

Enhanced Index Tracking with a Two-Stage Mixed Integer Programming Model and Pattern Search Algorithm

Hojat Ansari¹, Adel Behzadi², Farid Tondnevis³

Abstract

Index tracking is an important issue in portfolio theory. Index tracking is a passive approach in the portfolio optimization problem based on which finite stock should be selected to track the benchmark index. Enhanced index tracking is a selection of the portfolio with limited stock so that its return is maximized and track error is minimized without buying all stock in benchmark portfolio. The main aim of this paper was to propose a two-stage mixed integer model for enhancing portfolio performance. In order to show the approach performance, top 50 companies were traced. Return, tracking error, excess return and information ratio were used as Portfolio performance measurement. Genetic Algorithm and Pattern Search Algorithm were also used to solve the models. The findings showed that the two-stage model was better than one stage model. Likewise, pattern search enjoyed higher performance than Genetic Algorithm in the two-stage model. Therefore, two-stage model had higher performance during pattern search algorithm compared to one stage model or Genetic algorithm.

Keywords: Enhanced index tracking, Mixed Integer optimization, Two Stage portfolio performance measure, Pattern Search Algorithm.

JEL: G31, G35

1 . Assistant Prof., Faculty of management, kharazmi University, Tehran, Iran

2 . Ph.D. Student in financial engineering, Faculty of Management University of Tehran, Iran

3 . Ph.D. Student in finance, Faculty of Management University of Tehran, Iran

ردیابی شاخص بهبودیافته دو مرحله‌ای با استفاده از الگوریتم‌های فرا ابتکاری^۱

حجت انصاری^۱، عادل بهزادی^۲، فرید تندنویس^۳

چکیده

ردیابی شاخص درواقع شکل ایجاد سبد سهامی متشکل از تعداد محدودی سهم است که هدف از تشکیل این سبد سهام، ایجاد روند بازدهی مشابه با شاخص می‌باشد. منظور از ردیابی شاخص بهبودیافته، ایجاد پرتفویی با بازده بالاتر نسبت به بازده شاخص در کمترین سطح خطای ردیابی بدون خریدن تمامی سهام موجود در شاخص می‌باشد. هدف از نگارش مقاله پیش‌رو، ارائه مدلی دو مرحله‌ای بر اساس برنامه‌ریزی ترکیبی عدد صحیح است که عملکرد پرتفوی را نسبت به روش یک مرحله‌ای بهبود بخشد. مرحله اول از این مدل دو مرحله‌ای مربوط به کمینه‌سازی خطای ردیابی و مرحله دوم مربوط به بیشینه‌سازی بازده تحت مقادیر تلورانس مجاز برای خطای ردیابی می‌باشد. برای نشان دادن کارایی مدل پیشنهادی از شاخص ۵۰ شرکت فعال بورس اوراق بهادار تهران استفاده شده است. در بعد حل مسئله از الگوریتم جستجوی مستقیم و ژنتیک استفاده شده است. معیارهای ارزیابی عملکرد پرتفوی مورد استفاده در این پژوهش شامل میانگین بازدهی، خطای ردیابی، بازده اضافی و نسبت اطلاعاتی می‌باشد. یافته‌های پژوهش نشان‌گر عملکرد بهتر مدل دو مرحله‌ای پیشنهادی نسبت به مدل یک مرحله‌ای می‌باشد. همچنین با استفاده از مقایسه‌ی معیارهای ارزیابی، کارایی الگوریتم جستجوی مستقیم نشان داده شده است.

واژه‌های کلیدی: ردیابی شاخص بهبودیافته، بهینه‌سازی ترکیبی عدد صحیح، بهینه‌سازی دو مرحله‌ای، الگوریتم جستجوی مستقیم.

طبقه‌بندی موضوعی: G31, G35

۱. کد DOI مقاله: 10.22051/jfm.2019.24888.1998

۲. استادیار مدیریت، دانشگاه الزهرا، تهران، ایران، Email:hjtansari@gmail.com

۳. دانشجوی دکتری مهندسی مالی، دانشکده مدیریت، دانشگاه تهران، تهران، ایران نویسنده مسئول ،

Email:adel.bh145@gmail.com

۴. دانشجوی دکتری مالی، دانشکده مدیریت، دانشگاه تهران، تهران، ایران، Email:farid_ftnk@yahoo.com

مقدمه

منظور از بهینه‌سازی پرتفوی، انتخاب سبد سهام متشکل از دارایی‌ها می‌باشد به‌نحوی که مطلوبیت سرمایه‌گذار بیشینه گردد. ردیابی شاخص یکی از مسائل موردعلاقه پژوهشگران در حوزه مدیریت پرتفوی سهام می‌باشد. ردیابی شاخص به معنی تشکیل پرتفوی از سهام‌های یک شاخص که بتواند عملکرد شاخص را بازسازی نماید- بدون اینکه تمامی دارایی‌های تشکیل‌دهنده آن شاخص خریداری شود- می‌باشد. فعالیت صندوق‌های شاخصی از دهه هفتاد میلادی شروع شده و از آن زمان این صندوق‌ها سهم از بازار خود را افزایش داده‌اند. استراتژی ردیابی شاخص به‌نوعی رویکرد غیرفعال^۱ محسوب می‌شود که در این رویکرد سرمایه‌گذار از انعطاف‌پذیری کمتری برخوردار است و سعی می‌کند بر مبنای مجموعه‌ای از ضوابط از پیش تعیین شده عمل نماید.

مدیریت غیرفعال پرتفوی در تقابل با استراتژی فعال مدیریت پرتفوی^۲ است که از انعطاف‌پذیری بالایی برخوردار است و سعی می‌کند در طول زمان سهم‌هایی که عملکرد بهتری نسبت به سایر سهم‌ها خواهند داشت را شناسایی نماید. فرض اساسی در این روش آن است که تجربه‌ها و قضاوت‌های شخصی مدیران سرمایه‌گذاری در مورد انتخاب سهم‌هایی با عملکرد مناسب و همچنین تعیین زمان مناسب برای خرید و فروش، می‌تواند ارزش افزوده ایجاد نماید. یکی از معایب رویکرد فعال پرتفوی هزینه معاملاتی بالای آن می‌باشد. همچنین مشخص است که در استراتژی فعال، سرمایه‌گذار هم در معرض ریسک شرکت و هم در معرض ریسک بازار قرار می‌گیرد اما پرتفوی که با استفاده از روش غیرفعال مدیریت می‌شود فقط متأثر از ریسک بازار است. همچنین در طول بازه‌های زمانی طولانی‌تر، معمولاً شاخص بازدهی مناسبی را برای سرمایه‌گذار خواهد نمود. با این توضیحات می‌توان با استفاده از رویکرد غیرفعال و ردیابی شاخص، هزینه‌های معاملاتی را پایین آورد و ریسک تحمیل شده به سرمایه‌گذار را تقلیل نمود.

ردیابی شاخص را می‌توان با استفاده از انتخاب ترکیب بهینه پرتفوی که وزن هر سهم دقیقاً متناسب با وزن آن در پرتفوی می‌باشد را انجام داد؛ اما با توجه به تعدیلاتی که بر روی شاخص اتفاق می‌افتد، ترکیب دارایی‌های یک پرتفوی ردیاب کامل دچار دگرگونی می‌شود و این مسئله هزینه‌های معاملاتی بالایی را به مدیر پرتفوی تحمیل می‌کند و به‌این ترتیب یکی از مهم‌ترین مزیت‌های مدیریت غیرفعال (هزینه معاملاتی پایین) ارزش خود را از دست خواهد داد.

1 . passive
2 . Active

با کاهش تعداد سهم‌های پرتفوی ردیاب، عملکرد پرتفوی و شاخص فاصله خواهند گرفت. میزان این اختلاف توسط معیار خطای ردیابی اندازه‌گیری می‌شود. از این رو یکی از روش‌هایی که برای ردیابی شاخص در نظر گرفته شده، استفاده از مدل‌های بهینه‌سازی ریاضی جهت کمینه نمودن خطای ردیابی مورد انتظار است (فوکاردی و فابوزی^۱، ۲۰۰۴). برنامه‌ریزی ترکیبی نیز به منظور مینیمم‌سازی خطای ردیابی مورد استفاده قرار گرفته است (کاناگوز و بیزلی^۲، ۲۰۰۹). از طرفی ردیابی شاخص بهبود یافته به معنی ماکزیمم‌سازی بازده پرتفوی تحت خطای ردیابی مشخص است (ایزلی و همکاران، ۲۰۰۳). همچنین به دلیل ماهیت غیرخطی تابع هدف یا محدودیت‌های مسئله از الگوریتم‌های حل غیرخطی و فرا ابتکاری توسط پژوهشگران مختلف استفاده شده است.

هدف از ارائه مقاله پیش‌رو در وهله اول، ارائه مدلی دو مرحله‌ای است که نسبت به مدل یک مرحله‌ای (صرفاً کمینه‌سازی خطای ردیابی) عملکرد بهتری را ارائه کند. همچنین در بعدی دیگر استفاده از الگوریتم جستجوی مستقیم می‌باشد که تاکنون در این گونه مسائل استفاده نشده است.

همچنین به منظور بهتر نشان دادن کارایی مدل‌ها از داده‌های مربوط به شاخص ۵۰ شرکت برتر از سال ۱۳۸۵ تا ۱۳۹۷ استفاده شده است. در ادامه، ابتدا به بیان پیشینه تحقیق پرداخته می‌شود؛ سپس مروری بر مبانی نظری صورت می‌گیرد. در انتها یافته‌های پژوهش و نتیجه‌گیری ارائه شده است.

مبانی نظری و مروری بر پیشینه پژوهش

پیشینه تجربی پژوهش

تاکنون پژوهشگران روش‌های مختلفی را برای ردیابی شاخص ارائه کرده‌اند که در ادامه درباره این تحقیقات توضیحاتی ارائه شده است. توجه داشته باشید که در این پژوهش‌ها از مدل‌ها و الگوریتم‌های حل مختلفی استفاده شده است. همچنین به دلیل غیرخطی بودن توابع هدف یا محدودیت‌ها پژوهشگران از الگوریتم‌های حل مختلفی استفاده کرده‌اند. الگوریتم‌های فرا ابتکاری نیز از جمله الگوریتم‌های کاربردی در این زمینه می‌باشند.

جنسن و دیجک^۳ ردیابی شاخص را با در نظر گرفتن خطای ردیابی و محدودیت تعداد مدل کردند که در این روش آن‌ها خطای ردیابی و تعداد سهام را هم‌زمان کمینه کردند (جنسن و دیجک،

1 . Focardi & Fabozzi

2 . Canakgoz & Beasley

3 . Jansen & Dijk

۲۰۰۲). فوکاردی و فبوزی از روش خوشه‌بندی برای ردیابی شاخص استفاده کردند. آن‌ها با استفاده از تکنیک خوشه‌بندی سهامی که دارای سری زمانی مشابه بودند را در یک خوشه قراردادند و سرمایه‌گذار می‌تواند با توجه به اولویت‌های خود اوزان بهینه را تعیین کند و در انتها به این نتیجه رسیدند که این روش عملکرد بهتری نسبت به سایر روش‌های سنتی دارد (فوکاردی و فبوزی، ۲۰۰۴).

رافائلی^۱ و بنل^۲ برای مسئله ردیابی شاخص از دو الگوریتم ژنتیک و برنامه‌ریزی درجه دوم در بورس انگلیس استفاده کردند. نتایج ارائه‌شده مزیت روش ژنتیک را با در نظر گرفتن اندازه‌های مختلف و همچنین دوره‌های متعدد به‌روزرسانی ترکیب برای پرتفوی شاخصی به اثبات رسانید (رافائلی و بنل، ۲۰۰۶). اردوگان^۳ و همکاران چندین عامل را در مدلی به‌منظور پیشینه‌سازی شاخص شارپ و کمیته‌سازی هزینه‌های معاملاتی در نظر گرفته‌اند. در این مدل به‌منظور پیش‌بینی دقیق‌تر بازده دارایی‌ها از مدل ارزش‌گذاری دارایی‌های سرمایه‌ای استفاده‌شده است (اردوگان و همکاران، ۲۰۰۶).

کوریلی و مارسلینو^۴ در خصوص یک روش حل مدل ردیابی شاخص بر این فرض که قیمت‌های سهام متأثر از یک مدل عاملی هستند، پژوهش نمودند. در روش مورد استفاده آن‌ها شاخص و پرتفوی شاخصی آن دارای ساختار عاملی مشابه بودند. رویکرد به کار گرفته‌شده عبارت است از مرتب‌سازی عوامل و سپس اضافه کردن سهمی به پرتفوی که دارای بیشترین همبستگی با عامل موردنظر است (کوریلی و مارسلینو، ۲۰۰۶). گیلی و کزلی^۵ نیز به بررسی الگوریتم پذیرش آستانه‌ای^۶ پرداختند و این الگوریتم را به‌عنوان رویکردی مؤثر در ردیابی شاخص معرفی نمودند (گیلی و کزلی، ۲۰۰۲). کنو و ویجایانایاکا^۷ به‌جای واریانس، به کمیته‌سازی قدر مطلق اختلاف بازده شاخص و بازده پرتفوی با استفاده از الگوریتم شاخه و کران پرداختند (کنو و ویجایانایاکا، ۲۰۰۱). رودلف^۸ و همکاران نیز به معرفی معیارهایی خطی برای اندازه‌گیری خطای ردیابی پرداختند و با استفاده از

-
- 1 . Rfaely
 - 2 . Bennell
 - 3 . Erdogan
 - 4 . Corielli & Marcellino
 - 5 . Gilli & Kellezi
 - 6 . Threshold accepting heuristic
 - 7 . Konno & Wijayanayake
 - 8 . Rudolf

برنامه‌ریزی خطی مقدار خطای ردیابی را کمینه نمودند و جواب مسئله را استخراج کردند (رودلوف و همکاران، ۱۹۹۹).

کاناکگوز و بیزلی^۱ مدل‌سازی مسئله ردیابی شاخص را بر مبنای رگرسیون استوار کرده‌اند. مزیت این روش تبدیل مسئله ردیابی شاخص به یک مسئله خطی است. به عبارت دیگر هر دو مسئله سبد ردیابی و بهبود سبد به یک مدل خطی عدد صحیح تبدیل می‌گردد. آن‌ها همچنین در حل مدل سبد ردیاب، مسئله را به گونه‌ای مدل‌سازی کرده‌اند تا به بازده بیشتر از بازده سبد ردیاب دست پیدا کنند و یک مدل‌سازی جدید ارائه کرده‌اند (کاناکگوز و بیزلی، ۲۰۰۹).

روی^۲ و همکاران مسئله ردیابی شاخص بهبود یافته با استفاده از مدلی بر مبنای تلورانس مجاز ریسک و خطای ردیابی حل شد. همچنین برای حل این مسئله از بهینه‌سازی استوار و رویکرد بهینه‌سازی عدد صحیح ترکیبی استفاده شد (روی و همکاران، ۲۰۱۷).

گارسیا و همکاران^۳ با استفاده از برنامه‌ریزی درجه دوم و در نظر گرفتن محدودیت تعداد سهام، مسئله ردیابی شاخص را حل کردند. همچنین برای نشان دادن کارایی رویکرد ارائه شده، این روش را با الگوریتم‌های ژنتیک و الگوریتم جستجوی ممنوعه مقایسه کردند (گارسیا و همکاران، ۲۰۱۸). پائولو^۴ و همکاران مسئله ردیابی شاخص را با فرض در نظر گرفتن محدودیت بیشینه سرمایه‌گذاری بر روی هر دارایی حل کردند. آن‌ها تحت این شرایط، شاخص S&P500 را با در نظر گرفتن ده سهم منتخب ردیابی کردند و نتایج را با مسئله بدون محدودیت مقایسه کردند (پائولو و همکاران، ۲۰۱۹).

حنیفی و همکاران برای اولین بار مسئله پرتفوی ردیابی کننده شاخص را در ایران مدل کردند و در مسئله مورد نظر با محدودیت عدد صحیح انتخاب ۵، ۱۰، ۱۵ و ۲۰ سهم از بازار سهام و با استفاده از الگوریتم ژنتیک به حل آن پرداختند. برای حل مدل بهینه‌سازی آن‌ها سه الگوریتم ژنتیک کلاسیک، الگوریتم ژنتیک چند مرحله‌ای و الگوریتم ژنتیک بهبود یافته استفاده کردند (حنیفی و همکاران، ۱۳۸۸).

در ادامه ورسه‌ای و شمس محدودیت کف و سقف سرمایه‌گذاری در هر سهم را به مدل بهینه‌سازی اضافه کردند و مسئله را حل کردند. حجازی از یک مدل ردیابی شاخص دو هدفه

1 . Canakgoz & Beasley

2 . Roy

3 . García

4 . Paulo

تک مرحله‌ای برای ایجاد یک صندوق شاخصی بهبود یافته استفاده کردند. آن‌ها از الگوریتم ژنتیک به منظور دستیابی به پرتفویی که هم بازدهی بیش از شاخص و هم کمترین خطای ردیابی شاخص داشته باشد، بهره بردند. نتایج مقایسه پرتفوی بهینه آنان نسبت به بازده شاخص بورس اوراق بهادار تهران بدین صورت بود که بازده صندوق شاخصی بهبود یافته از لحاظ آماری با بازده شاخص قیمت و بازده نقدی بورس تهران تفاوت معناداری دارد و بازده صندوق بیش از بازده شاخص است (ورسهای و شمس، ۱۳۸۹). عباسی و اکبری از یک مدل ردیابی شاخص برای ایجاد صندوق شاخصی استفاده کردند. آن‌ها برای ایجاد صندوق شاخصی از دو الگوریتم ژنتیک و تبرید شبیه‌سازی شده با استفاده از سهام‌های موجود در بورس تهران بهره بردند که نتیجه آن پژوهش برتری الگوریتم ژنتیک نسبت به الگوریتم تبرید شبیه‌سازی شده با معیار خطای ردیابی کمتر در تشکیل صندوق شاخصی بود (عباسی و اکبری، ۱۳۹۳).

لازم به ذکر است که در پژوهش روبرو سعی شده است که هم در بعد ارائه مدل که از مدل دو مرحله‌ای استفاده شده است. هم در بعد الگوریتم حل که از الگوریتم جستجوی مستقیم استفاده شده است، نوآوری داشته باشد. نوآوری مقاله در زمینه مدل استفاده از مدل دو مرحله‌ای است که مرحله اول کمینه کردن خطای ردیابی یا به نوعی ریسک پرتفوی و در مرحله دوم توجه به بازدهی پرتفوی می‌باشد. در بعد الگوریتم استفاده از الگوریتم جستجوی مستقیم و بررسی نتایج حاصل از آن در مسئله ردیابی شاخص می‌باشد تا قابلیت این الگوریتم بررسی و مورد بحث قرار گیرد.

مبانی نظری و مروری بر پیشینه پژوهش

فرموله کردن ریاضی مسئله ردیابی شاخص یک مرحله‌ای

یک مدل بهینه‌سازی ابزاری برای تصمیم‌گیری است که باهدف بهینه‌سازی تابع هدف با توجه به محدودیت‌های در نظر گرفته شده طراحی می‌شود. ردیابی شاخص به معنی ساخت پرتفویی با تعدادی محدود سهم به منظور ایجاد بازدهی شبیه به شاخص می‌باشد. در اینجا تابع هدف خطای ردیابی می‌باشد که این مقدار باید مینیمم گردد که در اینجا مدل یک مرحله‌ای نامیده می‌شود. این مدل به شرح زیر قابل تعریف است.

$$\text{minimize } E = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T (R_{Pt} - R_{It})^2} \quad (\text{مدل ۱})$$

subject to

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N Z_i &= K \\ Z_i &\in \{0,1\} \\ L_i Z_i &\leq x_i \leq U_i Z_i \\ \sum_{i=1}^N x_i &= 1 \\ x_i &\geq 0 \end{aligned}$$

در مدل فوق E خطای ردیابی، T تعداد دوره‌ها، R_{Pt} بازدهی پرتفوی بهینه در زمان t، R_{It} بازدهی شاخص در زمان t، x_i وزن بهینه سهم iام، N تعداد کل سهام، K تعداد سهام انتخاب شده برای ایجاد پرتفوی ردیابی شاخص می‌باشد. Z_i متغیر باینری به معنی وجود (مقدار وجود) (یا عدم وجود) (مقدار وجود) سهم iام در پرتفوی بهینه و L_i و U_i به ترتیب حد پایین و بالای وزن بهینه هر سهم در پرتفوی بهینه می‌باشد. در مدل فوق محدودیت اول نشان‌دهنده تعداد سهم موجود در پرتفوی می‌باشد که این تعداد k در نظر گرفته شده است. محدودیت بعدی مربوط به سقف و کف سرمایه‌گذاری در هر سهم می‌باشد و در ادامه محدودیت‌های مربوط به جمع اوزان برابر با یک و فرض عدم فروش استقراسی ارائه شده است.

فرموله کردن ریاضی مسئله ردیابی شاخص بهبود یافته دو مرحله‌ای

ردیابی شاخص بهبود یافته به منظور ایجاد بازده‌های پرتفوی تحت خطای ردیابی کمینه می‌باشد (ایزلی و همکاران، ۲۰۰۳). در این مقاله از روش دو مرحله‌ای برای دستیابی به پرتفوی شاخص بهبود یافته استفاده شده است. مرحله اول مربوط به پیدا کردن مقدار کمینه خطای ردیابی و در مرحله دوم بازدهی پرتفوی تحت خطای ردیابی کمینه ماکزیمم می‌شود. مدل مرحله اول دقیقاً مدل (۱) می‌باشد؛ اما مدل مرحله دوم مربوط به شرح زیر می‌باشد.

$$\max R_p = \sum_{i=1}^N r_i x_i \quad \text{(مدل ۲)}$$

subject to

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N Z_i &= K \\ Z_i &\in \{0,1\} \\ L_i Z_i &\leq x_i \leq U_i Z_i \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^N x_i = 1$$

$$E^* - \delta \leq E \leq E^* + \delta$$

$$x_i \geq 0$$

در مدل فوق E خطای ردیابی، T تعداد دوره‌ها، R_{Pt} بازدهی پرتفوی بهینه در زمان t R_{It} بازدهی شاخص در زمان t ، x_i وزن بهینه سهم i ام، N تعداد کل سهام، K تعداد سهام انتخاب شده برای ایجاد پرتفوی ردیابی شاخص می‌باشد. Z_i متغیر باینری به معنی وجود (مقدار وجود) یا عدم وجود (مقدار وجود) (سهم i ام در پرتفوی بهینه، L_i و U_i به ترتیب حد پایین و بالای وزن بهینه هر سهم در پرتفوی بهینه و E^* خطای ردیابی بهینه در مرحله اول، δ مقدار تلورانس مجاز خطای ردیابی در مرحله دوم می‌باشد. به نوعی هدف از مرحله دوم ماکزیمم کردن بازده پرتفوی تخت تلورانس مجاز δ برای خطای ردیابی می‌باشد. محدودیت‌های مدل شبیه مدل مرحله یک بوده و محدودیت تلورانس مجاز δ برای خطای ردیابی به مدل اضافه شده است.

معیارهای ارزیابی عملکرد پرتفوی

در این بخش از مقاله به معرفی معیارهای استاندارد که برای بررسی عملکرد پرتفوی حاصل از به کارگیری مدل پایدار ردیابی شاخص مورد استفاده قرار می‌گیرند پرداخته می‌شود.

نسبت بازار

مقدار نسبت بازار از رابطه زیر محاسبه می‌شود؛ که در آن (r_p^t) نشان‌گر بازده پرتفوی در زمان t و (r_m^t) نشان‌دهنده بازده شاخص در زمان t است. مقدار مطلوب برای این شاخص نیز برابر ۱ است. مقدار بیشتر از ۱ نشانگر بازده مازاد نسبت به شاخص است.

$$MR^t = \frac{1 + r_p^t}{1 + r_m^t} \quad (1)$$

بتا

مقدار بتا که از رابطه زیر محاسبه می‌شود می‌تواند به عنوان معیاری برای ارزیابی عملکرد پرتفوی استفاده شود. در این رابطه مقدار (r_p) نشان‌دهنده بازده پرتفوی، مقدار (r_m) نشان‌دهنده بازده

شاخص هستند. همان‌طور که در قسمت‌های پیشین اشاره شد، پرتفوی ردیاب شاخص باید نسبت به رویدادهای اقتصادی، بازتابی یکسان با بازار داشته باشد. پس مقدار مطلوب برای بتای یک پرتفوی ردیاب برابر با ۱ است.

$$\beta = \frac{cov(r_p, r_m)}{\sigma_m^2} \quad (2)$$

خطای ردیابی

خطای ردیابی معیار دیگری به‌منظور ارزیابی عملکرد پرتفوی ردیاب است. این مقدار که از طریق رابطه زیر محاسبه می‌شود عبارت است از انحراف استاندارد اختلاف بین بازده شاخص و بازده پرتفوی در طول بازه زمانی موردنظر. مقدار ایده آل این معیار نیز برابر با صفر است. در این رابطه r_I نشان‌دهنده بردار بازده شاخص و r_p نشان‌دهنده بردار بازده پرتفوی است.

$$TE^t = stdev(r_p - r_I) \quad (3)$$

نسبت اطلاعاتی

مقدار نسبت اطلاعات از رابطه زیر محاسبه می‌شود و می‌تواند به‌عنوان معیار دیگری برای ارزیابی عملکرد پرتفوی ردیاب مورد استفاده قرار گیرد. مقدار بیشتر این نسبت برای پرتفوی مطلوب‌تر است.

$$IR^t = \frac{r_p^t - r_m^t}{TE^t} \quad (4)$$

در مقاله پیش‌رو از آنجاکه هم بازدهی برای سرمایه‌گذار مهم بوده و هم خطای ردیابی نیز مهم است از نسبت اطلاعاتی به‌منظور مقایسه مدل‌ها استفاده شده است. دلیل انتخاب این معیار توجه به ریسک و بازده به‌طور هم‌زمان می‌باشد که سرمایه‌گذار در زمان سرمایه‌گذاری و تشکیل پرتفوی شاخصی به دو جنبه سرمایه‌گذاری توجه داشته باشد.

الگوریتم ژنتیک

این الگوریتم برای بهینه‌سازی، جستجو و یادگیری ماشین مورد استفاده قرار می‌گیرد. اساس این الگوریتم قانون تکامل داروین (بقا بهترین) است که می‌گوید: موجودات ضعیف‌تر از بین می‌روند

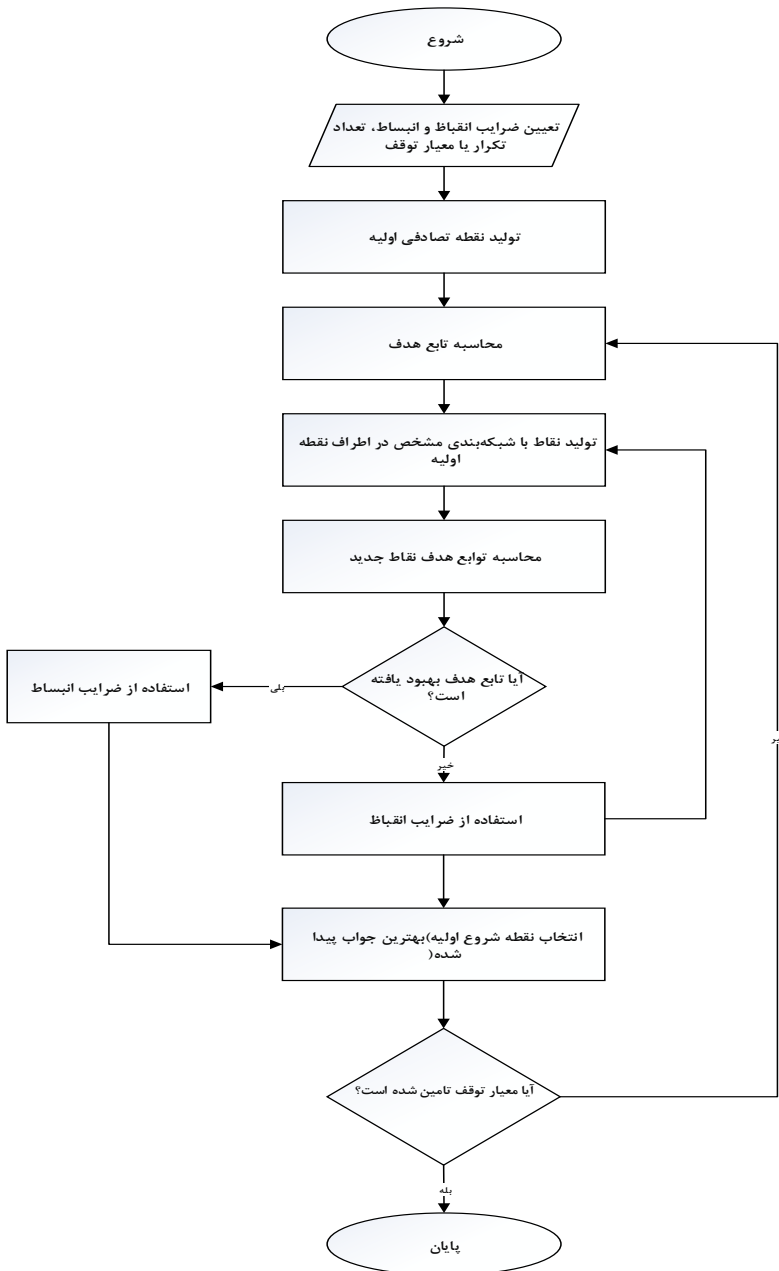
و موجودات قوی تر باقی می ماندند. در واقع تکامل فرآیندی است که روی رشته ها صورت می گیرد، نه روی موجودات زنده ای که معرف موجودات رشته است. در واقع، قانون انتخاب طبیعی برای بقا می گوید که هر چه امکان تطبیق موجود بیشتر باشد بقای موجود امکان پذیرتر است و احتمال تولید مثل بیشتری، برایش وجود دارد. این قانون بر اساس پیوند بین رشته ها و عملکرد ساختمان های رمزگشایی شده آن ها می باشد (حجازی و همکاران، ۱۳۹۰).

به طور خلاصه الگوریتم ژنتیک از عملگرهای زیر تشکیل شده است: کدگذاری^۱: این مرحله شاید مشکل ترین مرحله حل مسئله به روش الگوریتم باشد. ارزیابی^۲: تابع برازندگی را از اعمال تبدیل مناسب بر روی تابع هدف یعنی تابعی که قرار است بهینه شود به دست می آورند. ترکیب^۳: مهم ترین عملگر در الگوریتم ژنتیک، عملگر ترکیب است. ترکیب فرآیندی است که در آن نسل قدیمی کروموزوم ها با یکدیگر مخلوط و ترکیب می شوند تا نسل تازه ای از کروموزوم ها به وجود بیاید. جهش^۴: جهش نیز عملگر دیگری هست که جواب های ممکن دیگری را متولد می کند. در الگوریتم ژنتیک بعد از اینکه یک عضو در جمعیت جدید به وجود آمد هر ژن آن با احتمال جهش، جهش می یابد. در جهش ممکن است ژنی از مجموعه ژن های جمعیت حذف شود یا ژنی که تا به حال در جمعیت وجود نداشته است به آن اضافه شود. رمزگشایی^۵: رمزگشایی، عکس عمل رمزگذاری است. در این مرحله بعد از اینکه الگوریتم بهترین جواب را برای مسئله ارائه کرد لازم است عکس عمل رمزگذاری روی جواب ها یا همان عمل رمزگشایی اعمال شود تا بتوانیم نسخه واقعی جواب را به وضوح در دست داشته باشیم.

الگوریتم جستجوی مستقیم

الگوریتم جستجوی مستقیم در دهه ۵۰ میلادی معرفی شده است که از کاربردهای مختلفی در بهینه سازی برخوردار است. این الگوریتم کاربردهای بسیار زیادی در زمینه آنالیز غیرخطی نیز دارد (لام^۶ و لام، ۲۰۱۶). فلوچارت این الگوریتم به شکل زیر می باشد (محمدی قلعه نی و ابراهیمی، ۱۳۹۱).

-
- 1 . Encoding
 - 2 . Evaluation
 - 3 . Crossover
 - 4 . Mutation
 - 5 . Decoding
 - 6 . Lam



شکل ۱. ساختار مدل بهینه‌سازی مبتنی بر الگوریتم جستجوی مستقیم

الگوریتم جستجوی مستقیم از یک نقطه تصادفی شروع و با استفاده از ضرایب انبساط و انقباض به سمت فضای بهینه حرکت می کند. در این الگوریتم ابتدا متغیرهای مختلف از جمله ضرایب انبساط و انقباض، بیشینه تعداد تکرارها و جواب اولیه با توجه به محدودیت ها تولید می شود و سپس مقدار تابع هدف محاسبه می شود (لوئیس^۱ و همکاران، ۱۹۹۸). سپس به سمت نقطه بهینه الگوریتم حرکت خواهد کرد. به این منظور از ضرایب انقباض و انبساط افزایش و فضای بیشتری را جستجو می کند. این روند تا زمانی ادامه می یابد که معیار توقف فعال شود.

دو نکته مثبت، دلیل انتخاب الگوریتم جستجوی مستقیم برای ارزیابی و بررسی در پژوهش حاضر بوده است. نکته نخست، سادگی کاربرد و نکته دوم، برآوردهای غیرصریح این الگوریتم می باشد. منظور از نکته نخست این است که این الگوریتم به دلیل تعداد کم پارامترهای ورودی جهت بهینه سازی و سرعت همگرایی توانایی زیادی برای حل مسائل غیرخطی را دارا می باشد. همچنین با توجه به پیشرفت کامپیوترهای امروزی، امکان اجرای این الگوریتم با استفاده از طریق نرم افزارهای مختلف مهیا می باشد. با وجودی که این الگوریتم ساده به نظر می رسد اما دارای خصوصیتی با امکان همگرایی سراسری مشابه الگوریتم های جستجوی خطی است (محمدی قلعه نی و ابراهیمی، ۱۳۹۱). در سال های اخیر، الگوریتم های جستجوی الگو برای بهینه سازی پیچیده مسائل ریاضی استفاده و آزمایش شده است، اما این الگوریتم در بهینه سازی مسئله ردیابی شاخص بکار نگرفته شده است.

یافته های پژوهش

توصیف داده ها

به منظور نشان دادن کارایی مدل پیشنهادی از داده های بورس اوراق بهادار تهران و از بازه زمانی از اسفند ۱۳۹۳ تا اسفند ۱۳۹۶ استفاده شده است؛ که دارای شرایط زیر می باشد، استفاده شده است.

شرکت هایی که از اسفند ۱۳۹۰ در لیست سهام پذیرفته شده در بورس و فرابورس بوده اند و تا اسفند ۱۳۹۶ در این لیست باقی مانده اند.

داده‌های مذکور داری توقف طولانی در بازه زمانی ذکر شده نباشند؛ بنابراین شرکت‌هایی که بیشتر از سه ماه در طی تاریخ ذکر شده غیبت داشته‌اند از لیست سهام پیشنهادی حذف شده‌اند.

با توجه به نکات فوق سهام، حدود ۷۲ سهم انتخاب شد که برای ردیابی شاخص ۵۰ شرکت برتر (ارائه شده توسط بورس تهران) استفاده شد. توجه داشته باشید که داده‌ها به صورت روزانه با استفاده از نرم‌افزار *tseclient* جمع‌آوری شده است و ۷۵ درصد از داده‌های دوره زمانی مذکور برای اجرای مدل‌ها در دوره داخل نمونه و مابقی آن برای اجرای مدل‌ها در دوره خارج از نمونه مورد استفاده قرار گرفته است. بازده روزانه پرتفوی با استفاده از رابطه زیر به دست آمده است.

$$r_p = \ln \left(\frac{\sum_{t=k}^T w_i p_{it}}{\sum_{t=k}^T w_i p_{it-1}} \right) \quad (5)$$

که در آن w_i وزن هر کدام از دارایی‌ها و p_i قیمت هر سهم در زمان t و $t-1$ می‌باشد. همچنین بازده روزانه شاخص ۵۰ شرکت فعال بر اساس رابطه زیر محاسبه شده است.

$$r_I = \ln \left(\frac{R_{It}}{R_{It-1}} \right) \quad (6)$$

که در رابطه فوق R_{It} نشان‌دهنده بازده شاخص در زمان t می‌باشد.

اجرای مدل

برای بهینه‌سازی مدل مربوط به مرحله اول از الگوریتم‌های ژنتیک و جستجوی مستقیم استفاده شده است.

مشخصات الگوریتم ژنتیک مورد استفاده به شرح جدول زیر می‌باشد. این مشخصات با استفاده از الگوریتم راستی آزمایی بر روی هر کدام از این پارامترها مشخص شده است. برای حداکثر تعداد مجاز، مقادیر ۵۰۰ تا ۲۰۰۰ آزمایش شده است. اندازه جمعیت مقادیر ۲۰۰ تا ۱۰۰۰، نرخ تولید مثل ۰٫۲ تا ۱ و برای نرخ جهش ۰٫۲ تا ۱ مورد آزمایش قرار گرفته شده است.

جدول ۱. پارامترهای ورودی موردنیاز برای اجرای الگوریتم ژنتیک

مقدار	پارامتر	ردیف
۱۲۰۰	حداکثر تکرار ^۱ مجاز	۱
۶۰۰	اندازه جمعیت ^۲	۲
۰/۶	نرخ تولیدمثل ^۳	۳
۰/۹	نرخ جهش ^۴	۴

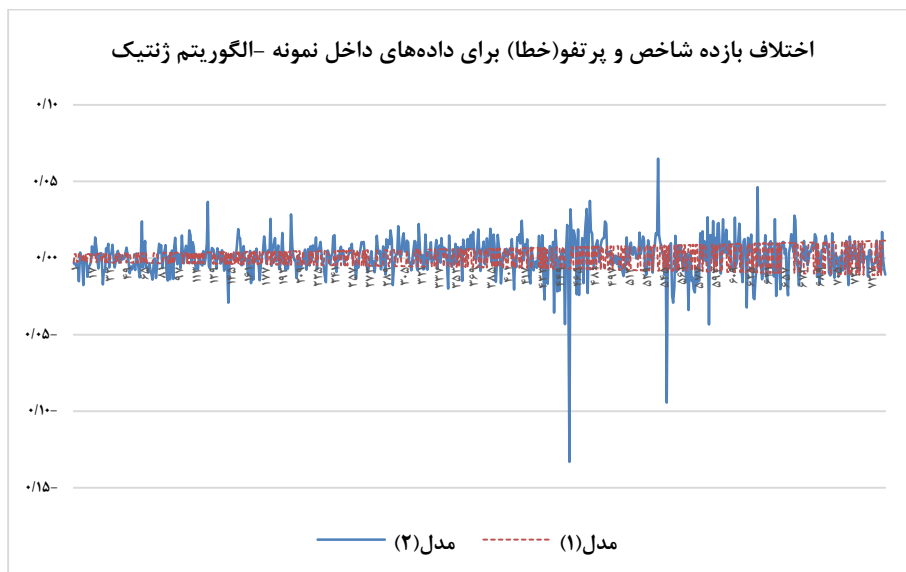
برای اجرای الگوریتم فوق از تابع ga در نرم افزار متلب استفاده شده است. همچنین برای اجرای الگوریتم جستجوی مستقیم از تابع $patternsearch$ در نرم افزار متلب استفاده شده است. حال در ادامه نتایج حاصل از اجرای الگوریتم برای حالت درون نمونه^۵ و خارج از نمونه^۶ ارائه شده است. برای اجرای مدل ها، تعداد سهم های مجاز در پرتفوی ۱۰ سهم و در مدل (۲) مقدار خطای مجاز (δ) ، ۰,۰۰۴ در نظر گرفته شده است. همچنین مقدار کمینه سرمایه گذاری در هم سهم (۲) درصد و مقدار بیشینه سرمایه گذاری در هر سهم (۱) ۶۰ درصد در نظر گرفته شده است. توجه داشته باشید که برای اجرای نشان دادن هر چه بهتر نتایج و اثبات قابلیت اتکای نتایج در آینده هم برای داده های درون نمونه و هم از نتایج خارج از نمونه استفاده شده است. نتایج درون نمونه نشان دهنده داده های تاریخی و نتایج خارج از نمونه نشان دهنده قدرت مدل برای داده های آینده می باشد.

نتایج حاصل از اجرای مدل در حالت درون نمونه

نتایج به دست آمده با استفاده از الگوریتم ژنتیک

پس از اجرای الگوریتم ژنتیک به دست آوردن وزن های بهینه برای تشکیل پرتفوی ردياب شاخص است که کمترین میزان خطای رديابی را داشته باشد. نمودار زیر مقایسه روند اختلاف بازده پرتفوی و شاخص در مدل (۱) و مدل (۲) را نشان می دهد.

-
- 1 . Iteration
 - 2 . Population size
 - 3 . Crossover
 - 4 . Mutation
 - 5 . In sample
 - 6 . Out of sample



نمودار ۱. اختلاف بازده شاخص و پرتفو (خطا) برای داده‌های داخل نمونه برای الگوریتم ژنتیک

حال با استفاده از معیارهای ارزیابی عملکرد ارائه شده در بخش قبل، این دو مدل در جدول زیر مورد مقایسه قرار گرفته شده است.

جدول ۲. مقایسه معیارهای ارزیابی عملکرد در حالت درون نمونه در حالت استفاده از الگوریتم ژنتیک

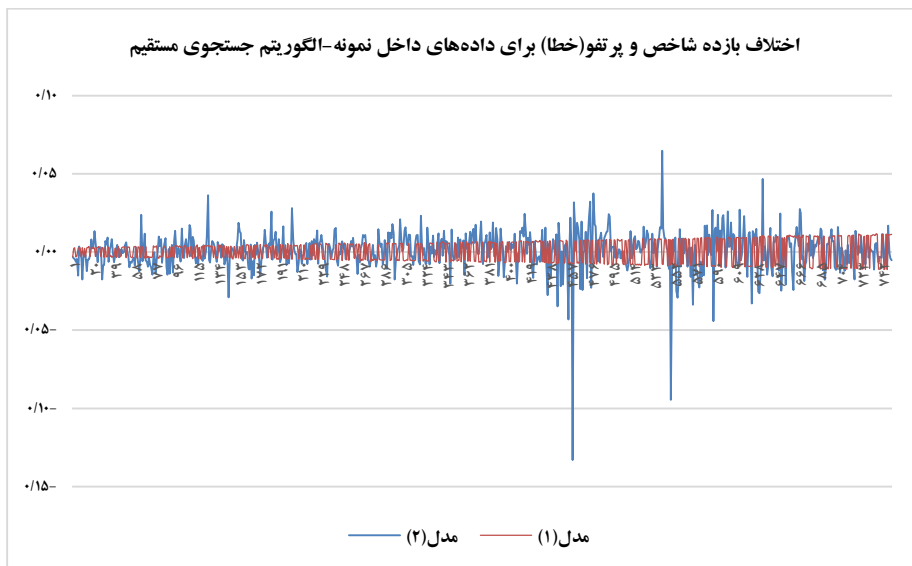
ردیف	شرح	مدل (۱)	مدل (۲)
۱	میانگین بازدهی (%)	۰/۰۵۱	۰/۰۶۱
۲	نسبت بازار	۱/۰۰۱	۱/۰۱۰
۳	بتا	۰/۹۷۳	۱/۰۵۱
۴	خطای ردیابی (%)	۰/۵۱۰	۰/۵۴۶
۵	نسبت اطلاعاتی	۰/۰۰۱	۰/۰۲۰

همان‌طور که در جدول فوق مشاهده می‌کنید، از لحاظ میانگین بازدهی مدل (۲) دارای عملکرد بهتری برای داده‌های درون نمونه بوده و همچنین این مدل نسبت بازار بالاتری را دارا می‌باشد. بتای

مدل (۱) نسبت به بتای مدل دیگر بالاتر بوده و همچنین خطای ردیابی مدل (۱) نیز کمتر می باشد اما شاخصی که می تواند هم از بعد بازدهی و هم از بعد ریسک دو مدل را مورد مقایسه قرار دهد نسبت اطلاعاتی است که نسبت اطلاعاتی مدل (۲) مقداری بالاتر نسبت به مدل (۱) دارا می باشد. این مقایسه نشان می دهد که اگرچه مقدار خطای ردیابی مدل (۲) بالاتر از مقدار خطای ردیابی مدل (۱) می باشد، اما بالاتر بودن بازده این مدل باعث شده است که نسبت اطلاعاتی مطلوب تری برای سرمایه گذار ایجاد کند.

نتایج به دست آمده با استفاده از الگوریتم جستجوی مستقیم

همانند حالت قبل در اینجا از الگوریتم جستجوی مستقیم استفاده شده است. نمودار زیر مقایسه روند اختلاف بازده پرتفوی و شاخص در مدل (۱) و مدل (۲) را نشان می دهد.



نمودار ۲. اختلاف بازده شاخص و پرتفو (خطا) برای داده های داخل نمونه برای الگوریتم جستجوی مستقیم

حال با استفاده از معیارهای ارزیابی عملکرد ارائه شده در بخش قبل، این دو مدل در جدول زیر مورد مقایسه قرار گرفته شده است.

جدول ۳. مقایسه معیارهای ارزیابی عملکرد در حالت درون نمونه در حالت استفاده از

الگوریتم جستجوی مستقیم

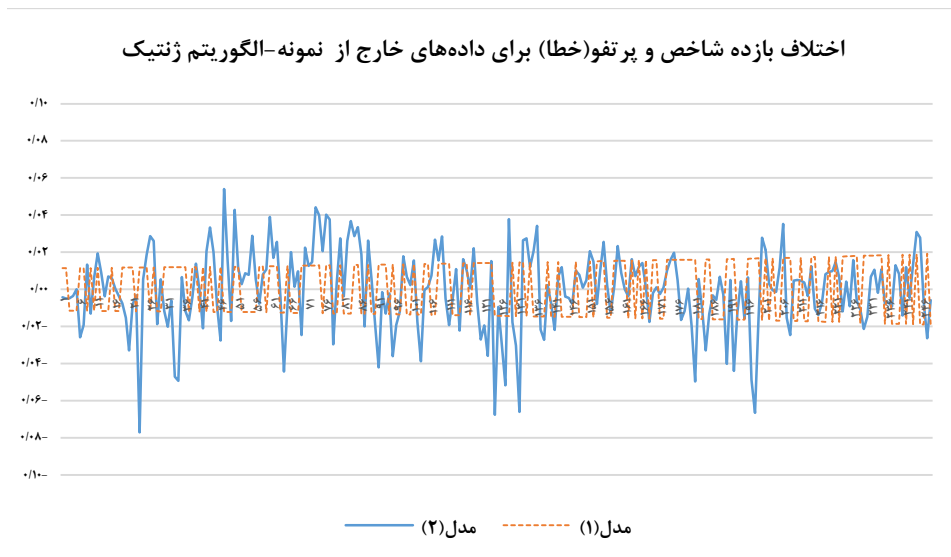
ردیف	شرح	مدل (۱)	مدل (۲)
۱	میانگین بازدهی (%)	۰,۰۵۳۴	۰,۰۶۳۶
۲	نسبت بازار	۱,۰۰۳	۱,۰۱۲
۳	بتا	۰,۹۷۸	۰,۹۷۹
۴	خطای ردیابی (%)	۰,۵۰۲	۰,۵۲۸
۵	نسبت اطلاعاتی	۰,۰۰۵۵۳	۰,۰۲۵

همان‌طور که در جدول فوق مشاهده می‌کنید، از لحاظ میانگین بازدهی مدل (۲) دارای عملکرد بهتری برای داده‌های درون نمونه بوده و همچنین این مدل نسبت بازار بالاتری را دارا می‌باشد. بتای مدل (۲) نسبت به بتای مدل دیگر بالاتر بوده و همچنین خطای ردیابی مدل (۱) نیز کمتر می‌باشد؛ اما شاخصی که می‌تواند هم از بعد بازدهی و هم از بعد ریسک دو مدل را مورد مقایسه قرار دهد نسبت اطلاعاتی است که نسبت اطلاعاتی مدل (۲) مقداری بالاتر نسبت به مدل (۱) دارا می‌باشد. این مقایسه نشان می‌دهد که اگرچه مقدار خطای ردیابی مدل (۲) بالاتر از مقدار خطای ردیابی مدل (۱) می‌باشد، اما بالاتر بودن بازده این مدل باعث شده است که نسبت اطلاعاتی مطلوب‌تری برای سرمایه‌گذار ایجاد کند.

نتایج حاصل از اجرای مدل در حالت خارج نمونه

در حالت استفاده از الگوریتم ژنتیک

در این بخش از پژوهش پرتفوی به‌دست آمده در مرحله درون نمونه را ملاک قرار داده و نمودار اختلاف بازده پرتفوی و شاخص برای داده‌های خارج از نمونه و در حالت استفاده از الگوریتم ژنتیک می‌باشد.



نمودار ۳. اختلاف بازده شاخص و پرتفو (خطا) برای داده‌های خارج از نمونه در حالت استفاده از الگوریتم ژنتیک

در ادامه با استفاده از معیارهای ارزیابی عملکرد ارائه شده در بخش قبل، این دو مدل در جدول زیر مورد مقایسه قرار گرفته شده است.

جدول ۴. مقایسه معیارهای ارزیابی عملکرد در حالت درون نمونه در حالت استفاده از الگوریتم ژنتیک

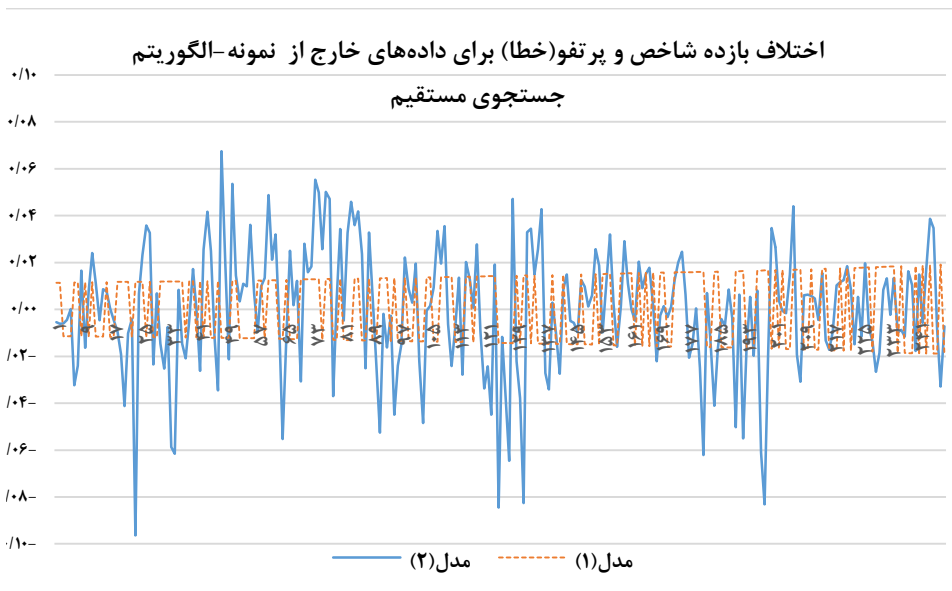
ردیف	شرح	مدل (۱)	مدل (۲)
۱	میانگین بازدهی (%)	۰/۰۷۶	۰/۰۹۲
۲	نسبت بازار	۱/۰۰۸	۱/۰۲۳
۳	بتا	۰/۹۲۴	۱/۱۱۵
۴	خطای ردیابی (%)	۰/۶۵۶	۰/۹۹۱
۵	نسبت اطلاعاتی	۰/۰۳۸	۰/۰۴۲

همان‌طور که در جدول فوق مشاهده می‌کنید، از لحاظ معیارهای بتا و خطای ردیابی، مدل (۱) دارای عملکرد بهتری نسبت به مدل (۲) می‌باشد؛ اما مدل (۲) از لحاظ معیارهای میانگین بازدهی،

نسبت بازار و نسبت اطلاعاتی دارای عملکرد بهتری می‌باشد؛ بنابراین از لحاظ ریسک، مدل (۱) و از لحاظ بازدهی مدل (۲) دارای عملکرد بهتری می‌باشد. اگر قصد داشته باشیم که هر دو عامل را مورد بررسی قرار دهیم، از نسبت اطلاعاتی استفاده می‌کنیم که حاکی از بهتر بودن مدل (۲) در حالت خارج از نمونه می‌باشد.

در حالت استفاده از الگوریتم جستجوی مستقیم

در این بخش از پژوهش پرتفوی به دست آمده در مرحله درون نمونه را ملاک قرار داده و نمودار اختلاف بازده پرتفوی و شاخص برای داده‌های خارج از نمونه و در حالت استفاده از الگوریتم جستجوی مستقیم می‌باشد.



نمودار ۴. اختلاف بازده شاخص و پرتفو (خطا) برای داده‌های خارج از نمونه در حالت استفاده از الگوریتم جستجوی مستقیم

در ادامه با استفاده از معیارهای ارزیابی عملکرد ارائه شده در بخش قبل، این دو مدل در جدول زیر مورد مقایسه قرار گرفته شده است.

جدول ۵. مقایسه معیارهای ارزیابی عملکرد در حالت درون نمونه در حالت استفاده از

الگوریتم جستجوی مستقیم

ردیف	شرح	مدل (۱)	مدل (۲)
۱	میانگین بازدهی (%)	۰,۰۷۲	۰,۰۹۱
۲	نسبت بازار	۱,۰۰۴	۱,۰۲۲
۳	بتا	۰,۹۲۱	۰,۹۲۲
۴	خطای ردیابی (%)	۰,۶۲۱	۰,۸۲۱
۵	نسبت اطلاعاتی	۰,۰۳۵	۰,۰۵۰

همان‌طور که در جدول فوق مشاهده می‌کنید، نتایج مشابه با الگوریتم ژنتیک به دست آمده است. از لحاظ معیارهای بتا و خطای ردیابی، مدل (۱) دارای عملکرد بهتری نسبت به مدل (۲) می‌باشد؛ اما مدل (۲) از لحاظ معیارهای میانگین بازدهی، نسبت بازار و نسبت اطلاعاتی دارای عملکرد بهتری می‌باشد؛ بنابراین از لحاظ ریسک، مدل (۱) و از لحاظ بازدهی مدل (۲) دارای عملکرد بهتری می‌باشد. اگر قصد داشته باشیم که هر دو عامل را مورد بررسی قرار دهیم، از نسبت اطلاعاتی استفاده می‌کنیم که حاکی از بهتر بودن مدل (۲) در حالت خارج از نمونه می‌باشد.

نتیجه‌گیری و بحث

در پژوهش پیش‌رو موضوع ردیابی شاخص به‌نوعی دیگر نگریسته شده است. در این پژوهش از روش دو مرحله‌ای به‌منظور ایجاد پرتفویی که هم خطای ردیابی را کمینه کرده و بازدهی پرتفوی را بیشینه کند، استفاده شده است. به این منظور از داده‌های مربوط به سهام بورس اوراق بهادار تهران استفاده شد.

نوآوری پژوهش روبرو از دو دیدگاه می‌باشد. دیدگاه اول مربوط به ارائه مدل می‌باشد. مدل ارائه‌شده در این مقاله برخلاف مدل‌های تک مرحله ارائه‌شده در مقالات پیشین دارای دو مرحله می‌باشد. مرحله اول مربوط به پیدا کردن مقدار کمینه خطای ردیابی و در مرحله دوم بازدهی پرتفوی تحت خطای ردیابی کمینه، ماکزیمم می‌شود. بعد دوم نوآوری مقاله مربوط به الگوریتم حل مدل‌ها می‌باشد. الگوریتم‌های بکار گرفته‌شده در این مدل الگوریتم ژنتیک و الگوریتم جستجوی مستقیم می‌باشد.

نتایج به دست آمده در حالت‌های استفاده از الگوریتم ژنتیک و الگوریتم جستجوی مستقیم حاکی از آن بود که هم در حالت خارج از نمونه و هم حالت داخل نمونه به لحاظ معیارهای ریسک مسئله ردیابی شاخص (خطای ردیابی و بتا) مدل سنتی دارای عملکرد بهتری است؛ اما به لحاظ شاخص‌های بازدهی (میانگین بازدهی، نسبت بازار) مدل پیشنهادی دارای عملکرد بهتری می‌باشد؛ اما برای ارزیابی دو عامل و مقایسه بهتر، از شاخص نسبت اطلاعاتی استفاده شد که مقایسه این دو مدل با استفاده از این معیار، حاکی از بهتر عمل کردن مدل پیشنهادی می‌باشد.

همچنین در حالت استفاده از داده‌های درون نمونه، الگوریتم جستجوی مستقیم دارای نسبت اطلاعاتی بالاتری نسبت به الگوریتم ژنتیک است. همچنین در حالت استفاده از داده‌های خارج از نمونه، الگوریتم ژنتیک دارای کارایی بالاتری در مدل تک‌مرحله‌ای یا سنتی است؛ اما در حالت استفاده از مدل دو مرحله‌ای، الگوریتم جستجوی مستقیم دارای کارایی بالاتری است.

برای پژوهش‌های آتی توصیه می‌شود که در طراحی مدل معیارهایی همچون بتا به مدل پیشنهادی اضافه شود و از سایر الگوریتم‌های فرا ابتکاری مانند الگوریتم گروه جستجو برای بهتر کردن جواب‌های به دست آمده استفاده شود.

منابع

- حجازی، رضوان. جعفری سرشت، داود و دلشادی، محمود (۱۳۹۰). «تشکیل صندوق شاخصی بهبود یافته با استفاده از الگوریتم ژنتیک»، فصلنامه بورس اوراق بهادار، شماره ۱۴، صفحات ۱۳۵-۱۵۷.
- حنیفی، فرهاد. بحرالعلوم، محمد مهدی و جوادی، بابک (۱۳۸۸). «طراحی و تحلیل مقایسه‌ای الگوریتم‌های فرا ابتکاری جهت پیاده‌سازی سرمایه‌گذاری شاخص محور در بورس تهران»، فصلنامه چشم‌انداز مدیریت، شماره ۳۲، صفحات ۸۹-۱۰۸.
- رضایی، علیرضا؛ رنجبران، سجاد (۱۳۸۶). آموزش الگوریتم ژنتیک در نرم‌افزار متلب. تهران، انتشارات آذر.
- عباسی، ابراهیم. اکبری، صمد (۱۳۹۳). «کاربرد الگوریتم‌های تیرید شبیه‌سازی شده و ژنتیک در تشکیل صندوق شاخصی». فصلنامه مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار، شماره ۲۰، صفحات ۱۳۵-۱۵۷.
- محمدی قلعه‌نی، مهدی؛ ابراهیمی، کیومرث (۱۳۹۱) «ارزیابی الگوریتم‌های جستجوی مستقیم و ژنتیک در بهینه‌سازی پارامترهای مدل غیرخطی ماسکینگام - یک سیلاب از کارون»، مدیریت آب و آبیاری، دوره ۲، شماره ۲، صفحات ۱-۱۲.
- ورسه‌ای، محسن و شمس، ناصر (۱۳۸۹). «ارائه یک روش حل ابتکاری به‌منظور بهینه‌سازی حل مسئله سبد ردیاب شاخص و پیاده‌سازی آن برای اولین بار در بازار سهام تهران»، هشتمین کنفرانس بین‌المللی مدیریت.
- Abbasi, Ebrahim; Akbari, Samad (2015), application of SA and genetic algorithm in index tracking, No 20, pp.135-157, (in persian).
- Audet, C. & Dennis Jr, J. E. (2002). Analysis of generalized pattern searches. SIAM Journal on optimization, 13(3), 889-903.
- Beasley, J. E. Meade, N. & Chang, T. J. (2003). An evolutionary heuristic for the index tracking problem. European Journal of Operational Research, 148(3), pp.621-643.
- Canakgoz, N. A. & Beasley, J. E. (2009). Mixed-integer programming approaches for index tracking and enhanced indexation. European Journal of Operational Research, 196(1), pp.384-399.
- Corielli, F. & Marcellino, M. (2006). Factor based index tracking. Journal of Banking & Finance, 30(8), pp.2215-2233.
- de Paulo, W. L. Fontova, M. I. V. & de Souza, R. C. (2019). AN ANALYSIS OF A MEAN-VARIANCE ENHANCED INDEX TRACKING PROBLEM WITH WEIGHTS CONSTRAINTS.
- Erdogan, E. Goldfarb, D. & Iyengar, G. (2004). Robust portfolio management.

- Focardi, S. M. & Fabozzi 3, F. J. (2004). A methodology for index tracking based on time-series clustering. *Quantitative Finance*, 4(4), pp.417-425.
- García, F. Guijarro, F. & Oliver, J. (2018). Index tracking optimization with cardinality constraint: a performance comparison of genetic algorithms and tabu search heuristics. *Neural Computing and Applications*, 30(8), pp.2625-2641.
- Gilli, M. & Këllezi, E. (2002). The threshold accepting heuristic for index tracking. In *Financial engineering, e-commerce and supply chain* (pp. 1-18). Springer, Boston, MA.
- Hanifi et al(2010), Implementation and aomparision analyses of metaheuristic for index tracking portfolio, *Financial Management Perspective*, No 20, pp.89-108(in persian).
- Hejazi et all(2012), enhanced index traking with genetic algorithm, *QUARTERLY JOURNAL OF SECURITIES EXCHANGE*, No 14 ,pp.135-157(in persian).
- Jansen R and Dijk H. (2002). "Index Tracking, cointegration and equity market regimes". *International Journal Of Finance And Economics*, Vol 10, pp.213-237
- Konno, H. & Wijayanayake, A. (2001). Minimal cost index tracking under nonlinear transaction costs and minimal transaction unit constraints. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 4(06), pp.939-957.
- Kwon, R. H. & Wu, D. (2017). Factor-based robust index tracking. *Optimization and Engineering*, 18(2), pp.443-466.
- Lam, W. S. & Lam, W. H. (2016). Mathematical modeling of enhanced index tracking with optimization model. *J. Numer. Anal. Appl. Math*, 1(1), pp.1-5.
- Lewis RM and Torczon V (2000) Pattern search methods for linearly constrained minimization. *SIAM Journal on Optimization*. Pp. 917-941.
- Lewis, R. M. Torczon, V. & Trosset, M. W. (1998). Why pattern search works (No. ICASE-98-57). Institute for computer applications in Science and engineering hampton va.
- Mohammadi ghaleni, mehdi; Kiomars, Ebrahimi(2013), Evaluation of direct search and genetic algorithms in optimization of muskingum nonlinear model parameters - a flooding of Karoun river, *journal of water and irrigation management*, No2, pp.1-12, (in persian).
- Rafaely, B. & Bennell, J. A. (2006). Optimisation of FTSE 100 tracker funds: A comparison of genetic algorithms and quadratic programming. *Managerial Finance*, 32(6), pp.477-492.
- Rezaie alireza and Ranjbaran Sajad(2008), genetic algorithm learning, Azar publicaton(in persian).
- Roll, R. (1992). A mean/variance analysis of tracking error. *The Journal of Portfolio Management*, 18(4), pp.13-22.
- Rudolf, M. Wolter, H. J. & Zimmermann, H. (1999). A linear model for tracking error minimization. *Journal of Banking & Finance*, 23(1), pp.85-103.
- Strong, R. (2008). *Portfolio construction, management, and protection*. Nelson Education.
- varasai, mohsen; Naser, Shams (2011), present a solution based metahuristic algorithm for index traking in TSE, 8 th international management confroncess((in persian).