با توجه به هدف، کاربردی و طرح آن از نوع شبه تجربی است و با توجه به روش پژوهش، براساس روش های توصیفی و همبستگی صورت گرفته است. در این پژوهش، با استفاده از نرم افزار ره آورد نوین و به روش کتابخانه ای، اطلاعات مربوط به شرکت های پذیرفته شده در بورس اوراق بهادار در فاصله زمانی ۱۳۸۶-۱۳۹۵ (دوره ده ساله) بررسی و ۱۹۵ شرکت انتخاب گردید. با استفاده از برنامه Excel، به تفکیک هر سال به انتخاب شرکت ها براساس نسبتی از میانگین ارزش روز معاملات آن ها از کل ارزش روز معاملات بازار پرداخته شد. سپس میانگین بازدهی شرکت ها یمنتخب از بازده روزانه شرکت ها محاسبه شد و متغیر فازی که نشان دهنده بازده اوراق بهادار می باشد و از نوع فازی مثلثی است و از سه کران بالا، کران پایین و حد وسط تشکیل می شود، توسط بازده روزانه شرکت ها محاسبه می شود. در ادامه با استفاده از انحراف معیار، جدول ماتریس واریانس- کوواریانس را تشکیل داده که همراه میانگین بازدهی شرکت ها توسط نرم افزار lingo جهت بهینه سازی پرتفوی به دو روش مدل مبتنی بر چولگی و کلاسیک «میانگین - واریانس مارکوویتز» با استفاده از میانگین بازدهی و ریسک شرکت های مذکور پرداخته شد. خروجی این دو روش بهینه سازی به ترتیب محاسبه، وزن هر یک از دارایی ها در ترکیب پرتفوی و ریسک و بازده پیش بینی شده پرتفوی می باشد. در پایان، مقایسه و تعیین تفاوت معناداری این دو روش بهینه سازی، جهت تصمیم گیری در خصوص کارایی روش پیشنهادی در پژوهش حاضر، توسط نرم افزار تحلیل آماری Spss، به بحث و تجزیه و تحلیل گذاشته شده است.

۵- مدل پژوهش و اندازه گیری پارامترهای آن

۵-۱- مدل کلاسیک انتخاب پرتفوی

مدل میانگین- واریانس مارکوویتز برای تشکیل پرتفوی به صورت زیر است (مارکوویتز، ۱۹۵۲):

متغیر N نشان دهنده تعداد سهام قابل سرمایه‌گذاری است که از بین آنها می‌توان سهام برتر را برای تشکیل پرتفوی انتخاب کرد. این سهام قابل سرمایه‌گذاری هستند و با مجموعه $A = \{a_1 \dots a_n\}$ نشان داده می‌شوند. برای هر سهم i ، شناسه A_i در نظر گرفته شده است، این متغیر همان کد شناسایی است که توسط بورس به هر سهم تخصیص داده می‌شود؛ مقدار بازده مورد انتظار سهم a_i را با R_i و ریسک هر سهم با متغیر واریانس قیمت نشان داده می‌شود. چون ممکن است که سهام به یکدیگر وابستگی داشته باشند از متغیر σ_{ij} برای نشان دادن همبستگی بین سهام استفاده می‌شود. برای هر سهم i متغیر w_i نشان دهنده وزن سهم i ام در پرتفوی است. هر سهمی که در پرتفوی شرکت می‌کند دارای وزن غیر منفی است به گونه‌ای که جمع کل وزن سهام برابر با یک است و پرتفوی $P = \{w_1 \dots w_n\}$ یک مجموعه از سهام است که w_i وزن هر سهم در پرتفوی است.

$$\sum_{i=0}^n w_i = 1 \quad (1)$$

برای به دست آوردن بازده هر معامله‌ای که انجام می‌گیرد، از نسبت تغییرات آخرین قیمت سهام با آخرین قیمت بسته شده قبلی آن استفاده می‌شود یعنی برای محاسبه بازده معامله در زمان t و $t-1$ به صورت زیر عمل می‌شود:

$$r_t = \frac{(P_t - P_{t-1})}{P_{t-1}} \quad (2)$$

P_t : آخرین قیمت بسته شده سهم در زمان t ; P_{t-1} : آخرین قیمت بسته شده سهم در زمان $t-1$; R_t : بازده معامله سهم در زمان t .

تغییرات قیمت سهام می‌تواند باعث رشد و سوددهی پرتفوی شود یا باعث ضرر و زیان آن شود. همین تغییرات به عنوان ریسک سرمایه‌گذاری مطرح می‌شود، بنابر تعریف مدل واریانس میانگین، مقدار ریسک هر سهم در دوره معاملاتی برابر با مقدار واریانس قیمت‌هایی است که در یک دوره رخ می‌دهد.

$$\sigma^2 = \frac{1}{M-1} \sum_{i=0}^n (P_i - \bar{\pi})(P_i - \bar{P}_i) \quad (3)$$

در رابطه فوق دامنه تغییرات قیمت برای M روز محاسبه شده است؛ $\bar{\pi}$: متوسط بازده هر معامله نسبت به معامله قبلی در دوره معاملاتی؛ \bar{P}_i : متوسط قیمت سهام در این مدت؛ P_i : آخرین قیمت بسته شده سهم در روز i ام.

بعد از انجام محاسبات فوق، می‌توان معاملات سهام را ارزیابی نمود و بر مبنای این ارزیابی و تابع هدف معین، سهام منتخب را برای تشکیل پرتفوی گزینش نمود. بعد از گزینش و تعیین کردن نسبت وزن هر سهم در پرتفوی، می‌توان دوباره به وسیله مدل میانگین واریانس، بازده و ریسک پرتفوی را محاسبه نمود. بازده پرتفوی از مجموع حاصل ضرب میانگین بازده در وزن هر سهم به دست می‌آید، که به صورت رابطه زیر بیان می‌گردد:

$$E(R_p) = \sum_{i=0}^n W_i * E(R_i) \quad (4)$$

$E(R_p)$: بازده مورد انتظار پرتفوی؛ W_i : وزن هر سهم حاضر در پرتفوی است که توسط الگوریتم تعیین می‌گردد؛ $E(R_i)$: بازده مورد انتظار سهم i ام است؛ n : تعداد سهام منتخب برای تشکیل پرتفوی.

سهامی که در پرتفوی قرار دارند ممکن است که با یکدیگر رابطه مستقیم یا غیرمستقیم داشته باشند. این رابطه توسط ضریب همبستگی سهام بیان و برای محاسبه ریسک پرتفوی استفاده می‌شود و به این صورت است:

$$\sigma_p^2 = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n w_i w_j \sigma_{ij} + \sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_i^2 \quad (5)$$

ضریب همبستگی بین دو سهم:

$$\sigma_{k,j} = \sum_{i=1}^n [R_{ki} - E(R_k)] [R_{ji} - E(R_j)] P_i \quad (6)$$

$\sigma_{k,i}$: کوواریانس سهام i و j ؛

P_i : احتمال رخداد هر کدام از حالات. این مقدار برای همه یکسان در نظر گرفته شده است. P_k : یکی از بازده‌های محتمل سهم k در دوره معاملاتی است. روابط فوق براساس مدل پیشنهاد شده مارکوویتز است.

یکی از مدل‌هایی که کاملاً نزدیک به مدل میانگین - واریانس کلاسیک می‌باشد، انتخاب پرتفوی بهینه، از طریق مدل مبتنی بر چولگی می‌باشد. چولگی به عدم تقارن توزیع ارجاع می‌کند. یک توزیع با عدم تقارن دهی که در سمت راست گسترش داده شده، به چولگی مثبت یا چوله به راست معروف می‌باشد در حالی که یک توزیع با عدم تقارن دهی که در سمت چپ گسترش داده شده، به چولگی منفی یا چوله به چپ معروف می‌باشد. چولگی می‌تواند از منفی بی‌نهایت تا مثبت بی‌نهایت مقدار بپذیرد. چولگی نشان‌دهنده میزان عدم تقارن توزیع احتمالی است. اگر داده‌ها نسبت به میانگین متقارن باشند، چولگی برابر صفر خواهد بود (جانسون و همکاران، ۲۰۰۱).

۲-۵- چولگی متغیر فازی

فرض کنید ξ متغیر فازی با بازده مورد انتظار محدود باشد. چولگی ξ این گونه تعریف می‌شود.

$$S[\xi] = E[(\xi - E[\xi])^3] \quad (7)$$

فرض کنید $\xi = (a, b, c)$ متغیر فازی مثلثی باشد، در آن صورت نتیجه ξ زیر به راحتی قابل استحصال است.

$$S[\xi] = \frac{(c-a)^2}{32} [(c-b) - (b-a)], \quad (8)$$

$$\mu(x) = 2[1 + \exp(\pi|x - e|(\sqrt{\delta\sigma}))]^{-1} \quad (9)$$

که در اینجا s چولگی را نشان می‌دهد.

ξ متغیر فازی است که بازده اوراق بهادار را نشان می‌دهد. از آنجایی که متغیر فازی، فازی مثلثی می‌باشد به طبع دارای سه کران، از جمله a کران بالا، b کران پایین و c که حد وسط را نشان می‌دهد می‌باشد. کران بالا a که \max بازده روزانه شرکت، کران b که \min بازده روزانه شرکت و حد وسط c میانگین بازده روزانه شرکت می‌باشد. مدل میانگین واریانس چولگی فازی به صورت زیر نشان داده شده است که تابع هدف مدل بیشینه کردن چولگی در صورت ثابت بودن میانگین و واریانس، برای رسیدن به پرتفوی بهینه می‌باشد.

$$\begin{cases} \text{maximize} & S[\xi_1 X_1 + \xi_2 X_2 + \dots + \xi_n X_n], \\ \text{Subject to:} & E[\xi_1 X_1 + \xi_2 X_2 + \dots + \xi_n X_n] \geq \alpha \\ & V[\xi_1 X_1 + \xi_2 X_2 + \dots + \xi_n X_n] \leq \gamma \\ & X_1 + X_2 + \dots + X_n = 1, \\ & X_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (10)$$

E : بازده مورد انتظار؛ V : واریانس؛ X_i : وزن (نسبت سرمایه‌گذاری)؛ γ : حداکثر ریسک قابل تحمل برای پرتفوی؛ α : حد اقل بازده مورد انتظار.

همانطور که مشاهده می‌نمایید تابع دارای قیودی به شرح زیر می‌باشد:

قید اول بیان می‌کند که بازده مورد انتظار از حد مشخص کمتر نخواهد بود، و قید دوم بیان می‌کند که ریسک از حد مشخص بیشتر نخواهد شد. دو قید آخر بیان می‌کند که سرمایه‌گذار تمام سرمایه را روی n اوراق سرمایه‌گذاری می‌کند و این که نمی‌تواند مقدار منفی از یک دارایی را داشته باشد. همانطور که شرح داده شد مدل به صورت تابع نشان داده شده است و از آنجایی که برای فرموله کردن مدل از نرم افزار *lingo* استفاده شده است مدل باید تبدیل به یک مدل کاملاً ریاضی و قطعی شود که مدل قطعی به صورت زیر نشان داده می‌شود. فرض کنید $\xi_i = (a_i, b_i, c_i)$ متغیر فازی مثلثی مستقل برای $i = 1, 2, \dots, n$ باشد آن گاه مدل فوق به برنامه قطعی مشخص زیر تبدیل خواهد شد.

a : کران بالای بازده روزانه شرکت؛ b : کران پایین بازده روزانه شرکت؛ c : میانگین بازده روزانه شرکت.

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \left(\sum_{i=1}^n x_i (c_i - a_i) \right)^2 \cdot \sum_{i=1}^n x_i (c_i + a_i - 2b_i), \\ \text{s. t } \sum_{i=1}^n x_i (a_i + 2b_i + a_i) \geq 4\alpha, \\ 11 \left(\sum_{i=1}^n x_i (c_i - a_i) \right)^2 \cdot \left| \sum_{i=1}^n x_i (2b_i - a_i - c_i) \right| \\ + 2 \left(8 \sum_{i=1}^n x_i (c_i - a_i) + 3 \left| \sum_{i=1}^n x_i (2b_i - a_i - c_i) \right| \right) \left(\left(\sum_{i=1}^n x_i (c_i - a_i) \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n x_i (c_i - a_i) \right)^2 \right) \\ \leq 192\gamma \left(\sum_{i=1}^n x_i (c_i - a_i) + \left| \sum_{i=1}^n x_i (2b_i - a_i - c_i) \right| \right) \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1 \\ x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \end{array} \right. \quad (11)$$

اثبات: از آن جایی که $\xi_i = (a_i, b_i, c_i)$ تماماً متغیرهای فازی مثلثی هستند از اصل توسعه بسط لطفی زاده این گونه می فهمیم که:

$$\sum_{i=1}^n \xi_i X_i = \left(\sum_{i=1}^n x_i a_i, \sum_{i=1}^n x_i b_i, \sum_{i=1}^n x_i c_i \right) \quad (12)$$

که این خود ما متغیر فازی مثلثی خواهد بود به علاوه خواهیم داشت:

$$E[X_1 \xi_1 + X_2 \xi_2 + \dots + X_n \xi_n] = \frac{\sum_{i=1}^n (a_i + 2b_i + c_i) x_i}{4} \quad (13)$$

$$S[X_1 \xi_1 + X_2 \xi_2 + \dots + X_n \xi_n] = \left(\sum_{i=1}^n x_i (c_i - a_i) \right)^2 \cdot \sum_{i=1}^n x_i (c_i + a_i + 2b_i) \quad (14)$$

در ضمن داریم:

$$V[X_1 \xi_1 + X_2 \xi_2 + \dots + X_n \xi_n] = \frac{11 \left(\sum_{i=1}^n x_i (c_i - a_i) \right)^2 \left| \sum_{i=1}^n x_i (2b_i - a_i - c_i) \right|}{192 \left(\sum_{i=1}^n x_i (c_i - a_i) + \left| \sum_{i=1}^n x_i (2b_i - a_i - c_i) \right| \right)} + \frac{2 \left(8 \sum_{i=1}^n x_i (c_i - a_i) + 3 \left| \sum_{i=1}^n x_i (2b_i - a_i - c_i) \right| \right) \left(\left(\sum_{i=1}^n x_i (c_i - a_i) \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n x_i (c_i - a_i) \right)^2 \right)}{192 \left(\sum_{i=1}^n x_i (c_i - a_i) + \left| \sum_{i=1}^n x_i (2b_i - a_i - c_i) \right| \right)} \quad (15)$$

با جایگزین این معادلات در مدل قضیه اثبات می شود.

در مدل برای مقدار α حداقل بازده، عدد صفر یعنی بدبینانه ترین حالت ممکن و برای γ نیز حد اکثر ریسک که بازم بدبینانه ترین حالت ممکن را در سه سطح ۰.۹۰٪، ۰.۹۵٪ و ۰.۹۹٪ در نظر گرفته شده است.

۶- یافته‌های پژوهش

۶-۱- آمار توصیفی

جدول (۱) آمار توصیفی متغیرهای پژوهش را نشان می‌دهد که بیانگر مقدار پارامترهای توصیفی برای هر یک از متغیرهای زیر می‌باشد:

- بازدهی پیش‌بینی شده پرتفوی براساس مدل مبتنی بر چولگی در سطح ۹۰٪ (RET90)، در سطح ۹۵٪ (RET95) و در سطح ۹۹٪ (RET99).
- ریسک پیش‌بینی شده پرتفوی براساس مدل مبتنی بر چولگی در سطح ۹۰٪ (RISK90)، در سطح ۹۵٪ (RISK95) و در سطح ۹۹٪ (RISK99).
- بازدهی پیش‌بینی شده پرتفوی بر اساس بهینه‌سازی کلاسیک (Return_markoeitz)
- ریسک پیش‌بینی شده پرتفوی بر اساس بهینه‌سازی کلاسیک (risk_markoeitz)

جدول ۱- نتایج آمار توصیفی متغیرهای پژوهش

متغیر	RET90	RISK90	RET95	RISK95	RET99	RISK99	risk_markoeitz	Return_markoeitz
مشاهدات	۱۹۵	۱۹۵	۱۹۵	۱۹۵	۱۹۵	۱۹۵	۱۹۵	۱۹۵
حداقل	۰/۰۱	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰
حداکثر	۱/۰۵	۰/۰۵	۱/۰۵	۰/۰۵	۱/۱۵	۰/۵۴	۱/۲۷	۱/۱۷
میانگین	۰/۳۴۷۲	۰/۰۰۱۴	۰/۳۴۶۸	۰/۰۰۱۶	۰/۳۴۷۸	۰/۰۰۴۲	۰/۲۵۰۵	۰/۱۱۲۵
انحراف معیار	۰/۲۳۴۰	۰/۰۰۶۲	۰/۲۴۷۰	۰/۰۰۶۷	۰/۲۵۱۹	۰/۰۳۸۷	۰/۲۵۱۳	۰/۱۵۷۸

منبع: یافته‌های پژوهش

در جدول (۱) اصلی‌ترین شاخص مرکزی، میانگین است که نشان‌دهنده نقطه تعادل و مرکز ثقل توزیع است و شاخص خوبی برای نشان دادن مرکزیت داده‌هاست. به طور مثال میانگین ریسک پیش‌بینی شده پرتفوی براساس مدل مبتنی بر چولگی در سطح ۹۰٪، ۹۵٪ و ۹۹٪ کمتر از میانگین ریسک پیش‌بینی شده پرتفوی بر اساس بهینه‌سازی کلاسیک می‌باشد همچنین میانگین بازده پیش‌بینی شده پرتفوی بر اساس مدل مبتنی بر چولگی در سطح ۹۰٪، ۹۵٪ و ۹۹٪ بیشتر از میانگین بازده پیش‌بینی شده پرتفوی بر اساس بهینه‌سازی کلاسیک می‌باشد.

۶-۲- نرمال بودن متغیرهای پژوهش

برای بررسی نرمال بودن متغیرها و باقیمانده‌ها از آزمون کولموگروف-اسمیرنوف بر اساس جدول (۲) استفاده شده است.

جدول ۲- نتایج آزمون نرمال بودن متغیرهای پژوهش

متغیر	RET90	RISK90	RET95	RISK95	RET99	RISK99	risk_ markoeitz	Return_ markoeitz
Z کولموگروف- اسمیرنوف	۱/۱۲۷	۵/۷۸۱	۱/۲۳۵	۵/۶۵۶	۱/۳۴۴	۶/۳۷۹	۲/۲۲۷	۳/۳۲۲
سطح معنی داری	۰/۱۵۸	۰/۰۰۰	۰/۰۹۵	۰/۰۰۰	۰/۰۵۴	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰

منبع: یافته های پژوهش

نتایج جدول (۲) نشان می دهد که تمام متغیرهای پژوهش به شکل دو به دو (جفت جفت برای آزمون تفاوت) با توجه به اینکه سطح معناداری کمتر از ۰/۰۵ است، دارای توزیع نرمال نمی باشند. از این رو فرض پارامتریک بودن آزمون ها با عدم درستی اولین آزمایش رد می شود. با توجه به استفاده از آزمون همبستگی در پژوهش حاضر، و عدم برقراری فرض نرمال بودن تمام متغیرهای پژوهش، از آزمون ویلکاکسون برای بررسی فرضیه های پژوهش استفاده می شود. (جدول ضریب همبستگی و تخمین فاصله ای حذف گردید)

۳-۶- نتایج آزمون فرضیه ها

بازدهی پیش بینی شده پرتفوی براساس مدل مبتنی بر چولگی در سطح ۰/۹۰، ۰/۹۵ و ۰/۹۹ با بازدهی پیش بینی شده پرتفوی بر اساس بهینه سازی کلاسیک و ریسک پیش بینی شده پرتفوی براساس مدل مبتنی بر چولگی در سطح ۰/۹۰، ۰/۹۵ و ۰/۹۹ با ریسک پیش بینی شده پرتفوی بر اساس بهینه سازی کلاسیک دارای توزیع نرمال نیستند. لذا برای آزمون فرضیه های پژوهش از آزمون ویلکاکسون استفاده می شود. این آزمون از آزمون های آماری ناپارامتری است که برای ارزیابی همانندی دو نمونه وابسته با مقیاس رتبه ای به کار می رود.

جدول ۳- نتایج آزمون ویلکاکسون فرضیه اول

سطح معناداری	Z آماره	میانگین بازده		تعداد مشاهدات	
		میانگین بازده بهینه سازی کلاسیک	میانگین بازده مبتنی بر چولگی	تعداد بازده بهینه سازی کلاسیک	تعداد بازده مبتنی بر چولگی
۰/۰۰۰	-۱۰/۸۱۵	۰/۳۴۷۲	۰/۱۱۲۵	۱۹۵	۱۹۵
		۰/۳۴۶۸	۰/۱۱۲۵	۱۹۵	۱۹۵
۰/۰۰۰	-۱۰/۴۰۲	۰/۳۴۶۸	۰/۱۱۲۵	۱۹۵	۱۹۵
		۰/۳۴۷۸	۰/۱۱۲۵	۱۹۵	۱۹۵
۰/۰۰۰	-۱۰/۴۱۵	۰/۳۴۷۸	۰/۱۱۲۵	۱۹۵	۱۹۵
		۰/۳۴۶۸	۰/۱۱۲۵	۱۹۵	۱۹۵

منبع: یافته های پژوهش

در جدول (۳) از آنجایی که میانگین بازدهی پیش‌بینی شده پرتفوی براساس بهینه‌سازی کلاسیک در تمامی سطوح ۹۰٪، ۹۵٪ و ۹۹٪ بیش از بازدهی پیش‌بینی شده پرتفوی براساس مدل مبتنی بر چولگی می‌باشد، لذا بین این دو جامعه آماری در تمامی سطوح تفاوت وجود دارد. همچنین با توجه به اینکه در آماره z سطوح مختلف، سطح معناداری کمتر از ۵٪ است، بنابراین می‌توان گفت که بازدهی پیش‌بینی شده پرتفوی براساس مدل مبتنی بر چولگی در تمامی سطوح مورد بررسی تفاوت معناداری با بازدهی پیش‌بینی شده پرتفوی براساس بهینه‌سازی کلاسیک دارد.

جدول ۴- نتایج آزمون ویلکاکسون فرضیه دوم

سطح معناداری	Z آماره	میانگین ریسک		تعداد مشاهدات		سطح اطمینان
		میانگین ریسک بهینه سازی کلاسیک	میانگین ریسک مبتنی بر چولگی	تعداد ریسک بهینه سازی کلاسیک	تعداد ریسک مبتنی بر چولگی	
۰/۰۰۰	-۱۱/۱۱۰	میانگین ریسک بهینه سازی کلاسیک	میانگین ریسک مبتنی بر چولگی	تعداد ریسک بهینه سازی کلاسیک	تعداد ریسک مبتنی بر چولگی	۹۰٪
		۰/۰۰۱۴	۰/۲۵۰۵	۱۹۵	۱۹۵	
۰/۰۰۰	-۱۰/۸۵۴	میانگین ریسک بهینه سازی کلاسیک	میانگین ریسک مبتنی بر چولگی	تعداد ریسک بهینه سازی کلاسیک	تعداد ریسک مبتنی بر چولگی	۹۵٪
		۰/۰۰۱۶	۰/۲۵۰۵	۱۹۵	۱۹۵	
۰/۰۰۰	-۱۰/۸۷۴	میانگین ریسک بهینه سازی کلاسیک	میانگین ریسک مبتنی بر چولگی	تعداد ریسک بهینه سازی کلاسیک	تعداد ریسک مبتنی بر چولگی	۹۹٪
		۰/۰۰۴۲	۰/۲۵۰۵	۱۹۵	۱۹۵	

منبع: یافته‌های پژوهش

نتایج جدول (۴) نشان می‌دهد که میانگین ریسک پیش‌بینی شده پرتفوی براساس بهینه‌سازی کلاسیک در تمامی سطوح ۹۰٪، ۹۵٪ و ۹۹٪ کمتر از میانگین ریسک پیش‌بینی شده پرتفوی براساس مدل مبتنی بر چولگی می‌باشد، لذا بین این دو جامعه آماری در تمامی سطوح تفاوت وجود دارد. همچنین همانند نتایج جدول (۴) با توجه به اینکه در آماره z سطوح مختلف، سطح معناداری کمتر از ۵٪ است، بنابراین می‌توان گفت که ریسک پیش‌بینی شده پرتفوی براساس مدل مبتنی بر چولگی در تمامی سطوح مورد بررسی تفاوت معناداری با ریسک پیش‌بینی شده پرتفوی براساس بهینه‌سازی کلاسیک دارد.

۷- بحث و نتیجه‌گیری

در مشارکت فعال افراد جامعه در بازارهای سرمایه، عمده‌ترین مساله که هریک از سرمایه‌گذاران با آن مواجه هستند، تصمیم‌گیری برای انتخاب اوراق بهادار و دارایی‌های مناسب برای سرمایه‌گذاری و تشکیل سبد سهام است. دو عامل مهم در مقوله تصمیمات سرمایه‌گذاری و مدیریت پرتفوی، ریسک و بازده می‌باشد. ریسک و بازده

معیارهایی هستند که میزان مطلوبیت سرمایه‌گذار را از انتخاب مجموعه دارایی سرمایه‌گذاری مشخص می‌کند. مجموعه دارایی هر سرمایه‌گذار با توجه به شرایط وی، افق زمانی، ریسک و میزان جریان نقدینگی مورد نظر وی متفاوت است. هدف از مدیریت مجموعه دارایی به طور عام و مجموعه سهام به طور خاص تعیین این متغیرها به گونه‌ای است که ریسک حداقل و بازده حداکثر شود. انتخاب یک مجموعه از سهام معمولاً با تعامل بین ریسک و بازده مطرح می‌شود. هرچه ریسک سبد سهام بیشتر باشد، احتمال دریافت بازده بالاتر بیشتر خواهد بود.

در همین راستا، در پژوهش حاضر به مقایسه و ارزیابی بازده و ریسک های پیش بینی شده در دو مدل پرتفوی بهینه مبتنی بر مدل چولگی در محیط فازی و پرتفوی بهینه در مدل کلاسیک پرداخته شد. نتایج بدست آمده نشان داد که میانگین بازده پیش بینی شده پرتفوی بر اساس مدل بهینه سازی کلاسیک به طور معناداری بیشتر از بازده پیش بینی شده بر اساس مدل چولگی در تمامی سطوح مورد بررسی می باشد. همچنین، میانگین ریسک پیش بینی شده پرتفوی بر اساس بهینه سازی کلاسیک در تمامی سطوح کمتر از ریسک پیش‌بینی شده پرتفوی بر اساس مدل مبتنی بر چولگی در محیط فازی است. سرمایه‌گذاران همواره تمایل دارند در سطح معینی از ریسک، بازدهی خود را افزایش داده یا در سطح معینی از بازده، ریسک خود را کاهش دهند. که نتیجه پژوهش حاضر با هیچیک از این دو مورد سازگار نیست، و مغایر با یافته های آراشیوگلو (۲۰۱۱) و فیلد و همکاران (۲۰۱۲) می باشد. به عبارت دیگر بازده پرتفوی انتخاب شده بر اساس مدل مبتنی بر چولگی در سه سطح ۹۰٪، ۹۵٪ و ۹۹٪ کمتر از بازده پرتفوی انتخاب شده بر اساس مدل کلاسیک می باشد. و همچنین مدل مبتنی بر چولگی، ریسک بیشتری نسبت به مدل کلاسیک دارد و نمی تواند در فعالیت های سرمایه گذاری در کشور راه گشا باشد.

موضوع پیش بینی بازده و ریسک سهام از جمله موضوعات مهمی است که یافته های تحقیقات علمی درباره آنها میتواند به سرمایه‌گذاران در کشور ما کمک کرده و راهنمایی برای اخذ تصمیمات معقول و منطقی برای استفاده کنندگان به خصوص سرمایه‌گذاران باشد. در نتیجه در راستای توسعه و تکمیل نتایج این پژوهش پیشنهاد می شود که در تحقیقات آتی به مقایسه بازده تخمینی با بازده واقعی و ریسک تخمینی با ریسک واقعی در مدل مبتنی بر چولگی پرداخته شود. همچنین پیشنهاد می شود سنجش کارایی مدل مبتنی بر چولگی در تشکیل پرتفوی با سایر مدل های تشکیل پرتفوی مانند الگوریتم ژنتیک، تئوری آشوب و شبکه عصبی مورد بررسی قرار گیرد. در ضمن، استفاده از معیارهای دیگر ریسک مانند ریسک منفی و نسبت تعداد روزهایی که سهم نوسانات قیمتی مثبت دارد به تعداد روزهایی که سهم نوسانات منفی دارد، می تواند مدنظر تحقیقات آتی قرار گیرد.

فهرست منابع

- * بهزادی، عادل و بختیاری، مصطفی (۱۳۹۳). ارائه مدلی بر مبنای میانگین- آنتروپی- چولگی برای بهینه سازی سبد سهام در محیط فازی. مجله مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار، دوره پنجم، شماره ۱۹، صص ۳۹-۵۵.

- * رستمی، محمدرضا، کلانتری بنجار، محمود و بهزادی، عادل (۱۳۹۴). گشتاورهای مراتب بالاتر در بهینه سازی سبد سهام در محیط فازی. مجله مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار، شماره ۲۴، صص ۴۱-۶۱.
- * شاه محمدی، محسن، امامی میبدی، لیلی و زارع مهرجردی، یحیی (۱۳۹۱). ارائه الگوریتم هوشمند ترکیبی بر پایه مدل فازی میانگین واریانس-چولگی برای انتخاب پرتفوی، مجله مهندسی صنایع و مدیریت تولید، شماره چهارم، دوره ۲۳، صص ۴۴۸-۴۵۸.
- * -شیری قهی، امیر، دیده خانی، حسین، خلیلی دامغانی، کاوه و سعیدی، پرویز (۱۳۹۶). مطالعه تطبیقی مدل بهینه سازی پرتفوی چند دوره‌ای چند هدفه در محیط اعتبار فازی با معیارهای متفاوت ریسک. مجله راهبرد مدیریت مالی، سال پنجم، شماره ۱۸، صص ۱-۲۶.
- * Aracioglu, B., Demircan, F., & Soyuer, H. (2011). Mean-Variance - Skewness-Kurtosis Approach to Portfolio Optimization: An Application in İstanbul Stock Exchange. 11, 9-17.
- * Arenas, M., Bilbao, A., Rodriguez, M. (2001). A Fuzzy Goal Programming Approach to Portfolio Selection. European Journal of Operational Research, 133, 287-297.
- * Bhattacharyya, R., Hossain, S.A., & Kar, S. (2014) Fuzzy cross-entropy, mean, variance, skewness models for portfolio selection. Journal of King Saud University - Computer and Information Sciences, 26, 79-87.
- * Bhattacharyya, R., Kar, M. B., Kar, S., & Majumder, D. D. (2009). Mean-entropy-skewness fuzzy portfolio selection by credibility theory approach. in Pattern Recognition and Machine Intelligence, 603-608.
- * Carlsson, R., Fullér, R., & Majlender, P. (2002). A possibilistic approach to selecting portfolios with highest utility score. Fuzzy sets and systems, 131, 13-21.
- * Dubois, D., Prade, H. M., Farreny, H., Martin-Clouaire, R., & Testemale, C. (1998). Possibility theory: an approach to computerized processing of uncertainty. vol. 2: Plenum press New York.
- * Fabozzi, F.J., Kolm, P.N., Pachamanova, D., & Focardi, S.M. (2007). Robust Portfolio Optimization and Management. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons.
- * Field, B., Beardsley, X.W., & Xiao, M. (2012). Mean-Variance-Skewness-Kurtosis Portfolio Optimization with Return and Liquidity. Communications in Mathematical Finance, 1(1), 13-49
- * Johnson, M. D., Gustafsson, A., Andreassen, T. W., Lervik, L., & Cha, J. (2001). The evolution and future of national customer satisfaction index models. Journal of economic Psychology, 22(2), 217-245.
- * Kima, W.C., Fabozzi, F.J., Cheridito, P., & Fox, C. (2014). Controlling portfolio skewness and kurtosis without directly optimizing third and fourth moments. Economics Letters. 122.154-158.
- * Konno, H., & Yamazaki, H. (1991). Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its applications to Tokyo stock market. Management science, 37, 519-531.
- * Konno, H., Shirakawa, H., & Yamazaki, H. (1993). A mean-absolute deviation-skewness portfolio optimization model. Annals of Operations Research, 45, 205-220.
- * Konno, H., Suzuki, K. (1995). A Mean-Variance-Skewness Optimization Model. Journal of the Operations Research of Japan, 38, 87-137.
- * Li, X., Zhang, Y., Wong, H.S., Qin, Z. (2009). A Hybrid Intelligent Algorithm for Portfolio Selection Problem with Fuzzy Returns. Journal of Computational and Applied Mathematics, 233, 264-278.
- * Liu, B., & Liu, Y.-K. (2002). Expected value of fuzzy variable and fuzzy expected value models. Fuzzy Systems, IEEE Transactions on, 10, 445-450.
- * Liu, S.C., Wang, S.Y., Qiu, W.H.. (2003). A Mean-Variance-Skewness Model for Portfolio Selection with Transaction Costs. International Journal of Systems Sciences, 34 (4), 62-255.

- * Lotfizadeh, A. (1965). Fuzzy sets. Information and control, 8, 338-353.
- * Lotfizadeh, A. (1999). Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. Fuzzy sets and systems, 100, 9-34.
- * Mao, J.C.T. (1970). Models of Capital Budgeting, E-V vs. E-S. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 5, 57-75.
- * Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. The journal of finance, 7(1), 77-91.
- * Markowitz, H. (1959). Portfolio selection: efficient diversification of investments. Yale university press.
- * Markowitz, H.M. (1959) Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments. John Wiley & Sons, New York.
- * Rockafellar, R. T., & Uryasev, S. (2000). Optimization of conditional value-at-risk. Journal of risk, 2, 21-42.