فصلنامه نظریه‌های کاربردی اقتصاد/ سال دوم/ شماره ۳/ پاییز ۱۳۹۴/ صفحات ۱۶۴-۱۴۵

قیمت‌گذاری قراردادهای آتی کالایی با استفاده از پویایی‌های قیمت نقد: کاربرد الگو برای بازار آتی طلا در ایران

حسین اسماعیلی رزی[*]

استادیار موسسه آموزش عالی هشت‌بهشت اصفهان، *h.esmaeili.r@gmail.com*

رحیم دلالی اصفهانی

استاد گروه اقتصاد دانشگاه اصفهان، *rateofinterest@yahoo.com*

سعید صمدی

دانشیار گروه اقتصاد دانشگاه اصفهان، *samadi_sa@yahoo.com*

افشین پرورده

دانشیار گروه آمار دانشگاه اصفهان، *a.parvardeh@gmail.com*

تاریخ دریافت: ۹۴/۶/۱۶ تاریخ پذیرش: ۹۴/۱۲/۰۹

چکیده

قراردادهای آتی از مهم‌ترین ابزارهای مشتقه مورد استفاده در بازارهای مالی هستند که از آن‌ها برای خرید و فروش یک دارایی در آینده استفاده می‌شود. با توجه به ماهیت وابسته به آینده این قراردادها، نحوه قیمت‌گذاری این ابزارها نقش مهمی در پوشش ریسک توسط آن‌ها دارد. بر این اساس، قیمت مورد توافق به هنگام عقد قرارداد باید بیان‌کننده قیمت انتظاری دارایی در تاریخ سررسید باشد. قیمت‌گذاری قرارداد آتی بر مبنای قیمت انتظاری، زمینه ارائه الگوهای نظری قیمت‌گذاری را فراهم می‌نماید. لذا در این پژوهش، مطالعه نظری قیمت‌گذاری قراردادهای آتی کالایی با استفاده از الگوی تک‌عاملی راس (۱۹۹۵) و شوارتز (۱۹۹۷) مورد-توجه قرار گرفت. علاوه بر این، الگوی مذکور با فرض وجود جهش تصادفی در قیمت نقد کالا توسعه داده شد. درنهایت و به‌منظور مطالعه تجربی الگوهای طرح‌شده، از داده‌های قیمت آتی سکه طلا در ایران استفاده‌شده و پارامترهای الگوهای قیمتی به‌وسیله رهیافت فیلتر کالمن برآورد شدند.

کلیدواژه: قرارداد آتی، قیمت نقد، فرایند جهش-انتشار، فیلتر کالمن.

طبقه‌بندی JEL: G12, G13, C22

---

[*] نویسنده مسئول مکاتبات

۱- مقدمه

توسعه ابزارهای مالی در چند دهه اخیر، یکی از مهم‌ترین دلایل توسعه بازارهای مالی در دنیا بوده است. «مشتقات[1]» بخشی از این ابزارها یا قراردادها هستند که نقش پررنگی در توسعه بازارهای مالی بر عهده‌دارند. این قراردادها به‌منظور کنترل ریسک در معاملات فلزات، انرژی، محصولات کشاورزی، سهام و ارز استفاده می‌شوند (مک‌دونالد[2]، ۲۰۰۶: ۲).
از میان قراردادهای مشتقه، قرارداد آتی یکی از مهم‌ترین آن‌ها در بازارهای مالی و کالایی است. قرارداد آتی، عقدی است که دارنده آن متعهد می‌شود دارایی یا کالای موضوع قرارداد را در تاریخ معینی در آینده خریداری کرده یا بفروشد (درخشان، ۱۳۸۳).
باوجود کاربردهای فراوان قراردادهای آتی در بازارهای مالی، چگونگی قیمت‌گذاری این ابزار یکی از مهم‌ترین چالش‌های معامله‌گران در بازارهای آتی است. قیمت‌گذاری ازاین‌جهت یک چالش برای معامله‌گران محسوب می‌شود که تحویل دارایی و مبلغ مورد معامله در قراردادهای آتی به زمانی در آینده موکول می‌شود؛ بنابراین قیمت موردتوافق برای تحویل دارایی یا کالا نیز باید با در نظر گرفتن ملاحظات و انتظارات قیمتی نسبت به آینده تعیین گردد. قیمت‌گذاری قراردادهای آتی بر مبنای قیمت‌های انتظاری زمینه مطالعه و ارائه الگوهای نظری قیمت‌گذاری قراردادهای آتی را فراهم می‌نماید.
باوجود ایجاد امکان عقد قراردادهای آتی در بازارهای آتی کالا و سهام در ایران، پژوهش-های نظری محدودی در مورد نحوه قیمت‌گذاری این ابزار در ایران صورت گرفته است و معامله‌گران آتی به‌صورت تجربی اقدام به تعیین قیمت آتی می‌نمایند؛ یعنی فعالین در این بازارها بدون شناخت دقیق از عوامل مؤثر بر رفتارهای آینده قیمت دارایی یا کالا، اقدام به تعیین قیمت انتظاری و عقد قرارداد آتی می‌نمایند. نتیجه چنین رویکردی، پیش‌بینی پر نوسان قیمت در قراردادهای آتی است که این بازارها را بی‌ثبات و کم رونق خواهد کرد. به همین دلیل، مطالعه حاضر توجه خود را معطوف به ارائه برخی الگوهای نظری قیمت‌گذاری آتی کالایی و آزمون تجربی آن‌ها خواهد نمود.
بر این اساس و در مطالعه حاضر، الگوی تک‌عاملی تعیین قیمت آتی راس[3] (۱۹۹۵) و شوارتز[4] (۱۹۹۷) ارائه خواهد شد. در این الگو از پویایی‌های قیمت نقد کالا به‌منظور یافتن

[1] Derivatives
[2] McDonald
[3] Ross
[1] Schwartz

قیمت آتی بر اساس قیمت نقد انتظاری در تاریخ سررسید قرارداد استفاده می‌شود. در کنار این الگو، دو مدل قیمت‌گذاری تک‌عاملی دیگر به‌عنوان توسعه‌ای از مدل راس و شوارتز ارائه خواهد شد. در این دو الگو فرض می‌شود که قیمت نقد کالا دارای جهش تصادفی با اندازه جهش تصادفی نمایی و یا یکنواخت است.

به‌منظور مطالعه تجربی الگوهای طرح‌شده، از داده‌های قیمت آتی بازار آتی سکه طلا در ایران استفاده می‌شود و جهت برآورد بردارهای وضعیت و پارامترهای مدل‌های نظری، روش تخمین فیلتر کالمن[۱] و تابع درستنمایی[۲] به کار گرفته می‌شود.

۲-پیشینه پژوهش

شوارتز (۱۹۹۷) در مقاله‌ای با عنوان «رفتار تصادفی قیمت‌های کالایی: کاربردهایی از قیمت‌گذاری و پوشش ریسک» سه مدل رفتار تصادفی قیمت کالایی را مطرح و کاربرد آن‌ها در ارزش‌گذاری قراردادهای آتی را مقایسه می‌کند. در مدل تک‌عاملی، قیمت آتی تابعی از قیمت نقد است که این مدل پیش‌ازاین توسط راس (۱۹۹۵) نیز ارائه‌شده است. الگوی دوعاملی با استفاده از قیمت نقد تصادفی و ثمرات رفاهی قیمت آتی را تعیین می‌کند. الگوی سه عاملی مانند مدل دوعاملی است که در آن نرخ بهره نیز در تعیین قیمت آتی تأثیرگذار است. در این مقاله، پارامترهای مدل با استفاده از فیلتر کالمن برای بازارهای آتی نفت، مس و طلا تخمین زده می‌شود.

یان[۳] (۲۰۰۲) در پژوهش «ارزش‌گذاری مشتقات کالایی در یک مدل چندعاملی جدید» مدل‌های قیمت‌گذاری موجود را از طریق اضافه کردن نوسانات تصادفی و جهش‌های لحظه‌ای به قیمت نقد کالا توسعه می‌دهد. یان راه‌حل صریح قیمتی برای قراردادهای سلف، آتی و اختیار معامله قرارداد آتی ارائه می‌کند. نتایج آزمون تجربی نشان می‌دهد که نوسانات تصادفی و جهش‌های ناگهانی بر روی قیمت آتی تأثیر نمی‌گذارند، اما نقش مهمی در قیمت‌گذاری قراردادهای اختیار معامله در آینده خواهند داشت. دمپستر و همکاران[۴] (۲۰۱۵) در پژوهش «جهش‌های بلندمدت و کوتاه‌مدت در قیمت‌های آتی کالایی» موضوع قیمت‌گذاری آتی را موردبررسی قرار داده‌اند. ایشان با افزودن جهش به الگوی شوارتز و اسمیت[۵] (۲۰۰۰) مدلی برای آتی‌های کالایی ارائه می‌نمایند و با در نظر گرفتن یک الگوی

---

[2] Kalman Filter
[۲] Likelihood Function
[4] Yan
[5] Dempster et al
[5] Smith

تجربی در قالب فضای وضعیت جایگزین[1] برای بازار آتی نفت و مس، نشان می‌دهند که مدل‌های همراه با جهش در قیمت‌گذاری آتی عملکرد بهتری از مدل‌های بدون جهش دارند. در پژوهش حاضر از الگوی تک‌عاملی راس و شوارتز به‌عنوان مدل پایه استفاده خواهد شد و رابطه قیمت آتی در این مدل با فرض وجود جهش تصادفی در قیمت نقد استخراج می‌شود. همچنین بامطالعه تجربی قیمت‌گذاری در بازار آتی سکه طلای ایران، عملکرد هر یک از مدل‌های بدون جهش و با جهش مورد مقایسه قرار می‌گیرد.

۳- مبانی نظری

الگوی تک‌عاملی راس و شوارتز مبنای بسیاری از مطالعات تعیین قیمت قراردادهای آتی کالایی محسوب می‌شود. در مدل پایه‌ای راس و شوارتز، فرض پیوستگی در تغییرات قیمت نقد به‌عنوان یک عامل تعیین‌کننده قیمت آتی در نظر گرفته‌شده است، درحالی‌که قیمت نقد یک کالا ممکن است در مقاطع زمانی نامشخص با جهش‌های ناگهانی مواجه باشد و در این صورت انتظار می‌رود این عدم پیوستگی بر قیمت‌های آتی نیز تأثیرگذار باشد. بنابراین، در این پژوهش، الگوی مطرح‌شده توسط راس و شوارتز با فرض تبعیت قیمت نقد از فرایند تصادفی جهش-انتشار[2]، توسعه داده می‌شود. هدف از ارائه هر دو مدل بدون جهش و با جهش، محاسبه قیمت انتظاری کالای پایه در تاریخ سررسید با استفاده از قیمت نقد کالا در تاریخ عقد قرارداد است.

جهت درک بهتر مدل‌های قیمت‌گذاری، نخست خلاصه‌ای از مدل پایه راس و شوارتز ارائه‌شده و در ادامه مدل‌های قیمت‌گذاری آتی با فرض وجود جهش ارائه خواهند شد.

۳-۱- الگوی تک‌عاملی تعیین قیمت آتی بدون جهش

در الگوی تک‌عاملی قیمت‌گذاری فرض می‌شود که قیمت نقد کالای پایه S_t از معادله دیفرانسیل تصادفی زیر پیروی می‌کند:

$$dS_t = \kappa(\beta - \ln S_t)S_t dt + \sigma S_t dB_t \qquad (1)$$

در این معادله تغییرات قیمت نقد به‌صورت تابعی از قیمت نقد S_t در زمان t بیان‌شده است که در آن نوسانات پیوسته قیمت نقد با استفاده از نمو[3] حرکت براونی dB_t بیان می‌شود. در این رابطه κ ، β و σ پارامتر یا ضریب هستند. این رابطه معمولاً با استفاده از

[1] Importance State Space
[2] Jump-Deffusion
[3] Incrementt

لم ایتو[1] به فرایند بازگشت به میانگین[2] یا ارنستین اولنبک[3] در رابطه (۲) تبدیل‌شده و مورد استفاده قرار می‌گیرد. یعنی اگر در رابطه (۱) قرار داده شود $X_t = \ln S_t$ ، با استفاده از لم ایتو می‌توان نوشت:

$$d\,lnS_t = dX_t = \kappa(\mu - X_t)dt + \sigma\, dB_t\ , \qquad \mu = \beta - \frac{\sigma^2}{2\kappa} \qquad (۲)$$

در این رابطه μ بیانگر پارامتر سطح تعادل یا مقدار میانگین لگاریتم قیمت نقد کالا است که به‌جای پارامتر $\beta - \frac{\sigma^2}{2\kappa}$ مورد استفاده قرار خواهد گرفت. $\kappa > 0$ بیانگر سرعت تعدیل به سمت تعادل لگاریتم قیمت نقد است. σ انحراف معیار یا نوسان فرایند و B_t فرایند براونی استاندارد[4] است. در یک شرایط تعادلی انتظار می‌رود که وقتی قیمت کالا بالا (پایین) است، عرضه آن افزایش (کاهش) یابد و درنتیجه قیمت کالا شروع به کاهش (افزایش) نماید. بنابراین به‌صورت مداوم یک جریان بازگشت به میانگین در قیمت دیده می‌شود. از پویایی‌های قیمت نقد در رابطه (۲) جهت یافتن قیمت آتی $F(T-t, S_t)$ برای یک قرارداد آتی با سررسید T و در زمان t استفاده می‌شود. رابطه قیمتی $F(T-t, S_t)$ بیانگر مقدار انتظاری قیمت نقد S_T در تاریخ سررسید T است.

شوارتز با توجه به پویایی قیمت نقد کالا در روابط بالا و با استفاده از اندازه مارتینگل هم‌ارز[5] Q جواب صریح قیمت آتی تک‌عاملی را به کمک $F(T-t, S_t) = \mathbb{E}^Q[S_T|\mathcal{F}_t]$ و با توجه به گردایه اطلاعات $\mathcal{F}_t$ تا زمان t به دست می‌آورد.

$$F(T-t, S_t) = exp\left(e^{-\kappa(T-t)}\ln S_t + \mu^*\left(1 - e^{-\kappa(T-t)}\right) + \frac{\sigma^2}{4\kappa}\left(1 - e^{2\kappa(T-t)}\right)\right) \qquad (۳)$$

در این رابطه $\mu^* = \mu - \lambda$ و λ ارزش بازاری ریسک هر واحد از تغییر لگاریتم قیمت نقد X_t است که فرض می‌شود مقدار ثابتی است. به‌منظور استفاده از رابطه بالا در مطالعه تجربی می‌توان آن را با قرار دادن:

$$G(T-t) = e^{-\kappa(T-t)}\ ,\ \ E(T-t) = \mu^*\left(1 - e^{-\kappa(T-t)}\right) + \frac{\sigma^2}{4\kappa}\left(1 - e^{2\kappa(T-t)}\right)$$

در رابطه (۳)، به شکل لگاریتمی زیر نوشت:

$$\ln F(T-t, S_t) = G(T-t)\ln S_t + E(T-t) \qquad (۴)$$

---

[1] Ito Lemma
[2] Mean-Reversion Process
[3] Ornstein-Uhlenbeck Process
[4] Standard Brownian Process
[5] Equivalent Martingale Measure

رابطه قیمتی ارائه‌شده با فرض ریسک خنثایی و در شرایط عدم وجود آربیتراژ استخراج‌شده است (بجرکسوند[1]،۱۹۹۱، میکوش[2]،۲۰۰۰ و بجورک[3]،۲۰۰۳).

۳-۲- الگوی تک‌عاملی تعیین قیمت آتی همراه با جهش نمایی

با کنار گذاشتن فرض پیوستگی قیمت نقد در مدل تک‌عاملی راس و شوارتز، روابط قیمت آتی در این قسمت و قسمت بعدی مجدداً استخراج می‌شود. برای این منظور از فرایندهای جهش-انتشار استفاده می‌شود. واژه انتشار در این فرایندها اشاره به حرکت پیوسته قیمت در طی زمان دارد که از طریق فرایند براونی استاندارد قابل توضیح است. فرایند جهش-انتشار درواقع مجموعه‌ای از یک جمله رانش، یک حرکت براونی و یک فرایند پواسون مرکب[۴] است (تانکوف[۵]، ۲۰۰۴: ۲۶۵).

برای استخراج مقدار انتظاری قیمت نقد در تاریخ سررسید فرض می‌شود که قیمت نقد کالا دارای جهش افزایشی و کاهشی ناگهانی است که به رابطه (۱) اضافه می‌شوند؛ بنابراین قیمت نقد از فرایند جهش-انتشار بازگشت به میانگین پیروی می‌کند:

$$dS_t = \kappa(\beta - \ln S_t)S_t dt + \sigma S_t dB_t + S_t(e^{J_u} - 1)dN_{u,t} + S_t(e^{-J_d} - 1)dN_{d,t} \tag{۵}$$

در رابطه (۵)، جمله $S_t(e^{J_u} - 1)dN_{u,t}$ بیانگر فرایند جهش خالص رو به بالا یا افزایشی است که در آن تعداد جهش از فرایند پواسون $N_{u,t}$ با نرخ η_u پیروی می‌کند. همچنین دامنه یا اندازه جهش تصادفی افزایشی قیمت نقد با J_u نشان داده می‌شود که از توزیع احتمال نمایی با پارامتر نرخ γ_u تبعیت می‌نماید. $S_t(e^{-J_d} - 1)dN_{d,t}$ فرایند جهش خالص رو به پایین یا کاهشی است با فرایند پواسون $N_{d,t}$ و نرخ η_d برای تعداد جهش رو به پایین. همچنین، قدر مطلق اندازه جهش تصادفی کاهشی قیمت نقد با J_d نشان داده می‌شود که از توزیع احتمال نمایی با پارامتر نرخ γ_d پیروی می‌نماید. در این مدل dB_t و $dN_{u,t}$ و $dN_{d,t}$ و J_u و J_d مستقل از یکدیگر هستند.

با فرض این‌که $X_t = \ln S_t$ ، با استفاده از لم ایتو جهش-انتشار برای (۵) می‌توان نوشت:

$$dX_t = \kappa(\mu - X_t)dt + \sigma\, dB_t + J_u dN_{u,t} - J_d dN_{d,t}\ , \qquad \mu = \beta - \frac{\sigma^2}{2\kappa}$$

[1] Bjerksund
[2] Mikosck
[3] Bjork
[۴] Compound Poisson Process
[۵] Tankov

به‌منظور استخراج رابطه قیمت آتی، نیاز به استفاده از اندازه مارتینگل هم‌ارز است. برای تبدیل اندازه احتمال هدف P به اندازه احتمال هم‌ارز Q از تبدیل گیرسانوف $dB_t = Mdt + dB_t^*$ استفاده می‌شود:

$$dX_t = \kappa(\mu^* - X_t)dt + \sigma\, dB_t^* + J_u dN_{u,t} - J_d dN_{d,t}\ ,\quad \mu^* = \mu + \frac{\sigma M}{\kappa} = \mu - \lambda \tag{۶}$$

با استفاده از رابطه قبل که پویایی‌های قیمت نقد کالا در فضای احتمال هم‌ارز را نشان می‌دهند، قیمت آتی $F(T-t,S_t)$ که بیانگر قیمت انتظاری نقد در تاریخ سررسید است با استفاده از رهیافت دافی[1]-پن[2]-سینگلتون[3] (۲۰۰۰) به دست می‌آید. بر این اساس و ازآنجاکه فرایند جهش-انتشار (۶) یک تابع آفین[4] است، لذا تابع مشخصه[5] بردار تصادفی X_t در زمان سررسید T و با مقدار اولیه X_t به شکل زیر قابل‌ارائه است:

$$\mathbb{E}^Q[e^{uX_T}|\mathcal{F}_t] = \exp(\phi(T-t,u) + X_t\psi(T-t,u)) \tag{۷}$$

در این رابطه تابع مشخصه به‌صورت امید شرطی e^{uX_T} با توجه به جریان اطلاعات $\mathcal{F}_t$ و در فضای احتمال هم‌ارز Q بیان‌شده است که در $iz = u \in i\mathbb{R}$. سمت چپ این تابع درصورتی‌که $u = 1$ باشد بیانگر مقدار انتظاری قیمت نقد $S_T = e^{X_T}$ در زمان سررسید T با توجه به جریان اطلاعات تا زمان t خواهد بود که با استفاده از آن می‌توان قیمت آتی $F(T-t,S_t) = \mathbb{E}^Q[S_T|\mathcal{F}_t]$ را با فرض وجود جهش در قیمت نقد به دست آورد. برای این منظور ضروری است که توابع $\phi(T-t,u)$ و $\psi(T-t,u)$ در رابطه (۷) از طریق حل معادلات ریکاتی[6] زیر استخراج شوند:

$$\dot{\phi}(T-t,u) = \kappa\mu^*\psi + \frac{1}{2}\sigma^2\psi^2 + \eta_u\, k_u(\psi) + \eta_d\, k_d(-\psi)\ ,\ \phi(0,u) = 0 \tag{۸}$$

$$\dot{\psi}(T-t,u) = -\kappa\psi \Rightarrow \psi(T-t,u) = ue^{-\kappa(T-t)}\ ,\quad \psi(0,u) = u \tag{۹}$$

در رابطه (۱۰)، $k_u(\psi_X)$ بیانگر $\mathbb{E}[e^{\psi_X J_u} - 1]$ با توجه به توزیع احتمال مربوط به‌اندازه جهش افزایشی و $k_d(-\psi_X)$ بیانگر $\mathbb{E}[e^{-\psi_X J_d} - 1]$ با توجه به توزیع احتمال مربوط

---

[1] Duffie
[2] Pan
[3] Singleton
[4] Affine
[5] Characteristic Function
[6] Riccati

به‌اندازه جهش کاهشی است. با فرض اندازه جهش‌های مثبت و منفی نمایی با پارامتر نرخ γ_u و γ_d، برای $k_u(\psi_X)$ و $k_d(-\psi_X)$ می توان نوشت:

$$k_u(\psi_X) = \int_0^{\infty}\left(e^{\psi_X J_u} - 1\right)\gamma_u e^{-\gamma_u J_u} dJ_u = \frac{\psi_X}{\gamma_u - \psi_X} \quad (۱۰ \text{ الف})$$

$$k_d(-\psi_X) = \int_0^{\infty}\left(e^{-\psi_X J_d} - 1\right)\gamma_d e^{-\gamma_d J_d} dJ_d = \frac{-\psi_X}{\gamma_d + \psi_X} \quad (۱۰ \text{ ب})$$

با استفاده از رابطه (۹) و (۱۰) جواب معادله دیفرانسیل (۸) برابر است با:

$$\phi(T-t,u) = \mu^*\left(1 - e^{-\kappa(T-t)}\right) + \frac{\sigma^2 u^2}{4k}\left(1 - e^{-2\kappa(T-t)}\right) + \frac{\eta_u}{\kappa}\ln\frac{\gamma_u - u e^{-\kappa(T-t)}}{\gamma_u - u} + \frac{\eta_d}{\kappa}\ln\frac{\gamma_d + u e^{-\kappa(T-t)}}{\gamma_d + u} \quad (۱۱)$$

و درنهایت با توجه به $\psi(T-t,u)$ و $\phi(T-t,u)$ در حالت وجود جهش افزایشی و کاهشی، قیمت آتی تک‌عاملی $F(T-t,S_t)$ با قرار دادن $z=-i$ برابر خواهد بود با:

$$F(T-t,S_t) = \mathbb{E}^Q[S_T|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}^Q[e^{X_T}|\mathcal{F}_t] = \exp\left(\phi(T-t,1) + X_t\psi(T-t,1)\right) = \exp\left[e^{-\kappa(T-t)}\ln S_t + \mu^*\left(1 - e^{-\kappa(T-t)}\right) + \frac{\sigma^2}{4k}\left(1 - e^{-2\kappa(T-t)}\right) + \frac{\eta_u}{\kappa}\ln\frac{\gamma_u - e^{-\kappa(T-t)}}{\gamma_u - 1} + \frac{\eta_d}{\kappa}\ln\frac{\gamma_d + e^{-\kappa(T-t)}}{\gamma_d + 1}\right] \quad (۱۲)$$

این رابطه قیمت انتظاری دارایی پایه در تاریخ سررسید را با در نظر گرفتن یک عامل قیمت نقد و وجود جهش در قیمت نقد ارائه می‌دهد که می‌تواند به‌عنوان یک ابزار برای پیش‌بینی قیمت در تاریخ سررسید و قیمت‌گذاری قراردادهای آتی توسط معامله‌گران بازارهای آتی به کار گرفته شود.

۳-۳- الگوی تک‌عاملی تعیین قیمت آتی همراه با جهش یکنواخت

نهادهای ناظر بر مبادلات دارایی‌ها مانند شرکت بورس کالا به‌منظور جلوگیری از نوسان بیش‌ازاندازه قیمت دارایی یا کالا در مبادلات روزانه، اقدام به وضع محدودیت بر تغییرات یا جهش قیمت می‌کنند. بر این اساس، الگوی تک‌عاملی تعیین قیمت آتی با در نظر گرفتن محدودیت جهش در قیمت نقد موردبررسی مجدد قرار خواهد گرفت. به این منظور فرض می‌شود که قیمت نقد کالا از فرایند جهش-انتشار مرتون[1] (۱۹۷۶) با اندازه جهش دارای توزیع یکنواخت تبعیت می‌کند. مزیت استفاده از توزیع یکنواخت جهت توضیح اندازه جهش، امکان اختیار مقادیر منفی و مثبت توسط این توزیع احتمال به‌منظور مطالعه هم‌زمان جهش‌های افزایشی و کاهشی برخلاف توزیع نمایی است.

---

[1] Merton

$$dS_t = \beta S_t dt + \sigma S_t dB_t + S_t(e^J - 1)dN_t \qquad (۱۳)$$

در رابطه (۱۳) رفتار تصادفی قیمت نقد برحسب حرکت براونی هندسی[1] نشان داده می‌شود. پارامتر β در این رابطه مقدار ثابتی بوده و بیانگر بازده مورد انتظار قیمت نقد کالا در هر واحد از زمان[2] است که نرخ بازده میانگین[3] یا رانش[4] نامیده می‌شود. بر این اساس، $\mu S_t dt$ بیانگر تغییر مورد انتظار در قیمت نقد دارایی در زمان بسیار کوتاه dt است. همچنین σ در این رابطه نشانگر انحراف معیار نرخ بازده کالا در هر واحد از زمان[5] است. $\sigma S_t dB_t$ بیانگر تغییر یمت نقد کالا نسبت به مقدار مورد انتظار است. B_t نیز حرکت براونی استاندارد در رفتار تصادفی قیمت نقد کالا است. جمله $S_t(e^J - 1)dN_t$ بیانگر فرایند جهش خالص است که در آن تعداد جهش از فرایند پواسون N_t با نرخ η پیروی می‌کند. همچنین دامنه یا اندازه جهش تصادفی قیمت نقد با J نشان داده می‌شود که از توزیع احتمال یکنواخت با کران بالای U و کران پایین D تبعیت می‌نماید. همچنین در این مدل dB_t و dN_t و J مستقل از یکدیگر هستند.

با فرض این‌که $X_t = \ln S_t$، ب استفاده از لم ایتو جهش-انتشار می‌توان نوشت:

$$dX_t = \mu dt + \sigma\, dB_t + J dN_t\ , \qquad \mu = \beta - \frac{\sigma^2}{2} \qquad (۱۴)$$

با در نظر گرفتن معادله جهش-انتشار (۱۴) برای توضیح رفتار لگاریتم قیمت نقد کالا و به‌کارگیری راه‌حل مشابه با الگوی پیشین، قیمت آتی $F(T-t, S_t) = \mathbb{E}^{Q}[S_T|\mathcal{F}_t]$ به‌عنوان مقدار انتظاری قیمت نقد در تاریخ سررسید به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$F(T-t, S_t) = \mathbb{E}^{Q}[S_T|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}^{Q}[e^{X_T}|\mathcal{F}_t]$$
$$= S_t \exp\left[\left(\mu^* + \frac{1}{2}\sigma^2 + \eta\left(\frac{e^U - e^D}{(U-D)} - 1\right)\right)(T-t)\right] \qquad (۱۵)$$

بر اساس این رابطه، قیمت انتظاری دارایی پایه در تاریخ سررسید تعیین می‌شود.

با در نظر گرفتن مباحث فوق، درمجموع سه الگوی نظری قیمت‌گذاری قرارداد آتی یک عاملی بدون جهش، یک عاملی با اندازه جهش نمایی و یک عاملی با اندازه جهش یکنواخت ارائه شد. در ادامه این مدل‌های قیمت‌گذاری با استفاده از داده‌های قیمت آتی سکه طلای ایران مورد مقایسه تجربی قرار خواهند گرفت.

۴-روش تحقیق و مطالعه تجربی الگوهای قیمت‌گذاری آتی

[1] Geometric Brownian Motion
[2] Expected Return per Unit of Time
[3] Mean Rate of Return
[4] Drift Term
[5] Standard deviation of the Return per Unit of Time

۴-۱- فضای وضعیت[۱] و فیلتر کالمن[۲]

به‌منظور مطالعه تجربی این الگوها، از روش فیلتر کالمن در بازار آتی سکه طلای ایران استفاده خواهد شد. فیلتر کالمن در برخی مدل‌های سری زمانی با عنوان مدل‌های فضای وضعیت مورد استفاده قرار می‌گیرند (هاروی[۳]،۱۹۹۱). فیلتر کالمن یک روش بازگشتی برآورد پارامترهای مدل فضای وضعیت با استفاده از تابع درستنمایی[۴] است که اقدام به‌پیش بینی متغیرهای غیرقابل مشاهده نیز می‌کند (لی[۵]، ۲۰۱۰).

یک مدل فضای وضعیت متشکل از دو گروه معادله با عنوان معادله اندازه‌گیری[۶] و معادله انتقال[۷] است. معادله اندازه‌گیری به‌منظور توضیح ارتباط بین متغیرهای قابل‌مشاهده و غیرقابل مشاهده به کار می‌رود و معادله انتقال جهت توصیف پویایی‌های متغیرهای غیرقابل مشاهده استفاده می‌شود. ازآنجاکه الگوریتم فیلتر کالمن به‌منظور تخمین مدل-های فضای وضعیت خطی با جملات اخلال نرمال استفاده می‌شود، لذا این روش برای تخمین پارامترها در مدل بدون جهش که جملات اخلال در آن دارای توزیع نرمال است، به کار گرفته می‌شود؛ اما در مدل‌هایی که قیمت نقد در آن‌ها دارای جهش ناگهانی است، فرض نرمال بودن رفتار قیمت نقد به‌سادگی قابل تائید نیست. بنابراین استفاده از فیلتر کالمن در این مجموعه از مدل‌ها نتایج صحیحی به همراه نخواهد داشت. در پژوهش حاضر و به‌منظور برآورد پارامترهای این گروه از مدل‌ها از روش فضای وضعیت جایگزین[۸] (ISSF) استفاده خواهد شد. این روش توسط دمپستر و همکاران به‌منظور برآورد ضرایب الگوهای همراه با جهش به‌کاربرده شده است.

۴-۲- برآورد پارامترها و فیلتر بردار وضعیت الگوهای تک‌عاملی (۹۲-۹۱)

به‌منظور تخمین پارامترهای الگوی قیمت‌گذاری با داده‌های آتی طلا، دو مجموعه داده آماری استفاده خواهد شد. تفکیک قیمت آتی طلا به دو گروه، به دو علت انجام می‌شود. نخست این‌که قراردادهای آتی سکه طلای قابل عقد در بورس کالای ایران، از سال ۹۳ به

---

۱ State Space Models
۲ Kalman Filter
۳ Harvey
۴ Likelihood Function
۵ Kai Ming Lee
۶ Measurement Equation
۷ Transition Equation
۸ Importance State Space Form

بعد در مقایسه با سال‌های قبل دارای سررسیدهای طولانی‌تری هستند؛ بنابراین امکان استخراج داده‌های متناسب با گروه اول در سال ۹۳ و بعدازآن جهت ایجاد یکپارچگی در داده‌های دو گروه وجود ندارد. دوم این‌که می‌توان الگوهای نظری قیمت‌گذاری آتی را با در نظر گرفتن تفاوت سررسید قراردادهای آتی در دو گروه داده‌ای در کوتاه‌مدت و میان‌مدت مورد آزمون قرار داد. گروه اول از ۴۷۹ داده روزانه قیمت آتی سکه طلا در فاصله زمانی پنجم فروردین ۱۳۹۱ تا بیست و چهارم اسفندماه ۱۳۹۲ تشکیل‌شده است. در گروه دوم نیز ۳۸۲ داده روزانه قیمت آتی سکه طلا در فاصله زمانی پنجم فروردین ۹۳ تا بیست و پنجم تیر ۱۳۹۴ به کار گرفته‌شده است.

جهت برآورد پارامترهای الگوهای تک‌عاملی تعیین قیمت توسط فیلتر کالمن، ضروری است که این مدل‌ها در قالب فضای وضعیت تصریح شوند. بر این اساس معادله اندازه‌گیری با استفاده از رابطه قیمتی تک‌عاملی استخراج‌شده در رابطه (۴) در زمان $t = 0$ و قرار دادن $X_t = \ln S_t$ قابل‌استخراج است.

$$y_t = Z_t X_t + D_t + \varepsilon_t \qquad t = 1, \dots, NT \tag{۱۶}$$

$$y_t = [\ln F(T_i, X_t)] \qquad i = 1, \dots, N \tag{۱۷}$$

$$D_t = [E(T_i)] = \left[(\mu - \lambda)(1 - e^{-\kappa T_i}) + \frac{\sigma^2}{4\kappa}(1 - e^{2\kappa T_i})\right] \tag{۱۸}$$

$$Z_t = [G(T_i)] = [e^{-\kappa T_i}] \tag{۱۹}$$

در این معادله ε_t یک بردار $\mathrm{N} \times 1$ از خطاهای نا همبسته پیاپی[۱] با توزیع نرمال با میانگین صفر و ماتریس $\mathrm{N} \times \mathrm{N}$ واریانس-کوواریانس H_t است. N نیز بیانگر تعداد قراردادهای آتی با توجه به میزان فاصله تا سررسید قرارداد است. برای نمونه در گروه اول از داده‌های قیمت آتی طلا، مشاهدات چهار قرارداد آتی با سررسید یک‌ماهه، دوماهه، سه‌ماهه و چهارماهه استفاده‌شده است؛ یعنی در این گروه $\mathrm{N} = 4$ است.

$$\mathbb{E}[\varepsilon_t] = 0 \qquad Var[\varepsilon_t] = H_t \qquad \varepsilon_t \sim N(0, H_t) \tag{۲۰}$$

در الگوی تک‌عاملی تعیین قیمت، پویایی‌های قیمت نقد در رابطه (۲) جهت تصریح معادله انتقال، مورد استفاده قرار می‌گیرد. بر این اساس معادله انتقال عبارت است از:

$$X_t = L_t X_{t-1} + V_t + \tau_t \qquad t = 1, \dots, NT \tag{۲۱}$$

$$L_t = (1 - \kappa \Delta t) \qquad V_t = \kappa \mu \Delta t \qquad \tau_t = \sigma\, \Delta B_t \tag{۲۲}$$

τ_t خطای نا همبسته پیاپی با توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس Q_t است.

---

[۱] Serially Uncorrelated Disturbances

$$\mathbb{E}[\tau_t] = 0 \qquad Var[\tau_t] = Q_t = \sigma^2 \Delta t \qquad \tau_t \sim N(0, \sigma^2 \Delta t) \tag{۲۳}$$

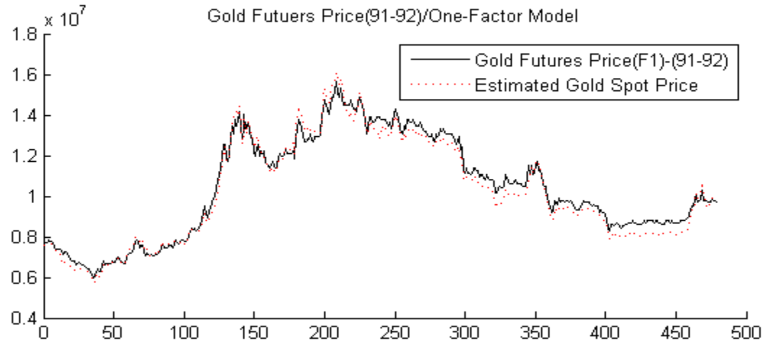
جدول (۱)-برآورد پارامترهای الگوی تعیین قیمت آتی تک‌عاملی طلا (۹۱-۹۲)

الگوی تک‌عاملی-با جهش (اندازه جهش تصادفی نمایی)				الگوی تک‌عاملی-بدون جهش			
آماره آزمون t	انحراف معیار	برآورد پارامتر	نام پارامتر	آماره آزمون t	انحراف معیار	برآورد پارامتر	نام پارامتر
۶/۰۸۹	۴/۹۸	۳۰/۳۳	μ	۱۲/۱۸	۲/۶۹	۳۲/۸۷	μ
۲/۱۳۲	۰/۲۰	۰/۴۴۴	σ	۲۷/۰۷	۰/۰۱۶	۰/۴۴	σ
۴/۱۸۸	۰/۰۰۳	۰/۰۱۳	κ	۶/۸۰	۰/۰۰۲	۰/۰۱	κ
-۵/۸۴۲	۰/۶۰	-۳/۵۳۸	λ	-۲/۱۴	۰/۳۵	-۰/۷۶	λ
۰/۰۰۰	۰/۰۰۲	۰/۰۰۰	η_u	_	۰/۰۴۳	-۰/۰۱۲	میانگین خطا
۲۳/۵۸	۰/۰۰۲	۰/۰۴۰	γ_u				
۰/۰۰۰	۰/۱۹۵	۰/۰۰۰	η_d				
۱۴/۴۵	۰/۱۸۹	۲/۷۳۳	γ_d				
_	۰/۰۲۹	-۰/۰۰۹	میانگین خطا				

ادامه جدول (۱)-برآورد پارامترهای الگوی تعیین قیمت آتی تک‌عاملی طلا (۹۱-۹۲)

الگوی تک‌عاملی-با جهش (اندازه جهش تصادفی یکنواخت)			
آماره آزمون t	انحراف معیار	برآورد پارامتر	نام پارامتر
۰/۷۳۳	۰/۲۶۶	۰/۱۹۵	μ
۳۹/۴۱	۰/۰۱۱	۰/۴۳۴	σ
-۰/۱۲۶	۰/۲۶۸	-۰/۰۳۴	m
۱۴/۱۴	۰/۰۰۸	۰/۱۰۹	η
۷۶/۷۹	۰/۰۰۷	۰/۵۲۲	U
-۵۶/۲۶	۰/۰۰۶	-۰/۳۴۹	D
_	۰/۰۳۲	-۰/۰۰۶	میانگین خطا

منبع: یافته‌های تحقیق



نمودار (۱)-نمودار متغیر وضعیت (قیمت نقد سکه طلا) فیلتر شده (S_t) و قیمت آتی سکه طلا یک‌ماهه (F1) در مدل تعیین قیمت آتی تک‌عاملی بدون جهش

با توجه به تصریح معادله اندازه‌گیری و معادله انتقال برای الگوی تک‌عاملی تعیین قیمت آتی، حال می‌توان از داده‌های قیمت آتی طلای ایران در دوره زمانی فروردین ۱۳۹۱ تا اسفند ۱۳۹۲ به‌منظور تخمین پارامترهای مدل‌های تک‌عاملی بدون جهش و دارای جهش استفاده کرد.

در جدول (۱) نتایج حاصل از برآورد پارامترهای سه الگوی تک‌عاملی تعیین قیمت آتی سکه طلا ارائه‌شده است. بر این اساس تخمین هر چهار پارامتر این الگو یعنی سطح تعادل (μ)، سرعت تعدیل (κ)، انحراف معیار لگاریتم قیمت نقد سکه طلا (σ) و ارزش بازاری ریسک هر واحد از متغیر وضعیت قیمت نقد سکه طلا (λ) با توجه به آماره آزمون t در سطح اهمیت پنج درصد معنادار هستند. در این جدول، پارامتر سطح تعادل بیشتر از مقدار اولیه و مورد انتظار برآورد شده است، اما از سوی دیگر سرعت تعدیل به سمت تعادل (κ) بسیار پایین تخمین زده‌شده است.

در نمودار (۱) روند زمانی قیمت آتی سکه طلا با نزدیک‌ترین سررسید (F1) و متغیر وضعیت قیمت نقد سکه طلا (S_t) رسم شده است. نمودار رسم شده حاکی از برآورد نزدیک متغیر وضعیت به قیمت آتی با استفاده از فیلتر کالمن است. مقدار برآوردی پایین خطا و انحراف معیار صفر یا نزدیک به صفر این پارامترها به‌صورت معمول در تحلیل‌های فضای وضعیت و فیلتر کالمن رخ می‌دهد.

نتایج حاصل از برآورد الگوی تک‌عاملی تعیین قیمت آتی طلا همراه با جهش، با فرض پیروی قیمت نقد از فرایند جهش-انتشار با اندازه جهش تصادفی نمایی در جدول (۱)

گزارش‌شده است. برآوردهای درج‌شده در این جدول با استفاده از فضای وضعیت جایگزین و فیلتر کالمن به‌دست‌آمده است. بر این اساس، تخمین چهار پارامتر بخش انتشار الگو با توجه به آماره آزمون t در سطح اهمیت پنج درصد معنادار هستند.

در بخش جهش الگو نیز چهار پارامتر برآورد شده‌اند. تخمین‌های صورت گرفته در این مورد نشان از معناداری برآورد دو پارامتر نرخ اندازه جهش γ_u و γ_d در سطح اهمیت ۵ درصد دارد. درحالی‌که برآورد دو پارامتر نرخ تعداد جهش η_u و η_d تفاوت معناداری با صفر نشان نمی‌دهد. با توجه به برآورد مقدار صفر برای هر دو پارامتر تعداد جهش، می‌توان درمجموع نتیجه گرفت که اضافه نمودن جهش قیمت نقد به الگو، تأثیر معناداری بر مدل تعیین قیمت آتی تک‌عاملی طلا(۹۱-۹۲) نداشته است.

نتایج حاصل از برآورد الگوی تک‌عاملی تعیین قیمت آتی طلا همراه با جهش، با فرض پیروی قیمت نقد از فرایند جهش-انتشار با اندازه جهش تصادفی یکنواخت نیز در جدول (۱) گزارش‌شده است. با توجه به مدل تصریح‌شده و استفاده از الگوریتم فیلتر کالمن در مدل فضای وضعیت جایگزین، مقدار پارامتر میانگین نرخ بازده طلا در این تخمین تفاوت معناداری با صفر ندارد. انحراف معیار بازده طلا در این مدل برابر با ۰/۴۳ برآورد شده است که در سطح اهمیت ۵ درصد معنادار است. با توجه به این دو پارامتر نوسانات لگاریتم قیمت نقد dX_t در حدود ۰/۴۳ در جزء انتشار برآورد می‌شود که تفاوتی با مقدار برآوردی آن در الگوی بدون جهش بازگشت به میانگین ندارد. هر سه پارامتر جزء جهش یعنی نرخ تعداد جهش، کران بالای اندازه جهش و کران پایین اندازه جهش دارای برآوردهای معنادار در این الگو هستند. بر اساس نتایج حاصل، پارامتر تعداد جهش ۰/۱۱ برآورد شده است که نشان‌دهنده وجود جهش در حدود ۰/۱۱ درصد از تغییرات قیمت نقد در یک دوره زمانی مشخص است. کران بالای اندازه جهش دارای مقدار تخمینی ۰/۵۲ است که بیانگر تغییر ۳/۲ درصدی نسبت به میانگین لگاریتم قیمت نزدیک‌ترین سررسید قرارداد آتی (۱۶/۱۳) در دوره زمانی یک‌روزه در صورت وجود جهش رو به بالا است. همچنین کران پایین اندازه جهش ۰/۳۴- برآورد شده است که تغییر ۲/۱ درصدی نسبت به میانگین لگاریتم قیمت نزدیک‌ترین سررسید قرارداد آتی نشان می‌دهد. درمجموع می‌توان گفت که این الگو در تخمین پارامترهای تعیین قیمت آتی طلا و بردار وضعیت قیمت نقد عملکرد مطلوبی دارد.

۴-۳- برآورد پارامترها و فیلتر بردار وضعیت الگوهای تک‌عاملی (۹۴-۹۳)

به‌منظور برآورد پارامترهای تعیین قیمت آتی طلا، در این بخش از داده‌های قیمتی گروه دوم استفاده می‌شود که از ۳۸۲ داده روزانه قیمت آتی سکه طلا در فاصله زمانی پنجم فروردین ۹۳ تا بیست و پنجم تیر ۱۳۹۴ تشکیل‌شده است. در این گروه از داده‌های قیمت آتی طلا، مشاهدات چهار قرارداد آتی با سررسید دوماهه، چهارماهه، شش‌ماهه و هشت‌ماهه استفاده شده است.

جدول (۲)-برآورد پارامترهای الگوی تعیین قیمت آتی تک‌عاملی طلا (۹۴-۹۳)

الگوی تک‌عاملی-با جهش (اندازه جهش تصادفی نمایی)				الگوی تک‌عاملی-بدون جهش			
آماره آزمون t	انحراف معیار	برآورد پارامتر	نام پارامتر	آماره آزمون t	انحراف معیار	برآورد پارامتر	نام پارامتر
۲/۸۱۲	۴/۴۳۱	۱۲/۴۵	μ	۱۰/۶۱۹	۱/۷۹۱	۱۹/۰۲	μ
۱۰/۴۴۲	۰/۰۲۱	۰/۲۱۵	σ	۸۹/۶۰۰	۰/۰۰۳	۰/۲۲۴	σ
۹/۳۷۰	۰/۰۰۳	۰/۰۲۵	κ	۱۱/۴۳۳	۰/۰۰۳	۰/۰۳۴	κ
-۱/۹۲۸	۵/۱۷۸	-۹/۹۸	λ	-۰/۹۵۷	۱/۷۵۴	-۱/۶۷۸	λ
۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	η_u	_	۰/۰۲۴	۰/۰۰۷	میانگین خطا
۵/۵۰۰	۰/۰۴۲	۰/۲۳۱	γ_u				
۱/۱۶۷	۰/۰۰۱	۰/۰۰۱	η_d				
۱/۷۶۶	۰/۳۱۷	۰/۵۶۰	γ_d				
_	۰/۰۲۸	۰/۰۰۹	میانگین خطا				

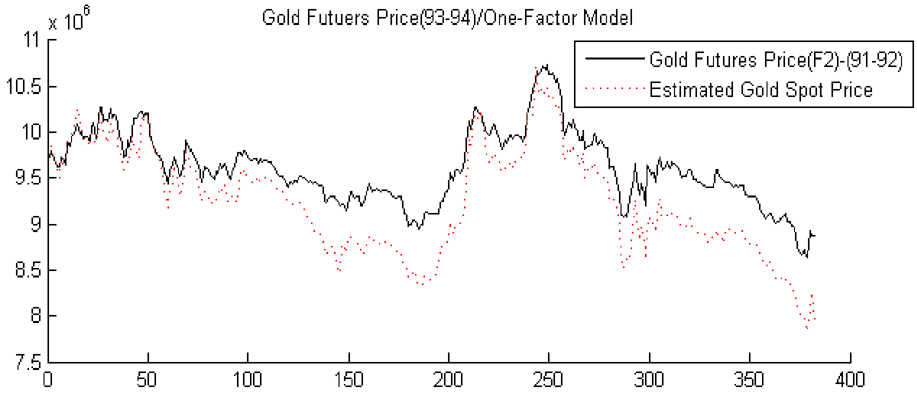
ادامه جدول (۲)-برآورد پارامترهای الگوی تعیین قیمت آتی تک‌عاملی طلا (۹۴-۹۳)

الگوی تک‌عاملی-با جهش (اندازه جهش تصادفی یکنواخت)			
نام پارامتر	برآورد پارامتر	انحراف معیار	آماره آزمون t
μ	-۰/۱۹۴	۰/۲۳۰	-۰/۸۴
σ	۰/۱۰۰	۰/۱۳۳	۰/۷۵۵
m	-۰/۲۸۴	۱/۲۹۳	-۰/۲۲
η	۰/۴۶۵	۰/۱۵۰	۳/۱۰۷
U	۰/۵۶۳	۰/۸۵۲	۰/۶۶۱
D	-۰/۲۷۸	۰/۱۳۶	-۲/۰۴
میانگین خطا	۰/۰۰۶	۰/۰۱۷	_

منبع: یافته‌های تحقیق

بر این اساس، تخمین سه پارامتر سطح تعادل (μ)، سرعت تعدیل (κ) و انحراف معیار لگاریتم قیمت نقد سکه طلا (σ) با توجه به آماره آزمون t در جدول (۲) در سطح اهمیت پنج درصد معنادار هستند؛ اما پارامتر ارزش بازاری ریسک هر واحد از متغیر وضعیت قیمت نقد سکه طلا (λ) تفاوت معناداری با صفر نشان نمی‌دهد. مقدار برآوردی پارامتر سطح تعادل در این مدل، در مقایسه با مدل بدون جهش ۹۲-۹۱ به مقدار مورد انتظار نزدیک‌تر است. سرعت تعدیل به سمت تعادل (κ) در این مدل نیز مانند الگوی تک‌عاملی بدون جهش ۹۲-۹۱ پایین تخمین زده‌شده است.

در نمودار (۲) روند زمانی قیمت آتی سکه طلا با نزدیک‌ترین سررسید (F2) و تخمین متغیر وضعیت قیمت نقد سکه طلا (S_t) برای دوره زمانی مطالعه با توجه به ۳۸۲ مشاهده رسم شده است. نمودار رسم شده حاکی از کاهش دقت در برآورد متغیر وضعیت در طی زمان است. درمجموع نتایج حاصل از برآورد الگوی تعیین قیمت آتی طلا تک‌عاملی ۹۴-۹۳ تأییدی بر نتایج الگوی تک‌عاملی ۹۲-۹۱ به لحاظ علامت پارامترها، مقدار و معناداری آن‌ها است. درحالی‌که بردار وضعیت فیلتر شده در الگوی ۹۲-۹۱ کاملاً نزدیک به قیمت آتی است.



نمودار (۲)-نمودار متغیر وضعیت (قیمت نقد سکه طلا) فیلتر شده (S_t) و قیمت آتی سکه طلا دوماهه (F2) در مدل تعیین قیمت آتی تک‌عاملی بدون جهش

نتایج حاصل از برآورد الگوی تک‌عاملی تعیین قیمت آتی طلا همراه با جهش نمایی، در جدول (۲) گزارش‌شده است. بر این اساس، تخمین سه پارامتر سطح تعادل (μ)، سرعت تعدیل (κ) و انحراف معیار (σ) در بخش انتشار الگو با توجه به آماره آزمون t معنادار هستند. نتایج حاصل از برآورد پارامترها در این الگو مشابه الگوی بدون جهش است با این تفاوت که برآورد سطح تعادل با کاهش همراه بوده است. تخمین‌های صورت گرفته در بخش جهش این الگو، نشان از معناداری برآورد پارامتر نرخ اندازه جهش افزایشی γ_u و عدم معناداری نرخ اندازه جهش کاهشی γ_d دارد، درحالی‌که برآورد دو پارامتر نرخ تعداد جهش η_u و η_d تفاوت معناداری با صفر نشان نمی‌دهد. با توجه به برآورد مقدار صفر برای هر دو پارامتر تعداد جهش می‌توان نتیجه گرفت که اضافه نمودن جهش به الگو، تأثیر مثبتی بر عملکرد مدل تعیین قیمت آتی طلا (۹۴-۹۳) نداشته است. درمجموع نتایج حاصل از برآورد الگوی تعیین قیمت آتی طلا با جهش نمایی ۹۴-۹۳ تأییدی بر نتایج الگوی همراه با جهش نمایی ۹۲-۹۱ است که بر اساس آن افزودن جهش تأثیر مثبتی بر عملکرد الگو نداشته است.

نتایج حاصل از برآورد الگوی تک‌عاملی تعیین قیمت آتی طلا همراه با جهش، با اندازه جهش تصادفی یکنواخت نیز در جدول (۲) گزارش‌شده است. مقدار پارامتر میانگین نرخ بازده طلا تفاوت معناداری با صفر ندارد. انحراف معیار بازده طلا در این مدل برابر با ۰/۱ برآورد شده است که این پارامتر نیز معنادار نیست؛ بنابراین تغییرات متغیر وضعیت قیمت

نقد در این الگو تحت تأثیربخش انتشار نبوده و صرفاً از پارامترهای بخش جهش تأثیر می‌پذیرد. از میان پارامترهای جزء جهش دو پارامتر نرخ تعداد جهش و کران پایین اندازه جهش دارای برآوردهای معنادار در این الگو هستند. بر اساس نتایج حاصل، پارامتر تعداد جهش ۰/۴۶ برآورد شده است که نشان‌دهنده وجود جهش در حدود ۴۶ درصد از تغییرات قیمت نقد در یک دوره زمانی مشخص است. همچنین کران پایین اندازه جهش ۰/۲۷- برآورد شده است که تغییر ۱/۷ درصدی نسبت به میانگین لگاریتم قیمت نزدیک‌ترین سررسید قرارداد آتی نشان می‌دهد. کران بالای اندازه جهش در این مدل تفاوت معناداری با صفر ندارد.

درمجموع نتایج حاصل از برآورد الگوی تعیین قیمت آتی طلا تک‌عاملی ۹۴-۹۳ در بخش انتشار معنادار نیست که از این نظر نتایج با الگوی تک‌عاملی با جهش یکنواخت ۹۲-۹۱ متفاوت است؛ اما در جزء جهش به‌غیراز کران بالای اندازه جهش، پارامترهای برآوردی تائید کننده نتایج الگوی همراه با جهش یکنواخت ۹۲-۹۱ است. در مقایسه این الگو با دو مدل دیگر ۹۴-۹۳، نیز این الگو به دلیل کاهش خطا در برآورد بردار وضعیت عملکرد بهتری دارد.

۵- خلاصه و نتیجه‌گیری

باوجود ایجاد امکان استفاده از بازارهای آتی کالا در ایران، پژوهش‌های نظری محدودی در مورد نحوه قیمت‌گذاری قراردادهای آتی مورد معامله در این بازارها صورت گرفته است؛ بنابراین در این پژوهش و باهدف پوشش بخشی از خلأ موجود در مطالعات علمی و کاربردی قیمت‌گذاری قراردادهای آتی در ایران، سه الگوی نظری قیمت‌گذاری قرارداد آتی یک عاملی بدون جهش، یک عاملی با اندازه جهش نمایی و یک عاملی با اندازه جهش یکنواخت موردبررسی قرار گرفت.

درنهایت هر سه مدل تک‌عاملی تعیین قیمت آتی با استفاده از الگوریتم فیلتر کالمن و دو گروه داده‌ی قیمت آتی سکه طلا در سال‌های ۹۲-۹۱ و سال‌های ۹۴-۹۳ موردمطالعه تجربی و مقایسه قرار گرفتند. برآورد پارامترهای این سه الگو با استفاده از داده‌های قیمت آتی ۹۲-۹۱، نشان می‌دهد که اضافه کردن جهش نمایی به رفتار تصادفی قیمت نقد طلا، باعث بهبود عملکرد الگوی تک‌عاملی بدون جهش نشده است. اما استفاده از مدل دارای جهش تصادفی یکنواخت به‌جای الگوی بدون جهش، تأثیر مطلوبی بر برآورد پارامترهای الگوی تک‌عاملی داشته است.

نتایج حاصل از برآورد الگوهای تعیین قیمت آتی طلا با داده‌های قیمتی ۹۴-۹۳ تأییدی بر نتایج الگوی تعیین قیمت آتی طلا تک‌عاملی بدون جهش و با جهش نمایی ۹۲-۹۱ به لحاظ علامت پارامترها، مقدار و معناداری آن‌ها است. به عبارتی این دو الگو ازنظر برآورد پارامترها در کوتاه‌مدت و میان‌مدت عملکرد مشابهی دارند.

از پارامترهای تخمین زده شده می‌توان به‌عنوان ابزاری جهت برآورد قیمت‌های انتظاری دارایی یا کالای پایه در تاریخ سررسید استفاده نمود و در ادامه آن را برای تعیین قیمت تحویل در عقد قرارداد آتی به کار گرفت. قیمت‌گذاری با استفاده از این مدل‌ها به دلیل افزایش دقت در برآورد قیمت‌های انتظاری می‌تواند موجب کنترل نوسانات قیمتی و افزایش ثبات در رفتار قیمتی قراردادهای آتی گردد.

فهرست منابع

۱. درخشان، مسعود (۱۳۸۳). *مشتقات و مدیریت ریسک در بازارهای نفت*. تهران. موسسه مطالعات بین‌المللی انرژی.

2. Bjerksund, P (1991). Contingent claims evaluation when the convenience yield is stochastic: Analytical Results. *Working Paper, Norwegian School of Economics and Business.*
3. Bjork, Tomas (2003). *Arbitrage theory in continuous time (2nd Edition)*. London. Oxford University Press.
4. Dempster, M.A.H, Medova, Elena, & Tang, Ke (2009). Long and short term jumps in commodity futures prices. *Working Paper, Centre for Financial Research, Judge of Business School*.
5. Duffie, D, J. Pan, and K. Singleton (2000). Transform analysis and asset pricing for affine jump diffusions. *Econometrica*, 68, 1343-1376.
6. Harvey, Andrew C. (1991). *Forecasting, structural time series models and the Kalman filter.* Cambridge University Press.
7. Lee, Kai Ming (2010). Filtering non-linear state space models: methods and economic applications. *Tinbergen Institute research series*. Ozenberg Publishers. Issue 474.
8. McDonald Robert (2006). *Derivatives market (2nd Edition).* USA. Addison Wesley.
9. Merton, R. C (1976). Option pricing when the underlying stock returns are discontinuous. *Journal of Financial Economics*, 3(12), 125–144.
10. Mikosck, Tomas (2000). *Elementary stochastic calculus.* Singapore, London. World Scientific.
11. Ross, S.A (1995). Hedging long run commitments: exercises in incomplete market pricing. *Preliminary Draft.*
12. Schwartz, E. S. (1997). The stochastic behavior of commodity prices: implications for valuation and hedging. *The Journal of Finance,* LII. No.3, PP.922-973.
13. Schwartz, E. S and Smith, James E (2000). Short-term variations and long-term dynamics in commodity prices.*Management Science*, 46 (7), 893-911.
14. Tankov, Peter and Cont, Rama (2004). *Financial modelling with jump processes.* USA: Chapman & Hall/CRC.
15. Yan, Xuemin (Sterling)(2002). Valuation of commodity derivatives in a new multi-factor model. *Review of DerivativesResearch,* 5, 251-271.