

پیش‌بینی بارش ماهانه در منطقه ایران با استفاده از ترکیب شبکه‌های عصبی مصنوعی و فیلتر کالمن توسعه‌یافته

مجتبی رحیمی‌نسب^۱

یزدان عامریان^۲

تاریخ دریافت مقاله: ۹۷/۰۸/۰۳

تاریخ پذیرش مقاله: ۹۷/۱۱/۲۱

چکیده

بارش باران یکی از مهم‌ترین پدیده‌های جوّی است که بر زندگی بشر اثر می‌گذارد. پیش‌بینی بارش باران برای اهداف مختلفی مانند برنامه‌ریزی فعالیت‌های کشاورزی، پیش‌بینی سیلاب، پایش خشکسالی و تأمین آب مصرفی از اهمیت بالایی برخوردار است. هدف این مقاله پیش‌بینی بارش ماهانه در ایران با استفاده از روش جدید ترکیب شبکه‌های عصبی مصنوعی و فیلتر کالمن توسعه‌یافته می‌باشد، که برای این هدف از داده‌های میانگین بارش ماهانه حدود ۱۸۰ ایستگاه سینوپتیک ایران که در سراسر کشور پراکنده هستند، طی سال‌های ۱۹۵۱ تا ۲۰۱۶ استفاده شده و به پیش‌بینی بارش ماهانه برای سال ۲۰۱۷ با استفاده از روش مقاله پرداخته شده است. در این مطالعه ایران شامل ۸ پهنه اقلیمی است که به روش کوپن-گایگر تقسیم‌بندی شده است. از شبکه عصبی مصنوعی چندلایه با دو لایه مخفی که در هر لایه ۱۰ نورون قرار گرفته است، برای پیش‌بینی در هر یک از پهنه‌های اقلیمی استفاده شد که برای آموزش این شبکه از فیلتر کالمن توسعه یافته استفاده گردید. اختلاف مقادیر بارش ماهانه اندازه‌گیری شده در سال ۲۰۱۷ و مقادیر حاصل از پیش‌بینی در تمام ایستگاه‌ها محاسبه گردید. جذر میانگین مربعات این اختلافات (RMSE) در حالت نرمال برای ۸ پهنه اقلیمی در مراحل آزمون و پیش‌بینی محاسبه گردید که برای اقلیم بیابان خشک و بسیار گرم نسبت به اقلیم بیابان خشک و سرد کمتر است و برای اقلیم نیمه‌بیابانی خشک و سرد نسبت به اقلیم نیمه‌بیابانی خشک و بسیار گرم کمتر است و برای اقلیم معتدل با تابستان‌های خشک و بسیار گرم نسبت به اقلیم معتدل پرباران با تابستان‌های گرم کمتر است و برای اقلیم برفی با تابستان‌های خشک و بسیار گرم نسبت به اقلیم برفی با تابستان‌های خشک و گرم کمتر می‌باشد. در بیشتر موارد RMSE بدست آمده در اقلیم‌های بسیار گرم دارای مقدار کمتری است که نشان دهنده کارایی بهتر روش مقاله در پیش‌بینی بارش در این نوع اقلیم می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: پیش‌بینی بارش، منطقه ایران، شبکه عصبی مصنوعی، فیلتر کالمن توسعه یافته

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد ژئودزی، دانشکده مهندسی نقشه‌برداری، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی rahiminasab@email.kntu.ac.ir

۲- استادیار دانشکده مهندسی نقشه‌برداری، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی (نویسنده مسئول) amerian@kntu.ac.ir

۱- مقدمه

بارش^۱ نتیجه پدیده‌های پیچیده اتمسفری و اقیانوسی است و پیش‌بینی این پدیده از چالش‌های مهم محققان طی سال‌های گذشته بوده است. به منظور مدیریت منابع آب، امنیت غذایی و مدیریت خطر سیلاب، صحت پیش‌بینی بارش برای چند ماه آینده بسیار مهم است (Mekanik et al., 2013).

شبکه‌های عصبی مصنوعی^۲ به عنوان یک مدل تجربی برای اولین بار با مدل کردن توانایی‌های مغز انسان توسط کالچ و پیتس ارائه گردید و توسط هاپلفید گسترش داده شد (Haykin, 1994). کراس و همکاران در سال ۱۹۹۵ بیان می‌کنند که شبکه‌های عصبی مصنوعی به عنوان یک مدل تشخیص روندهای ناپارامتری و غیرخطی می‌تواند روابط غیرخطی پیچیده با لایه‌های پنهان بین متغیرهای وابسته و مستقل را پیدا کند و با دقت بهتری نسبت به روش‌های آماری از جمله روش رگرسیونی^۳ عمل نماید (Cross et al., 1995). در گذشته برای پیش‌بینی بارش و سری‌های زمانی از روش رگرسیون خطی استفاده می‌شد، لاپدیس و فاربردر سال ۱۹۸۷ نشان دادند شبکه‌های عصبی مصنوعی کارایی بهتری در پیش‌بینی سری‌های زمانی بارش دارند (Lapedes and Farber, 1987).

در سال‌های اخیر از شبکه‌های عصبی مصنوعی برای مدل‌سازی بارش توسط محققین زیادی استفاده شده است (Navone and Ceccatto, 1994).

اولین سیستم تخمین مکانی-زمانی بارندگی با استفاده از شبکه‌های عصبی مصنوعی را فرنچ و همکاران در سال ۱۹۹۲ ارائه کردند. سپس در سال ۱۹۹۴، توما و ایگاتا با به کارگیری یک شبکه عصبی مصنوعی سه لایه به پیش‌بینی بارندگی پرداختند. هاستینراس و همکاران در سال ۱۹۹۵ از شبکه‌های عصبی مصنوعی جهت پیش‌بینی ریزش‌های جوئی جنوب آفریقا در فصل تابستان استفاده کردند. نتایج تحقیقات آن‌ها نشان داد که تجزیه و تحلیل بارش در آن منطقه تنها با روند غیرخطی شبکه‌های عصبی مصنوعی قابل

پیش‌بینی است (Hastenrath et al., 1995).

توکار و سنتون در سال ۱۹۹۹ با استفاده از شبکه عصبی مصنوعی به پیش‌بینی بارش پرداختند. نتایج نشان داد که مدل رواناب-بارش حاصل از شبکه‌های عصبی مصنوعی در مقایسه با دیگر روش‌های آماری دقت بیشتر داشته و زمان کمتری برای برازش مدل صرف می‌شود (Tokar and Johnson, 1999).

کاوازوس در سال ۲۰۰۰ از شبکه‌های عصبی مصنوعی برای پیش‌بینی بارش روزانه بالکان استفاده کرد و نشان داد که شبکه‌های عصبی مصنوعی ابزاری مفید در پیش‌بینی بارش روزانه در منطقه مورد نظر می‌باشد (Cavazos, 2000).

مکانیک و همکاران در سال ۲۰۱۳ به پیش‌بینی بلند مدت بارش با استفاده از مدل‌های اقلیمی^۴ بزرگ مقیاس پرداختند و از دو روش شبکه‌های عصبی مصنوعی و رگرسیون چند متغیره استفاده کردند. نتایج نشان داد که شبکه عصبی مصنوعی همبستگی^۵ بیشتری دارد و خطای آن کمتر است (Mekanik et al., 2013). دئو و ساهین در سال ۲۰۱۵ به پیش‌بینی شاخص تبخیر و تعرق-بارش استاندارد شده ماهانه با استفاده از شبکه عصبی مصنوعی، شاخص‌های اقلیمی و پارامترهای اقلیمی در شرق استرالیا پرداختند. آن‌ها مؤثرترین شاخص‌ها بر منطقه را معرفی کردند و نشان دادند که ورود این شاخص‌ها به مدل سبب افزایش کارایی آن شده است (Deo and Şahin, 2015).

خلیلی در پایان‌نامه کارشناسی ارشد خود در سال ۱۳۸۵ با استفاده از شبکه‌های عصبی مصنوعی بارش ماهانه ایستگاه سینوپتیک مشهد را مطالعه کرد. نتایج نشان داد که شبکه‌های عصبی مصنوعی به خوبی روند بارش ماهانه را در ایستگاه مذکور پیش‌بینی می‌کند (خلیلی، ۱۳۸۵).

ناصری و همکاران در سال ۲۰۰۸ با استفاده از شبکه‌های عصبی مصنوعی و ترکیب آن با الگوریتم ژنتیک^۶ بارش را در منطقه سیدنی استرالیا مطالعه کردند. نتایج نشان داد که شبکه عصبی مصنوعی در ترکیب با الگوریتم ژنتیک نسبت به شبکه

4- Climate

5- Correlation

6- Genetic Algorithm: GA

1- Rainfall

2- Artificial Neural Network: ANN

3- Regression

۲-۱- شبکه عصبی مصنوعی

شبکه‌های عصبی مصنوعی روشی برای تقریب توابع و پیش‌بینی حالت آینده سیستم‌های مختلف هستند. ساختار هر شبکه عصبی مصنوعی با چهار ویژگی شامل تعداد نرون‌ها^۵ در هر لایه، نوع تابع انتقال^۶، تعداد لایه‌ها^۷ و الگوریتم آموزش^۸ شناخته می‌شود (Haykin, 1994). کوچک‌ترین واحد پردازش اطلاعات در شبکه عصبی مصنوعی نرون می‌باشد که بخش اصلی و هسته شبکه‌های عصبی مصنوعی را می‌سازد. شبکه‌های عصبی مصنوعی با پردازش داده‌های تجربی، ارتباط میان آن‌ها را کشف کرده و به داخل شبکه انتقال می‌دهند. هر شبکه عصبی مصنوعی از تعدادی گره که همان نرون‌ها هستند و وزن‌های ارتباطی که نرون‌ها را به هم وصل می‌کنند، تشکیل شده است. داده‌های ورودی در وزن‌های متناظرشان ضرب می‌شوند و مجموع آن‌ها به نرون‌ها وارد می‌گردند. هر نرون دارای یک تابع انتقال است. این مقدار ورودی در تابع انتقال جایگذاری شده و مقدار حاصل از آن، خروجی نرون را مشخص می‌کند. تابع انتقال می‌تواند خطی یا غیرخطی باشد و از مهم‌ترین توابع انتقال می‌توان به تابع سیگموئید^۹ دو قطبی، تابع انتقال لوجستیک^{۱۰} و تابع انتقال هیپربولیک^{۱۱} اشاره کرد. تابع انتقال باید کراندار، افزایشی، پیوسته و مشتق‌پذیر باشد و بر پایه نیاز خاص برای حل مسئله انتخاب شود. شبکه‌های عصبی مصنوعی می‌توانند تک‌لایه یا چندلایه که به اصطلاح شبکه‌های پرسپترون چندلایه^{۱۲} گفته می‌شود، باشند. در نگاره ۱ یک شبکه عصبی مصنوعی چندلایه که شامل لایه ورودی، لایه مخفی و لایه خروجی است، نشان داده شده است. در شبکه عصبی مصنوعی تک‌لایه، لایه مخفی وجود ندارد (Norgaard, 1997).

5- Neurons

6- Transfer Function

7- Layer

8- Training Algorithm

9- Sigmoid Function

10- Logistic Function

11- Hyperbolic Function

12- Multi-Layer Perceptron

عصبی مصنوعی مدل بهتری را ارائه می‌کند (Nasseri et al., 2008). آکسوی و داهامشه در سال ۲۰۰۹ با استفاده از مدل شبکه‌های عصبی مصنوعی بارش ماهانه اردن را پیش‌بینی کردند. نتایج تحقیقات آن‌ها نشان داد که در سه ایستگاه مورد مطالعه با توجه به معیارهای مورد نظر نظیر جذر میانگین مربع خطاها، مدل انتشار پس‌انتشار^۲ پیش‌رو^۳، بهترین مدل می‌باشد (Aksoy and Dahamsheh, 2009).

در یک مطالعه دیگر داهامشه و آکسوی با استفاده از شبکه‌های عصبی مصنوعی بارش ماهانه مناطق خشک اردن را پیش‌بینی کردند و نتایج را با رگرسیون چند متغیره مقایسه کردند. نتایج نشان داد که شبکه‌های عصبی مصنوعی نتایج بهتری را نسبت به رگرسیون چند متغیره ارائه می‌کند (Dahamsheh and Aksoy, 2009).

آبهیشک و همکاران در سال ۲۰۱۲ نشان دادند که شبکه عصبی مصنوعی پس‌انتشار پیش‌رو توانایی پیش‌بینی میانگین بارش ماهانه را دارد (Abhishek et al., 2012). با توجه به پژوهش‌های انجام شده و عملکرد شبکه عصبی مصنوعی در این تحقیقات و همچنین اهمیت پیش‌بینی بارش در منطقه ایران، در این مقاله با استفاده از ترکیب شبکه عصبی مصنوعی و فیلتر کالمن توسعه یافته^۴ به پیش‌بینی بارش در منطقه ایران پرداخته شده است.

۲- روش‌ها

در این بخش به مطالعه روش‌های مورد استفاده در این مقاله پرداخته می‌شود که شامل ۳ زیربخش است. در زیربخش اول به بررسی شبکه عصبی مصنوعی، در زیربخش دوم به بررسی فیلتر کالمن و در زیربخش سوم به بررسی ترکیب شبکه عصبی مصنوعی و فیلتر کالمن توسعه یافته پرداخته می‌شود.

1- Root Mean Square Errors: RMSE

2- Back Propagation

3- Feed-Forward

4- Extended Kalman Filter: EKF

۲- انتشار خطا به عقب^۲: در این گام، خطای بدست آمده از معادله (۱) به وسیله رابطه (۲) روی وزن‌ها توزیع می‌گردد.

$$\Delta W_{nl} = -\frac{\partial E}{\partial W_{nl}} \eta \quad (2)$$

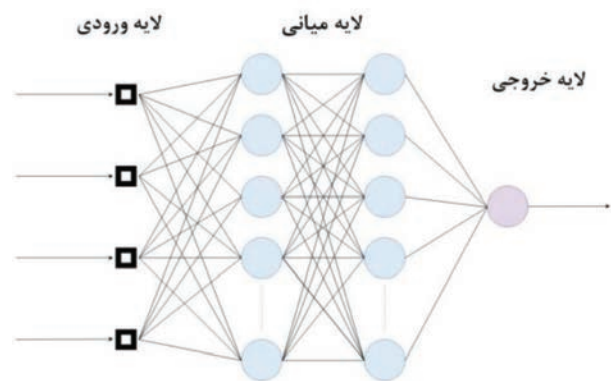
ضریب $0 < \eta < 1$ پارامتری است که نرخ همگرایی الگوریتم را کنترل می‌نماید. این دو مرحله آن‌قدر ادامه می‌یابد تا مقدار E به مقدار کوچک از پیش تعیین شده‌ای همگرا گردد. در حقیقت شبکه، با توزیع خطای بدست آمده در هر مرحله روی وزن‌های قبلی و تکرار این عملیات، آموزش می‌بیند (تشنه‌لب و جعفری، ۱۳۹۵).

۲-۲- فیلتر کالمن

فیلتر کالمن یکی از معروف‌ترین و پرکاربردترین ابزار ریاضی است، که برای تخمین‌های آماری مورد استفاده قرار می‌گیرد. فیلتر کالمن کلاسیک بر اساس یک روش بازگشتی به حل مسئله فیلترینگ خطی گسسته می‌پردازد. فیلتر کالمن شامل مجموعه‌ای از معادلات ریاضی است که یک روند تکراری، پیش‌بینی و به‌روزرسانی را انجام می‌دهد. فیلتر کالمن در کمینه‌سازی کووریانس خطای تخمین زده شده یک ابزار بهینه است (Welch and Bishop, 2006). روش فیلتر کالمن یک روش دنباله‌ای است که در آن برای برآورد بردار مجهولات و دقت آن‌ها در هر لحظه صرفاً بردار مجهولات و دقت برآورد شده مرحله قبل آن‌ها و مشاهدات در آن لحظه نیاز است و همه مشاهدات و داده‌ها مورد نیاز نیستند.

۲-۲-۱- فیلتر کالمن توسعه یافته

فیلتر کالمن کلاسیک سعی در بهبود و تخمین یک وضعیت تحت معادلات تفاضلی احتمالاتی خطی دارد، در حالی که بسیاری از کاربردها نیازمند پردازش در حالت غیرخطی می‌باشد. در سیستم‌های غیرخطی از فیلتر کالمن توسعه یافته استفاده می‌شود (Chui and Chen, 2009). در این حالت معادلات فیلتر کالمن کلاسیک به صورت روابط (۳) و (۴) در قالب فیلتر کالمن توسعه یافته بیان می‌شود:



نگاره ۱. ساختار شبکه عصبی مصنوعی چندلایه

۲-۱-۱- الگوریتم پس انتشار خطا

این الگوریتم در شبکه‌های عصبی مصنوعی پیش‌رو مورد استفاده قرار می‌گیرد. پیش‌رو بودن به این معناست که نرون‌ها در لایه‌های متوالی قرار گرفته‌اند و خروجی خود را رو به جلو می‌فرستند. واژه پس انتشار نیز به معنای این است که خطاها به سمت عقب در شبکه تغذیه می‌شوند تا وزن‌ها را اصلاح کنند و پس از آن، مجدداً ورودی، مسیر پیش‌روی خود را تا خروجی تکرار کند. اساس آموزش الگوریتم پس انتشار به این صورت است که وزن‌های اولیه ارتباطی به صورت تصادفی انتخاب می‌گردند. با فرض وجود N نمونه آموزشی که هر نمونه دارای n ورودی و l خروجی است، بردار ورودی به صورت $X_j = (X_{1j}, \dots, X_{nj})$ و بردار خروجی به صورت $B_j = (B_{1j}, \dots, B_{lj})$ که $1 \leq j \leq N$ ، تعریف می‌گردد (Bose & Liang 1998). فرآیند آموزش با استفاده از دو گام زیر اتفاق می‌افتد.

۱- انتشار به جلو: بردار ورودی X_j به لایه ورودی فرستاده می‌شود و یک بردار خروجی $O_j = (O_{1j}, \dots, O_{lj})$ بر اساس وزن‌های جاری $W = (X_{11}, \dots, X_{nl})$ ایجاد می‌گردد. مقدار O_j با مقدار واقعی یعنی B_j مقایسه شده و تابع خطای E تولید می‌شود (تشنه‌لب و جعفری، ۱۳۹۵).

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^N (B_{ij} - O_{ij})^2 \quad (1)$$

$$x(t) = f(x(t-1), u(t), n(t-1)) \quad (3)$$

$$\hat{x}'(t) = f(\hat{x}'(t-1), u(t), n(t-1)) \quad (7)$$

$$z(t) = h(x(t), v(t)) \quad (4)$$

$$P'(t) = Y(t)P(t-1)Y^T(t) + F(t)Q(t-1)F^T(t) \quad (8)$$

که در این روابط، $\hat{x}'(t)$ بردار وضعیت پیش‌بینی شده و $P'(t)$ ماتریس کوواریانس بردار وضعیت پیش‌بینی شده، Q کوواریانس نویز فرایند و $P(t-1)$ کوواریانس خطای مدل زمینه می‌باشد.

که در این روابط $n(t)$ و $v(t)$ نشان دهنده نویز فرایند و اندازه‌گیری هستند. تابع غیرخطی f در این معادله تفاضلی، ارتباط بین بردار وضعیت در زمان t و زمان $t-1$ را مشخص می‌نماید و شامل پارامترهای تابع محرک $u(t)$ و نویز فرایند است.

به‌روزرسانی

$$K(t) = P'(t)H^T(t)(H(t)P'(t)H^T(t) + R(t))^{-1} \quad (9)$$

تابع غیرخطی h ارتباط بین بردار وضعیت دقیق $x(t)$ و مشاهدات $z(t)$ را مشخص می‌نماید. به منظور استفاده از فیلتر کالمن توسعه یافته ابتدا باید این معادلات را خطی نمود و سپس خواهیم داشت:

$$\hat{x}(t) = \hat{x}'(t) + K(t)(z(t) - h(\hat{x}'(t), 0)) \quad (10)$$

$$x(t) \approx \bar{x}(t) + Y(x(t-1) - \bar{x}(t-1)) + Fn(t-1) \quad (5)$$

$$P(t) = (I - K(t)H(t))P'(t) \quad (11)$$

$$z(t) \approx \bar{z}(t) + H(x(t) - \bar{x}(t)) + Vv(t) \quad (6)$$

که در روابط فوق R کوواریانس نویز اندازه‌گیری و $K(t)$ ماتریس بهره کالمن می‌باشد (Welch and Bishop, 2006).

که پارامترهای روابط فوق به صورت زیر معرفی می‌شوند:

۲-۳- ترکیب شبکه عصبی مصنوعی و فیلتر کالمن توسعه یافته

$\bar{x}(t)$ و $\bar{z}(t)$ بردارهای وضعیت و مشاهدات تقریبی

شبکه‌های عصبی مصنوعی تقریباً می‌توانند هر تابع غیرخطی را تقریب بزنند. پیچیدگی ذاتی موجود در طراحی شبکه‌های عصبی مصنوعی به شناسایی ساختار و ضرایب آموزش دهنده آن مرتبط است. الگوریتم پس انتشار یکی از متداول‌ترین الگوریتم‌های مورد استفاده جهت آموزش این شبکه‌ها است، اما الگوریتم پس انتشار به انتخاب تعداد نرون‌های مخفی و تعداد لایه‌های مخفی وابسته است. همچنین با توجه به ماهیت این روش سرعت همگرایی آن خیلی کند است و به نویزهای موجود در مجموعه داده‌های ورودی و خروجی که جهت آموزش شبکه عصبی مصنوعی به کار می‌روند، بسیار حساس است. همچنین الگوریتم پس انتشار در مدل‌سازی فرایندهای پیچیده عملکرد ضعیفی

$\hat{x}(t)$ تخمین بردار وضعیت در مرحله t

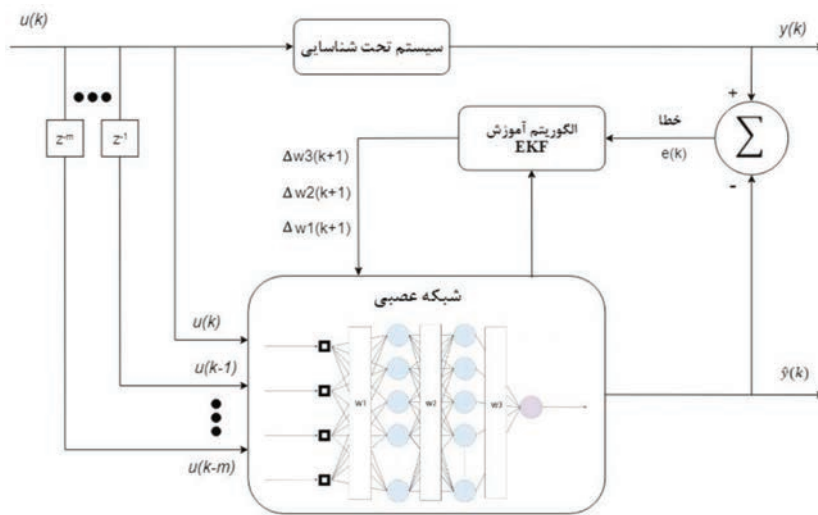
Y ماتریس ژاکوبین مشتقات جزئی تابع غیر خطی f نسبت به x

F ماتریس ژاکوبین مشتقات جزئی تابع غیر خطی f نسبت به w

H ماتریس ژاکوبین مشتقات جزئی تابع غیر خطی h نسبت به x

V ماتریس ژاکوبین مشتقات جزئی تابع غیر خطی h نسبت به v

با این مقدمات مراحل پردازش به منظور پیش‌بینی و به‌روزرسانی به صورت روابط (۷) تا (۱۱) تعریف می‌شود:



نگاره ۲. شبکه عصبی چندلایه با آموزش فیلتر کالمن توسعه یافته (تشنه‌لب و جعفری، ۱۳۹۵)

فیلتر کالمن توسعه یافته استفاده می‌شود (Iiguni et al., 1992). شبکه عصبی پیش‌رو را می‌توان یک نوع سیستم پویای غیرخطی با وزن‌های ارتباطی در نظر گرفت و آموزش شبکه عصبی مصنوعی را با مسئله تخمین حالت سیستم غیرخطی معادل‌سازی کرد. به همین دلیل می‌توان از نسخه توسعه یافته فیلتر کالمن برای تخمین پارامترهای قابل تنظیم شبکه عصبی مصنوعی، به عنوان مثال وزن‌های شبکه عصبی مصنوعی استفاده کرد. برای این منظور باید شبکه عصبی مصنوعی برحسب مفاهیم فضای حالت فرمول‌بندی شود. رابطه (۱۲) مدل فرایند است که در آن بردار وزن‌های شبکه عصبی مصنوعی $(W(t))$ ایده‌آل به عنوان حالت سیستم به نویز فرایند $(n(t))$ آغشته شده‌اند. رابطه (۱۳) مدل اندازه‌گیری را برای به دست آوردن پاسخ شبکه عصبی مصنوعی غیرخطی نسبت به بردار ورودی $X(t)$ و وزن‌های آن بیان می‌کند. پارامتر $v(t)$ نویز اندازه‌گیری و تابع $h[W(t), X(t)]$ به عنوان تابع تحریک یا تابع فعال‌ساز یا تابع انتقال برای توصیف قسمت غیرخطی مدل است. بردار وزن که به عنوان بردار وضعیت مدل غیرخطی در نظر گرفته شده، شامل تمامی وزن‌های لایه‌های میانی و خروجی شبکه عصبی مصنوعی (N_W) است که در آن n_0 ، n_1 و n_2 به ترتیب تعداد سیگنال‌های ورودی، نورون‌های میانی و خروجی می‌باشند. وزن‌های اولیه در شبکه عصبی

دارد (Yang et al., 2007). پژوهش‌هایی جهت رفع این نواقص از سوی محققان صورت گرفته است. یکی از معروف‌ترین روش‌ها در جهت رفع نواقص مذکور استفاده از فیلتر کالمن است (de Jesús Rubio and Yu, 2007).

فیلتر کالمن بر نوعی الگوریتم بازگشتی متکی است. بازگشتی به این معنی است که بر خلاف بسیاری دیگر از روش‌های پردازش داده، در این روش برای انجام محاسبات جدید، به ذخیره‌سازی داده‌های قبلی نیازی نیست. پاسخ بازگشتی هر مرحله، از روی تخمین‌های قبلی و ورودی‌های جدید به‌روزرسانی می‌شود. در نتیجه فقط تخمین مرحله قبلی باید ذخیره شود. بنابراین فیلتر کالمن به عنوان یک روش تخمین خطی در سیستم‌های پویا مطرح می‌باشد. به همین دلیل این الگوریتم در روش‌های برخط بسیار پرکاربرد است در حالی که الگوریتم‌های پرکاربردی مانند گوس نیوتن یا لوبنبرگ^۱ به دلیل نیاز به محاسبات حجیم و ذخیره‌سازی داده‌های قبلی، کاربرد کمتری در سیستم‌های برخط دارند. نویز اندازه‌گیری و نویز فرایند در روابط مربوط به تخمین الگوریتم کالمن، در نظر گرفته می‌شوند. در سیستم خطی پویا و نویزی، با داشتن مقادیر حالت در زمان‌های قبل، می‌توان خروجی و مقادیر حالت را برای آینده تخمین زد. اگر روابط بین متغیرهای حالت و خروجی غیرخطی باشد، از الگوریتم

1- Online
 2- Levenberg

در این معادلات $P(t)$ ماتریس کواریانس خطا، R کواریانس نویز اندازه‌گیری و $A(t)$ ماتریس نرمال‌سازی است.

مرحله پنجم: به دست آوردن ماتریس کواریانس خطا و تنظیم وزن‌ها برای گام $t+1$ که با استفاده از روابط (۱۸) و (۱۹) انجام می‌شود.

$$W_{N_W \times 1}(t+1) = W_{N_W \times 1}(t) + K_{N_W \times n_2}(t) e_{n_2 \times 1}(t) \quad (18)$$

$$P_{N_W \times N_W}(t+1) = P_{N_W \times N_W}(t) - K_{N_W \times n_2}(t) H_{n_2 \times N_W}^T(t) P_{N_W \times N_W}(t) + Q_{N_W \times N_W}(t) \quad (19)$$

در این معادلات Q کواریانس نویز فرایند است (تشنه‌لب و جعفری، ۱۳۹۵).

۳- منطقه مطالعاتی

در این مقاله تمام کشور ایران به عنوان منطقه مطالعاتی انتخاب شده است. ایران ۱۶۴۸۱۹۸ کیلومتر مربع وسعت دارد و در محدوده ۲۵ درجه و سه دقیقه تا ۳۹ درجه و ۴۷ دقیقه عرض شمالی و ۴۴ درجه و پنج دقیقه تا ۶۳ درجه و ۱۸ دقیقه طول شرقی واقع شده است. روش کوپن^۱ یکی از متداول‌ترین روش‌های پهنه‌بندی اقلیمی است، که پژوهشگران مختلفی به بهبود آن پرداخته‌اند.

در این مقاله از پهنه‌بندی اقلیمی ایران به روش کوپن-گایگر که توسط سایر محققان انجام شده است، استفاده گردید (رضیعی، ۲۰۰۶; Kottek et al., 1396).

همان گونه که در نگاره ۳ دیده می‌شود، این پهنه‌بندی ایران را به ۸ اقلیم بیابان خشک و بسیار گرم^۲، بیابان خشک و سرد^۳، نیمه‌بیابانی خشک و بسیار گرم^۴، نیمه‌بیابانی خشک و سرد^۵، معتدل با تابستان‌های خشک و بسیار گرم^۶، معتدل

مصنوعی به صورت تصادفی انتخاب می‌شوند. در نگاره ۲ می‌توان نحوه ترکیب شبکه عصبی مصنوعی و فیلتر کالمن توسعه‌یافته را برای بدست آوردن وزن‌های شبکه عصبی مصنوعی ملاحظه نمود (تشنه‌لب و جعفری، ۱۳۹۵).

$$W_{N_W \times 1}(t+1) = W_{N_W \times 1}(t) + n_{N_W \times 1}(t) \quad (12)$$

$$y_{n_2 \times 1}(t) = h[W(t), X(t)] + v_{n_2 \times 1}(t) \quad (13)$$

فیلتر کالمن توسعه‌یافته وزن‌های شبکه عصبی مصنوعی را برای به حداقل رساندن میانگین مربعات خطای تخمین، تنظیم می‌کند. اجرای الگوریتم فیلتر کالمن توسعه‌یافته برای آموزش شبکه عصبی مصنوعی شامل مراحل زیر می‌باشد:
مرحله اول: به دست آوردن بردار خروجی شبکه عصبی مصنوعی در گام t ام یعنی $(\hat{y}(t))$ که با استفاده از دو رابطه (۱۲) و (۱۳) انجام می‌شود.

مرحله دوم: به دست آوردن ماتریس ژاکوبین خروجی شبکه عصبی مصنوعی نسبت به وزن‌های آن که با استفاده از رابطه (۱۴) انجام می‌شود.

$$H_{N_W \times n_2}(t) = \left[\frac{\partial \hat{y}(t)}{\partial w_{1n_2 \times 1}(t)}, \frac{\partial \hat{y}(t)}{\partial w_{2n_2 \times 1}(t)}, \dots, \frac{\partial \hat{y}(t)}{\partial w_{N_W n_2 \times 1}(t)} \right]_{N_W \times n_2}^T \quad (14)$$

مرحله سوم: محاسبه بردار خطای تخمین که با استفاده از رابطه (۱۵) انجام می‌شود. در این رابطه $y(t)$ خروجی مطلوب و $\hat{y}(t)$ خروجی شبکه عصبی مصنوعی است.

$$e_{n_2 \times 1}(t) = y_{n_2 \times 1}(t) - \hat{y}_{n_2 \times 1}(t) \quad (15)$$

مرحله چهارم: محاسبه بهره فیلتر کالمن $K(t)$ که با استفاده از رابطه (۱۶) انجام می‌شود.

$$K_{N_W \times n_2}(t) = P_{N_W \times N_W}(t) H_{N_W \times n_2}^T(t) A_{n_2 \times n_2}(t) \quad (16)$$

$$(17)$$

$$A_{n_2 \times n_2}(t) = \left[R_{n_2 \times n_2}(t) + H_{n_2 \times N_W}^T(t) P_{N_W \times N_W}(t) H_{N_W \times n_2}(t) \right]^{-1}$$

1- Köppen

2- BWh

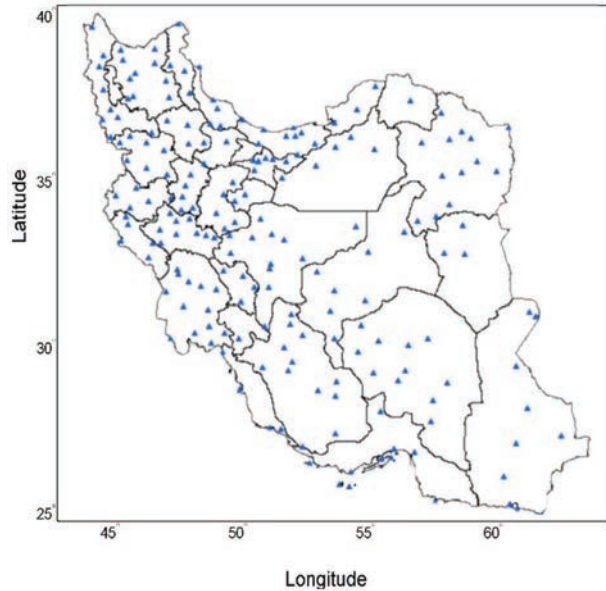
3- BWk

4- BSh

5- BSk

6- Csa

سینوپتیک برای آموزش ۵ شبکه و از ۳۰ درصد آن برای آزمون شبکه استفاده شد.



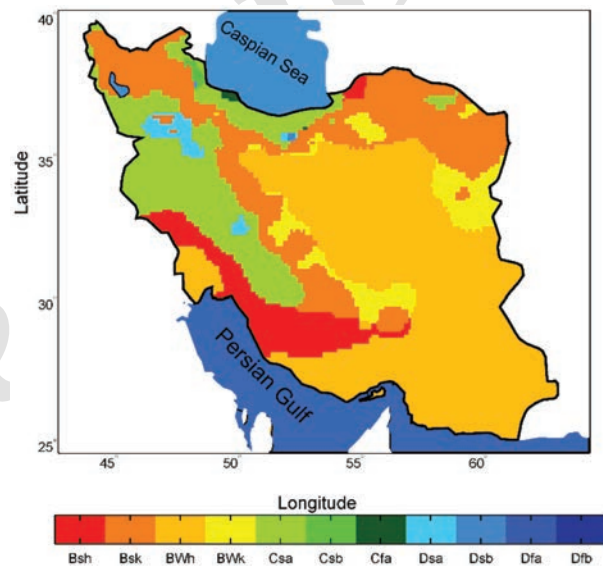
نگاره ۴: نمایش ایستگاه‌های هواشناسی مورد استفاده

جدول ۱: پارامترهای شبکه عصبی مورد استفاده

شبکه عصبی چندلایه (پرسپترون)	نوع شبکه عصبی
۷	تعداد ورودی‌های شبکه
۱	تعداد خروجی‌های شبکه
۲	تعداد لایه‌های میانی
۱۰	تعداد نرون‌های هر لایه میانی
فیلتر کالمن توسعه یافته	روش آموزش
سیگموئید دو قطبی	تابع انتقال یا فعال‌سازی

شبکه عصبی چندلایه با دو لایه مخفی، مورد استفاده قرار گرفت. در لایه ورودی از ۷ پارامتر به عنوان ورودی‌های شبکه عصبی مصنوعی استفاده شده است. تمامی این پارامترها پیش از ورود به شبکه عصبی مصنوعی نرمالیزه شده‌اند. لایه مخفی اول و دوم هر کدام دارای ۱۰ نرون می‌باشند. در این روش سال، ماه، موقعیت جغرافیایی (طول، عرض و

پرباران با تابستان‌های گرم، اقلیم برفی با تابستان‌های خشک و بسیار گرم، اقلیم برفی با تابستان‌های خشک و گرم^۳ تقسیم‌بندی می‌کند. در این تحقیق از میانگین بارش ماهانه ۱۸۰ ایستگاه سینوپتیک، طی سال‌های ۱۹۵۱-۲۰۱۶ استفاده شده و سال ۲۰۱۷ مورد پیش‌بینی قرار گرفته است. در برخی از ایستگاه‌ها تعداد سال‌هایی که داده موجود است کمتر از مقدار ذکر شده می‌باشد. در نگاره ۴ می‌توان ایستگاه‌های هواشناسی که در این تحقیق مورد استفاده قرار گرفته‌اند را مشاهده کرد.



نگاره ۳: مناطق اقلیمی ایران به روش کوپن-گایگر

(رضیعی، ۱۳۹۶)

۴- نتایج و یافته‌ها

در این مقاله از ترکیب شبکه عصبی مصنوعی و فیلتر کالمن توسعه یافته برای پیش‌بینی بارش در ۸ اقلیم ایران استفاده شده است.

داده‌ها به دو بخش تقسیم شده‌اند. از ۷۰ درصد داده‌های میانگین بارش ماهانه سال‌های ۱۹۵۱-۲۰۱۶ ایستگاه‌های

1- Cfa

2- Dsa

3- Dsb

4- Synoptic

5- Train

6- Test

جدول ۲: RMSE بدست آمده برای آموزش و آزمون مدل ترکیبی

اقلیم	RMSE آموزش شبکه (میلیمتر)	ضریب همبستگی آموزش شبکه	RMSE آزمون شبکه (میلیمتر)	ضریب همبستگی آزمون شبکه
بیابان خشک و بسیار گرم	۰/۱۰۹۳	۰/۲۳۸۱	۰/۰۴۸۶	۰/۴۷۱۰
بیابان خشک و سرد	۰/۰۸۶۸	۰/۲۹۵۲	۰/۰۶۳۹	۰/۴۲۰۳
نیمه‌بیابانی خشک و بسیار گرم	۰/۱۷۱۳	۰/۲۷۲۱	۰/۰۷۸۱	۰/۵۸۷۵
نیمه‌بیابانی خشک و سرد	۰/۱۰۴۷	۰/۳۱۸۵	۰/۰۷۱۹	۰/۵۳۴۶
معتدل با تابستان‌های خشک و بسیار گرم	۰/۰۷۱۷	۰/۵۱۵۸	۰/۰۵۴۱	۰/۶۱۲۶
معتدل پر باران با تابستان‌های گرم	۰/۱۱۲۹	۰/۴۵۸۳	۰/۰۹۵۶	۰/۶۷۰۷
اقلیم برفی با تابستان‌های خشک و بسیار گرم	۰/۱۲۰۵	۰/۶۵۶۲	۰/۰۹۶۰	۰/۷۸۰۱
اقلیم برفی با تابستان‌های خشک و گرم	۰/۱۸۳۱	۰/۴۶۰۵	۰/۱۴۷۱	۰/۵۲۱۴

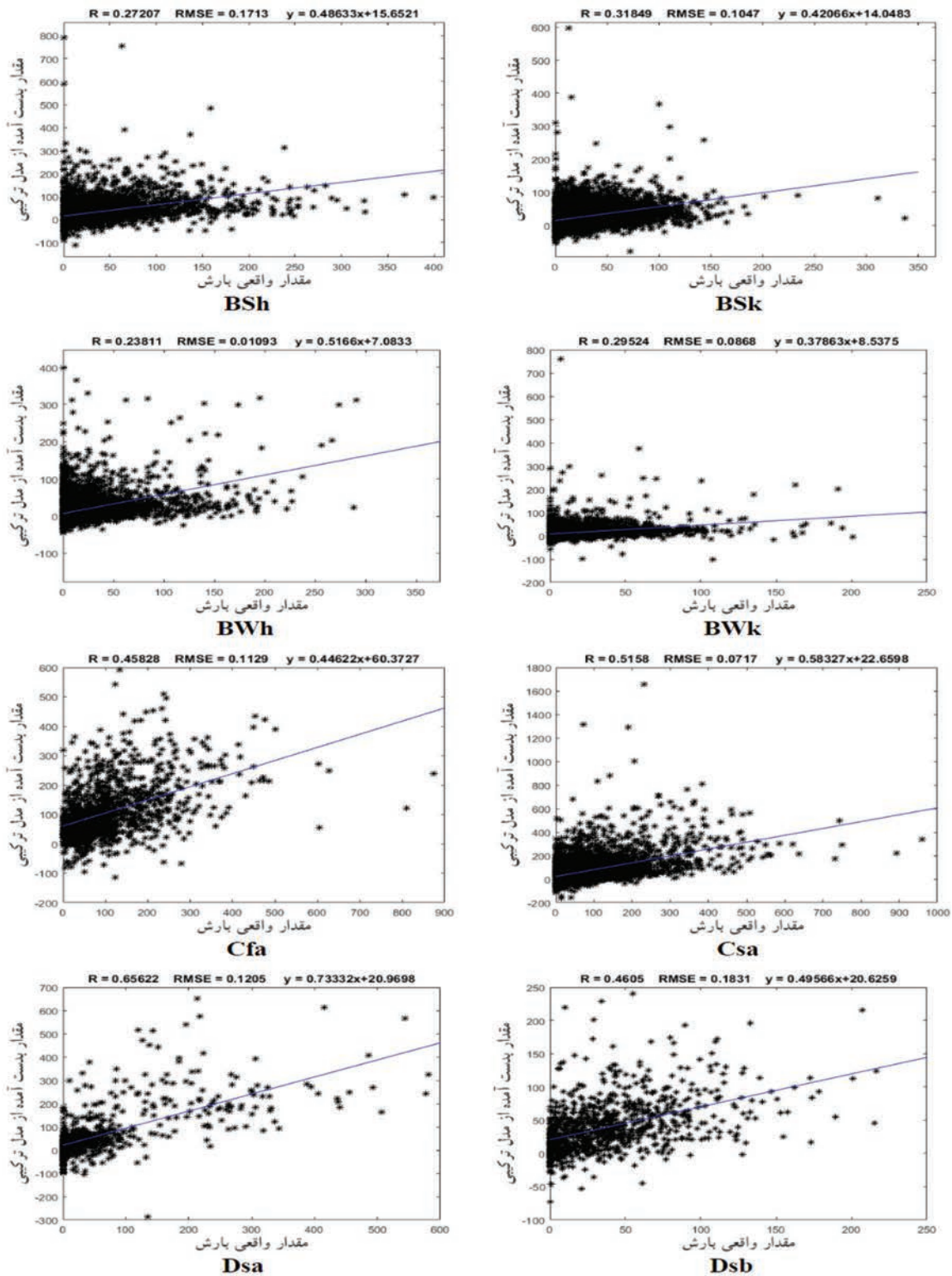
رابطه بین دو متغیر، برابر صفر است. پس از آموزش شبکه عصبی مصنوعی با داده‌های سال‌های ۲۰۱۶-۱۹۵۱، از این شبکه عصبی مصنوعی استفاده شده و میانگین بارش ماهانه برای ۱۲ ماه سال ۲۰۱۷ پیش‌بینی گردید. پیش‌بینی برای هر یک از اقلیم‌ها به صورت جداگانه انجام شد.

جدول ۲ مقادیر RMSE بدست آمده برای آموزش و آزمون مدل ترکیبی شبکه عصبی مصنوعی و فیلتر کالمن توسعه‌یافته را برای ۸ اقلیم نشان می‌دهد. همان‌گونه که انتظار می‌رود، RMSE آموزش بیشتر از آزمون است و ضریب همبستگی آزمون شبکه از آموزش مقداری بیشتر است، پس با توجه به نتایج بدست آمده برای آزمون شبکه می‌توان نتیجه گرفت که شبکه به خوبی آموزش دیده است. جدول ۳ مقادیر RMSE بدست آمده برای پیش‌بینی ۱۲ ماه سال ۲۰۱۷ برای ۸ اقلیم را نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که RMSE پیش‌بینی در اکثر اقلیم‌ها بیشتر از آزمون مدل ترکیبی می‌باشد، که دلیل آن خارج از حوزه آموزش و آزمون بودن داده‌های پیش‌بینی است. نگاره ۵ خروجی مدل ترکیبی شبکه عصبی مصنوعی و فیلتر کالمن توسعه‌یافته را در مقایسه با مقادیر واقعی و میزان همبستگی این دو را برای آموزش مدل ترکیبی نشان می‌دهد. نگاره ۶ خروجی مدل ترکیبی را در مقایسه با مقادیر واقعی و میزان همبستگی

ارتفاع) ایستگاه‌های سینوپتیک و میانگین دمای ماهانه و میانگین سرعت باد ماهانه به عنوان پارامترهای ورودی و میانگین بارش ماهانه به عنوان پارامتر هدف در نظر گرفته شده است. از تابع سیگموئید دو قطبی به عنوان تابع انتقال استفاده شده است. این تابع بازه هر نرون را میان دو مقدار ۱- و ۱ فشرده می‌نماید. از الگوریتم فیلتر کالمن توسعه‌یافته به عنوان الگوریتم آموزش شبکه عصبی مصنوعی استفاده شده است. یک مدل شبکه عصبی مصنوعی چهار لایه‌ای، شامل لایه ورودی، لایه خروجی و دو لایه مخفی مانند نگاره ۲ ایجاد گردید. برای ارزیابی شبکه عصبی مصنوعی از RMSE و ضریب همبستگی^۱ استفاده شد. آماره RMSE جهت بررسی تفاوت میان مقدار پیش‌بینی شده توسط مدل یا برآوردگر آماری و مقدار واقعی استفاده می‌شود و ابزار کارایی جهت مقایسه خطاهای پیش‌بینی توسط یک مجموعه داده می‌باشد (Hyndman and Koehler, 2006).

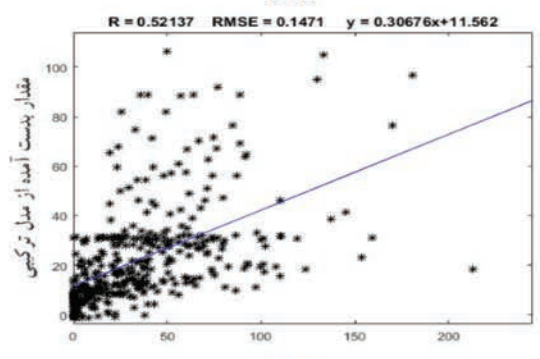
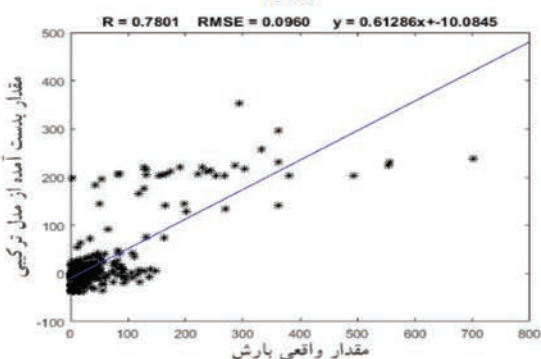
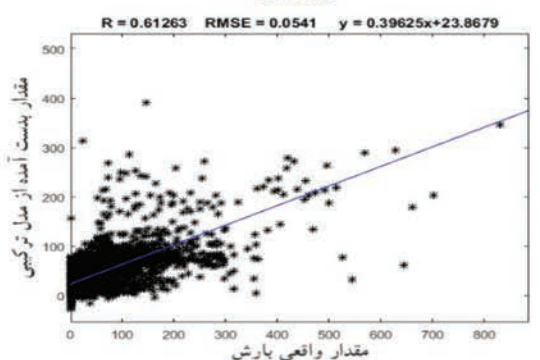
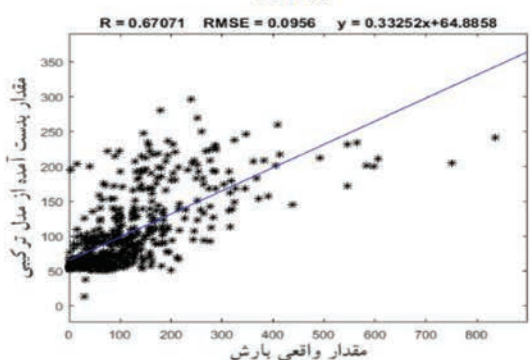
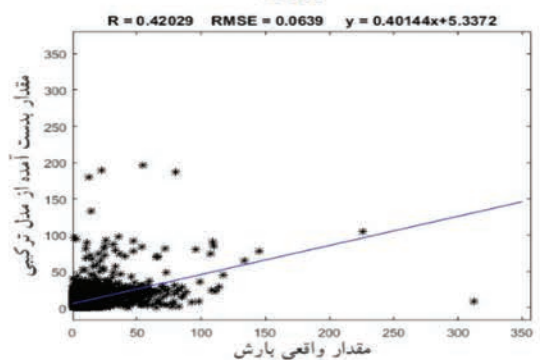
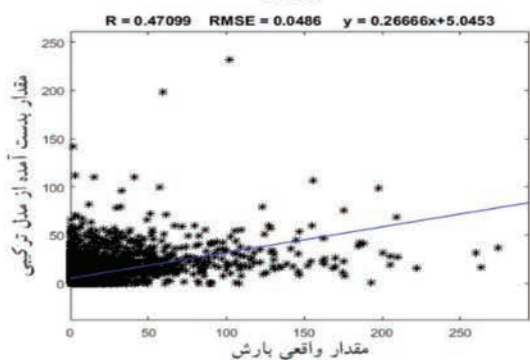
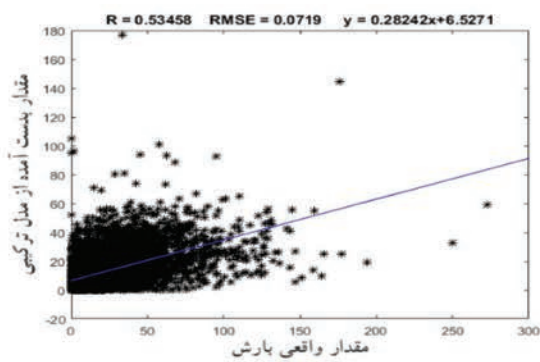
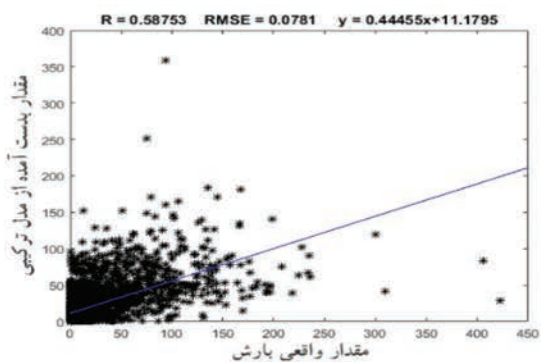
ضریب همبستگی بیان کننده نحوه تغییرات مقدار خروجی شبکه عصبی مصنوعی با مقدار واقعی را مشخص می‌کند. این ضریب بین ۱ تا ۱- است. مقدار ۱ برای ضریب همبستگی به این معنا است که خروجی با مقدار واقعی کاملاً تطابق دارد و ۱- به این معنا است که خروجی و مقدار واقعی کاملاً معکوس هم هستند و در صورت عدم وجود

1- Correlation Coefficient (R)



نگاره ۵: خروجی مدل شبکه عصبی مصنوعی در مقایسه با مقادیر واقعی و میزان همبستگی این دو برای بخش آموزش مدل ترکیبی و همچنین مقدار RMSE نرمال برای هر اقلیم

فصلنامه علمی - پژوهشی اطلاعات جغرافیایی (سیر)
پیش‌بینی بارش ماهانه در منطقه ایران با استفاده از ... / ۸۷



نگاره ۶: خروجی مدل شبکه عصبی مصنوعی در مقایسه با مقادیر واقعی و میزان همبستگی این دو برای بخش آزمون مدل ترکیبی و همچنین مقدار RMSE نرمال برای هر اقلیم

با توجه به جدول ۳ و مقادیر RMSE هر کدام از اقلیم‌ها می‌توان ملاحظه نمود که همان روند مرحله آزمون در مورد RMSE اقلیم‌های مختلف در مرحله پیش‌بینی نیز وجود دارد.

۵- نتیجه‌گیری و پیشنهادات

در این مقاله از ترکیب شبکه عصبی مصنوعی و فیلتر کالمن توسعه‌یافته برای پیش‌بینی بارش باران در منطقه ایران استفاده گردید.

از فیلتر کالمن توسعه‌یافته برای آموزش شبکه عصبی مصنوعی استفاده شده است. استفاده از فیلتر کالمن توسعه‌یافته برای بدست آوردن وزن‌های شبکه عصبی مصنوعی، سرعت همگرایی شبکه عصبی را بهبود بخشید و همچنین به نویزهای موجود در مجموعه داده‌های ورودی و خروجی که جهت آموزش شبکه عصبی به کار می‌روند، حساسیت کمتری نشان داد که علت آن عملکرد خوب این فیلتر در مدل‌سازی فرایندهای پیچیده است.

استفاده از پهنه‌بندی کوپن-گایگر باعث می‌شود که ایستگاه‌های سینوپتیک که بارش نسبتاً مشابهی دارند در یک دسته قرار بگیرند، این کار باعث افزایش دقت شبکه عصبی مصنوعی می‌شود. مقدار نرمال RMSE برای ۸ پهنه اقلیمی در مرحله آزمون و پیش‌بینی محاسبه گردید که برای اقلیم بیابان خشک و بسیار گرم نسبت به اقلیم نیمه‌بیابانی خشک و سرد کمتر است و برای اقلیم معتدل با تابستان‌های خشک و بسیار گرم نسبت به اقلیم معتدل پر باران با تابستان‌های گرم کمتر است و برای اقلیم برفی با تابستان‌های خشک و بسیار گرم نسبت به اقلیم برفی با تابستان‌های خشک و گرم کمتر می‌باشد.

در بیشتر موارد RMSE بدست آمده در اقلیم‌های بسیار گرم دارای مقدار کمتری است که نشان دهنده کارایی بهتر روش مقاله در پیش‌بینی بارش در این نوع اقلیم می‌باشد.

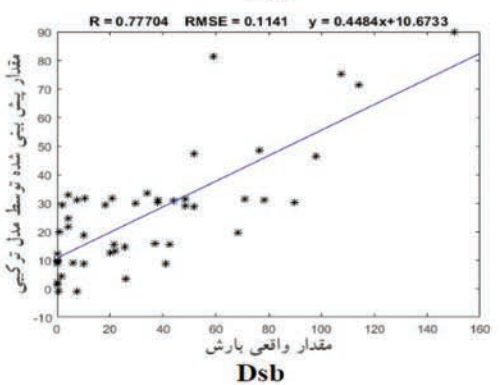
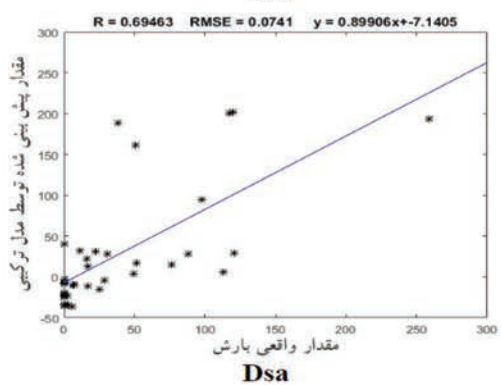
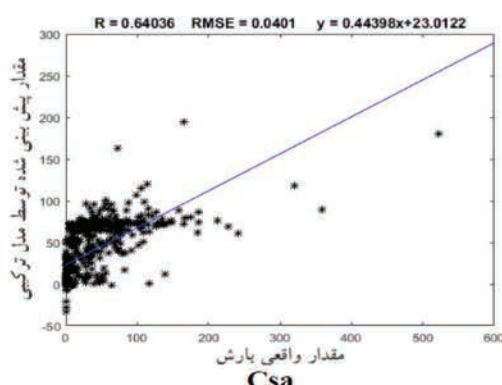
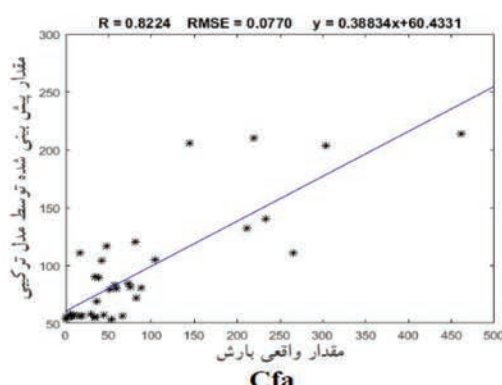
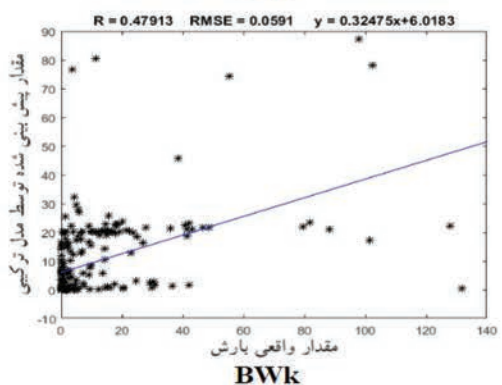
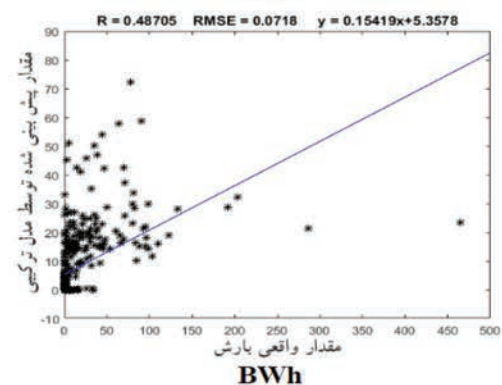
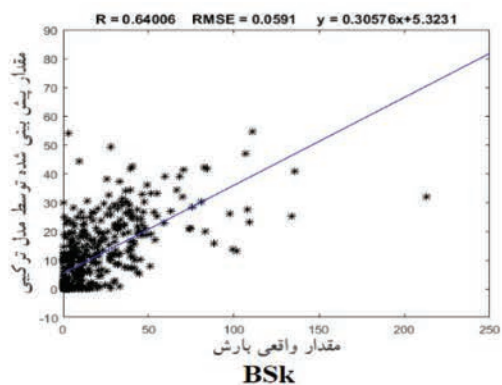
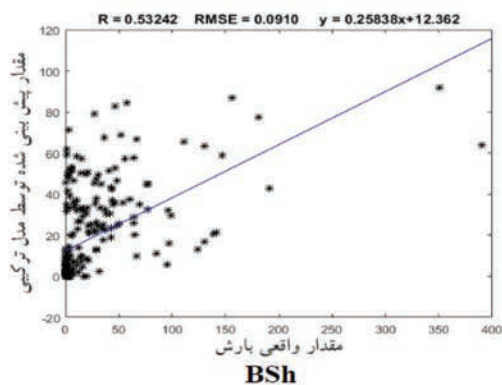
این دو را برای آزمون مدل ترکیبی نشان می‌دهد. نگاره ۷ خروجی مدل ترکیبی را در مقایسه با مقادیر واقعی و میزان همبستگی این دو را برای پیش‌بینی صورت گرفته توسط مدل ترکیبی آموزش دیده نشان می‌دهد.

همان گونه که در جدول ۲ مشاهده می‌شود و با توجه به RMSE آزمون شبکه عصبی مصنوعی می‌توان عملکرد شبکه را ملاحظه نمود، که در اقلیم‌های بیابانی مقدار RMSE برای اقلیم بیابان خشک و بسیار گرم نسبت به اقلیم بیابان خشک و سرد کمتر است و در اقلیم‌های نیمه‌بیابانی مقدار RMSE برای اقلیم نیمه‌بیابانی خشک و سرد نسبت به اقلیم نیمه‌بیابانی خشک و بسیار گرم کمتر است و در اقلیم‌های معتدل مقدار RMSE برای اقلیم معتدل با تابستان‌های خشک و بسیار گرم نسبت به اقلیم معتدل پر باران با تابستان‌های گرم کمتر است، همچنین در اقلیم‌های برفی مقدار RMSE برای اقلیم برفی با تابستان‌های خشک و بسیار گرم نسبت به اقلیم برفی با تابستان‌های خشک و گرم کمتر است.

جدول ۳: RMSE بدست آمده برای پیش‌بینی بارش توسط

مدل ترکیبی آموزش دیده انجام شده برای ۸ اقلیم

اقلیم	پیش‌بینی شبکه RMSE (میلیمتر)	ضریب همبستگی پیش‌بینی شبکه
بیابان خشک و بسیار گرم	۰/۰۷۱۸	۰/۴۸۷۱
بیابان خشک و سرد	۰/۰۵۹۱	۰/۴۷۹۱
نیمه‌بیابانی خشک و بسیار گرم	۰/۰۹۱۰	۰/۵۳۲۴
نیمه‌بیابانی خشک و سرد	۰/۰۵۹۱	۰/۶۴۰۱
معتدل با تابستان‌های خشک و بسیار گرم	۰/۰۴۰۱	۰/۶۴۰۴
معتدل پر باران با تابستان‌های گرم	۰/۰۷۷۰	۰/۸۲۲۴
اقلیم برفی با تابستان‌های خشک و بسیار گرم	۰/۰۷۴۳	۰/۶۹۴۶
اقلیم برفی با تابستان‌های خشک و گرم	۰/۱۱۴۱	۰/۷۷۷۰



نگاره ۷: خروجی مدل ترکیبی در مقایسه با مقادیر واقعی و میزان همبستگی این دو برای پیش‌بینی صورت گرفته توسط مدل ترکیبی و همچنین مقدار RMSE نرمال برای هر اقلیم

منابع و مأخذ

- (1995). Prediction of the Summer Rainfall over South Africa. *Journal of Climate*, 8(6), 1511-1518.
- 13- Haykin, S. (1994). *Neural Networks: A Comprehensive Foundation*. MacMillan College Publishing Co: New York.
- 14- Hyndman, R. J., & Koehler, A. B. (2006). Another look at measures of forecast accuracy. *International Journal of Forecasting*, 22(4), 679-688.
- 15- Iiguni, Y., Sakai, H., & Tokumaru, H. (1992). A real-time learning algorithm for a multilayered neural network based on the extended Kalman filter. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 40(4), 959-966.
- 16- Kottek, M., Grieser, J., Beck, C., Rudolf, B., & Rubel, F. (2006). World map of the Köppen-Geiger climate classification updated. *Meteorologische Zeitschrift*, 15(3), 259-263.
- 17- Lapedes, A., & Farber, R. (1987). Nonlinear signal processing using neural networks: Prediction and system modelling.
- 18- Mekanik, F., Imteaz, M. A., Gato-Trinidad, S., & Elmahdi, A. (2013). Multiple regression and Artificial Neural Network for long-term rainfall forecasting using large scale climate modes. *Journal of Hydrology*, 503, 11-21.
- 19- Nasser, M., Asghari, K., & Abedini, M. J. (2008). Optimized scenario for rainfall forecasting using genetic algorithm coupled with artificial neural network. *Expert Systems with Applications*, 35(3), 1415-1421.
- 20- Navone, H., & Ceccatto, H. A. (1994). Predicting Indian monsoon rainfall: a neural network approach. *Climate Dynamics*, 10(6), 305-312.
- 21- Norgaard, P. M. (1997). *The Neural Network Based System Identification Toolbox*. Technical Report, Department of Automation, Technical University of Denmark.
- 22- Tokar, A. S., & Johnson, P. A. (1999). Rainfall-Runoff Modeling Using Artificial Neural Networks. *Journal of Hydrologic Engineering*, 4(3), 232-239.
- 23- Welch, G., & Bishop, G. (2006). *An Introduction to the Kalman Filter*. Department of Computer Science University of North Carolina at Chapel Hill. Department of Computer Science University of North Carolina at Chapel Hill.
- 24- Yang, H., Li, J., & Ding, F. (2007). A neural network learning algorithm of chemical process modeling based on the extended Kalman filter. *Neurocomputing*, 70(4-6), 625-632.
- ۱- تشنه‌لب، م.، و جعفری، پ. (۱۳۹۵). شبکه‌های عصبی و کنترل کننده‌های عصبی پیشرفته با رویکرد شبکه‌های راف. تهران: دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی.
- ۲- خلیلی، ن. (۱۳۸۵). پیش بینی بارش با استفاده از شبکه‌های عصبی. (پایان‌نامه کارشناسی ارشد)، دانشگاه فردوسی مشهد.
- ۳- رضیئی، ط. (۱۳۹۶). منطقه‌بندی اقلیمی ایران به روش کوپن-گایگر و بررسی جابه‌جایی مناطق اقلیمی کشور در سده بیستم. *فیزیک زمین و فضا*، ۴۳(۲)، ۴۱۹-۴۳۹.
- 4- Abhishek, K., Kumar, A., Ranjan, R., & Kumar, S. (2012, 16-17 July 2012). A rainfall prediction model using artificial neural network. Paper presented at the 2012 IEEE Control and System Graduate Research Colloquium.
- 5- Aksoy, H., & Dahamsheh, A. (2009). Artificial neural network models for forecasting monthly precipitation in Jordan. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, 23(7), 917-931.
- 6- Cavazos, T. (2000). Using self-organizing maps to investigate extreme climate events: An application to wintertime precipitation in the Balkans. *Journal of Climate*, 13(10), 1718-1732.
- 7- Chui, C. K., & Chen, G. (2009). *Kalman Filtering with Real-Time Applications* (4 ed.): Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- 8- Cross, S. S., Harrison, R. F., & Kennedy, R. L. (1995). Introduction to neural networks. *Lancet*, 346(8982), 1075-1079.
- 9- Dahamsheh, A., & Aksoy, H. (2009). Artificial neural network models for forecasting intermittent monthly precipitation in arid regions. *Meteorological Applications*, 16(3), 325-337.
- 10- de Jesús Rubio, J., & Yu, W. (2007). Nonlinear system identification with recurrent neural networks and dead-zone Kalman filter algorithm. *Neurocomputing*, 70(13-15), 2460-2466.
- 11- Deo, R. C., & Şahin, M. (2015). Application of the artificial neural network model for prediction of monthly standardized precipitation and evapotranspiration index using hydrometeorological parameters and climate indices in eastern Australia. *Atmospheric research*, 161, 65-81.
- 12- Hastenrath, S., Greischar, L., & van Heerden, J.