پژوهش‌های نوین در تصمیم‌گیری
دوره 1، شماره 1، بهار 1395

طراحی مدل تصمیم‌گیری در شرایط عدم اطمینان

علیرضا طغیانی[1]، علی رجب زاده قطری[2*]، عادل آذر[3]

1- دانشجوی دکتری مدیریت، دانشکده مدیریت و اقتصاد، دانشگاه تربیت مدرس،تهران، ایران
2- دانشیار مدیریت، دانشکده مدیریت و اقتصاد، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران
3- استاد مدیریت، دانشکده مدیریت و اقتصاد، دانشگاه تربیت مدرس،تهران،ایران

دریافت: ؟؟/؟؟/؟؟؟؟ پذیرش: ؟؟/؟؟/؟؟؟؟

چکیده

در این مقاله مرور و مقایسه‌ای بر انواع متغیرهای تعریف شده در بخش مدلسازی فرایند تحقیق در عملیات خواهیم داشت. از آن جایی که در دنیای واقعی مسائل مربوط به تصمیم‌گیری‌های مدیریتی به‌دلیل فاکتورهای انسانی و پیچیده اجتماعی، روانی، اقتصادی، سیاسی و ... از عدم اطمینان بالایی برخوردارند؛ به نظر می‌رسد انواع متغیرهای موجود در ادبیات موضوع قادر به تبیین همه حالت‌های ممکن شرایط واقعی نیستند، بنابراین به معرفی متغیرهای جدید مانند متغیر تصادفی درجه دوم، عدم اطمینان تصادفی، فازی عدم اطمینان، عدم اطمینان فازی و متغیر عدم اطمینان درجه دوم خواهیم پرداخت و تعمیم ترکیبات مختلف متغیر به سطوح بالاتر مطرح خواهد گردید. سپس براساس متغیر عدم اطمینان درجه دوم، نسخه‌های جدیدی از مدل برنامه‌ریزی خطی با عنوان مدل برنامه‌ریزی خطی عدم اطمینان درجه دوم و کاملاً نامطمئن ارائه خواهیم داد. در ادامه جهت تأیید مدل پیشنهادی مثالی عددی مربوط به مسئله انتخاب پورتفولیوهای نامطمئن ارائه می‌نماییم. پس از آن راه‌حل‌های بهینه نامطمئن با استفاده از نرم‌افزار برنامه‌ریزی محدب‌ساخت یافته به‌دست خواهند آمد.

واژه‌های کلیدی: مدل برنامه‌ریزی خطی، متغیر تصمیم، متغیر عدم اطمینان تصادفی، متغیر عدم اطمینان درجه دوم، برنامه‌ریزی خطی عدم اطمینان درجه دوم و کاملاً نامطمئن.

---

* نویسنده مسئول مقاله: E-mail: ??????????

1- مقدمه

متغیرهای تصمیم، یکی از سه عنصر اساسی در بخش مدلسازی فرایند تحقیق در عملیات و شاید مهم‌ترین آنها می‌باشند و بدون تعریف آنها توسط مدلساز مدل ریاضی هیچ معنا و مفهومی نخواهد داشت. در مدل برنامه‌ریزی خطی فرض معین بودن دلالت بر قطعی بودن متغیرها و پارامترهای مدل دارد. در صورتی که این فرض نقض شود نسخه‌های مختلفی از مدل برنامه‌ریزی خطی ظهور خواهد کرد، به‌طور مثال در صورت استفاده از مفهوم متغیر تصادفی در مدل، برنامه‌ریزی خطی احتمالی خواهیم داشت. به‌طور مشابه با استفاده از مفهوم متغیر فازی در مدل، برنامه‌ریزی خطی فازی و با به‌کارگیری مفهوم متغیرهای عدم اطمینان، برنامه‌ریزی خطی عدم اطمینان خواهیم داشت. متغیر تصادفی و تئوری احتمالات براساس فراوانی ظهور داده‌ها عمل کرده و به مدلسازی آنها خواهد پرداخت. این در حالی است که متغیر فازی و عدم اطمینان برگرفته از تئوری‌های فازی، امکان و عدم اطمینان به مدلسازی درجه اعتقاد ذهنی می‌پردازند. در ادبیات موضوع جهت برخورد با پیچیدگی‌های موجود در دنیای واقعی حالت‌های ترکیبی نیز در نظر گرفته شده‌اند. متغیرهای تصادفی فازی و فازی تصادفی نمونه‌هایی از این مورد می‌باشند. در حالت ترکیبی می‌توان متغیر معرفی شده را در دو بخش مورد توجه قرار داد؛ اول ماهیت خود متغیر به‌طور نمونه در متغیر تصادفی فازی ماهیت اصلی متغیر تصادفی است ولی در مورد متغیر فازی تصادفی ماهیت اصلی متغیر فازی است. در بخش دوم متغیرهای ترکیبی حالت پارامترهای توزیع مربوطه ارائه شده است، به‌طور مثال در متغیر تصادفی فازی ماهیت اصلی متغیر تصادفی است. بنابراین توزیع احتمالات معرف تغییرات آن است ولی پارامترهای مربوط به توزیع فازی خواهد بود، برای مثال توزیع احتمال نرمال با میانگین و انحراف معیار فازی را خواهیم داشت. در متغیر فازی تصادفی ماهیت اصلی متغیر فازی است. بنابراین توزیع امکان معرف تغییرات آن است ولی پارامترهای مربوط به توزیع از تئوری احتمالات گرفته شده‌اند، به‌طور مثال توزیع امکان نرمال با میانگین و انحراف معیار بر گرفته از تئوری احتمالات را خواهیم داشت. در بخش بعد مروری بر انواع متغیرهای موجود و معرفی حالت‌ها و متغیرهای جدید خواهیم پرداخت.

2- مروری بر انواع متغیرهای موجود

2-1- متغیر قطعی

اولین حالتی که در طیف اطمینان کامل - عدم اطمینان کامل وجود دارد، حالت قطعی می‌باشد. پارامتر قطعی عددی ثابت و معین فرض شده و در طی دوره برنامه‌ریزی تغییر نخواهد کرد. مقدار جواب یک متغیر قطعی و ماهیت آن نیز عددی قطعی در نظر گرفته می شود. در نسخه اصلی مدل برنامه‌ریزی خطی این حالت برقرار بوده و جزء ویژگی‌های اصلی مدل فرض می‌شود.

2-2- متغیر تصادفی

تئوری احتمالات در سال 1933 توسط کولموگروف برای مدلسازی فراوانی‌ها توسعه یافت [1، صص 47-69]. اگر کمی در طیف به سمت عدم اطمینان کامل حرکت کنیم، متغیر تصادفی را خواهیم داشت. متغیر تصادفی دارای یکی از توزیع‌های احتمال مانند نرمال، نمایی، یکنواخت و... با پارامترهایی قطعی خواهد بود. اگر حداقل یک پارامتر یا متغیر تصادفی در مدل برنامه‌ریزی خطی وجود داشته باشد، آن را مدل برنامه‌ریزی خطی احتمالی می‌نامند.

2-3- متغیر فازی

مفهوم متغیر فازی توسط زاده در سال 1965 [2، صص 338-353] ارائه گردید. به صورت کلی یک متغیر فازی به عنوان تابعی قابل اندازه‌گیری از یک فضای اعتبار (θ, P, Cr) به مجموعه اعداد حقیقی تعریف می‌شود و یا متغیر فازی را به عنوان تابع قابل اندازه‌گیری از یک فضای امکان $(\theta, P(\Theta), Pos)$ به مجموعه اعداد حقیقی تعریف می‌کنیم [3، صص 396-405] .

با حرکت به سمت جلو به متغیر فازی خواهیم رسید. متغیر فازی دارای یکی از توزیع‌های امکان مانند مثلثی، ذوزنقه‌ای، نرمال و ... با پارامترهای قطعی خواهد بود. اگر حداقل یک پارامتر یا متغیر فازی در مدل برنامه‌ریزی خطی وجود داشته باشد؛ آن را مدل برنامه‌ریزی خطی فازی می‌نامند.

2-3-1- تئوری امکان

زاده در سال 1978 مفهوم درجه امکان را ارائه داد، نظریه‌ای در زمینه تئوری مجموعه فازی به عنوان چارچوبی ریاضی برای مدلسازی و مشخص کردن وضعیت‌هایی که مستلزم عدم اطمینان هستند [4، صص 3-28].

تعریف: اجازه دهید φ مجموعه‌ای غیر تهی باشد و $P(\varphi)$ مجموعه توان φ باشد. اگر برای هر $A \in P(\varphi)$ عدد غیر منفی $Pos(A)$ که درجه امکان نامیده می‌شود، وجود داشته باشد، به‌طوری که:

$$i. Pos\{\emptyset\} = 0, Pos\{\varphi\} = 1$$
$$ii. Pos\{\cup_k A_k\} = sup_k Pos_k\{A_k\}$$

برای هر مجموعه دلخواه از $A_k \in P(\varphi)$ سپس سه‌گانه $(\varphi, \mathrm{P}(\varphi), \mathrm{Pos})$ یک فضای امکان نامیده می‌شود [5، صص 111-128؛ 6، صص 123-140].

تعریف: وابسته به هر درجه امکان درجه‌ای از الزام γ وجود دارد، درجات الزام و امکان به‌طور متقابل مکمل یکدیگرند. به‌طور خاص برای یک فضای امکان داده شده $(\varphi, \mathrm{P}(\varphi), \mathrm{Pos})$ اگر A و $\bar{A}$ دو رویداد متضاد باشند که $\bar{A}$ مکمل $A \in \varphi$ باشد سپس $\gamma = 1 - Pos(\bar{A})$ خواهد بود. از این رو درجه الزام یک رویداد فازی به عنوان عدم امکان رویداد متضاد تعریف می‌شود [6، صص 123-140].

تعریف: اجازه دهید Θیک مجموعه غیر تهی باشد، P مجموعه توان Θ باشد و Cr درجه اعتبار باشد. سپس سه‌گانه $(\Theta, \mathrm{P}, \mathrm{Cr})$ یک فضای اعتبار نامیده می‌شود [5، صص 111-128؛ 6، صص 123-140]. درجه اعتبار Cr یک رویداد فازی را به عنوان میانگین درجه امکان و الزام تعریف کرده، یعنی $\frac{Pos+\mathcal{N}}{2}$.

رابطه بین درجه امکان، الزام و اعتبار بدین صورت می‌باشد: $Pos \geq Cr \geq \mathcal{N}$ [5، صص 111-128؛ 6، صص 123-140].

اجازه دهید ξ یک متغیر فازی بر فضای امکان$(\Theta, \mathrm{P}(\Theta), \mathrm{Pos})$ با درجه عضویت μ و عدد حقیقی r باشد. امکان، الزام و اعتبار یک رویداد فازی با $\xi \leq r$ بدین صورت تعریف می‌شود:[3، صص 396-405؛ 7، صص 111-128].

$i. Pos\{\xi \leq r\} = sup_{u \leq r}\mu\{u\}$
$ii. Nec\{\xi \leq r\} = 1 - Pos\{\xi > r\} = 1 - sup_{u > r}\mu\{u\}$
$iii. Cr\{\xi \leq r\} = \frac{1}{2}(Pos\{\xi \leq r\} + Nec\{\xi \leq r\})$

2-3-2- تفاوت بین فازی بودن و تصادفی بودن

تمایز قائل شدن بین فازی بودن و تصادفی بودن از اهمیت بالایی برخوردار است، یک فضای احتمال به صورت سه‌گانه $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ تعریف می‌شود که $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$ یک فضای نمونه‌ای است، $\mathfrak{F}$ انحراف معیار جبری زیر مجموعه‌های Ω است؛ یعنی مجموعه‌ای از همه رویدادهای بالقوه ممکن و P میزان احتمال بر Ω می‌باشد، به‌طوری که:

$$Pr(\Omega) = 1$$
$$Pr(A) \geq 0, \quad \forall A \in \mathfrak{F}$$

و برای هر دنباله قابل شمارش از رویدادهای گسسته به صورت متقابل $\{A_i\}, i = 1,2, \dots$ خواهیم داشت:

$$Pr\left\{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right\} = \sum_{i=1}^{\infty} Pr\{A_i\}$$

در مقابل یک فضای امکان به صورت سه‌گانه $(\Theta, \mathcal{P}(\Theta), Pos)$ در جایی که $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N\}$ یک فضای نمونه می‌باشد، $\mathcal{P}(\Theta)$ مجموعه توان Θ است؛ یعنی مجموعه‌ای از همه زیرمجموعه‌های Θ بوده و Pos میزان امکان بر Θ می‌باشد، $Pos(A)$، امکان اینکه A رخ دهد خواهد بود، به‌طوری که:

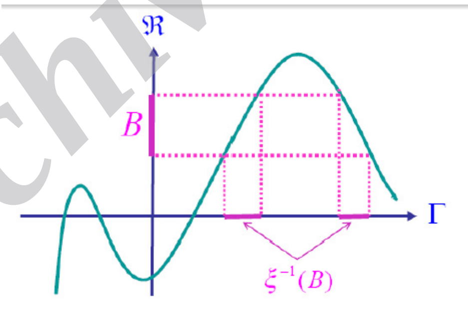
$$Pos(\Theta) = 1$$
$$Pos(\emptyset) = 0$$
$$Pos\left\{\bigcup_{i} A_i\right\} = sup_i\, Pos\{A_i\}, for\ any\ collection\ \{A_i\}\ in\ P(\Theta)$$

2-4- متغیر عدم اطمینان

در حقیقت، تصمیمات دنیای واقعی معمولاً در حالت عدم اطمینان گرفته می‌شوند. برای مواجه شدن با عدم اطمینان، لیو در سال 2007 تئوری عدم اطمینان را بنا نهاد و این تئوری شاخه‌ای از ریاضیات شد. بر مبنای فضای عدم اطمینان، متغیرهای عدم اطمینان توسعه یافتند تا پدیده عدم اطمینان را توصیف کنند. اجازه دهید Γ مجموعه‌ای غیر تهی باشد و A یک $\sigma-$ جبری بر روی Γ باشد. هر عنصر $\Lambda \in A$ یک رویداد نامیده می‌شود. به منظور ارائه یک تعریف به صورت قضیه‌ای اصلی از میزان عدم اطمینان، لازم است به هر رویداد Λ عددی مانند $M\{\Lambda\}$ تخصیص دهیم که نشان‌دهنده سطحی باشد که Λ رخ خواهد داد.

تعریف: [5، صص 111-128] . اجازه دهید Γ مجموعه‌ای غیر تهی باشد و A یک $\sigma-$ جبری بر روی Γ باشد و M یک میزان عدم اطمینان باشد. سپس سه‌گانه (Γ, A, M) یک فضای عدم اطمینان نامیده می‌شود.

تعریف: [5، صص 111-128]. یک متغیر عدم اطمینان یک تابع قابل اندازه‌گیری ξ از فضای عدم اطمینان (Γ, A, M) به مجموعه اعداد حقیقی می‌باشد، به‌طور مثال برای هر مجموعه B از اعداد حقیقی مجموعه $\{\xi \in B\} = \{\gamma \in \Gamma | \xi(\gamma) \in B\}$ یک رویداد است.

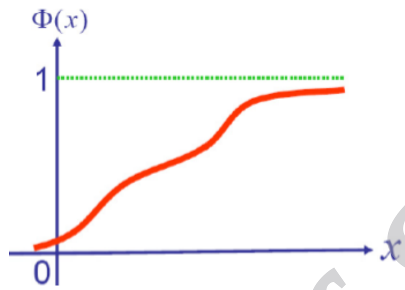


شکل 1 متغیر عدم اطمینان

یک متغیر تصادفی می‌تواند با یک تابع چگالی احتمال مشخص شود و یک متغیر فازی ممکن است با یک تابع عضویت توصیف شود، متغیر عدم اطمینان می‌تواند با تابع شناسایی مشخص شود.

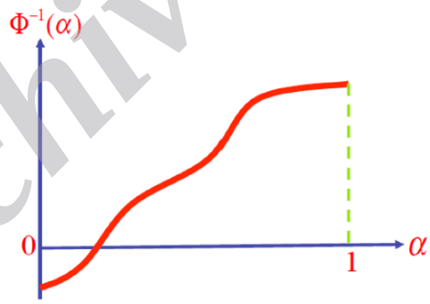
تعریف: [5، صص 111-128] . توزیع عدم اطمینان $\Phi: R \to [0,1]$ از یک متغیر عدم اطمینان ξ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Phi(x) = M\{\xi \leq x\}$$



شکل 2 توزیع عدم اطمینان

اجازه دهید ξ یک متغیر عدم اطمینان با توزیع عدم اطمینان Φ باشد؛ آن‌گاه تابع معکوس $\Phi^{-1}(\alpha)$ توزیع عدم اطمینان معکوس ξ نامیده می‌شود.



شکل 3 توزیع عدم اطمینان معکوس

تعریف: [5، صص 111-128] . اجازه دهید ξ یک متغیر عدم اطمینان باشد و $\alpha \in (0,1]$، سپس

$$\xi_{\sup}(\alpha) = sup\{r | M\{\xi \geq r\} \geq \alpha\}$$

مقدار خوشبینانه α برای ξ نامیده می‌شود و

$$\xi_{\inf}(\alpha) = inf\{r|M\{\xi \le r\} \ge \alpha\}$$

مقدار بدبینانه α برای ξ نامیده می‌شود.

در انتهای طیف متغیر عدم اطمینان وجود دارد. متغیر عدم اطمینان دارای یکی از توزیع‌های عدم اطمینان مانند خطی، زیگزاگ، نرمال و ... با پارامترهای قطعی خواهد بود. اگر حداقل یک پارامتر یا متغیر عدم اطمینان در مدل برنامه‌ریزی خطی وجود داشته باشد؛ آن را مدل برنامه‌ریزی خطی عدم اطمینان می‌نامند. به‌دلیل به‌کارگیری متغیر عدم اطمینان زیگزاگ در مثال عددی در بخش بعدی مروری بر این نوع متغیر خواهیم داشت.

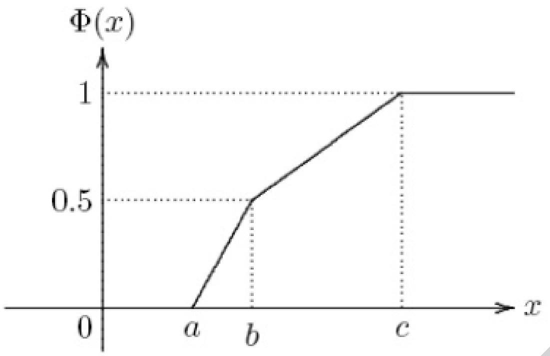
2-4-1- متغیر عدم اطمینان مثلثی یا زیگزاگ [8، صص 89-95]

با یک متغیر عدم اطمینان مثلثی یا زیگزاگ می‌پذیریم که متغیر عدم اطمینان به‌طور کامل با سه‌گانه (a, b, c) اعداد قطعی $a < b < c$ تعیین شود که تابع تعیین ابتدایی اولیه آن بدین صورت باشد:

$$\lambda(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{2(b-a)}, & if\ a \le x \le b \\ \frac{x-c}{2(b-c)}, & if\ b \le x \le c \\ 0, & elsewhere \end{cases}$$

برای سادگی، می‌نویسیم $\xi = (a, b, c)$. از آن جایی که $\Phi(x) = M\{\xi \le x\}$، با توجه به تعاریف قبلی توزیع عدم اطمینان ξ می‌شود:

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0, & x \le a \\ \frac{x-a}{2(b-a)}, & a < x \le b \\ \frac{x+c-2b}{2(c-b)}, & b < x \le c \\ 1, & x > c \end{cases}$$



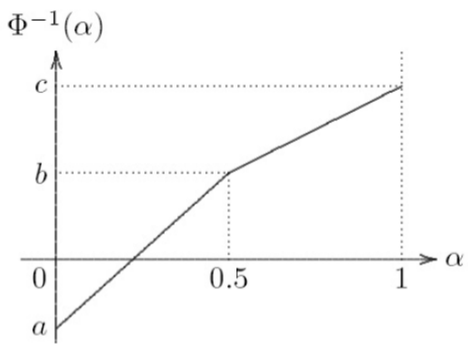
شکل 4 توزیع عدم اطمینان زیگزاگ

اگر نرخ‌های بازده همگی متغیرهای عدم اطمینان مثلثی باشند، اجازه دهید ξ_i به صورت (a_i, b_i, c_i) باشد که $a_i < b_i < c_i, i = 1,2,\dots,n$ باشد. از قانون عملیاتی متغیرهای عدم اطمینان مثلثی خواهیم داشت $x^T\xi = (\sum_{i=1}^n x_i a_i, \sum_{i=1}^n x_i b_i, \sum_{i=1}^n x_i c_i)$ که آن هم یک متغیر عدم اطمینان مثلثی می‌باشد. سپس توزیع عدم اطمینان $\sum_{i=1}^n x_i \xi_i$ به صورت زیر می‌باشد:

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0, & x \le \sum_{i=1}^n x_i a_i \\ \dfrac{x - \sum_{i=1}^n x_i a_i}{2(\sum_{i=1}^n x_i b_i - \sum_{i=1}^n x_i a_i)}, & \sum_{i=1}^n x_i a_i < x \le \sum_{i=1}^n x_i b_i \\ \dfrac{x + \sum_{i=1}^n x_i c_i - 2\sum_{i=1}^n x_i b_i}{2(\sum_{i=1}^n x_i c_i - \sum_{i=1}^n x_i b_i)}, & \sum_{i=1}^n x_i b_i < x \le \sum_{i=1}^n x_i c_i \\ 1, & x > \sum_{i=1}^n x_i c_i \end{cases}$$

برای هر $\alpha \in (0,1]$ به سادگی می‌توان تأیید کرد که تابع $\Phi^{-1}(1-\alpha)$ به صورت زیر می‌باشد:

$$\Phi^{-1}(1-\alpha) = \begin{cases} 2\alpha \sum_{i=1}^n x_i b_i + (1-2\alpha)\sum_{i=1}^n x_i c_i, & if\ \alpha \in (0,0.5] \\ (2\alpha - 1)\sum_{i=1}^n x_i a_i + (2-2\alpha)\sum_{i=1}^n x_i b_i, & if\ \alpha \in (0.5,1] \end{cases}$$

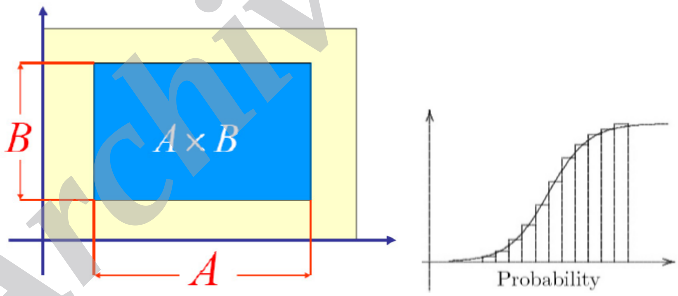


شکل 5 توزیع عدم اطمینان معکوس زیگزاگ

2-4-2- تفاوت بین تئوری احتمالات و تئوری عدم اطمینان [9، ص 491]

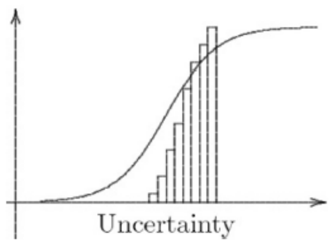
تفاوت اصلی بین تئوری احتمالات و تئوری عدم اطمینان این است که احتمال حاصلضرب رویدادها برابر با حاصلضرب احتمالات هر رویداد است؛ یعنی:

$$Pr\{A \times B\} = Pr\{A\} \times Pr\{B\}$$



شکل 6 تئوری احتمالات، سیستمی ضربی

و میزان عدم اطمینان حاصلضرب رویدادها برابر با حداقل مقادیر عدم اطمینان رویدادهای انفرادی می باشد؛ یعنی: $\mathcal{M}\{A \times B\} = \mathcal{M}\{A\} \wedge \mathcal{M}\{B\}$



شکل 7 تئوری عدم اطمینان، سیستمی حداقلی

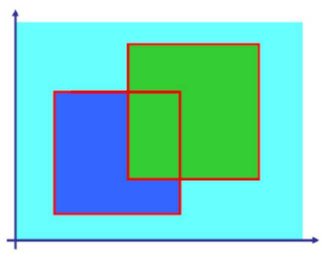
به‌طور خلاصه می‌توان گفت که تئوری احتمالات یک سیستم ریاضی ضربی است و تئوری عدم اطمینان یک سیستم ریاضی حداقلی است. این تفاوت اشاره دارد که متغیرهای تصادفی و متغیرهای عدم اطمینان از قوانین عملیاتی متفاوتی پیروی می‌کنند. تئوری احتمالات و تئوری عدم اطمینان سیستم‌های ریاضی مکمل هستند که دو مدل ریاضی قابل پذیرش برای برخورد با دنیای نامعین ارائه می‌دهند. احتمالات به عنوان فراوانی تعبیر و تفسیر می شود؛ در حالی که عدم اطمینان به عنوان درجه اعتقاد شخصی تعبیر می‌گردد.

2-4-3- تفاوت بین تئوری امکان و تئوری عدم اطمینان [9، ص 495]

تفاوت اساسی بین تئوری امکان و تئوری عدم اطمینان این است که اولی فرض می‌کند:

$$Pos\{A \cup B\} = Pos\{A\} \vee Pos\{B\}$$

برای هر رویداد A و B مهم نیست که مستقل باشند یا نه

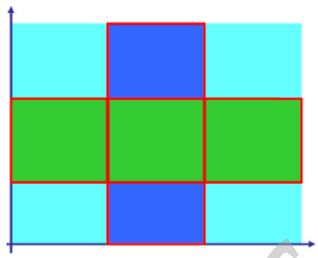


شکل 8 عدم استقلال رویدادها در تئوری امکان

ولی دومی فرض می کند:

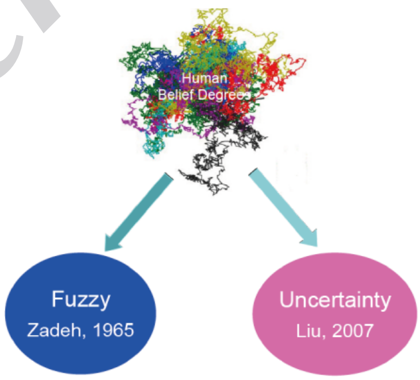
$$\mathcal{M}\{A \cup B\} = \mathcal{M}\{A\} \vee \mathcal{M}\{B\}$$

فقط برای رویدادهای مستقل A و B برقرار است.



شکل 9 استقلال رویدادها در تئوری عدم اطمینان

بررسی‌های زیادی نشان می‌دهند که مقدار اجتماع رویدادها معمولا بزرگ‌تر از حداکثر مقدار رویدادهای انفرادی است،زمانی که آنها مستقل نیستند. این حقیقت بیان می‌کند که مغز انسان به صورت فازی رفتار نمی‌کند. هر دو تئوری عدم اطمینان و تئوری امکان تلاش می‌کنند درجات اعتقاد را مدلسازی کنند، در جایی که اولی ابزار میزان عدم اطمینان و دومی ابزار میزان امکان را به کار می‌برند، بنابراین آنها رقبای کاملی هستند.



شکل 10 مدلسازی درجه اعتقاد در تئوری‌های امکان و عدم اطمینان

2-5- متغیر فازی درجه دوم

در این حالت، متغیر دارای یکی از توزیع‌های امکان مانند مثلثی، ذوزنقه‌ای، نرمال و ... و با پارامترهای فازی که مجدد هر کدام می‌توانند دارای توزیع‌های امکان متنوعی باشند؛ خواهد بود. مانند متغیر فازی با توزیع امکان نرمال و پارامترهای میانگین و انحراف معیار دارای توزیع امکان مثلثی. مدل برنامه‌ریزی خطی دارای این نوع متغیر را مدل برنامه‌ریزی خطی فازی درجه دوم می‌نامیم.

2-6- متغیر تصادفی فازی

متغیرهای تصادفی فازی متغیرهای تصادفی هستند که مقادیرشان واقعی نیست بلکه اعداد فازی هستند. به منظور قابل فهم کردن آن اجازه دهید مثالی ساده ارائه دهیم. یک نظر سنجی را در نظر بگیرید که تعدادی از افراد در مورد عقیده اشان درباره آب و هوای اروپا در تابستانی خاص مورد پرسش قرار می گیرند. پاسخ‌ها در سه طبقه طبقه‌بندی می‌شوند، به‌ترتیب خیلی گرم، گرم و ایده‌ای ندارم. تصادفی بودن رخ می‌دهد، زیرا مشخص نیست هر فرد ممکن است چه پاسخ دهد. زمانی که پاسخ موجود است هنوز عدم اطمینانی درباره معنای دقیق پاسخ وجود دارد. عدم اطمینان دوم به‌وسیله مفهوم فازی مشخص می‌شود، به این صورت که هر پاسخ خیلی گرم، گرم و بدون ایده توسط یک مجموعه فازی و به‌طور خاص نوع خاصی از مجموعه فازی که عدد فازی نامیده می‌شود، ارائه خواهد شد. مفهوم متغیر تصادفی فازی توسط [10، صص 1-29] به عنوان تعمیم طبیعی متغیر تصادفی به‌منظور ارائه رابطه بین نتایج یک تجربه تصادفی و داده‌های نادقیق غیر آماری معرفی شد. براساس نیازمندی‌های مختلف از قابلیت اندازه‌گیری، پژوهشگران مختلف متغیر تصادفی فازی را مطالعه کرده‌اند، مانند [11 ؛ 12 ؛ 13، صص 409-422].

تعریف: یک متغیر تصادفی فازی تابعی است از یک فضای احتمال (Ω, A, Pr) به مجموعه متغیرهای فازی به‌طوری که $Cr(\xi(\omega) \in B)$ تابعی قابل اندازه‌گیری برای هر مجموعه B از R باشد [14، صص 143-160].

در این حالت ترکیبی، متغیر دارای یکی از توزیع‌های احتمال مانند یکنواخت، نمایی، نرمال و ... و با پارامترهای فازی خواهد بود، به‌طور مثال متغیر ممکن است دارای توزیع چگالی احتمال نرمال با میانگین و انحراف معیار فازی مثلثی باشد. مدل

برنامه‌ریزی خطی دارای این نوع متغیر را مدل برنامه‌ریزی خطی احتمالی فازی می‌نامند.

2-7- متغیر فازی تصادفی

متغیرهای فازی تصادفی برای اولین بار توسط [5، صص 111-128] به عنوان متغیر فازی که مقادیر متغیر تصادفی را می‌گیرند؛ معرفی گردیده‌اند، ما تعریف زیر را ارائه می‌دهیم.

تعریف: یک متغیر فازی تصادفی تابعی است از یک فضای امکان $(\Theta, P(\Theta), Pos)$ به مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی [7، صص 111-128] . اجازه دهید $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ متغیرهای تصادفی باشند و $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ اعداد حقیقی در *[0,1]* باشند، به‌طوری که $a_1 \vee a_2 \vee a_3 \vee \dots, a_m = 1$ در جایی که $\vee$ نشان‌دهنده عملگر حداکثرسازی باشد، سپس

$$\xi = \begin{cases} \xi_1 & with\,possibility & a_1 \\ \xi_2 & with\,possibility & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \xi_m & with\,possibility & a_m \end{cases}$$

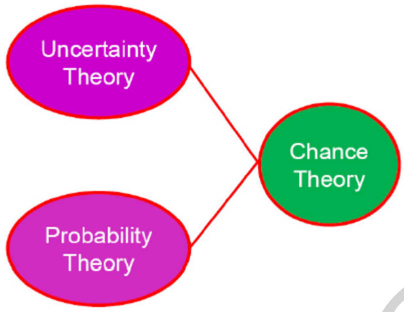
یک متغیر فازی تصادفی است.

در این حالت ترکیبی، متغیر دارای یکی از توزیع‌های امکان مانند مثلثی، ذوزنقه‌ای، نرمال و ... و با پارامترهای برگرفته از تئوری احتمالات مانند میانگین و انحراف معیار امکانی خواهد بود. مدل برنامه‌ریزی خطی دارای این نوع متغیر را مدل برنامه‌ریزی خطی فازی تصادفی می‌نامند.

2-8- متغیر تصادفی عدم اطمینان (متغیر شانس)

تئوری عدم اطمینان در سال 2007 توسط لیو برای مدلسازی درجه اعتقاد بنا نهاده شد. با وجود این در بسیاری موارد، تصادفی بودن و عدم اطمینان به طور همزمان در سیستم‌های پیچیده ظاهر می‌شوند. به منظور توصیف این پدیده، تئوری شانس برای اولین بار در سال 2013 توسط لیو با مفاهیم متغیر تصادفی عدم اطمینان،

میزان شانس و توزیع شانس ارائه گردید. لیو همچنین مفاهیم امید ریاضی و واریانس متغیرهای تصادفی عدم اطمینان را ارائه نمود.



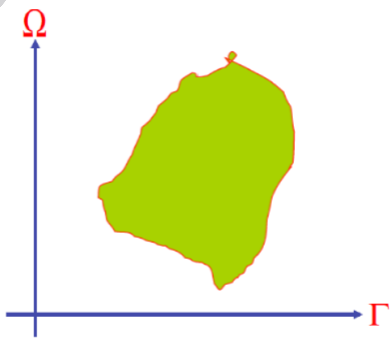
شکل 11 تئوری شانس ترکیبی از تئوری‌های احتمالات و عدم اطمینان

2-8-1- میزان شانس [9، ص 435]

اجازه دهید $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ یک فضای عدم اطمینان باشد و اجازه دهید $(\Omega, \mathcal{A}, Pr)$ یک فضای احتمال باشد. سپس حاصلضرب $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M}) \times (\Omega, \mathcal{A}, Pr)$ یک فضای شانس نامیده می‌شود که به‌طور لزوم سه‌گانه دیگری می‌شود:

$$(\Gamma \times \Omega, \mathcal{L} \times \mathcal{A}, \mathcal{M} \times Pr)$$

در جایی که $\Gamma \times \Omega$ مجموعه جهانی است، $\mathcal{L} \times \mathcal{A}$ حاصلضرب جبری σ و $\mathcal{M} \times Pr$ مقدار حاصلضرب است.

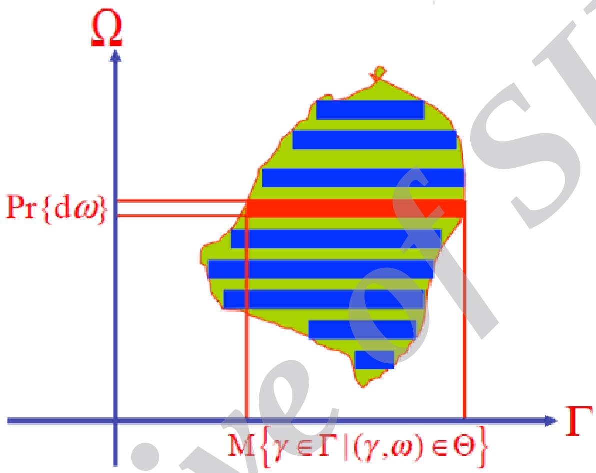


شکل 12 فضای شانس

اجازه دهید $(\Gamma \times \Omega, \mathcal{L} \times \mathcal{A}, \mathcal{M} \times Pr)$ یک فضای شانس باشد، سپس

$$Ch\{\Lambda \times \mathrm{A}\} = \mathcal{M}\{\Lambda\} \times Pr\{\mathrm{A}\}$$

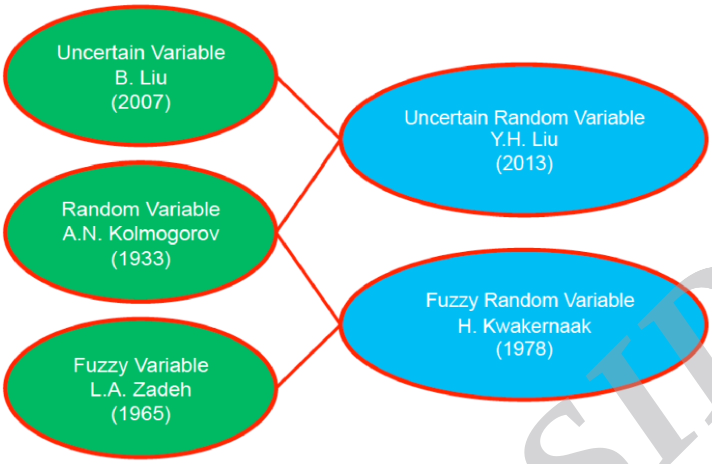
برای هر $\Lambda \in \mathcal{L}$ و هر $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$. بویژه داریم: $Ch\{\emptyset\} = 0, \quad Ch\{\Gamma, \Omega\} = 1$



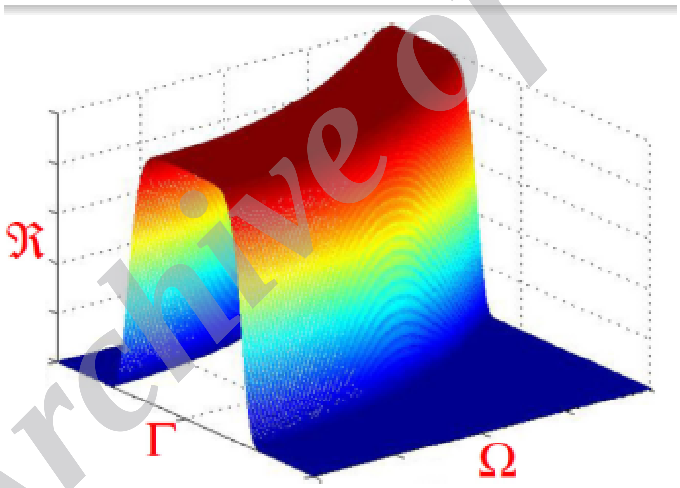
شکل 13 محاسبه میزان شانس در فضای شانس

به‌طور تئوریک، یک متغیر تصادفی عدم اطمینان یک تابع قابل اندازه‌گیری در فضای شانس می‌باشد. معمولاً برای مواجهه با توابع قابل اندازه‌گیری متغیرهای تصادفی و متغیرهای عدم اطمینان به کار می‌رود.

تعریف: یک متغیر تصادفی عدم اطمینان یک تابع ξ از یک فضای شانس $(\Gamma \times \Omega, \mathcal{L} \times \mathcal{A}, \mathcal{M} \times Pr)$ به مجموعه‌ای از اعداد حقیقی است، به‌طوری که $\{\xi \in B\}$ یک رویداد در $\mathcal{L} \times \mathcal{A}$ برای هر مجموعه B از اعداد حقیقی می‌باشد.



شکل 14 نحوه ایجاد متغیر تصادفی عدم اطمینان



شکل 15 شمایی از متغیر تصادفی عدم اطمینان

یک متغیر تصادفی عدم اطمینان $\xi(\gamma,\omega)$ تبدیل به یک متغیر تصادفی می‌شود در صورتی که با γ تغییر نکند. بنابراین یک متغیر تصادفی حالت خاصی از متغیر تصادفی عدم اطمینان است.

یک متغیر تصادفی عدم اطمینان $\xi(\gamma,\omega)$ تبدیل به یک متغیر عدم اطمینان می‌شود در صورتی که با ω تغییر نکند. بنابراین یک متغیر عدم اطمینان حالت خاصی از متغیر تصادفی عدم اطمینان است.

3-8-2- توزیع شانس [9، ص 441]

تعریف اجازه دهید ξ یک متغیر تصادفی عدم اطمینان باشد. سپس توزیع شانس آن برای هر $x \in R$

به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Phi(x) = Ch\{\xi \leq x\}$$

به عنوان یک متغیر تصادفی عدم اطمینان خاص، توزیع شانس یک متغیر تصادفی η فقط توزیع احتمالش است؛ یعنی:

$$\Phi(x) = Ch\{\eta \leq x\} = Pr\{\eta \leq x\}$$

به عنوان یک متغیر تصادفی عدم اطمینان خاص، توزیع شانس یک متغیر عدم اطمینان τ فقط توزیع عدم اطمینان آن است؛ یعنی:

$$\Phi(x) = Ch\{\tau \leq x\} = M\{\tau \leq x\}$$

در این حالت ترکیبی، متغیر دارای یکی از توزیع‌های احتمال مانند یکنواخت، نمایی، نرمال و ... و با پارامترهای عدم اطمینان خواهد بود، به‌طور مثال دارای توزیع چگالی احتمال نرمال با میانگین و انحراف معیار دارای توزیع عدم اطمینان زیگزاگ می‌باشد. مدل برنامه ریزی خطی دارای این نوع متغیر را مدل برنامه‌ریزی خطی احتمالی عدم اطمینان یا شانس می‌نامیم.

در جدول زیر مقایسه‌ای بین انواع متغیرهای موجود در ادبیات موضوع، به لحاظ ماهیت متغیر، توزیع مربوطه و ماهیت پارامترهای توزیع صورت گرفته است:

جدول 1 مقایسه بین انواع متغیرهای موجود در ادبیات موضوع

ردیف	متغیر	ماهیت متغیر	توزیع مربوطه	ماهیت پارامترهای توزیع
1	قطعی	قطعی	-	-
2	تصادفی	احتمالی	احتمال	قطعی
3	فازی	فازی	امکان	قطعی
4	عدم اطمینان	عدم اطمینان	عدم اطمینان	قطعی
5	فازی درجه دوم	فازی	امکان	فازی
6	تصادفی فازی	احتمالی	احتمال	فازی
7	فازی تصادفی	فازی	امکان	احتمالی
8	تصادفی عدم اطمینان (شانس)	احتمالی	احتمال	عدم اطمینان

3- معرفی حالت‌های جدید ممکن

همان‌گونه که در جدول 1 مشخص است، صرفنظر از نوع کاربرد و تعبیر و تفسیر متغیرها می‌توان حالت‌های ترکیبی دیگری نیز برای متغیرها در نظر گرفت که در ادامه به معرفی آنها خواهیم پرداخت.

3-1- متغیر عدم اطمینان تصادفی

اگر ماهیت متغیر عدم اطمینان و دارای یکی از توزیع‌های عدم اطمینان مانند خطی، زیگزاگ، نرمال و ... باشد ولی پارامترهای توزیع از تئوری احتمالات تبعیت کنند، متغیر عدم اطمینان تصادفی را خواهیم داشت؛ به طور مثال متغیری با توزیع عدم اطمینان زیگزاگ که پارامترهای توزیع آن دارای چگالی احتمال نرمال با پارامترهای قطعی باشد.

3-2- متغیر فازی عدم اطمینان

هرچند لیو در سال 2015 در کتاب تئوری عدم اطمینان خود ذکر کرده که تئوری امکان و تئوری عدم اطمینان به روش‌های متفاوتی درجه اعتقاد ذهنی را مدلسازی می‌کنند ولی ترکیب این دو تئوری با توجه به مطالب پیش گفته امکانپذیر می‌باشد. اگر متغیر دارای ماهیت فازی دارای یکی از توزیع‌های امکان مثلثی، ذوزنقه‌ای، نرمال و ... باشد ولی پارامترهای توزیع دارای توزیع عدم اطمینان باشند، متغیر فازی عدم

اطمینان را خواهیم داشت؛ به طور مثال متغیری با توزیع امکان مثلثی که پارامترهای توزیع آن دارای توزیع عدم اطمینان زیگزاگ باشد.

3-3- متغیر عدم اطمینان فازی

اگر متغیر دارای ماهیت عدم اطمینان دارای یکی از **توزیع‌های** عدم اطمینان خطی، زیگزاگ، نرمال و ... باشد ولی پارامترهای توزیع آن دارای توزیع امکان باشند، متغیر عدم اطمینان فازی را خواهیم داشت؛ به طور مثال متغیری با توزیع عدم اطمینان زیگزاگ که پارامترهای توزیع آن دارای توزیع امکان مثلثی باشد.

4-3- متغیر تصادفی درجه دوم

اگر متغیر دارای ماهیت احتمالی و دارای یکی از توزیع‌های چگالی احتمال یکنواخت، نمایی، نرمال و ... باشد ولی پارامترهای توزیع آن نیز دارای یکی از توزیع‌های چگالی احتمال باشند، متغیر تصادفی درجه دوم را خواهیم داشت؛ به طور مثال متغیری با توزیع چگالی احتمال نرمال که پارامترهای توزیع یعنی میانگین و انحراف معیار آن دارای توزیع احتمال یکنواخت باشند.

5-3- متغیر عدم اطمینان درجه دوم

اگر متغیر دارای ماهیت عدم اطمینان و دارای یکی از توزیع‌های عدم اطمینان خطی، زیگزاگ، نرمال و ... باشد ولی پارامترهای توزیع آن نیز دارای یکی از توزیع‌های عدم اطمینان باشد. متغیر عدم اطمینان درجه دوم را خواهیم داشت، به‌طور مثال متغیری با توزیع عدم اطمینان نرمال که پارامترهای توزیع آن نیز دارای توزیع عدم اطمینان زیگزاگ باشد.

6-3- تعمیم حالت‌های ترکیبی به سطوح بالاتر

به نظر می‌رسد از آن جایی که عدم اطمینان در انتهای طیف قرار دارد، متغیر عدم اطمینان درجه دوم می‌تواند تبیین بهتری از شرایط واقعی و پیچیده ارائه دهد. به‌دلیل اینکه توزیع‌های احتمال، امکان و عدم اطمینان مختلفی وجود دارند می‌توان ترکیبات مختلفی را با توجه به شرایط مسئله در نظر گرفت. همچنین می‌توان با توجه به درجه

پیچیدگی مسئله مورد مطالعه این نوع تعریف را به درجات بالاتر تعمیم داد و ترکیبات مختلفی را در هر سطح یا درجه به کار برد. در بخش بعدی با استفاده از مفهوم متغیر عدم اطمینان درجه دوم به معرفی نسخه جدیدی از مدل برنامه‌ریزی خطی خواهیم پرداخت.

4- مدل برنامه‌ریزی خطی عدم اطمینان درجه دوم و کاملاً نامطمئن

مدل برنامه‌ریزی خطی به فرم ماتریسی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} &Max\ Z = CX \\ &S.t: \\ &AX \le b \\ &X \ge 0 \end{aligned}$$

اگر در مدل فوق پارامترهای مدل از نوع عدم اطمینان درجه دوم باشند، به طور مثال همگی دارای توزیع عدم اطمینان زیگزاگ و با پارامترهای سه‌گانه که هر کدام از آنها نیز دارای توزیع عدم اطمینان زیگزاگ بوده باشند، مدل برنامه‌ریزی خطی از نوع عدم اطمینان درجه دوم را خواهیم داشت. در این حالت اگر به طور همزمان متغیرهای تصمیم مدل X هم دارای حالت عدم اطمینان درجه دوم باشند، به مدل برنامه‌ریزی خطی کاملاً نامطمئن درجه دوم خواهیم رسید.

5- مثال عددی

فرض کنید در مسئله انتخاب پورتفولیو بازده‌های سهام 6 سهم از شرکت‌های مفروض دارای توزیع عدم اطمینان زیگزاگ به صورت زیر باشند:

$$\begin{aligned} &\mathcal{Z}_i \sim (a_i, b_i, c_i) \\ &i = 1,2,3,4,5,6 \end{aligned}$$

حالا فرض کنید هریک از پارامترهای (a_i, b_i, c_i) نیز دارای توزیع عدم اطمینان زیگزاگ متفاوتی باشند؛ بنابراین متغیرهای عدم اطمینان درجه دوم زیر را با 54 پارامتر قطعی خواهیم داشت:

$\mathcal{Z}_1 \sim [(a_{11}, a_{12}, a_{13}), (b_{11}, b_{12}, b_{13}), (c_{11}, c_{12}, c_{13})]$
$\mathcal{Z}_2 \sim [(a_{21}, a_{22}, a_{23}), (b_{21}, b_{22}, b_{23}), (c_{21}, c_{22}, c_{23})]$
$\mathcal{Z}_3 \sim [(a_{31}, a_{32}, a_{33}), (b_{31}, b_{32}, b_{33}), (c_{31}, c_{32}, c_{33})]$
$\mathcal{Z}_4 \sim [(a_{41}, a_{42}, a_{43}), (b_{41}, b_{42}, b_{43}), (c_{41}, c_{42}, c_{42})]$
$\mathcal{Z}_5 \sim [(a_{51}, a_{52}, a_{53}), (b_{51}, b_{52}, b_{53}), (c_{51}, c_{52}, c_{53})]$
$\mathcal{Z}_6 \sim [(a_{61}, a_{62}, a_{63}), (b_{61}, b_{62}, b_{63}), (c_{61}, c_{62}, c_{63})]$

فرض کنید 6 بازده عدم اطمینان درجه دوم به صورت زیر باشند:

$\mathcal{Z}_1 \sim [\mathcal{Z}_{11} \sim (-0.2,1.2,1.3), \mathcal{Z}_{12} \sim (-0.2,3.0,3.3), \mathcal{Z}_{13} \sim (0.1,3.3,3.6)]$
$\mathcal{Z}_2 \sim [\mathcal{Z}_{21} \sim (-0.2,1.1,1.6), \mathcal{Z}_{22} \sim (-0.1,2.8,3.5), \mathcal{Z}_{23} \sim (0.6,3.5,4.2)]$
$\mathcal{Z}_3 \sim [\mathcal{Z}_{31} \sim (-0.3,1.3,1.6), \mathcal{Z}_{32} \sim (-0.3,3.0,3.9), \mathcal{Z}_{33} \sim (0.6,3.9,4.8)]$
$\mathcal{Z}_4 \sim [\mathcal{Z}_{41} \sim (-0.2,1.2,1.6), \mathcal{Z}_{42} \sim (-0.2,2.6,3.4), \mathcal{Z}_{43} \sim (0.6,3.4,4.2)]$
$\mathcal{Z}_5 \sim [\mathcal{Z}_{51} \sim (-0.3,1.4,1.5), \mathcal{Z}_{52} \sim (-0.4,3.1,3.9), \mathcal{Z}_{53} \sim (0.4,3.9,4.7)]$
$\mathcal{Z}_6 \sim [\mathcal{Z}_{61} \sim (-0.3,1.4,1.8), \mathcal{Z}_{62} \sim (-0.4,2.8,4.0), \mathcal{Z}_{63} \sim (0.8,4.0,5.2)]$

در صورتی که مدل انتخاب پورتفولیو را به صورت زیر در نظر بگیریم:

$\max_{x} \Phi^{-1}(1-\alpha)$
$subject\ to$
$\Phi(r) \leq \beta$
$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$
$x_i \geq 0, i = 1,2,\ldots,n$

که در آن تابع Φ ارائه‌دهنده توزیع عدم اطمینان نرخ بازده کلی $x^T\xi$ می‌باشد. بنابراین خواهیم داشت:

$a_1 = -0.2x_1 - 0.2x_2 - 0.3x_3 - 0.2x_4 - 0.3x_5 - 0.3x_6$
$a_2 = -0.2x_1 - 0.1x_2 - 0.3x_3 - 0.2x_4 - 0.4x_5 - 0.4x_6$
$a_3 = 0.1x_1 + 0.6x_2 + 0.6x_3 + 0.6x_4 + 0.4x_5 + 0.8x_6$
$b_1 = 1.2x_1 + 1.1x_2 + 1.3x_3 + 1.2x_4 + 1.4x_5 + 1.4x_6$
$b_2 = 3.0x_1 + 2.8x_2 + 3.0x_3 + 2.6x_4 + 3.1x_5 + 2.8x_6$
$b_3 = 3.3x_1 + 3.5x_2 + 3.9x_3 + 3.4x_4 + 3.9x_5 + 4.0x_6$
$c_1 = 1.3x_1 + 1.6x_2 + 1.6x_3 + 1.6x_4 + 1.5x_5 + 1.8x_6$
$c_2 = 3.3x_1 + 3.5x_2 + 3.9x_3 + 3.4x_4 + 3.9x_5 + 4.0x_6$
$c_3 = 3.6x_1 + 4.2x_2 + 4.8x_3 + 4.2x_4 + 4.7x_5 + 5.2x_6$

فرض کنید که سرمایه‌گذار 0,9 را به عنوان سطح اطمینان ایمن بپذیرد و نیازمند این باشد که بازده سرمایه‌گذاری حداکثر شود با معیار عدم اطمینان که کمتر از این سطح نباشد و $\beta = 0.4$, $r = 1$ باشد، سپس سه مدل به صورت‌های زیر خواهیم داشت:

مدل 1:

$$Max\ Z = 0.08x_1 + 0.06x_2 + 0.02x_3 + 0.08x_4 + 0.04x_5 + 0.04x_6$$
$$Subject\ to:$$
$$0.92x_1 + 0.84x_2 + 0.98x_3 + 0.92x_4 + 1.06x_5 + 1.06x_6 \geq 1$$
$$x_1 + x_2 + \cdots + x_6 = 1$$
$$x_i \geq 0, \quad i = 1,2, \dots ,6$$

با استفاده از نرم‌افزار CVX [15، صص 1-72] در محیط MATLAB جواب بهینه به صورت زیر به‌دست می‌آید:

Status: Solved
Optimal value (cvx_optval): +0.0571429
>> x=[x1 x2 x3 x4 x5 x6]
x =
0.2143 0.0000 0.0000 0.2143 0.2857 0.2857

مدل 2: با در نظر گرفتن جواب بهینه مدل 1 خواهیم داشت:

$$Max\ Z = 0.44x_1 + 0.48x_2 + 0.36x_3 + 0.36x_4 + 0.3x_5 + 0.24x_6$$
$$Subject\ to:$$
$$2.36x_1 + 2.22x_2 + 2.34x_3 + 2.04x_4 + 2.4x_5 + 2.16x_6 \geq 1$$
$$x_1 + x_2 + \cdots + x_6 = 1$$
$$x_1 \geq 0.2143$$
$$x_2 \geq 0$$
$$x_3 \geq 0$$
$$x_4 \geq 0.2143$$
$$x_5 \geq 0.2857$$
$$x_6 \geq 0.2857$$

جواب بهینه مدل 2 به صورت زیر خواهد بود:

Status: Solved
Optimal value (cvx_optval): +0.325718
>> x=[x1 x2 x3 x4 x5 x6]
x =
0.2143 0.0000 0.0000 0.2143 0.2857 0.2857

مدل 3: با در نظر گرفتن جواب بهینه مدل 2 خواهیم داشت:

$$Max\ Z = 0.74x_1 + 1.18x_2 + 1.26x_3 + 1.16x_4 + 1.1x_5 + 1.44x_6$$
$$Subject\ to:$$
$$2.66x_1 + 2.92x_2 + 3.24x_3 + 2.84x_4 + 3.2x_5 + 3.36x_6 \geq 1$$
$$x_1 + x_2 + \cdots + x_6 = 1$$
$$x_1 \geq 0.2143$$
$$x_2 \geq 0$$
$$x_3 \geq 0$$
$$x_4 \geq 0.2143$$
$$x_5 \geq 0.2857$$
$$x_6 \geq 0.2857$$

جواب بهینه مدل 3 به صورت زیر خواهد بود:

```
Status: Solved
Optimal value (cvx_optval): +1.13285
>> x=[x1 x2 x3 x4 x5 x6]
x =
   0.2143    0.0000    0.0000    0.2143    0.2857    0.2857
```

با در نظر گرفتن جواب هر سه مدل جواب بهینه مساله به صورت زیر خواهد بود:

$$x_1^* = 0.2143, x_2^* = 0, x_3^* = 0, x_4^* = 0.2143, x_5^* = 0.2857, x_6^* = 0.2857$$

و مقدار بهینه تابع هدف یک متغیر عدم اطمینان زیگزاگ به صورت زیر خواهد بود:

$$Z^* \cong \mathcal{Z} \sim (0.0571429, 0.325718, 1.13285\ )$$

اگر به جای متغیرهای قطعی x از متغیرهای عدم اطمینان استفاده می‌کردیم؛ جواب مربوطه برای مقادیر x نیز به صورت متغیرهای عدم اطمینان به‌دست می‌آمد. همچنین در سطح یا لایه دوم عدم اطمینان می‌توانستیم از توزیع‌های عدم اطمینان متنوع دیگری استفاده نماییم که به جهت سادگی در هر دو سطح متغیرهای عدم اطمینان زیگزاگ در نظر گرفته شد.

6- نتیجه‌گیری

در این مقاله ضمن مروری بر انواع متغیرهای موجود در ادبیات موضوع حوزه علم تصمیم‌گیری و بررسی ابعاد آنها به معرفی متغیرهای جدیدی مانند متغیر عدم اطمینان درجه دوم و تعمیم آن به سطوح بالاتر پرداختیم. سپس با استفاده از این مفهوم نسخه‌های جدیدی از مدل برنامه‌ریزی خطی مانند عدم اطمینان درجه دوم و کاملاً نامطمئن را معرفی کردیم. در جدول 2 خلاصه‌ای از متغیرهای مطرح شده ارائه شده است.

جدول 2 مقایسه متغیرهای جدید مطرح شده

ردیف	متغیر	ماهیت متغیر	توزیع مربوطه	ماهیت پارامترهای توزیع
1	عدم اطمینان تصادفی	عدم اطمینان	عدم اطمینان	احتمالی
2	فازی عدم اطمینان	فازی	امکان	عدم اطمینان
3	عدم اطمینان فازی	عدم اطمینان	عدم اطمینان	فازی
4	تصادفی درجه دوم	احتمالی	احتمال	احتمالی
5	عدم اطمینان درجه دوم	عدم اطمینان	عدم اطمینان	عدم اطمینان

در ادامه با مثالی عددی کاربرد مفاهیم جدید ارائه شد. همان‌گونه که در تئوری‌های مدیریت، دیدگاه کلاسیک و یافتن یک بهترین راه پاسخگوی مسائل مدیریتی نخواهد بود، مشخص گردید که مسائل پیچیده موجود در دنیای تصمیم‌گیری واقعی نیز باید جواب‌های بهینه نامطمئن به همراه داشته باشند. در پژوهش های آینده می‌توان به بررسی ترکیبات متنوع‌تر و با سطوح بالاتر متغیرها و نیز مدل برنامه‌ریزی کاملاً نامطمئن با سطوح و توزیع‌های مختلف پرداخت.

7- منابع

[1] D. Dubois (2006) Possibility theory and statistical reasoning, Computational Statistics & Data Analysis 51, pp: 47 – 69.

[2] L. A. Zadeh (1965) Information and Control 8, pp: 338-353.

[3] X. Huang (2007) "Two new models for portfolio selection with stochastic returns taking fuzzy information", *European Journal of Operation Research 180*, pp: 396 - 405.

[4] L. A. Zadeh (1978) Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility, Fuzzy Sets and Systems 1, pp: 3–28.

[5] B. Liu (2009) Theory and practice of uncertain programming, 3rd Edition, by UTLAB.

[6] J.-L. Verdegay (2003) Fuzzy sets based Heuristics for optimization, , SpringerVerlag Berlin Heidelberg New York.

[7] B. Liu (2002) *Theory and practice of uncertain programming*, Physica-Verlag, Heidelberg.

[8] L. Yan (2009) "Chance-constrained programming model for portfolio selection in uncertain environment", *Modern Applied Science*, Vol. 3, No. 10, pp: 89-95.

[9] B. Liu (2015) Uncertainty theory, Fifth Edition, Uncertainty Theory Laboratory.

[10] H. Kwakernaak (1978) Fuzzy random variables I, Inform. Sciences 15, pp: l-29.

[11] Kruse R., Meyer K. D. (1978) *Statistics with Vague Data*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.

[12] C. V. Negoita, D. Ralescu (1978) *Simulation, knowledge-based computing and fuzzy statistcs*, Van Nostrand Reinhold Company, New York.

[13] M. L. Puri, D. Ralescu (1986) "Fuzzy random variables", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 114, pp: 409 - 422.

[14] B. Liu, Y. K. Liu. (2003) "Fuzzy random variables: A scalar expected value operator", Fuzzy Optimization and Decision Making, 2 (2), pp: 143-160.

[15] M. C. Grant, S. P. Boyd (2015) The CVX Users' Guide Release 2.1, March 30.