راهبرد مدیریت مالی
سال پنجم، شماره هجدهم
پاییز ۱۳۹۶
صص ۲۶-۱

دانشگاه الزهرا (س)
دانشکده علوم اجتماعی و اقتصادی
تاریخ دریافت:۱۳۹۶/۰۴/۱۲
تاریخ تصویب: ۱۳۹۶/۰۶/۱۹

مطالعه تطبیقی مدل بهینه‌سازی پرتفوی چند دوره‌ای چندهدفه در محیط اعتبار فازی با معیارهای متفاوت ریسک[1]

امیر شیری قهی،[2] حسین دیده خانی،[3] کاوه خلیلی دامغانی[4] و پرویز سعیدی[5]

چکیده

هدف از پژوهش حاضر مقایسه تطبیقی مدل‌های بهینه‌سازی پرتفوی در محیط اعتبار فازی می‌باشد. به این منظور سه مدل بهینه‌سازی پرتفوی طراحی گردید. به‌جای در نظر گرفتن مدل تک دوره‌ای پرتفوی از مدل سه دوره‌ای استفاده گردید. معیارهای ریسک استفاده‌شده در مدل‌ها عبارت‌اند از ارزش در معرض خطر، ارزش در معرض خطر میانگین و نیم آنتروپی. همچنین به‌منظور نزدیک شدن مدل به دنیای واقعی سرمایه‌گذاری با در نظر گرفتن هزینه معاملات و سرمایه‌گذاری بخشی از ثروت در دارایی بدون ریسک علاوه بر محدودیت‌های اصلی، از محدودیت‌هایی نظیر، حداقل و حداکثر تخصیص ثروت به هر دارایی، حداقل و حداکثر تعداد سهام موجود در پرتفوی و همچنین از آنتروپی نسبت برای رسیدن به حداقل درجه تنوع‌بخشی استفاده شد. هر سه مدل این پژوهش با استفاده از الگوریتم MOPSO اجرا گردید. نتایج حاصل از ارزیابی عملکرد پرتفوهای بهینه با در نظر گرفتن معیارهای شارپ و ترینر نشان داد، مدل Mean-AVaR نسبت به دو مدل Mean-Semi Entropy و Mean-VaR عملکرد بهتری دارد.

واژه‌های کلیدی: بهینه‌سازی پرتفوی، تئوری اعتبار فازی، ریسک، الگوریتم MOPSO
طبقه‌بندی موضوعی: G11, G32,D53

---

۱. کد DOI مقاله: 10.22051/jfm.2017.16640.1450
۲. گروه مدیریت مالی، واحد علی‌آباد کتول، دانشگاه آزاد اسلامی، علی‌آباد کتول، ایران، Email: amir_shiri1212@yahoo.com
۳. گروه مهندسی مالی، واحد علی‌آباد کتول، دانشگاه آزاد اسلامی، علی‌آباد کتول، ایران، نویسنده مسئول، Email: h.didehkhani@gmail.com
٤. گروه مهندسی صنایع، واحد تهران جنوب، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران Emil:kaveh.khalili@gmail.com
۵. گروه مدیریت مالی، واحد علی‌آباد کتول، دانشگاه آزاد اسلامی، علی‌آباد کتول، ایران، Email: Dr.parvizsaeedi@yahoo.com

مقدمه

تئوری پرتفوی و انتخاب سبد سهام بهینه پس از اولین تلاش‌های مارکویتز (۱۹۵۲)، همواره به‌عنوان یکی از زمینه‌های جذاب پژوهشی برای پژوهشگران و همچنین سرمایه‌گذاران در بازارهای مالی بوده است. مسئله انتخاب سبد سهام و یا بهینه‌سازی پرتفوی شامل طراحی مدل مناسب بهینه‌سازی و انتخاب معیارهای مناسب جهت انتخاب سهام می‌باشد. از اولین معیارهایی که توسط مارکویتز در مدل سنتی پرتفوی مورداستفاده قرار گرفت نرخ بازده مورد انتظار و واریانس نرخ بازده پرتفوی می‌باشد. منطق مورداستفاده در این مدل این بود که واریانس به‌عنوان یک معیار پراکندگی می‌تواند سنجشگر میزان ریسک یک پرتفوی باشد. نظری که بعدها توسط پژوهشگران بسیاری موردنقد قرار گرفت (گروتولد و هالرباخ، ۱۹۹۹). باوجوداین نقدها واریانس توسط خود مارکویتز (۱۹۵۹) به نیمه واریانس[1] تبدیل گردید. اشکال اساسی واریانس به‌عنوان یک معیار ریسک این است که انحرافات مطلوب و انحرافات نامطلوب را مانند هم در نظر می‌گرفت؛ منطقی که با اصول مالی و سرمایه‌گذاری همخوانی نداشت. واژه ریسک طی دهه‌های اخیر دستخوش تغییرات بسیاری شد و برای آن معیارهای متفاوتی در شرایط مختلف معرفی و در مسئله انتخاب پرتفوی از آن استفاده شد.

یکی دیگر از چالش‌ها و موضوعات موردعلاقه در سالیان اخیر در بین پژوهشگران مسئله بهینه‌سازی پرتفوی چند دوره‌ای می‌باشد. در مدل‌های تک دوره‌ای سرمایه‌گذار در ابتدای دوره اقدام به سرمایه‌گذاری نموده و تا پایان دوره امکان تجدیدنظر در تخصیص دوباره ثروت در دارایی‌های دیگر را ندارد؛ اما در عمل، سرمایه‌گذاران دائماً در حال ارزیابی و تخصیص مجدد ثروت از دوره‌ای به دوره دیگر با تغییر شرایط بازار و ترجیحات خود می‌باشند. مدل‌های تک دوره‌ای ماهیت پویای انتخاب سبد سرمایه‌گذاری و مسائل مربوط به تجدیدنظر در تخصیص دارایی را نادیده می‌گیرد؛ اما در مدل‌های چند دوره‌ای امکان تخصیص مجدد ثروت در ابتدای هر دوره وجود دارد. این مدل اولین بار توسط ماسین (۱۹۶۸) معرفی گردید.

بحث عدم قطعیت همواره به‌عنوان یکی از چالش‌های اساسی در بازارهای مالی و محیط‌های سرمایه‌گذاری مطرح بوده است. اولین ویژگی یک دارایی مالی عدم قطعیت و عدم اطمینان نرخ بازده آن می‌باشد. به‌طوری که مفهوم ریسک منبعث از همین ویژگی در بازارهای مالی می‌باشد. اگر عدم قطعیت وجود نداشته باشد به‌تبع آن ریسکی نیز وجود نخواهد داشت. برای مواجهه با این عدم

1. Semi variance

قطعیت در مسائل مربوط به بهینه‌سازی پرتفوی چندین رویکرد وجود داشته است که می‌توان به رویکرد تئوری احتمال رویکرد بهینه‌سازی استوار و همچنین رویکرد تئوری فازی اشاره نمود.

بنابراین با توجه به موارد و چالش‌های بیان‌شده هدف از این پژوهش ابتدا طراحی و به‌کارگیری سه مدل برنامه‌ریزی ریاضی چندهدفه برای انتخاب یا بهینه‌سازی سبد سهام چند دوره‌ای با معیارهای ریسک مانند ارزش در معرض خطر میانگین (AVaR) به‌عنوان معیار ریسک منسجم، ارزش در معرض خطر (VaR) و نیم آنتروپی می‌باشد؛ به این منظور پارامترهای مورداستفاده در این پژوهش نظیر نرخ بازده مورد انتظار دارایی‌ها در دوره‌های مختلف به‌صورت اعداد فازی مثلثی[1] در نظر گرفته می‌شود. همچنین علاوه بر محدودیت‌های اصلی در مسئله بهینه‌سازی پرتفوی از محدودیت‌های دیگری نظیر حداقل درجه تنوع‌بخشی پرتفوی، حداقل و حداکثر میزان سرمایه‌گذاری در دارایی‌ها، حداقل و حداکثر تعداد سهام مجاز نگهداری شده در پرتفوی و در نظر گرفتن هزینه معاملات و تخصیص بخشی از ثروت به دارایی بدون ریسک جهت نزدیک شدن مدل‌ها به دنیای واقعی سرمایه‌گذاری استفاده شد. با توجه ماهیت غیرخطی و چندهدفه مسئله بهینه‌سازی، از الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام ذرات چندهدفه (MOPSO) برای حل استفاده می‌گردد. در پایان مدل‌های توسعه داده‌شده با معیارهای ارزیابی عملکرد پرتفوی نظیر معیار شارپ و ترینر با یکدیگر مقایسه خواهند شد.

مبانی نظری و مروری بر پیشینه پژوهش

در این قسمت مروری خواهیم داشت بر معیارهای مختلفی که در مسائل بهینه‌سازی پرتفوی به‌عنوان ریسک در نظر گرفته‌شده و ویژگی‌ها و تفاوت‌های آن‌ها را بیان می‌کنیم.

معیارهای ریسک منسجم[2]

با معرفی ارزش در معرض خطر (VaR) و پذیرش آن به‌عنوان معیار ریسک در دهه ۱۹۹۰، این معیار به‌صورت گسترده‌ای برای بیان ریسک مالی در میان فعالان بازار سرمایه و به‌ویژه مدیران پرتفوی و پژوهشگران (کمپیل و همکاران،۲۰۰۱) استفاده شد. از مزیت‌های ارزش در معرض خطر نسبت به معیارهای انحراف می‌توان به حساسیت نسبت به انتقال اشاره کرد به این معنی که با اضافه شدن یک مقدار مثبت (مانند سود)، ارزش در معرض خطر به همان میزان کاهش پیدا می‌کند.

1. Fuzzy triangular numbers
2. coherent risk measure

$$VaR(X + C) = VaR(X) - C$$

اما از معایب ارزش در معرض خطر می‌توان به عدم در نظر گرفتن خاصیت تنوع‌بخشی اشاره کرد. به این معنی که VaR پرتفوی از مجموع VaR دارایی‌های تشکیل‌دهنده آن پرتفوی بیشتر می‌باشد. ارزش در معرض خطر به دلیل فقدان ویژگی جمع‌پذیری جزئی[1] نمی‌توانست به‌عنوان یک شاخص ریسک منسجم مورداستفاده قرار گیرد (آرتزنر و همکاران، ۱۹۹۹).

$$VaR(X + Y) > VaR(X) + VaR(Y)$$

علی‌رغم تمام مزایایی که ارزش در معرض خطر به‌عنوان یک معیار ریسک دارد به دلیل عدم در نظر گرفتن خاصیت تنوع‌بخشی برخی از ویژگی‌های موردنظر برای ریسک پرتفوی را برآورده نمی‌سازد. آرتزنر و همکاران (۱۹۹۹) یک سری از اصول قراردادی برای یک معیار ریسک منسجم ارائه دادند. (اگر $\rho(X)$ به‌عنوان تابع ریسک در نظر بگیریم).

ویژگی اول: خاصیت یکنواختی[2] $\rho(Y) \leq \rho(X), \text{ if } Y \geq X$

ویژگی دوم: همانندی مثبت[3] $\rho(0) = 0, \rho(\lambda X) = \lambda\rho(X), \quad \lambda > 0$

ویژگی سوم: زیرجمع پذیری $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$

ویژگی چهارم : بی‌تفاوتی[4] $\rho(X + C) = \rho(X) - C, \quad C \in R$

خاصیت اول بیان می‌کند اگر در تمامی حالات ممکن بازدهی پرتفوی Y از بازدهی پرتفوی X بیشتر باشد در این حالت ریسک پرتفوی Y هیچ‌گاه بیشتر از ریسک پرتفوی X نخواهد بود.

خاصیت دوم اشاره دارد بر این‌که افزایش یا کاهش در بازدهی پرتفوی ریسک آن را به همان میزان افزایش یا کاهش می‌دهد.

---

1. Subadditive
2. Monotonicity Property
3. Positive homogeneity
4. Invariance

خاصیت سوم در حقیقت همان خاصیت تنوع سازی پرتفوی می‌باشد و خاصیت چهارم بیان‌کننده این موضوع است که اضافه شدن یک مقدار ثابت همانند یک اوراق بهادار با درآمد ثابت، ریسک را تغییر می‌دهد اگر این مقدار ثابت مثبت باشد، اضافه شدن آن منجر به کاهش ریسک خواهد شد.

کاربرد آنتروپی در مالی

آنتروپی درجه سختی پیش‌بینی مقدار خاصی که یک متغیر خواهد گرفت را می‌سنجد. فیلیپاتوس و ویلسون (۱۹۷۲) از نخستین پژوهشگرانی بودند که از مفهوم آنتروپی در انتخاب پرتفوی استفاده کردند. آن‌ها یک مدل میانگین - آنتروپی را در مقایسه با مدل‌های سنتی ارائه دادند. از آن زمان بسیاری از پژوهشگران تئوری انتخاب پرتفوی را با مفهوم آنتروپی پرمحتواتر ساختند و انواع مختلفی از آنتروپی را پیشنهاد داده و در مسائل مالی از آن استفاده کردند. ازجمله کاربردهای آنتروپی در مسئله بهینه‌سازی پرتفوی می‌توان به استفاده از آنتروپی به‌عنوان معیار ریسک (یوستا و کانتار، ۲۰۱۱) اشاره نمود. آنتروپی در بیان عدم قطعیت بازده، هر دو حد بالا و پایین بازده را در نظر می‌گیرد، عدم قطعیت بازده‌ای که برای سرمایه‌گذار نامطلوب است، بازده‌های کمتر از بازده مورد انتظار می‌باشد. به این منظور ژو و همکاران(۲۰۱۶) نیم آنتروپی فازی[1]را معرفی و به‌عنوان معیار ریسک در مسئله بهینه‌سازی پرتفوی استفاده نمودند.

آنتروپی به‌عنوان یک معیار پذیرفته‌شده برای اندازه‌گیری درجه تنوع‌بخشی پرتفوی نیز استفاده‌شده است (کاپور، ۱۹۹۰). درجه تنوع‌بخشی پرتفوی با استفاده از آنتروپی نسبت[2]اندازه‌گیری می‌شود. همچنین از آنتروپی در قیمت‌گذاری دارایی‌ها، قیمت‌گذاری اختیار معامله و دیگر مشتقات مالی استفاده‌شده است. (ژو و همکاران،۲۰۱۳).

در مجموع می‌توان گفت با معرفی معیارهای پراکندگی و انحراف، در حقیقت انحراف معیار، میانگین قدر مطلق انحرافات(MAD)، نیم انحراف مطلق و معیارهای انحراف روبه پایین مانند نیم واریانس با عنایت به خواص(۱) انتقال مثبت[3] (۲) ، همگنی مثبت[4] و (۳) مثبت بودن(نامنفی بودن)[5] (۴) زیر جمع‌پذیری[6] و (۵) بی‌تفاوتی نسبت به انتقال[7] به‌عنوان معیارهای پراکندگی و انحراف طبقه می‌شوند (راکفلر و همکاران،

1. Fuzzy semi-Entropy
2. proportion entropy
3. Positive shift
4. Positive homogeneity
5. Positivity
6. Subadditivity
7. Translation invariance

۲۰۰۶؛ راشف و همکاران، ۲۰۰۸). هرچند یک معیار انحراف روبه پایین بسیار نزدیک به یک معیار ریسک می‌باشد اما به دلیل برآورده نکردن خاصیت بی‌تفاوتی نسبت به انتقال نمی‌تواند به‌عنوان معیار ریسک در نظر گرفته شود. (راشف و همکاران، ۲۰۰۸) این نقص در معرفی معیار ارزش در معرض خطر (VaR) وجود ندارد. از طرفی معیار نیم آنتروپی به‌عنوان معیار ریسک، برخلاف نیم واریانس که انحرافات نامطلوب را در نظر می‌گیرد، عدم قطعیت نامطلوب رسیدن بازده پرتفوی به میزان خاصی را اندازه‌گیری می‌کند.

پیشینه پژوهش

در این بخش عمده پژوهش‌های صورت گرفته در زمینه بهینه‌سازی پرتفوی در محیط فازی موردبررسی قرار می‌گیرد.

لی و انجی (۲۰۰۰) مسئله بهینه‌سازی پرتفوی چند دوره‌ای را با استفاده از رویکرد برنامه‌ریزی پویا در دوره‌های زمانی پیوسته ارائه دادند. ژو و همکاران (۲۰۰۴) مسئله انتخاب پرتفوی چند دوره‌ای را با در نظر گرفتن ورشکستگی توسعه دادند. چن (۲۰۰۵) مدل بهینه‌سازی چند دوره‌ای را با استفاده از ارزش در معرض خطر میانگین به‌عنوان معیار ریسک ارائه داد. وی و یه (۲۰۰۷) مدل چند دوره‌ای میانگین واریانس را تحت کنترل ریسک ورشکستگی ارائه نمودند. گیر و همکاران (۲۰۰۹) از رویکرد برنامه‌ریزی خطی تصادفی در بهینه‌سازی پرتفوی چند دوره‌ای استفاده نمود. چن و سانگ (۲۰۱۲) مدل انتخاب پرتفوی چند دوره‌ای بر مبنای مدل چندعاملی با در نظر گرفتن ریسک ورشکستگی توسعه دادند. هوانگ (۲۰۰۸) مدل‌های انتخاب پرتفوی میانگین ـ واریانس، میانگین ـ نیم واریانس و میانگین– منحنی ریسک را مطرح نمود. لی و همکاران (۲۰۱۰،۲۰۰۹) الگوریتم‌های هوشمند ترکیبی را برای حل مدل‌های فازی میانگین ـ واریانس و میانگین ـ واریانس ـ چولگی انتخاب پرتفوی طرح و پیشنهاد نمودند. برخی از پژوهشگران به بررسی محدودیت‌های استقراضی پرداخته‌اند. به‌عنوان‌مثال، دنگ و لی (۲۰۱۲) یک پرتفوی میانگین ـ واریانس فازی را با محدودیت استقراضی پیشنهاد نمودند. سجادی و همکاران (۲۰۱۱) انتخاب پرتفوی چند دوره‌ای فازی با نرخ‌های متفاوت برای قرض کردن و قرض دادن را پیشنهاد کردند.

پور احمدی و نجفی (۱۳۹۴) بهینه‌سازی تک دوره‌ای را به بهینه‌سازی پویا و چند دوره‌ای ارتقا داده و ضمن در نظر گرفتن هزینه معاملات کارایی به این نتیجه رسیدند مدل چند دوره‌ای در بلندمدت عملکرد بهتری نسبت به مدل تک دوره‌ای دارد.

همایی‌فر و روغنیان (۱۳۹۵) مدل میانگین –ارزش در معرض خطر شرطی را با برنامه‌ریزی آرمانی مدل‌سازی نمودند و درنهایت مدل پویای ارائه‌شده را با مدل قطعی مقایسه نمودند و به این نتیجه رسیدند با مدل ارائه‌شده به پاسخ‌های کاراتر و کاربردی‌تری دست پیدا می‌کنند.

کاظمی و همکاران (۱۳۹۶) با استفاده از تحلیل پوششی داده‌ها، مسئله بهینه‌سازی سبد سهام را با در نظر گرفتن ارزش در معرض خطر بر روی کارایی متقاطع به کار گرفته‌اند. نتایج نشان داد معیار شارپ عملکرد بهتری برای روش پیشنهادی نسبت به روش‌های دیگر نشان داد.

در جدول ۱ برخی از مهم‌ترین پژوهش‌های انجام‌شده در خصوص بهینه‌سازی چند دوره‌ای پرتفوی در محیط فازی در سال‌های اخیر برای مقایسه فهرست شده است.

تئوری اعتبار فازی

به دلیل وجود معایبی در نظریه امکان مجموعه‌های فازی نظیر عدم وجود خاصیت خود-دوگانگی، رویکرد نوینی در این زمینه با عنوان تئوری اعتبار فازی توسط لیو و لیو (۲۰۰۲) به‌عنوان یک گزینه رقیب برای تئوری امکان مجموعه فازی، ارائه گردید. با استفاده از تئوری امکان هنگامی‌که سرمایه‌گذاران میزان امکان رسیدن پرتفوی به بازده هدف را می‌دانند، نمی‌توانند میزان امکان حادثه مخالف را بشناسند یعنی حادثه‌ای که پرتفوی نتواند به بازده هدف برسد؛ این مسئله سرمایه‌گذاران را سردرگم و نگران می‌کند. لیو در سال ۲۰۰۴ یک تئوری جایگزین برای نظریه امکان ارائه داد به‌طوری‌که دارای خاصیت خود-دوگانگی بود. این تئوری به تئوری اعتبار فازی مشهور گردید. امتیاز معیار اعتبار، برآورده ساختن خاصیت خود-دوگانگی[1] است که پس از توسعه آن، این رویکرد به‌طور وسیعی در بهینه‌سازی پرتفوی در محیط فازی نیز بکار گرفته شد.

روش‌شناسی پژوهش

فرآیند مدل‌سازی پژوهش حاضر مبتنی بر ۴ گام اصلی است. در گام اول اهداف و شاخص‌های مسئله بهینه‌سازی پرتفوی را بر اساس پیشینه پژوهش و ماهیت کاربردی مسئله حاضر موردبررسی و درنهایت شاخص‌های اصلی انتخاب می‌گردد. سپس در مرحله دوم هر یک اهداف و محدودیت‌ها را در حالت عدم قطعیت و ابهام و بر اساس اصول تئوری اعتبار فازی برای حالتی که نرخ بازده مورد انتظار سهام به‌صورت عدد فازی مثلثی است به دست می‌آید و در مرحله سوم سه مدل چندهدفه فازی مبتنی بر معیارهای انتخاب‌شده طراحی می‌کنیم و درنهایت روش فرا ابتکاری به کار گرفته‌شده برای حل مسئله تشریح و نتایج مدل‌ها با یکدیگر مقایسه می‌گردد.

1. Self-Dual

روش سنجش اهداف پژوهش، مبتنی بر تئوری اعتبار

در این بخش اهداف مورداستفاده در پژوهش معرفی و نحوه اندازه‌گیری آن بیان می‌گردد.

معیار	نحوه اندازه‌گیری اهداف در مسئله بهینه‌سازی فازی پرتفوی
ارزش مورد انتظار فازی[1] (لیو لیو، ۲۰۰۸)	$E[\xi]=\dfrac{a+2b+c}{4}$
ارزش در معرض خطر فازی (پنگ، ۲۰۱۱)	$\xi VaR(\alpha)=\begin{cases}2(a-b)\alpha-a & \text{if } \alpha\le 0.5 .\\ 2(b-c)\alpha+c-2b. & \text{if } \alpha>0.5.\end{cases}$
ارزش در معرض خطر میانگین[2] فازی (پنگ، ۲۰۱۱)	$\xi AVaR(\alpha)=\begin{cases}(a-b)\alpha-a & \text{if } \alpha\le 0.5.\\ c-2b-\dfrac{1}{4\alpha}(a-2b+c)+(b-c)\alpha. & \text{if } \alpha>0.5.\end{cases}$
نیم آنتروپی[3] فازی (ژو و همکاران ،۲۰۱٦)	$S_h(\xi)\begin{cases}(b-a)\rho-(b-a)\zeta(\rho). & if\ \dfrac{a+2*b+c}{4}\le b\\ \dfrac{b-a}{2}+(c-b)\zeta(\tau). & if\ \dfrac{a+2*b+c}{4}>b\end{cases}$ $\zeta(x)=x^2\ln x-(1-x)^2\ln(1-x)$ $\rho=(2b+c-3a)/8(b-a)$ و $\tau=(3c-2b-a)/8(c-b)$

مدل‌سازی پرتفوی مبتنی بر نظریه اعتبار

در این بخش مدل چند هدفه پژوهش شامل اهداف، محدودیت‌ها پارامترها و متغیرهای مدل بیان می گردد.

مفروضات مدل‌سازی

قیمت‌ها مستقل از هم فرض می‌شوند.

1. Fuzzy Expected value
2. Average value at Risk
3. Semi-Entropy

جدول ۱. مقایسه پژوهش حاضر با پژوهش‌های انجام‌شده در زمینه بهینه‌سازی پرتفوی در سال‌های اخیر

پژوهشگر (پژوهشگران)	افق سرمایه گذاری	روش حل	چارچوب نظریه	معیار ریسک	تعداد اهداف	نوع داده‌های مورداستفاده	در نظر گرفتن هزینه معاملات	تخصیص بخشی از سرمایه در دارایی بدون ریسک	محدودیت حداقل درجه تنوع‌بخشی
یائو و همکاران (۲۰۱۶)	چند دوره‌ای	برنامه‌ریزی پویا	تئوری احتمال	واریانس	تک هدفه	قطعی	×	×	×
مهلاوات(۲۰۱۶)	چند دوره‌ای	برنامه ریزی آرمانی	تئوری اعتبار	آنتروپی فازی	چندهدفه	فازی	√	×	×
جیو و همکاران(۲۰۱۶)	چند دوره‌ای	شبیه‌سازی فازی بر مبنای الگوریتم ژنتیک (FSGA)	تئوری اعتبار	واریانس فازی	تک هدفه	فازی	√	√	×
دیمیگوئل و همکاران(۲۰۱۶)	چند دوره‌ای	–	تئوری احتمال	واریانس	تک هدفه	قطعی	√	×	×
کونگ و اوسترلی (۲۰۱۶)	چند دوره‌ای	شبیه‌سازی مونت کارلو	تئوری احتمال	واریانس	تک هدفه	قطعی	×	√	×
ورچر و برمودز (۲۰۱۵)	تک دوره‌ای	الگوریتم ژنتیک	تئوری اعتبار	نیم قدر مطلق انحرافات	چندهدفه	فازی	×	×	×
لیو و همکاران (۲۰۱۶)	چند دوره‌ای	الگوریتم ترکیبی pso	تئوری اعتبار	انحرافات مطلق روبه پایین	چندهدفه	فازی	√	×	×
لیو و ژانگ (۲۰۱۵)	چند دوره‌ای	الگوریتم ژنتیک	تئوری امکان	نیم واریانس فازی	چندهدفه	فازی	√	×	√
ژانگ و ژانگ(۲۰۱۴)	چند دوره‌ای	روش تکراری تقریبی گسسته	تئوری امکان	میانگین قدر مطلق انحرافات (MAD)	تک هدفه	فازی	√	√	×
ژانگ و همکاران (۲۰۱۴)	چند دوره‌ای	الگوریتم تکاملی تفاضلی	تئوری امکان	نیم قدر مطلق انحرافات روبه پایین	تک هدفه	فازی	√	×	√
لیو و همکاران(۲۰۱۳)	چند دوره‌ای	الگوریتمPSO	تئوری امکان	واریانس	تک هدفه	فازی	√	×	√
لیو و همکاران(۲۰۱۲)	چند دوره‌ای	TOPSIS	تئوری امکان	واریانس و کشیدگی	چندهدفه	فازی	√	×	×
پژوهش حاضر	**چند دوره‌ای**	**MOPSO**	**تئوری اعتبار**	**ارزش در معرض خطر میانگین(AVaR)- ارزش در معرض خطر- نیم آنتروپی**	**چندهدفه**	**فازی**	√	√	√

- عایدی غیرقطعی است و توسط عدد فازی مثلثی مدل می‌شوند.
- آنتروپی نسبت به‌عنوان معیاری برای درجه تنوع‌بخشی در نظر گرفته می‌شود.
- برنامه‌ریزی در یک افق زمانی چند دوره‌ای انجام می‌شود.
- فروش استقراضی مجاز نیست.
- هزینه معاملات برای خریدوفروش در نظر گرفته می‌شود.
- سرمایه‌گذار بخشی از ثروت خود را به دارایی بدون ریسک تخصیص می‌دهد.
- در هر مدل اهداف دوگانه هستند. هدف اول حداکثر سازی ثروت و هدف دوم حداقل نمودن ریسک می‌باشد.
- حد پایین و بالای سرمایه‌گذاری در هر یک از دارایی‌ها در هر دوره در نظر گرفته‌شده است.
- حد پایین و بالای تعداد سهام موجود در پرتفوی در هر دوره در نظر گرفته‌شده است.
- حداقل میزان بازدهی مطلوب سرمایه‌گذار در هر دوره مشخص است.
- حد پایین سطح تنوع‌بخشی در کل دوره ثابت و مشخص است.

تشریح مسئله و نمادهای مدل

فرض می‌کنیم سرمایه‌گذار ثروت اولیه (W_1) خود را ه n دارایی تخصیص دهد و ثروت پایانی خود را در پایان دوره به دست آورد. با در نظر گرفتن هزینه معاملات، هدف سرمایه‌گذار حداکثر سازی ثروت پایانی در پایان دورۀ سرمایه‌گذاری است. درعین‌حال، تعداد مطلوب دارایی‌ها در پرتفوی نباید مساوی یا بیشتر از تعداد معین مجاز باشد. به‌منظور مقایسه سه مدل با معیارهای ریسک مختلف اجرا گردید. مدل میانگین –ارزش در معرض خطر شرطی(AVaR)، مدل میانگین –ارزش در معرض خطر(VaR) و مدل میانگین – نیم آنتروپی(Semi Entropy) اجرا و نتایج با یکدیگر مقایسه می گردد.

نمادهای مدل:

W_t : وت مورد انتظار در شروع دودوره tام $\mathrm{t} = 1.2. \ldots . \mathrm{T}$

x_{it}: میزان (نسبت از کل وجوه) سرمایه‌گذاری در دارایی i ام در دوره $\mathrm{t} = 1.2. \ldots . \mathrm{T}$ $i = 1.2 \ldots n$

$\mathrm{x}_{\mathrm{r_f t}}$: میزان (نسبت از کل وجوه) سرمایه‌گذاری در دارایی بدون ریسک در دوره $\mathrm{t} = 1.2. \ldots . \mathrm{T}$

ξ_{it}: نرخ بازده فازی دارایی i در دوره $\mathrm{t} = 1.2. \ldots . \mathrm{T}$ $i = 1.2 \ldots . n$

$\mathrm{r_f}$: نرخ بازده بدون ریسک

R_t: نرخ بازده خالص پرتفوی x_t در دوره t، $\mathrm{t} = 1.2. \ldots . \mathrm{T}$

$\mathrm{min\_r_t}$: حداقل نرخ بازده موردقبول پرتفوی در دوره $t = 1.2.\dots.T$

(α): ضریب اطمینان ارزش در معرض خطر میانگین

e درجه تنوع‌بخشی مورد انتظار پرتفوی

U_{it}: حداکثر نسبت سرمایه که می‌تواند به دارایی i در دوره t تخصیص داده شود. $t = 1.2.\dots.T$ $\quad i = 1.2\dots.n$

L_{it}: حداقل نسبت سرمایه که می‌تواند به دارایی i در دوره t تخصیص داده شود. $t = 1.2.\dots.T$ $\quad i = 1.2\dots.n$

$cost_{it}$: هزینه معاملات هر واحد دارایی i در پرتفوی $t = 1.2.\dots.T$ $\quad i = 1.2\dots.n$

K_t حداکثر تعداد دارایی که می‌تواند در پرتفوی وجود داشته باشد

h_t حداقل تعداد دارایی که می‌تواند در پرتفوی وجود داشته باشد.

$\mathcal{Y}_{it}$ متغیر باینری که نشان‌دهنده این است که دارایی i در پرتفوی t وجود دارد یا نه،

$$\mathcal{Y}_{it} = \begin{cases} 1 & \text{اگر دارایی } i \text{ در پرتفوی } t \text{ وجود داشته باشد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \qquad t = 1.2.\dots.T \quad i = 1.2\dots.n$$

مسئله انتخاب پرتفوی بر اساس تئوری اعتبار برای مدل Mean-AVaR به‌صورت زیر ارائه می‌گردد:

$$\text{Max } W_{T+1}=W_1\prod_{t=1}^{T}\left(1+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_{it}+2*b_{it}+c_{it}}{4}\right)x_{it}+r_f x_{r_f t}-\sum_{i=1}^{n}\mathrm{COST}_{it}\left(\left|x_{it}-x_{i(t-1)}\right|\right)\right) \quad (۱)$$

$$\text{Min } AVaR(\alpha)=\sum_{t=1}^{T}\left[\sum_{i=1}^{n}\left((c_{it}-2b_{it})-\frac{1}{4\alpha}(a_{it}-2b_{it}+c_{it})+(b_i-c_i)\alpha\right)x_{it}\right] \quad \alpha \geq 0.5 \quad (۲)$$

Subject to

$$\sum_{i=1}^{n} x_{it}+x_{r_f t}=1 \qquad i=1\dots n \quad t=1.\dots.T \quad (۳)$$

$$R_t \geq \mathrm{min\_r_t} \qquad t=1.\dots.T \quad (۴)$$

$$-\sum_{i=1}^{n} x_{it} Ln x_{it} \geq e \qquad t=1.\dots.T \qquad 0 \leq e \leq Ln\, n \quad (۵)$$

$$x_{it} \geq 0 \qquad i=1\dots n \;;\; t=1.\dots.T \quad (۶)$$

$$L_{it} \leq x_{it} \leq \mathcal{U}_{it} \qquad i=1\dots n \;; t=1.\dots.T \quad (۷)$$

$$h_t \leq \sum_{i=}^{n} \mathcal{Y}_{it} \leq K_t \qquad t=1.2.\dots.T. \quad (۸)$$

$$\mathcal{Y}_{it} \in [0.1] \qquad i=1\dots n \;; t=1.\dots.T \quad (۹)$$

$$R_t = \sum_{i=1}^{n} (\frac{a_{it}+2*b_{it}+c_{it}}{4}) x_{it-} \sum_{i=1}^{n} Cost_{it}(|x_{it} - x_{it-1}|); \quad t = 1. \ldots . T$$ *

تعریف عملیاتی

توابع هدف

(۱) هدف اول: حداکثر سازی ثروت در پایان دوره

(۲) هدف دوم: حداقل نمودن ریسک

تعریف عملیاتی

(۳) نرمال بودن وزن دارایی‌ها در سبد،

(۴) حداقل میزان بازدهی که پرتفوی باید به آن دست پیدا کند.

(۵) حداقل میزان درجه تنوع‌بخشی سبد

(۶) مجاز نبودن فروش استقراضی

(۷) حداقل و حداکثر میزان سرمایه‌گذاری در دارایی‌ها

(۸) حداقل و حداکثر تعداد سهام موجود در پرتفوی

(۹) متغیر باینری وجود یا عدم وجود یک دارایی در پرتفوی

* نرخ بازده خالص پرتفوی در هر دوره

مدل Mean –VaR به‌صورت زیر ارائه می گردد:

$$\text{Max } W_{T+1}=W_1 \prod_{t=1}^{T} \left(1+\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a_{it}+2*b_{it}+c_{it}}{4}\right) x_{it}+r_f x_{r_f t} - \sum_{i=1}^{n} \text{COST}_{it}\left(\left|x_{it}-x_{i(t-1)}\right|\right) \right)$$

$$\text{Min } VaR(\alpha) = \sum_{t=1}^{T} \left[\sum_{i=1}^{n} \big((2(b_{it} - c_{it})\alpha + c_{it} - 2b_{it})\big) x_{it} \right] \quad \alpha \geq 0.5$$

محدودیت‌های ۳ تا ۹؛

مدل Mean –Semi Entropy به‌صورت زیر ارائه می گردد:

$$\text{Max } W_{T+1}=W_1 \prod_{t=1}^{T} \left(1+\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a_{it}+2*b_{it}+c_{it}}{4}\right) x_{it}+r_f x_{r_f t} - \sum_{i=1}^{n} \text{COST}_{it}\left(\left|x_{it}-x_{i(t-1)}\right|\right) \right)$$

$$min\, S_h[\xi] = \begin{cases} \sum_{t=1}^{T}\left[\sum_{i=1}^{n}((b_{it}-a_{it})\rho_{it}-(b_{it}-a_{it})\zeta(\rho_{it}))x_{it}\right].\ \ if\ \ \frac{a_{it}+2*b_{it}+c_{it}}{4} \le b_{it} \\ \sum_{t=1}^{T}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{b_{it}-a_{it}}{2}+(c_{it}-b_{it})\zeta(\tau_{it})\right)x_{it}\right] if\ \ \frac{a_{it}+2*b_{it}+c_{it}}{4} > b_{it} \end{cases}$$

$$\rho_{it} = \frac{(2b_{it}+c_{it}-3a_{it})}{8(b_{it}-a_{it})}.i = 1\dots n\ \ ;\quad \mathrm{t} = 1.\dots.\mathrm{T}$$

$$\tau_{it} = \frac{(3c_{it}-2b_{it}-a_{it})}{8(c_{it}-b_{it})}.i = 1\dots n\ \ ;\ \mathrm{t} = 1.\dots.\mathrm{T}$$

محدودیت‌های ۳ تا ۹؛

تجزیه و تحلیل داده‌ها و اجرای مدل بهینه‌سازی پرتفوی چند دوره‌ای

در این بخش برای بیان ایده اصلی و همچنین قابلیت کاربرد مدل، مسئله بهینه‌سازی پرتفوی چند دوره‌ای، مثال عددی را ارائه می‌دهیم. فرض کنید سرمایه‌گذار در نظر دارد از میان سهام موجود در شاخص DOW30، که شامل ۳۰ شرکت می‌باشد. تعدادی سهام انتخاب نماید به‌طوری‌که در سه دوره که به‌صورت هفتگی در نظر گرفته‌شده بتواند ثروت خود را در پایان هر دوره تخصیص مجدد دهد تا اهداف مسئله پژوهش یابد. علاوه بر انتخاب سهام شرکت‌های مذکور سرمایه‌گذار می‌تواند بخشی از ثروت خود را در دارایی بدون ریسک سرمایه‌گذاری کند. برای محاسبه بازده‌های مثلثی فازی ما از روش تخمین ساده (ژانگ و همکاران، ۲۰۰۵) استفاده نمودیم(جدول ۲). دوره زمانی برای استخراج داده‌های تاریخی از ژانویه ۲۰۱۱ تا دسامبر ۲۰۱۶ می‌باشد که به‌صورت ۳ دوره دوساله در نظر گرفته‌شده و قیمت‌های بسته شدن هفتگی لحاظ گردیده است. بازده‌های مثلثی محاسبه‌شده در جدول ۲ نمایش داده‌شده است. ثروت ابتدایی ۱۰۰۰۰ دلار، نرخ بازده بدون ریسک ۰/۰۰۹ و هزینه معاملات۰/۰۰۳، حداقل درجه تنوع‌بخشی پرتفوی ۱/۵، حداقل نرخ بازدهی برای هر دوره ۰/۰۸ ، حداقل و حداکثر میزان سرمایه‌ای که می‌تواند به هر دارایی اختصاص داده شود به ترتیب صفر و ۳۰درصد و حداقل و حداکثر تعداد سهامی که می‌تواند در پرتفوی در هر دوره وجود داشته باشد به ترتیب ۵ و ۹ می‌باشد. برای حل مسئله بهینه‌سازی از نرم‌افزار MATLAB استفاده گردید.

جدول ۲. محاسبه بازده سهام شرکت‌ها در محیط فازی

ASSET	t=1	t=2	t=3
3M	(۰٫۰۲۰۵۲, ۰٫۰۶۰۵۲, ۰٫۰۷۹۴۸)	(۰٫۰۱۹۹۹, ۰٫۰۵۹۹۹, ۰٫۰۸۰۰۱)	(۰٫۰۱۵۹۳, ۰٫۰۶۳۳۱, ۰٫۰۸۴۰۷)
(AXP)	(۰٫۰۱۶۰۳, ۰٫۰۸۹۲۵, ۰٫۱۳۳۹۷)	(۰٫۰۲۵۷۹, ۰٫۰۹۰۷۶, ۰٫۱۲۴۲۱)	(-۰٫۰۰۲۴۶, ۰٫۱۰۲۳۲, ۰٫۱۳۲۴۶)
(AAPL)	(۰٫۰۱۸۴۶, ۰٫۱۰۷۳۶, ۰٫۱۳۱۵۴)	(۰٫۰۳۴۹۶, ۰٫۰۹۴۹۶, ۰٫۱۱۵۰۴)	(۰٫۰۰۳۳۱, ۰٫۰۹۶۳, ۰٫۱۱۶۶۹)
(CVX)	(۰٫۰۰۱۲۸, ۰٫۰۶۷۸۳, ۰٫۱۰۰۵۸)	(۰٫۰۱۹۷۹, ۰٫۰۹۱۶۷, ۰٫۱۱۰۲۱)	(-۰٫۰۱۶۹۶, ۰٫۰۹۲, ۰٫۱۱۵۳۱)
(CAT)	(-۰٫۰۱۹۶۴, ۰٫۱۰۰۵۲, ۰٫۱۳۳۱۲)	(۰٫۰۰۷۱۳, ۰٫۰۸۰۹۶, ۰٫۱۰۲۸۷)	(۰٫۰۳۰۸۶, ۰٫۰۸۰۸۶, ۰٫۰۹۹۱۳)
(CSCO)	(۰٫۰۰۵۰۶, ۰٫۰۶۱۹۳, ۰٫۰۸۱۵۹)	(-۰٫۰۰۲۹۲, ۰٫۰۸۰۸۷, ۰٫۱۵۱۷۴)	(۰٫۰۳۰۹۷, ۰٫۰۷۳۲۸, ۰٫۱۱۴۹)
(DD)	(۰٫۰۱۵۱۵, ۰٫۱۳۴۸۴, ۰٫۱۶۴۸۵)	(۰٫۰۰۹۱۷, ۰٫۰۷۲۴۴, ۰٫۰۹۰۷)	(۰٫۰۱۶۴۷, ۰٫۱۱۲۲۱, ۰٫۱۳۳۵۳)
(XOM)	(۰٫۰۱۲۳۶, ۰٫۰۷۲۶۵, ۰٫۰۸۷۶۴)	(۰٫۰۰۳۲۳, ۰٫۰۸۰۱۸, ۰٫۰۹۶۷۷)	(۰٫۰۰۸۸۹, ۰٫۰۶۸۳۹, ۰٫۰۹۱۱۱)
(GE)	(-۰٫۰۲۵۷۳, ۰٫۰۵۲۴۳, ۰٫۱۲۰۲۹)	(۰٫۰۰۴۲۷, ۰٫۰۵۷۱۶, ۰٫۰۹۰۶۸)	(-۰٫۰۰۸۸۳, ۰٫۰۷۷۸۴, ۰٫۱۵۱۹۸)
(INTC)	(-۰٫۰۰۶۰۸, ۰٫۰۶۵۰۹, ۰٫۱۲۱۳۱)	(۰٫۰۱۰۰۶, ۰٫۰۴۲۳۶, ۰٫۰۷۰۹۵)	(-۰٫۰۱۳۰۷, ۰٫۰۷۰۴۸, ۰٫۰۹۲۴۸)
(IBM)	(۰٫۰۰۵۷۹, ۰٫۰۶۵۲۸, ۰٫۰۸۴۲۱)	(-۰٫۰۰۹۹۷, ۰٫۰۷۹۷۳, ۰٫۰۹۹۹۷)	(-۰٫۰۱۵۴۹, ۰٫۰۵۸۴۷, ۰٫۱۱۴۹۶)
(JNJ)	(۰٫۰۱۲۳۹, ۰٫۰۴۸۸۳,۰٫۰۶۷۶۱)	(۰٫۰۱۶۳۱, ۰٫۰۵۳۱۲,۰٫۰۶۳۶۹)	(-۰٫۰۰۰۸۳, ۰٫۰۴۳۵۶,)۰٫۰۸۰۳۲
(JPM)	(۰٫۰۱۴۶۲, ۰٫۱۰۹۴۹,۰٫۱۳۵۳۸)	(۰٫۰۲۷۱۸, ۰٫۰۹۲۵۹, ۰٫۱۱۲۸)	(۰٫۰۱۷۵۳, ۰٫۱۰۵۲۱,۰٫۱۳۲۴۷)
(MCD)	(-۰٫۰۰۵۱۸, ۰٫۰۳۳۵۶,)۰٫۰۵۱۷۳	(-۰٫۰۰۳۹۸, ۰٫۰۵۵۱, ۰٫۰۷۳۹۸)	(-۰٫۰۰۸۸۴, ۰٫۰۵۳۸۸, ۰٫۰۸۲۹۷)
(MRK)	(-۰٫۰۱۱۶۱, ۰٫۰۶۱۹۲, ۰٫۰۸۱۵۷)	(۰٫۰۱۸۶۳, ۰٫۰۷۷۷۳, ۰٫۱۰۱۳۷)	(-۰٫۰۱۸۷۴, ۰٫۰۴۹۵۳, ۰٫۱۱۲۶۴)
(MSFT)	(۰٫۰۰۴۰۳, ۰٫۰۶۴۱۶, ۰٫۰۸۵۹۷)	(۰٫۰۲۱۳۲, ۰٫۱۲۱۰۳, ۰٫۱۴۸۶۸)	(۰٫۰۰۲۶۳, ۰٫۱۰۶۳۴, ۰٫۱۴۷۵۴)
(NKE)	(۰٫۰۱۰۳۶, ۰٫۱۰۷۲۶, ۰٫۱۲۹۶۴)	(۰٫۰۰۴۵۷, ۰٫۰۵۰۴۶, ۰٫۰۸۹۴۳)	(-۰٫۰۰۶۶۲, ۰٫۰۷۱۴۳, ۰٫۰۹۵۱۷)
(PFE)	(-۰٫۰۱۲۹۵, ۰٫۰۶۸۴۸, ۰٫۰۹۱)	(-۰٫۰۱۲۵۶, ۰٫۰۵۸۹۵, ۰٫۰۷۴۸۹)	(۰٫۰۱۱۲۹, ۰٫۰۵۱۷۳, ۰٫۰۷۵۰۴)
(BA)	(۰٫۰۲۶۹۸, ۰٫۰۸۶۹۸, ۰٫۱۰۸۷۴)	(۰٫۰۲۲۹۲, ۰٫۰۸۹۴۵, ۰٫۱۱۷۰۸)	(۰٫۰۱۷۶۵, ۰٫۱۱۱۳۱, ۰٫۱۳۲۳۵)
(KO)	(-۰٫۰۰۵۶۸, ۰٫۰۳۷۸۱, ۰٫۰۵۴۳۵)	(۰٫۰۱۸۳۱, ۰٫۰۵۸۵, ۰٫۰۸۱۶۹)	(۰٫۰۰۰۸۶, ۰٫۰۴۰۲۷, ۰٫۰۵۹۱۴)
(GS)	(۰٫۰۲۰۲۵, ۰٫۱۱۴۷۷, ۰٫۱۳۹۷۵)	(۰٫۰۱۷۶۳, ۰٫۰۸۷۳۸, ۰٫۱۳۲۳۷)	(-۰٫۰۰۲۹۷, ۰٫۰۸۷۴۲, ۰٫۱۶۲۲۴)
(HD)	(۰٫۰۲۵۷۹, ۰٫۱۲۵۷۴, ۰٫۱۵۴۲۱)	(۰٫۰۰۱۰۴, ۰٫۰۴۶۵, ۰٫۰۸۶۶۶)	(۰٫۰۰۷۴۹, ۰٫۰۷۱۶۸, ۰٫۰۹۲۵۱)
(PG)	(۰٫۰۰۴۸۱, ۰٫۰۴۳۳۲, ۰٫۰۵۷۳۶)	(۰٫۰۱۱۰۱, ۰٫۰۷۳۵۴, ۰٫۰۸۸۹۹)	(-۰٫۰۰۵۱۱, ۰٫۰۴۹۱۷, ۰٫۰۶۱۰۸)
(TRV)	(۰٫۰۲۱۶۸, ۰٫۰۸۰۶۴, ۰٫۰۹۶۹۱)	(۰٫۰۱۷۶۳, ۰٫۰۵۳۸۳, ۰٫۰۸۲۳۷)	(۰٫۰۰۷۳۳, ۰٫۰۵۸۲, ۰٫۰۷۲۶۷)
(DIS)	(-۰٫۰۰۱۶۲, ۰٫۰۷۱۹۷, ۰٫۰۹۴۱۳)	(۰٫۰۲۰۸۸, ۰٫۰۴۳۴, ۰٫۰۶۵۴۵)	(۰٫۰۰۵۳۵, ۰٫۰۹۴۱, ۰٫۱۱۶۲۴)
(UTX)	(-۰٫۰۲۳۴۷, ۰٫۰۷۱۵۵, ۰٫۱۰۰۸۹)	(-۰٫۰۰۱۴۸, ۰٫۰۳۶۷۸, ۰٫۰۵۱۴۶)	(۰٫۰۰۳۰۴, ۰٫۰۸۶۲۵, ۰٫۱۰۶۹۶)
(UNH)	(۰٫۰۰۴۷۳, ۰٫۰۶۶۷۳, ۰٫۱۱۰۳۹)	(۰٫۰۰۳۱۶, ۰٫۰۶۷۳۵, ۰٫۰۸۲۳۱)	(۰٫۰۱۲۷۹, ۰٫۰۷۶۳۸, ۰٫۰۹۷۲۱)
(VZ)	(۰٫۰۰۳۵۹, ۰٫۰۵۵۲۴, ۰٫۰۶۷۱۳)	(-۰٫۰۰۱۵۶, ۰٫۰۴۰۷۷, ۰٫۰۶۳۵۷)	(۰٫۰۳۰۲۶, ۰٫۰۸۲۹۲, ۰٫۱۰۱۷۸)
(V)	(۰٫۰۰۷۱۹, ۰٫۰۸۲۴۶, ۰٫۱۰۶۱۸)	(۰٫۰۴۱۰۷, ۰٫۰۹۵۲۷, ۰٫۱۰۸۰۳)	(-۰٫۰۰۳۲۶, ۰٫۰۴۶۹۶, ۰٫۰۵۹۵۲)
(WMT)	(۰٫۰۰۵۴۹, ۰٫۰۵۱۰۴, ۰٫۰۷۴۵۱)	(-۰٫۰۰۸۱۱, ۰٫۰۳۱۰۸, ۰٫۰۶۱۳)	(-۰٫۰۲۹۰۵, ۰٫۰۸۶۷۶, ۰٫۱۱۸۵۱)

حل مدل با استفاده از الگوریتم MOPSO

یکی از مشکلاتی که در مسائل کاربردی بهینه‌سازی سبد سهام با آن روبرو می‌باشیم، چگونگی حل مدل‌های توسعه داده‌شده می‌باشد ازآنجاکه استفاده از معیارهای ریسک مختلف

و همچنین گشتاورهای مراتب بالاتر در بهینه‌سازی سبد سهام منجر به غیرخطی شدن و NP Hard مسئله می‌شود می‌بایست از روش‌های فرا ابتکاری در مسائل کاربردی استفاده کرد. طیف وسیعی از این روش‌ها و الگوریتم‌های مختلف در این زمینه مورداستفاده قرارگرفته‌اند. یکی از بهترین روش‌ها با توجه به ماهیت چند هدفه مدل توسعه داده‌شده الگوریتم MOPSO می‌باشد. این الگوریتم توسط کوئولو (۲۰۰۸) معرفی شد. در این الگوریتم بهترین جواب‌های نامغلوب در یک حافظه خارجی نگهداری می‌شود. مراحل الگوریتم MOPSO به شرح زیر است:

گام اول: ایجاد جمعیت اولیه

گام دوم: مقداردهی اولیه به‌سرعت هر ذره

گام سوم: ارزیابی هر ذره از جمعیت

گام چهارم: جدا کردن اعضای نامغلوب جمعیت و ذخیره آن‌ها در آرشیو خارجی؛

گام پنجم: جدول‌بندی فضای هدف کشف‌شده؛

گام ششم: هر ذره از میان اعضای آرشیو، رهبری انتخاب کرده و حرکت می‌کند؛

گام هفتم: بهترین خاطره شخصی هر یک از ذرات به‌روز می‌شود؛

گام هشتم: اعضای نامغلوب جمعیت فعلی به آرشیو اضافه می‌شود؛

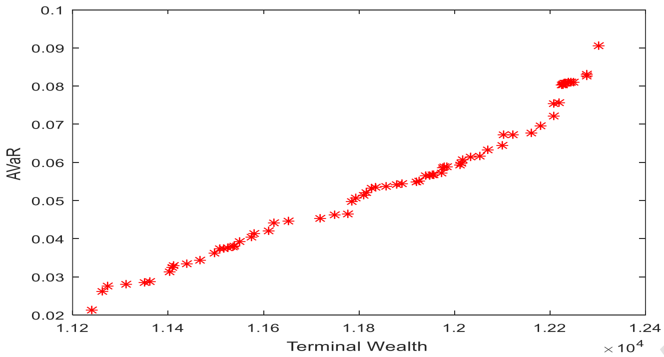
گام نهم: اعضای مغلوب آرشیو حذف می‌شود؛

گام دهم: اگر تعداد اعضای آرشیو بیش از ظرفیت تعیین‌شده باشد، اعضای اضافی نیز حذف می‌شوند (اندازه آرشیو محدود است)؛

گام یازدهم: اگر شرایط خاتمه محقق نشده باشد، به مرحله ۵ بازمی‌گردیم و در غیر این صورت، کار پایان می‌یابد.

اجرای مدل Mean –AVaR

با اجرای مدل توسط الگوریتم MOPSO، نمودار ۱ جبهه‌های بهینه پارتو را با ۱۰۰۰ با تکرار نشان می‌دهد. با در نظر گرفتن درجه تنوع‌بخشی پرتفوی برابر ۱/۵، تعداد پرتفوی‌های نامغلوب به‌دست‌آمده ۷۵ پرتفوی می‌باشد.



نمودار ۱. جبهه‌های بهینه پارتو حاصل از اجرای مدل Mean –AvaR

جدول ۳ تعداد سهام موجود در پرتفوی و درصد سرمایه‌گذاری در هر یک از آن‌ها و میزان تخصیص ثروت به دارایی بدون ریسک برای چند پرتفوی انتخابی در نمایش داده‌شده است. جدول ۴ حداکثر، حداقل، میانگین و انحراف معیار پرتفوی‌های بهینه را نشان می‌دهد.

جدول ۳. مقادیر بهینه پرتفوی Mean -AVaR به ازای برخی مقادیر از مجموعه پارتو

پرتفوی	دوره							ثروت نهایی	ریسک
۱	دوره ۱	WMT	PG	MSFT	CVX	AXP	3M	۱۱۵۳۵/٦٨	۰/۰۳۷
		۰/۰۵۷	۰/۱۸۳	۰/۱٤٦	۰/۰۸	۰/۱۲۸	۰/۱۰۷		
		Xrf							
		۰/۳							
	دوره ۲	VZ	UTX	BA	MCD	IBM	3M		
		۰/۲۳٦	۰/۱۵۹	۰/۰۱۹۷	۰/۰۹۳	۰/۰۹۹	۰/۱۰۹		
		Xrf							
		۰/۱۰۷							
	دوره ۳	JPM	INTC	CSCO	CVX	CAT	3M		
		۰/۱۷۷	۰/۱۵۱	۰/۱۸۸	۰/۰۲۸	۰/۱۸٦	۰/۱٤۲		
		Xrf	NKE						
		۰/۰۰۱	۰/۱۲۳						
...	...								
۷۵	دوره ۱	BA	DD	CVX	AAPL	Xrf		۱۲۲۳۸/٤٦	۰۸
		۰/۱۷۵	۰/۲۸۹	۰/۱۸۸	۰/۲۹۲	۰/۰۵۵			
	دوره ۲	V	UTX	MRK	IBM	DD	AAPL		
		۰/۱۲۵	۰/۰۹۵	۰/۱۸٦	۰/۱۷٦	۰/۱٦۱	۰/۱۵		
		Xrf							
		۰/۱۰۷							
	دوره ۳	MSFT	JPM	XOM	CSCO	AXP	3M		
		۰/۱۳۷	۰/۲۲٤	۰/۰۹۱	۰/۱۷۸	۰/۱٦٨	۰/۱۱۱		
		Xrf							
		۰/۰۹۲							

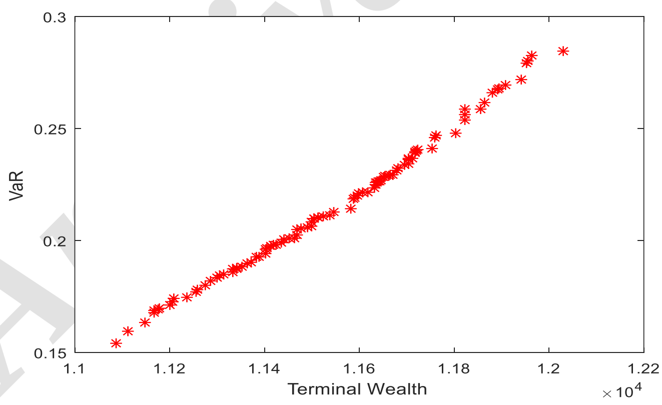
جدول ٤. حداقل، حداکثر، میانگین و انحراف استاندارد پرتفوی‌های بهینه

	ثروت	ریسک
حداقل	۱۱۲۴۰	۰/۰۲۱۱۷
حداکثر	۱۲۳۰۰	۰/۰۹۰۵۶
میانگین	۱۱۸۷۰	۰/۰۵۶۱۸
انحراف استاندارد	۳۱۶	۰/۰۱۸۰۱

در میان پرتفوی‌های بهینه ایجادشده در مدل Mean- AVaR حداقل میزان ثروت ایجادشده ۱۱۲۴۰ دلار با میزان ریسک ۲ درصد و حداکثر ثروت نهایی ۱۲۳۰۰ دلار با ریسک ۹درصد می‌باشد. میانگین کل پرتفوی ها ۱۱۸۷۰ و میانگین ریسک ۵درصد می‌باشد.

اجرای مدل Mean –VaR

با اجرای این مدل تعداد پرتفوهای نامغلوب به‌دست‌آمده ۹۸ پرتفوی می‌باشد، نمودار ۲ پرتفوی‌های پارتو بهینه را نشان می‌دهد.



نمودار ۲. جبهه‌های بهینه پارتو حاصل از اجرای مدل Mean –VaR

میزان تخصیص هر دارایی همچنین میزان تخصیص ثروت به دارایی بدون ریسک برای چند پرتفوی انتخابی در جدول ۵ نمایش داده‌شده است.

جدول ۵. مقادیر بهینه پرتفوی Mean –VaR به ازای برخی مقادیر از مجموعه پارتو

پرتفوی	دوره								ثروت نهایی	ریسک
۱	دوره ۱	Xrf	GS	IBM	INTC	DD	AAPL		۱۱۸۲۲/۵۸	۰/۲۵۳
		۰/۳	۰/۲۳۸	۰/۰۷۵	۰/۱٤٤	۰/۱٤۲	۰/۱			
	دوره ۲	Xrf	V	MCD	IBM	CAT	AAPL	AXP		
		۰/۲۳۳	۰/۰۸	۰/۰۸۸	۰/۱٦۱	۰/۱۷۵	۰/۱٦۱	۰/۱۰۳		
	دوره ۳	Xrf	BA	JPM	INTC	AAPL				
		۰/۳	۰/۱۷۸	۰/۲۲۷	۰/۱۸	۰/۱۱٤				
...	...									
۹۸	دوره ۱	Xrf	VZ	JNJ	DD	AAPL			۱۱۵۹۵/۷۷	۰/۲۲
		۰/۳	۰/۲۰٤	۰/۱۸۱	۰/۱٤۱	۰/۱۷٤				
	دوره ۲	Xrf	V	JNJ	IBM	3M				
		۰/۲٤٤	۰/۱۹۷	۰/۱۵۵	۰/۱۹	۰/۲۱۵				
	دوره ۳	Xrf	VZ	HD	MSFT	CVX	3M			
		۰/۱۷٤	۰/۱۵۱	۰/۱۷۸	۰/۱٤۷	۰/۱۷۱	۰/۱۷۹			

جدول ۶ حداکثر، حداقل، میانگین و انحراف معیار پرتفوی‌های بهینه را نشان می‌دهد.

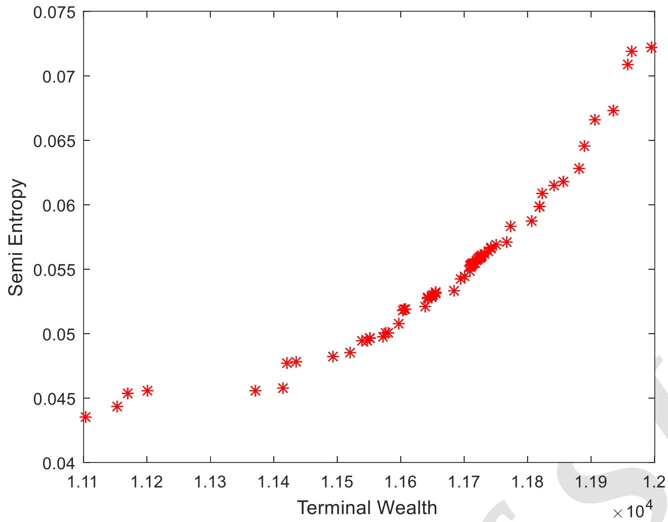
جدول ٦. حداقل، حداکثر، میانگین و انحراف استاندارد پرتفوهای بهینه

	ثروت	ریسک
حداقل	١١٠٩٠	٠/١٥٤٣
حداکثر	١٢٠٣٠	٠/٢٨٤٦
میانگین	١١٥٤٠	٠/٢١٥٥
انحراف استاندارد	٢٢٦/٦	٠/٠٣١٢٧

در میان پرتفوی‌های بهینه ایجادشده در مدل Mean- VaR حداقل میزان ثروت ایجادشده ۱۱۰۹۰ دلار با میزان ریسک ۱۵درصد و حداکثر ثروت نهایی ۱۲۰۳۰ دلار با ریسک ۲۸درصد می‌باشد. میانگین کل پرتفوی‌ها ۱۱۵۴۰ و میانگین ریسک ۲۱ درصد می‌باشد.

اجرای مدل Mean –semi Entropy

با اجرای این مدل تعداد پرتفوهای نامغلوب به‌دست‌آمده ۷۶ پرتفوی می‌باشد. نمودار ۳ پرتفوهای بهینه پارتو را نشان می‌دهد.



نمودار ۳. جبهه‌های بهینه پارتو حاصل از اجرای مدل Mean –Semi Entropy

میزان تخصیص هر دارایی همچنین میزان تخصیص ثروت به دارایی بدون ریسک برای چند پرتفوی انتخابی در جدول ۷ نمایش داده‌شده است.

جدول ۷. مقادیر بهینه پرتفوی Mean –semi Entropy به ازای برخی مقادیر از مجموعه پارتو

ریسک	ثروت نهایی							دوره	پرتفوی
۰/۰۴۳	۱۱۱۰۴/۰۷	3M ۰/۰۷	MCD ۰/۱۲۱	KO ۰/۲۱۱	TRV ۰/۱۲۵	VZ ۰/۱۷۳	Xrf ۰/۳	دوره ۱	۱
			JNJ ۰/۱۵۲	MRK ۰/۱۵۵	PG ۰/۰۹۳	TRV ۰/۳	Xrf ۰/۳	دوره ۲	
			MRK ۰/۳	PG ۰/۰۹۶	TRV ۰/۱۸٦	VZ ۰/۱۱۹	Xrf ۰/۳	دوره ۳	
								...	...
۰/۰۵۵	۱۱۱۰۹/۷۹		AAPL ۰/۲۱۱	DD ۰/۲۰۱	HD ۰/۱	PG ۰/۱۸۸	Xrf ۰/۳	دوره ۱	۷٦
		AXP ۰/۱٦۷	AAPL ۰/۱۸۵	CAT ۰/۰۷٦	JNJ ۰/۱۰۹	V ۰/۱٦۳	Xrf ۰/۳	دوره ۲	
		CVX ۰/۱٦۷	DD ۰/۱۷۷	NKE ۰/۰٦۳	VZ ۰/۱۳٦	V ۰/۱۵٦	Xrf ۰/۳	دوره ۳	

جدول ۸ حداکثر، حداقل، میانگین و انحراف معیار پرتفوی‌های بهینه را نشان می‌دهد.

در میان پرتفوی‌های بهینه ایجادشده در مدل Mean- Semi Entropy حداقل میزان ثروت ایجادشده ۱۱۱۰۰ دلار با میزان ریسک ۴درصد و حداکثر ثروت نهایی ۱۱۹۹۰ دلار با ریسک ۷درصد می‌باشد. میانگین کل پرتفوها ۱۱۶۶۰ و میانگین ریسک ۵ درصد می‌باشد.

جدول ۸. حداقل، حداکثر، میانگین و انحراف استاندارد پرتفوهای بهینه

	ثروت	ریسک
حداقل	۱۱۱۰۰	۰/۰٤۳٥٤
حداکثر	۱۱۹۹۰	۰/۰۷۲۲۱
میانگین	۱۱٦٦۰	۰/۰٥٤۷٦
انحراف استاندارد	۱۷۳	۰/۰۰٥۸۹۱

به‌منظور مقایسه هر چه بهتر پرتفوی‌های بهینه حاصل از مدل‌های اجراشده، از دو معیار شارپ[1] و ترینر[2] برای ارزیابی عملکرد پرتفوی‌های بهینه استفاده شد. به این منظور برای تمامی پرتفوی‌های بهینه در هر سه مدل واریانس و بتا پرتفوی جهت محاسبه این شاخص‌ها محاسبه گردید. آمار توصیفی معیار شارپ در جدول ۹ و معیار ترینر در جدول ۱۰ نشان داده‌شده است.

$$T_P = \frac{r_p - r_f}{\beta_p} \qquad SR_P = \frac{r_p - r_f}{\sigma_p}$$

r_p = بازده پرتفوی T_P= معیارترینر SR_P= معیار شارپ

σ_p = انحراف معیار پرتفوی β_p= ریسک سیستماتیک پرتفوی

جدول ۹. نتایج حاصل از ارزیابی عملکرد پرتفوی با معیار شارپ

	Mean-AVaR	Mean-VaR	Mean-Semi ent
حداقل	۱/۱۲۷۷۱	۱/۰۱۰۹۹	۱/۰۱٥٥۲٦
حداکثر	۱/۸٤۳٥۲	۱/۷٥۸٥٤	۱/۸۱٤٦٥٥
میانگین	۱/٥٥۰٤۳	۱/٥۲۹۰۲	۱/٥۳۸۷۷٤
انحراف استاندارد	۰/۰۱۷۷۲	۰/۰۲٦۱۸	۰/۰۲۹۳۰۷
تعداد پرتفوی	۷٥	۹۸	۷٦

1. Traynor Ratio
2. Sharp Ratio

جدول ۱۰. نتایج حاصل از ارزیابی عملکرد پرتفوی با معیار ترینر

	Mean-AVaR	Mean-VaR	Mean-Semi ent
حداقل	۰/۱۶۰۸۴۶	۰/۱۶۴۲۵۶	۰/۱۸۰۲۲۴
حداکثر	۰/۳۹۱۶۹	۰/۳۴۶۵۴۸	۰/۲۷۶۰۴
میانگین	۰/۲۵۰۶۳۶	۰/۲۴۶۶۳	۰/۲۴۰۶۰۸
انحراف استاندارد	۰/۰۰۶۳۳۵	۰/۰۰۲۹۶	۰/۰۰۲۷۶۷
تعداد پرتفوی	۷۵	۹۸	۷۶

نتایج نشان می‌دهد با در نظر گرفتن معیار شارپ به‌عنوان شاخص ارزیابی عملکرد پرتفوی، مدل Mean-AVaR به میانگین بالاتری از دو مدل دیگر دست پیداکرده است. همچنین در این مدل پرتفویی با حداکثر میزان شاخص شارپ (۱/۸۴) وجود دارد که از بیشترین میزان در دو مدل دیگر بیشتر است. کمترین میزان شاخص شارپ (۱/۱۲) بوده که در مقایسه با دو مدل دیگر در وضعیت بهتری قرار دارد. همچنین میانگین شاخص شارپ در مدل Mean-Semi entropy بالاتر از مدلی است که از VaR به‌عنوان معیار ریسک استفاده‌شده است. با در نظر گرفتن شاخص ترینر نیز به نتایج مشابهی در خصوص میانگین عملکرد بهتر پرتفوی‌های بهینه مدل Mean-AVaR می‌رسیم. با در نظر گرفتن میانگین، در هردو معیار شارپ و ترینر مدل Mean-Semi entropy با مدل Mean-VaR میانگین تقریباً برابری دارند.

نتیجه‌گیری و بحث

در این پژوهش مسئله بهینه‌سازی پرتفوی چند دوره‌ای با معیارهای متفاوت ریسک در محیط اعتبار فازی مدل‌سازی و اجرا گردید.

به دلیل ماهیت غیرقطعی بازده اوراق بهادار،علاوه بر بازده‌های سهام شرکت‌های موجود ۳ معیار ریسک در نظر گرفته‌شده در محیط اعتبار فازی محاسبه گردید. با اجرای سه مدل Mean-AvaR و Mean-VaR و mean-semi entropy و اعمال محدودیت‌های اصلی و همچنین محدودیت‌های دیگری مانند حداقل درجه تنوع‌بخشی (آنتروپی نسبت)، حداقل و حداکثر میزان تخصیص سرمایه به هریک از دارایی‌ها و حداقل و حداکثر تعداد سهام موجود در پرتفوی مدل‌ها اجرا گردید. همچنین در نظر گرفتن هزینه معاملات و ایجاد فرصت وام‌دهی برای سرمایه‌گذار نیز در مدل‌سازی لحاظ گردید. مدل‌ها با الگوریتم ازدحام ذرات چند هدفه (MOPSO)حل گردیدند. ازآنجایی‌که معیارهای ریسک

در نظر گرفته‌شده از یک جنس نبوده لذا امکان مقایسه مدل‌ها بر اساس میزان ریسک هر پرتفوی وجود ندارد، بنابراین برای ارزیابی عملکرد پرتفوی‌های بهینه در هر سه مدل، از شاخص شارپ و ترینر به‌عنوان معیارهای ارزیابی عملکرد پرتفوی استفاده گردید. نتایج نشان داد در مدلی که از ارزش در معرض خطر میانگین(AVaR) به‌عنوان معیار ریسک استفاده‌شده، میانگین شاخص شارپ و ترینر پرتفوی‌های بهینه در این مدل از دو مدل دیگر بالاتر می‌باشد. همان‌طور که در ادبیات پژوهش به آن اشاره شد، ارزش در معرض خطر دارای تمامی خواص یک معیار ریسک منسجم می‌باشد به همین دلیل استفاده از آن در بهینه‌سازی سبد سهام و اندازه‌گیری ریسک سرمایه‌گذار توصیه می‌گردد. همچنین با در نظر گرفتن معیار شارپ مدل mean-semi entropy با بالاتر بودن میانگین معیار شارپ پرتفوی‌های بهینه از عملکرد بهتری نسبت به مدل Mean-VaR برخوردار است. این مقایسه در خصوص معیار ترینر برای هر دو مدل تقریباً برابر و اختلاف زیادی ندارند. بسیاری از نهادهای مالی درپی شناسایی منابع ریسک و سپس کنترل و مدیریت آن می‌باشند. با عنایت به نتایج پژوهش و نظر به قابلیت‌های معیار ارزش در معرض خطر میانگین به‌عنوان معیار ریسک منسجم پیشنهاد می‌گردد مدیران پرتفوی با توجه به مزیت‌های مدل چند دوره‌ای با استفاده از این معیار ریسک بتوانند ریسک پرتفوی را به‌خوبی اندازه‌گیری کنند و درنهایت دارایی‌های مالی را که باعث بالا رفتن ریسک می‌شوند را شناسایی کرده و در جهت حداقل کردن ریسک پرتفوی اقدام به تخصیص بهینه و مجدد دارایی‌ها نمایند.

در مقایسه با سایر پژوهش‌های صورت گرفته در مدل‌های چند دوره‌ای در این پژوهش از معیار ارزش در معرض خطر میانگین و همچنین نیم آنتروپی فازی که اخیراً معرفی‌شده است استفاده شد.

همچنین برخلاف مدل توسعه داده‌شده توسط یائو و همکاران (۲۰۱۶)، در هر سه مدل ارائه‌شده هزینه معاملات، تخصیص بخشی از ثروت به دارایی بدون ریسک و در نظر گرفتن محدودیت حداقل درجه تنوع‌بخشی مطلوب سرمایه‌گذار لحاظ شده است. مدل‌های ارائه‌شده توسط ژانگ و ژانگ (۲۰۱۴)، ژان و همکاران (۲۰۱۴)، لیو و همکاران (۲۰۱۳)، دیمیگوئل و همکاران (۲۰۱۶) که به‌صورت تک هدفه و با استفاده از تئوری امکان فازی ارائه‌شده، تمامی مدل‌ها در این پژوهش به‌صورت چندهدفه و با استفاده از تئوری اعتبار فازی توسعه داده‌شده‌اند.

به‌منظور پژوهش‌های آتی پیشنهاد می‌گردد از سایر الگوریتم‌های بهینه‌سازی چندهدفه مانند الگوریتم ژنتیک چندهدفه مبتنی بر مرتب‌سازی نامغلوب (NSGA-II) و یا سایر الگوریتم‌های بهینه‌سازی چندهدفه تکاملی استفاده گردد همچنین سایر معیارهای ریسک نیز می‌تواند در پژوهش‌های بعدی مدنظر قرار گیرد.

منابع

- پور احمدی، زهرا و نجفی، امیرعباس، (۱۳۹۴). "بهینه‌سازی پویای سبد سرمایه‌گذاری با توجه به هزینه معاملات"، مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار، (۲۲)۶، صص. ۱۲۷-۱۴۶.
- کاظمی میان گسکری، مینا؛ یاکیده، کیخسرو و قلی زاده، محمدحسن، (۱۳۹۶). "بهینه یابی سبد سهام (کاربرد مدل ارزش درمعرض ریسک بر روی کارایی متقاطع)". راهبرد مدیریت مالی , ۲(۵) , صص.۱۵۹-۱۸۳. doi: 10.22051/jfm.2017.12040.1155 .
- همائی‌فر، ساغر و روغنیان، عماد، (۱۳۹۵). "به کارگیری الگوهای بهینه‌سازی پایدار و برنامه‌ریزی آرمانی در مسئله انتخاب سبد سرمایه‌گذاری چند دوره‌ای"، مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار، (۲۸)۷، صص.۱۵۳-۱۶۷.
- Andersson, F., Mausser, H., Rosen, D., & Uryasev, S. (2001). “Credit risk optimization with conditional value-at-risk criterion”. *Mathematical Programming*, *89*(2), pp.273-291.
- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J. M., & Heath, D. (1999). “Coherent measures of risk”. *Mathematical finance*, 9(3), pp.203-228.
- Campbell, R., Huisman, R., & Koedijk, K. (2001). “Optimal portfolio selection in a Value-at-Risk framework”. *Journal of Banking & Finance*, *25*(9), pp.1789-1804.
- Chen, Z. (2005). “Multiperiod consumption and portfolio decisions under the multivariate GARCH model with transaction costs and CVaR-based risk control”. *OR Spectrum*, *27*(4), pp.603-632.
- Chen, Z., & Song, Z. (2012). “Dynamic portfolio optimization under multi-factor model in stochastic markets”. *OR spectrum*, *34*(4), pp.885-919.
- Chunhachinda, P., Dandapani, K., Hamid, S., & Prakash, A. J. (1997). “Portfolio selection and skewness: Evidence from international stock markets”. *Journal of Banking & Finance*, *21*(2), pp.143-167.
- Coello, C. A. C., Lamont, G. B., & Van Veldhuizen, D. A. (2007). “Evolutionary algorithms for solving multi-objective problems*”* (Vol. 5). *New York: Springer.*
- Cong, F., & Oosterlee, C. W. (2016). “Multi-period mean–variance portfolio optimization based on Monte-Carlo simulation”. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 64, pp.23-38.
- Consigli, G. (2002). “Tail estimation and mean–VaR portfolio selection in markets subject to financial instability”. *Journal of Banking & Finance*, *26*(7), pp.1355-1382.
- DeMiguel, V., Mei, X., & Nogales, F. J. (2016). “Multiperiod Portfolio Optimization with Multiple Risky Assets and General Transaction Costs”. *Journal of Banking & Finance.*

- DeMiguel, V., Mei, X., & Nogales, F. J. (2016). “Multiperiod portfolio optimization with multiple risky assets and general transaction costs”. *Journal of Banking & Finance*, *69*, pp.108-120.
- Deng, X., & Li, R.(2012). “A portfolio selection model with borrowing constraint based on possibility theory”. *Applied Soft Computing*, *12*(2), pp.754-758.
- Dubois, D., & Prade, H. (2012). Possibility theory: an approach to computerized processing of uncertainty. “Springer Science & Business Media”.
- Feinstein, C. D., & Thapa, M. N. (1993). “A Reformulation of a Mean-absolute Deviation Portfolio Optimization Model”. *Management Science*, *39*(12).
- Geyer, A., Hanke, M., & Weissensteiner, A. (2009). “A stochastic programming approach for multi-period portfolio optimization”. *Computational Management Science*, *6*(2), pp.187-208.
- Grootveld, H., & Hallerbach, W. (1999). “Variance vs downside risk: Is there really that much difference?” *European Journal of operational research*, *114*(2), pp.304-319.
- Guo, S., Yu, L., Li, X., & Kar, S. (2016). “Fuzzy multi-period portfolio selection with different investment horizons”. *European Journal of Operational Research*, *254*(3), pp.1026-1035.
- Gupta, P., Mehlawat, M. K., Inuiguchi, M., & Chandra, S. (2014). “Fuzzy Portfolio Optimization”. Springer-Verlag, Berlin.
- Homaeifar, S., Roghanian, E. (2016). “The Application of Robust Optimization and Goal Programming in Multi Period Portfolio Selection Problem”. *Financial Engineering and Portfolio Managemen*, 7(28), pp.153-167. (In Persian)
- Huang, X. (2006). “Fuzzy chance-constrained portfolio selection. Applied mathematics and computation”, 177(2), pp.500-507.
- Huang, X. (2008). “Mean-variance model for fuzzy capital budgeting”. *Computers & Industrial Engineering*, *55*(1), pp.34-47.
- Huang, X. (2008). “Risk curve and fuzzy portfolio selection”. *Computers & Mathematics with Applications*, *55*(6), pp.1102-1112.
- Huang, X. (2008). “Mean-entropy models for fuzzy portfolio selection”. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, *16*(4), pp.1096-1101.
- Kazemi miyangaskari, M., Yakideh, K., Gholizadeh, M. (2017). “Portfolio optimization (the application of Value at Risk model on cross efficiency)”. *Financial Management Strategy*, 5(2), pp.159-183. (In Persian)
- Kapur, J. N. (1990). “Maximum Entropy Models in Science and Engineering”. Wiley Eastern Limited, New Delhi
- Konno, H., & Yamazaki, H. (1991). “Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its applications to Tokyo stock market”. *Management science*, *37*(5), pp.519-531.

- Li, D., & Ng, W. L. (2000). "Optimal dynamic portfolio selection: Multiperiod mean-variance formulation". *Mathematical Finance, 10*(3), pp.387-406.
- Li, X., Qin, Z., & Kar, S. (2010). "Mean-variance-skewness model for portfolio selection with fuzzy returns". *European Journal of Operational Research*, *202*(1), pp.239-247.
- Li, X., Zhang, Y., Wong, H. S., & Qin, Z. (2009). "A hybrid intelligent algorithm for portfolio selection problem with fuzzy returns". *Journal of Computational and Applied Mathematics, 233*(2), pp.264-278.
- Lin, C. C., & Liu, Y. T. (2008)."Genetic algorithms for portfolio selection problems with minimum transaction lots". *European Journal of Operational Research*, 185(1), pp.393-404.
- Liu, B. D. (2004). "Uncertain theory: An introduction to its axiomatic foundation. Berlin": Springer-Verlag.
- Liu, B., & Liu, Y. K. (2002). "Expected value of fuzzy variable and fuzzy expected value models". *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, 10(4), pp.445-450.
- Liu, Y. J., & Zhang, W. G. (2015). "A multi-period fuzzy portfolio optimization model with minimum transaction lots". *European Journal of Operational Research*, *242*(3), pp.933-941.
- Liu, Y. J., Zhang, W. G., & Xu, W. J. (2012). 'Fuzzy multi-period portfolio selection optimization models using multiple criteria". *Automatica*, 48(12), pp.3042-3053.
- Liu, Y. J., Zhang, W. G., & Zhang, Q. (2016). "Credibilistic multi-period portfolio optimization model with bankruptcy control and affine recourse". *Applied Soft Computing*, 38, pp.890-906.
- Liu, Y.-J., Zhang, W.-G., & Zhang, P. (2013). "A multi-period portfolio selection optimization model by using interval analysis". *Economic Modelling*, 33, pp.113-119.
- Liu, Y.-J., Zhang, W.-G., & Zhang, Q. (2016). "Credibilistic multi-period portfolio optimization model with bankruptcy control and affine recourse". Applied Soft Computing, 38, pp.890-906.
- Markowitz, H. (1952). "Portfolio selection". *The journal of finance*, 7(1), 77-91.
- Markowitz, H., & Selection, P. (1959). "Efficient diversification of investments". *John Wiley and Sons*, *12*, pp.26-31.
- Mehlawat, M. K. (2016). "Credibilistic mean-entropy models for multi-period portfolio selection with multi-choice aspiration levels". *Information Sciences*, 345, pp.9-26.
- Mossin, J. (1968). "Optimal multiperiod portfolio policies". *The Journal of Business*, *41*(2), pp.215-229.

- Peng, J. (2011). "Credibilistic value and average value at risk in fuzzy risk analysis". *Fuzzy Information and Engineering*, 3(1), pp.69-79.
- Philippatos, G. C., & Wilson, C. J. (1972). "Entropy, market risk, and the selection of efficient portfolios". *Applied Economics*, *4*(3), pp.209-220.
- Pourahmadi, Z., Najafi, A.A. (2015). "Dynamic Portfolio Optimization with Transaction Cost". *Financial Engineering and Portfolio Management*, 6(24), pp.152-172. (In Persian)
- Rachev, S. T., Stoyanov, S. V., & Fabozzi, F. J. (2008). "Advanced stochastic models, risk assessment, and portfolio optimization: The ideal risk, *uncertainty, and performance measures* (Vol. 149). John Wiley & Sons.
- Rockafellar, R. T., & Uryasev, S. (2000). "Optimization of conditional value-at-risk". *Journal of risk*, 2, pp.21-42.
- Rockafellar, R. T., Uryasev, S., & Zabarankin, M. (2006). "Generalized deviations in risk analysis". *Finance and Stochastics*, *10*(1), pp.51-74.
- Sadjadi, S. J., Seyedhosseini, S. M., & Hassanlou, K. (2011). "Fuzzy multi period portfolio selection with different rates for borrowing and lending". *Applied Soft Computing*, *11*(4), pp.3821-3826.
- Speranza, M. G. (1993). "Linear programming models for portfolio optimization". *Finance*, 14, pp.107–123.
- Usta, I., & Kantar, Y. M. (2011). "Mean-variance-skewness-entropy measures: a multi-objective approach for portfolio selection". *Entropy*, *13*(1), pp.117-133.
- Vercher, E., & Bermúdez, J. D. (2015). "Portfolio optimization using a credibility mean-absolute semi-deviation model". *Expert Systems with Applications*, 42(20), pp.7121-7131.
- Wei, S. Z., & Ye, Z. X. (2007). "Multi-period optimization portfolio with bankruptcy control in stochastic market". *Applied Mathematics and Computation*, *186*(1), pp.414-425.
- Yao, H., Li, Z., & Li, D. (2016). "Multi-period mean-variance portfolio selection with stochastic interest rate and uncontrollable liability". *European Journal of Operational Research*, 252(3), pp.837-851.
- Zhang, W. G., Liu, Y. J., & Xu, W. J. (2012). "A possibilistic mean-semivariance-entropy model for multi-period portfolio selection with transaction costs". *European Journal of Operational Research*, 222(2), pp.341-349.
- Zhou, J., Li, X., & Pedrycz, W. (2016). "Mean-Semi-Entropy Models of Fuzzy Portfolio Selection". *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, *24*(6), pp.1627-1636.
- Zhou, R., Cai, R., & Tong, G. (2013). "Applications of entropy in finance: A review". *Entropy*, *15*(11), pp.4909-4931.
- Zhu, S. S., Li, D., & Wang, S. Y. (2004). "Risk control over bankruptcy in dynamic portfolio selection: A generalized mean-variance formulation". *IEEE transactions on Automatic Control*, 49(3), pp.447-457.