

دانشگاه فرهنگیان

دوفصلنامه علمی - پژوهشی

مطالعات آموزشی و آموزشگاهی

سال پنجم، شماره پانزدهم، پاییز و زمستان ۱۳۹۵

نوبت چاپ: ۱۳۹۷

تدریس، با تأکید بر راه‌حل‌های چندگانه: گامی به سمت تقویت استدلال ریاضی

زهرا رحیمی^۱، ابراهیم طلایی^{۲*}، ابراهیم ریحانی^۳، هاشم فردانش^۴

تاریخ دریافت: ۱۳۹۴/۰۹/۱۰ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۵/۰۸/۱۵

چکیده

هدف کلی پژوهش حاضر، بررسی میزان اثربخشی آموزش با تأکید بر راه‌حل‌های چندگانه، در تقویت مهارت استدلال ریاضی در دانش‌آموزان دوره متوسطه است. در این مطالعه، ۴۷ دانش‌آموز در گروه آزمایشی و ۵۴ دانش‌آموز در گروه کنترل، شرکت داشتند که همگی در سال تحصیلی ۹۵-۱۳۹۴، در مدارس دولتی دخترانه منطقه ۳ آموزش و پرورش شهر تهران، در رشته ریاضی و تجربی، مشغول به تحصیل بودند. ابزار این مطالعه، آزمونی است که بر مبنای دسته‌بندی میازاکی (۲۰۰۰) شامل استدلال استنتاجی و استقرایی است. روش پژوهش، کنش‌پژوهی است که در بطن آن از روش شبه آزمایشی استفاده شده است. تحلیل نتایج نشان می‌دهد آموزش به‌کمک راه‌حل‌های چندگانه مهارت استدلال را در گروه دانش‌آموزان ریاضی افزایش داده، ولی تغییرات میانگین در گروه تجربی اندک است. تحلیل کیفی نتایج نیز نشان می‌دهد، بسیاری از دانش‌آموزان فهم درستی از اثبات، ضرورت اثبات، ویژگی‌های اثبات معتبر و تمایز بین نمایش و محتوای اثبات ندارند، بسیاری از آنها با مفهوم متغیر، مأنوس نیستند و به‌خوبی موفق به گذر از تفکر حسابی به تفکر جبری نشده و نیز در گفتمان ریاضی، قوی عمل نمی‌کنند.

کلمات کلیدی: راه‌حل‌های چندگانه، استدلال ریاضی، کنش‌پژوهی

مقدمه

^۱ دکتری برنامه درسی، دانشگاه تربیت مدرس،

^{۲*} استادیار گروه تعلیم و تربیت دانشگاه تربیت مدرس، (نویسنده مسئول) e.talae@modares.ac.ir

^۳ دانشیار گروه آموزش ریاضی، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی

^۴ دانشیار گروه تعلیم و تربیت، دانشگاه تربیت مدرس

ریاضیات از دیرباز بخشی جدا نشدنی از برنامه‌های درسی مدارس بوده و برخی آن را دروازه موفقیت و شکست فارغ‌التحصیلان دبیرستانی و رمز موفقیت حرفه‌ای آنان دانسته‌اند (شورای ملی تحقیقات^۱ آمریکا، ۲۰۰۱). باوری که برخی آموزشگران را به سمت راه‌های میان‌بری سوق داده که برای سریع‌تر رسیدن به مقصد، حفظ و تکرار رویه‌ها را به جای فهم آن برگزیده‌اند و به تدریج، ریاضیات را به سطحی ابزاری و رویه‌ای فروکاسته‌اند. حال آن‌که مهم‌ترین هدف تدریس ریاضی، آموزش استدلال منطقی است و این فرآیند استدلال ریاضی است که می‌تواند درک و بینش افراد را در پدیده‌های مختلف توسعه دهد (شورای ملی معلمان ریاضی^۲ آمریکا، ۲۰۰۰). از این رو، از نظام آموزشی انتظار می‌رود به جای انتقال صرف اطلاعات به دانش‌آموزان، موقعیت‌های مناسبی را برای پرورش تفکر و توسعه توانایی استدلال منطقی آنان فراهم آورد (حاجی حسینی نژاد و بالغی‌زاده، ۱۳۸۹؛ ملکی و حبیبی‌پور، ۱۳۸۵). مطالعات نشان می‌دهد که به‌رغم اصالت چنین رسالتی، اکثر دانش‌آموزان بر حفظ رویه‌ها تکیه دارند تا فهم آن و اغلب، درک و فهم مناسبی از فرآیند استدلال و اثبات‌های معتبر در ریاضیات مدرسه‌ای ندارند (ریحانی و همکاران، ۱۳۹۱).

مضاف بر این، نتایج مطالعات تیمز ۱۹۹۹ - ۲۰۱۱ و نیز تیمز پیشرفته ۲۰۰۸، جایگاه ایران را در تمامی این سال‌ها و در هر دو پایه چهارم و هشتم، در هر سه حیطه دانستن^۳، به‌کار بستن^۴ و استدلال^۵، به‌طور معناداری پایین‌تر از میانگین مقیاس تیمز نشان می‌دهد^۶ (گزارش نتایج تیمز و پرلز، ۱۳۹۱). به نظر می‌رسد که آموزش ریاضی در کشور، از رسالت اساسی تقویت تفکر و قدرت استدلال افراد، فاصله گرفته و در اغلب موارد، به آموزش روندها، رویه‌ها و تکنیک‌ها اکتفا شده است. لذا پرسش اساسی این است که با اتخاذ کدام رویکرد و چه راهکاری می‌توان راهی به سمت رهایی از این بحران گشود؟ مواجهه با چنین موقعیتی، اهمیت تبیین و توسعه رویکردهای جدید را برای توسعه دانش ریاضی قابل استفاده معلمان برجسته می‌کند (کمیته یادگیری ریاضی، ۲۰۰۱) و رویکرد تازه‌ای لازم می‌نماید که ریاضیات را با رسالت دیرینه‌اش آشتی دهد و دانش‌آموزانی پرورد که ریاضی‌وار بیندیشند و در برخورد با مسایل - همان‌گونه که آرمان برنامه درسی ملی (۱۳۹۱ : ۳۳) است - به‌طور منطقی استدلال کنند و قدرت تجزیه و انتزاع داشته باشند.

^۱ National Researches Council (NRC)

^۲ National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)

^۳ Knowing

^۴ Applying

^۵ Reasoning

^۶ میانگین نمرات ریاضی پایه چهارم در این سال‌ها (به استثنای سال ۱۹۹۹) به ترتیب ۳۸۷، ۳۸۹، ۴۰۲ و ۴۳۱ و در پایه‌ی هشتم ۴۱۸، ۴۲۲، ۴۱۱، ۴۰۳ و ۴۱۵ بوده است. لذا همان‌طور که این اعداد نشان می‌دهند، در پایه‌ی چهارم هر چند میانگین نمرات، روندی رو به رشد داشته، اما در بهترین حالت، هنوز با میانگین بین المللی ۵۰۰، اختلافی به اندازه‌ی ۶۹ نمره وجود دارد. در پایه‌ی هشتم این اختلاف به ۷۸ نمره می‌رسد، ضمن آنکه تعداد روندهای کاهشی بیش از روندهای افزایشی است.

یکی از رویکردهای آموزشی نویدبخش که پتانسیل مناسب و ارزشمندی در بهبود تلاش‌های یادگیری دانش‌آموزان دارد، مقایسه راه‌حل‌های چندگانه^۱ برای حل یک مسأله است (لینچ و استار^۲، ۲۰۱۴؛ استار و ریتل^۳، ۲۰۰۸) به تبع استفاده از این روش، حل مسأله با اتخاذ رویکردی واحد و رسیدن به پاسخ، خاتمه نمی‌یابد؛ بلکه تلاش می‌شود از زوایای مختلف به مسأله نگاه شود و راه‌حل‌های متعدد، ارائه و مورد ارزیابی قرار گیرد. اما به‌رغم پافشاری اسناد سیاست‌گذاری آموزشی در حیطه آموزش ریاضی، بر آموزش دانش‌آموزان با راه‌حل‌های چندگانه (۲۰۱۰، CCSS^۴؛ ۲۰۰۶، NCTM؛ ۲۰۰۱، NRC)، و با وجود مطالعات متعدد که تشویق دانش‌آموزان به استفاده از این روش را کلید دستیابی به دانش عمیق ریاضی می‌داند (اسکایلو و کروگ^۵، ۲۰۱۴)، برخی محققین معتقدند این روش، یادگیرندگان را با سردرگمی مواجه می‌کند و با وجود توافقات حرفه‌ای آشکار در به‌کارگیری این رویکرد، بحث در این خصوص که این روش برای تمامی دانش‌آموزان مفید و کارآمد است یا فقط برای دانش‌آموزانی با توانایی بالایی علمی، عملی است، ادامه دارد (لینچ و استار، ۲۰۱۴).

به‌هر حال از یک سو، مواجهه با نظرات موافق و مخالف با کاربرد استفاده از چند راه‌حل برای حل یک مسأله ریاضی و از دیگر سو، تألیف کتاب‌های درسی جدید در حوزه ریاضی با این شیوه، بر ضرورت آزمون عملی این رویکرد صحه می‌گذارد. لذا هدف کلی این مطالعه، بررسی میزان موفقیت و اثربخشی آموزش، با تأکید بر راه‌حل‌های چندگانه بر استدلال ریاضی دانش‌آموزان است. این مقایسه به استناد مطالعاتی که این روش را تنها برای دانش‌آموزان با توانایی بالای ریاضی مناسب می‌داند (برای نمونه لینچ و استار، ۲۰۱۴؛ لیکین، ۲۰۱۱)، در دو رشته ریاضی و تجربی انجام شده است، تا امکان بررسی تأثیرات این روش روی دانش‌آموزان با مهارت بالاتر و پایین‌تر در درس ریاضی فراهم شود.

مبانی نظری و پیشینه‌ی پژوهشی

استدلال ریاضی: استدلال را به‌طور کلی هماهنگی شواهد، باورها و اندیشه‌ها برای نتیجه‌گیری در مورد آنچه صحت دارد، تعریف کرده‌اند (لیتون^۶، ۲۰۰۳:۳) و استدلال ریاضی را توانایی تفکر منسجم و منطقی و استنتاج از حقایق ریاضی آشنا یا مفروض دانسته‌اند (مانسی^۷، ۲۰۰۳:۹). در این مطالعه، بر اساس طبقه‌بندی ارائه شده از سوی میازاکی (۲۰۰۰)، استدلال ریاضی شامل استدلال استنتاجی و استدلال استقرایی است^۸. او با بررسی توانایی اثبات دانش‌آموزان در مقطع دبیرستان، مدلی با دو بعد نمایش^۹ و محتوا^{۱۰} و چهار سطح اثبات ارائه می‌کند که در جدول ۱ قابل مشاهده است:

^۱ Multiple solutions

^۲ Lynch and Star

^۳ Star & Rittle

^۴ Common Core State Standards for Mathematics

^۵ Schukajlow & Krug

^۶ Leighton

^۷ Mansi

^۸ این مبنا تنها در طراحی ابزار مورد استفاده قرار گرفته و در نمره‌گذاری آزمون‌ها از شیوه‌ی او تبعیت نشده است.

^۹ Representation

^{۱۰} Content

جدول ۱: طبقه‌بندی سطوح اثبات دانش‌آموزان از دیدگاه میازاکی (۲۰۰۰)

محتوا نمایش	استدلال استقرایی	استدلال استنتاجی
زبان رسمی استدلال	اثبات D	اثبات A
زبان های دیگر، تصاویر و وسایل قابل استفاده	اثبات C	اثبات B

فرآیند استدلال و اثبات در تحقیقات مرتبط با آموزش ریاضی به کرات مورد بررسی قرار گرفته است (برای نمونه هارل و ساوور^۱، ۱۹۹۸؛ میازاکی، ۲۰۰۰؛ هیلی و هوپلز^۲، ۲۰۰۰؛ استایلیانیدز^۳، ۲۰۰۵، ۲۰۰۷؛ استایلیانیدز و استایلیانیدز، ۲۰۰۸؛ چین و لین^۴، ۲۰۰۹) و متخصصان تعلیم و تربیت، پرورش استدلال را رسالت اساسی ریاضی و زیربنای تفکر اندیشمندانه و منطقی دانسته‌اند (ملکی و حبیبی‌پور، ۱۳۸۵؛ حاجی حسینی‌نژاد و بالغی‌زاده، ۱۳۸۹). اما بسیاری از مطالعات مؤید آنند که اغلب دانش‌آموزان در درک، فهم و ساخت اثبات و استدلال‌های منطقی در همه سطوح تحصیلی با مشکل مواجهند (هارل و ساوور، ۱۹۹۸؛ هیلی و هوپلز، ۲۰۰۰؛ رکیو و گودینو^۵، ۲۰۰۱؛ استایلیانیدز، ۲۰۰۵، ۲۰۰۷؛ وارجیس^۶، ۲۰۰۷؛ دی‌وانس پرونسن^۷، ۲۰۰۸؛ پاداک^۸، ۲۰۰۹) و بیش‌تر بر حفظ رویه‌ها تکیه دارند، تا فهم آن و اغلب آنان از سؤالاتی که آن‌ها را درگیر حتی ساده‌ترین اثبات‌ها می‌کند، می‌گریزند و ترجیح می‌دهند به جای آن، سراغ سؤالات رویه‌ای و الگوریتمی - که ممکن است پیچیده‌تر هم باشند- بروند (تال^۹، ۱۹۸۹، به‌نقل از ریحانی و همکاران، ۱۳۹۱)؛ بدون آنکه درک درستی از اثبات آن گزاره داشته باشد یا به‌طور کامل از درستی روش، قانع شده باشد (وبر^{۱۰}، ۲۰۰۵، ۲۰۰۴). حال آنکه وقتی ریاضیات به عنوان علمی مستدل، یاد گرفته می‌شود، دانش به‌دست آمده - حتی موقعی که حافظه، رویه‌ها را فراموش می‌کند- به راحتی می‌تواند بازسازی شود (بال و باس^{۱۱}، ۲۰۰۳) و مسائل رویه‌ای و الگوریتمی، به ندرت موجب گسترش تفکر اصیل ریاضیات در دانش‌آموزان می‌شوند (برودیه^{۱۲}، ۲۰۱۰).

راه‌حل‌های چندگانه: در این مطالعه، تأکید بر راه‌حل‌های چندگانه حین آموزش، رویکردی مؤثر در افزایش توانمندی

دانش‌آموزان در استدلال ریاضی، فرض شده است. از نگاه این مطالعه آموزش، خلق معنا در ذهن دانش‌آموز است و نه انتقال

^۱ Harel & Sowder

^۲ Healy & Hoyles

^۳ Stylianides

^۴ Chin & Lin

^۵ Recio & Godino

^۶ Varghese

^۷ Dee Vanspronsen

^۸ Paddock

^۹ Tall

^{۱۰} Weber

^{۱۱} Ball & Bass

^{۱۲} Brodie

آن به ذهن او و حین آموزش به جای رعایت مراحل مشخص، بر اصولی کلی برای یادگیری، نظیر تشویق به تملک و داشتن نظر در فرآیند یادگیری، استفاده از انواع روش‌های یادگیری و نیز تقدیر از دیدگاه‌های مختلف تأکید می‌شود (فردانش، ۱۳۸۳). قرار گرفتن در چنین فضایی، دانش‌آموز را از حالت انفعالی پذیرش خارج کرده و این باور قدیمی که برای هر پرسش، پاسخ درستی منحصر به فرد موجود است که آن را باید نزد معلم جست، فرو می‌ریزد.

تأکید بر راه‌حل‌های چندگانه، رویکردی است که بیشتر مورد توجه صاحب‌نظران حیطه آموزش ریاضی در خارج از مرزهای ایران بوده و به‌خصوص در سال‌های اخیر مقالاتی در خصوص قابلیت‌های ویژه آن در تقویت مهارت‌ها و نگرش‌های ریاضی دانش‌آموزان و حتی معلمان ریاضی به رشته تحریر درآمده، اما در داخل کشور پژوهش مشخصی را به خود اختصاص نداده است.

این رویکرد حاوی بایستگی یا نوعی پتانسیل آشکار برای حل مسأله به روش‌های مختلف است. درحوزه موضوعی ریاضی، تفاوت بین این راه‌حل‌ها در سه محور بازنمایی‌های متفاوت از یک مفهوم ریاضی، ارائه‌ی تعاریف و ویژگی‌های متفاوت برای یک مفهوم خاص در ریاضی و یا نگرش به یک مقوله از شاخه‌های متفاوت ریاضی، انعکاس خواهد یافت (لیوای و اینبرگ و لیکین، ۲۰۰۷: ۷۷۶) و بدین ترتیب مسیر برای ورود بازنمایی‌های^۱ متفاوت هموار خواهد شد. غنای هر چه بیشتر تصویر ذهنی ساخته شده از مفهوم، به موفقیت بیشتر شخص در یادگیری منجر خواهد شد و حرکت از یک بازنمایی ریاضی به بازنمایی دیگر و تنوع فعالیت‌ها می‌تواند بستر ذهن دانش‌آموز را برای تفکر و فهمی عمیق‌تر مهیا سازد (هنینگسن و استین^۲، ۱۹۹۷).

اما یافته‌های مطالعات در حوزه راه‌حل‌های چندگانه، مواجهه‌های متفاوتی را به تصویر می‌کشد. برخی مطالعات، استفاده از این رویکرد را برای دستیابی به تسلط بیشتر در دانش ریاضی به رسمیت شناخته‌اند و برآند که آگاه‌کردن دانش‌آموزان، از اینکه هر مسأله می‌تواند از راه‌های بسیار به نتیجه منجر شود و تشویق ایشان به گام گذاشتن در هر یک از این مسیرها، نهایتاً کیفیت فهم ریاضی را در آنان افزایش می‌دهد. مدافعین این رویکرد معتقدند استفاده از مسایلی با تنها یک جواب درست، می‌تواند دانش‌آموز را از تجربه مسیرهای متفاوت، منصرف و دلسرد کند و او را از کاوش در ایده‌های متنوع باز دارد. ایشان این رویکرد را فرصتی ویژه، برای به فعل رساندن خلاقیت ریاضی دانش‌آموزان و فهم عمیق‌تر ایشان، از مفاهیم ریاضی برشمرده‌اند و آنرا، هم ابزاری آموزشی و هم ابزاری پژوهشی دانسته‌اند که توانی ویژه در ارزیابی دانش ریاضی دانش‌آموزان دارد (لیوای و اینبرگ و لیکین^۳، ۲۰۱۲). ابزاری آموزشی و پژوهشی که با داشتن ظرفیتی ویژه، پیامدهای مثبت بسیاری را در حوزه مهارت‌ها و نگرش‌ها، هم در دانش‌آموزان و هم در معلمان به همراه دارد.

^۱ Representation

^۲ Henningsen and Stein

^۳ Levav-Waynberg & Leikin

اما به موازات همین اقبال و به‌رغم توصیه‌های بسیاری از متخصصین و آموزشگران حوزه آموزش ریاضی بر استفاده از این روش، برخی پژوهش‌گران نیز بر آنند که ارائه مفاهیم ریاضی و به‌خصوص هندسی از چشم‌اندازهای متفاوت، نه تنها فهم عمیق هندسی را تضمین نمی‌کند، بلکه به واسطه محدودیت‌های زمانی، این رؤیا محقق نخواهد شد و علاوه بر آن ارائه تصاویر چندگانه به چشمی که برای «دیدن» آموزش ندیده است، به ابهام بیشتر تصویر اولیه، دامن خواهد زد (وو، ۱۹۹۶). لذا برخی آموزشگران با استناد به این که نتوانسته‌اند چنین رویکردی را در بازه زمانی کوتاهی که در کلاس درس در اختیار دارند، پیاده کنند، آن را باعث سردرگم شدن دانش‌آموزان به‌خصوص ضعیف‌تر دیده‌اند و از اجرای آن در کلاس‌های درس امتناع می‌ورزند (لیکین، ۲۰۱۱). برخی مخالفین نیز برآنند که آموزش به دانش‌آموزان ضعیف‌تر تنها در صورتی اثربخش خواهد بود که مجموعه‌ای محدود و ساده از قوانین به آنان آموزش داده شود (لینچ و استار، ۲۰۱۴).

علی‌رغم مخالفت‌های موجود با این ایده، تألیف کتب درسی جدید در حوزه ریاضی با تأکید بر استفاده از راه‌حل‌های چندگانه و ضرورت آزمون عملی این رویکرد، در بافتی طبیعی و موقعیتی عملی، بایستگی انجام این مطالعه را بارز می‌کند. در این مطالعه از آن رو که پیوند میان کنش و اندیشه مد نظر بود، مجالی فراهم شد که محققین در مقام معلم پا به صحنه عمل بگذارند و توان یا ضعف این رویکرد را در تقویت مهارت استدلال دانش‌آموزان به معرض نمایش بگذارند.

روش پژوهش

برای بررسی میزان موفقیت روش تدریس بر مبنای راه‌حل‌های چندگانه، در تقویت استدلال دانش‌آموزان، از آن رو که لازم می‌نمود در بافت طبیعی و واقعی کلاس درس اثربخشی این رویکرد مورد آزمون قرار گیرد، از بین روش‌های پژوهشی که می‌توانست پاسخ‌گوی نیازهای عرصه عمل باشد، روش کنش‌پژوهی برگزیده شد. این روش شامل چهار مرحله برنامه‌ریزی^۱، عمل^۲، مشاهده^۳ و بازاندیشی^۴ (کمیس و همکاران^۵، ۲۰۰۴) و مبتنی بر این فلسفه است که تحقیق نباید فعالیتی باشد که به‌طور مجزا از جامعه مورد مطالعه صورت گیرد (ادیب حاج‌باقری و همکاران، ۱۳۹۰).

مراحل اجرای روش:

برای پایبندی به چرخه چهار مرحله‌ای برنامه‌ریزی، عمل، مشاهده و بازاندیشی، در مرحله برنامه‌ریزی ابتدا دو کلاس ریاضی و تجربی در پایه دوم متوسطه، در یکی از مدارس دولتی تهران انتخاب شدند. به علت عدم امکان انتخاب تصادفی اعضای نمونه به اقتضای رعایت بافت طبیعی و واقعی که از ملزومات کنش‌پژوهی است، انتخاب این دو کلاس به شکل

^۱ Wu

^۲ Plan

^۳ Act

^۴ Observe

^۵ Reflect

^۶ Kemmis, McTaggart and Retallick

هدفمند انجام شد. پس از انتخاب نمونه، درس ریاضیات ۲ به جهت قابلیت مناسب آن در تدریس به کمک راه‌حل‌های چندگانه انتخاب شد و طرح درس‌های روزانه برای آموزش به مدت یک ترم تحصیلی بر این اساس تنظیم و توسط متخصصین این حوزه تأیید شد. این طرح درس‌ها، در واقع پیش‌بینی از آنچه قرار است بین معلم و دانش‌آموزان در ظرف زمانی هفتاد و پنج دقیقه‌ای کلاس درس حادث شود، فراهم کرده و به مثابه راهنمای عمل، تعیین‌کننده خط مشی کلاس درس بود.

در مرحله عمل و اجرا، به جهت سیال بودن کلاس‌های درس و پیچیدگی رفتارهای انسانی، پابندی به اجرای صد در صدی طرح درس‌ها، ممکن به نظر نمی‌رسید؛ اما تلاش بر این بود که این پابندی به شکل حداکثری، اتفاق بیفتد و در ظرف زمانی محدود کلاس درس، به انواع راه‌حل‌های ارائه شده توسط دانش‌آموزان بها داده شده، تمامی آن‌ها مورد بررسی و ارزیابی قرار گیرد. ضمن اجرا، سعی بر آن بود که از دو ضعف اجتناب شود، اول این که عنصری از عناصر این رویکرد، در مراحل تدریس از قلم نیفتد و دیگر آن که عنصری که در این رویکرد جایی ندارد، حین اجرا به آن اضافه نشود. به این معنا که اگر این مطالعه مدعی است این روش تدریس، به فرآیندهایی نظیر گفتمان ریاضی و تفکر با صدای بلند و بازنمایی‌های چندگانه اجازه بروز و ظهور می‌دهد، حتماً حین اجرا، زمینه برای طرح این پتانسیل‌ها آماده باشد و در عین حال از کاربرد سایر تکنیک‌ها و مهارت‌هایی که با این روش تدریس قرابت ویژه‌ای ندارد، تا حد ممکن صرف‌نظر شود.

در مرحله مشاهده، لازم می‌نمود که فرایند عمل، مورد بازبینی قرار گیرد و بنابراین نگرشی دوباره از چشم‌اندازهای متفاوت، به آنچه در کلاس درس اتفاق می‌افتد، ضروری به نظر می‌رسید. چشم‌اندازهای مختلفی که هر کدام بخشی از پازل عمل تربیتی را تکمیل می‌کنند. بدین ترتیب پس از کسب مجوز قانونی و دریافت رضایت‌نامه از اولیای تمامی دانش‌آموزان^۱، از همه جلسات تدریس، ضبط ویدئویی به عمل آمد. علاوه بر ضبط ویدئو و بازبینی آن به هدف تشخیص نقاط قوت و ضعف پس از هر جلسه آموزشی، یادداشت‌نگاری هفتگی دانش‌آموزان پس از پایان درس، لنز دیگری بود که برای مشاهده دقیق‌تر و وسیع‌تر اتفاقات کلاس درس، انتخاب شد. طی این یادداشت‌ها دانش‌آموزان با ذکر تفاوت کلاس ریاضی فعلی، با کلاس‌های ریاضی که در سال‌های گذشته تجربه کرده بودند، تلویحاً شواهدی را در تأیید استفاده از راه‌حل‌های چندگانه و علاوه بر آن راهنمایی برای بهبود عمل تدریس، فراهم می‌آوردند. در نهایت برآیند بازخوردهای حاصل از بازبینی و تحلیل تصاویر ضبط شده از چشم‌اندازهای متفاوت، در مرحله پیشین، به عنوان آخرین مرحله از کنش پژوهشی موسوم به بازاندیشی، رهنمون‌هایی را برای بهبود عمل تدریس در جلسات بعد فراهم می‌کرد.

در بستر این مطالعه و در راستای بررسی وضعیت دانشی دانش‌آموزان و مقایسه آن، پیش و پس از قرار گرفتن در معرض رویکرد آموزشی مورد نظر، پیش از آغاز دوره آموزشی و پس از پایان آن، آزمون سنجش استدلال به شکل پیش‌آزمون

^۱ اولیای دو نفر از دانش‌آموزان به ضبط ویدئویی رضایت نداشتند، لذا این دانش‌آموزان هنگام ضبط فیلم در مکانی مستقر می‌شدند که در زاویه‌ی دید دوربین نباشند.

و پس از آزمون روی گروه مداخله برگزار شد و علاوه بر آن، آزمون استدلال روی گروه دیگری موسوم به گروه کنترل - که تحت آموزش با رویکرد راه‌حل‌های چندگانه نبودند - اجرا گردید.

آزمودنی‌ها

شرکت کنندگان این مطالعه، به فراخور الزامات کنش‌پژوهی و لزوم انجام پژوهش در بافتی طبیعی و واقعی، نمونه‌ای است در دسترس، شامل ۴۷ دانش‌آموز دختر دبیرستانی (۲۰ نفر رشته ریاضی، ۲۷ نفر رشته تجربی) در گروه آزمایشی و ۵۴ دانش‌آموز (۲۰ دانش‌آموز رشته ریاضی و ۳۴ دانش‌آموز رشته تجربی) در گروه کنترل. برای انتخاب گروه کنترل، به هدف انتخاب گروه همتای مناسب و کاهش سوگیری‌های احتمالی، با مشورت مدیر گروه ریاضی منطقه آموزش و پرورش مربوط، سه مدرسه دولتی در همان منطقه، با شرایط آموزشی یکسان و نزدیک به گروه آزمایش انتخاب شد و از تمامی دانش‌آموزان این سه کلاس آزمون به عمل آمد.

ابزار پژوهش و اجرا

استدلال در این پژوهش بر مبنای کار بسیاری از صاحب‌نظران حوزه آموزش ریاضی نظیر میازاکی (۲۰۰۰)، متشکل از دو محور عمده استقرا و استنتاج است؛ به‌خصوص که دانش‌آموزان در این مقطع سنی، با استدلال‌هایی نظیر برهان خلف، مثال نقض، استدلال بازگشتی و... آشنایی ندارند. در محور استدلال استنتاجی، سؤالات مربوط به بخش استدلال در مطالعات تیمز (۲۰۰۷، ۲۰۱۱) پایه هشتم، پرسش‌نامه میازاکی (۲۰۰۰) و سؤالات پرسش‌نامه هیلی و هویلز (۲۰۰۰) مورد توجه قرار گرفت. در محور استقرا نیز، بانکی متشکل از مقالات معتبر و کتب صاحب‌نظران در این حوزه تهیه شد و سؤالات مربوط از آن استخراج شد. برای نمونه: (نوارک^۱، ۲۰۰۲، ووگل^۲، ۲۰۰۵؛ کوپر و وارن^۳، ۲۰۰۸؛ زازکیس، لیلیدال و چرنوف^۴، ۲۰۰۸، آمیت و نریا^۵، ۲۰۰۸، کاراها و همکاران^۶، ۲۰۰۸، تانیش و اوزدس^۷، ۲۰۰۹؛ ریورا و بکر^۸، ۲۰۰۸؛ وارنر و همکاران^۹، ۲۰۰۹؛ ریورا، ۲۰۱۰؛ یسیلدره و آکوک^{۱۰}، ۲۰۱۰؛ میسن و همکاران^{۱۱}، ۲۰۱۰، پیدمونت و بوخیندر^{۱۲}، ۲۰۱۱؛ زاپارتا و کایهو^{۱۳}، ۲۰۱۳، جردک و همکاران، ۲۰۱۴؛ صدیقی، ۱۳۸۷؛ شجاعی، ۱۳۹۱)، گواه این استدلال است.

^۱ Newark

^۲ Vogel

^۳ Cooper & Warren

^۴ Zazkis, Liljedahl, & Chernoff

^۵ Amit & Neria

^۶ Carraher & Martinez & Schliemann

^۷ Tanisli, & Ozdas

^۸ Rivera & Becker

^۹ Warner, Schorr, & Davis

^{۱۰} Yesildere & Akkoc

^{۱۱} Mason, Burton & Stacey

^{۱۲} Pedemonte, & Buchbinder

^{۱۳} Zapatera, & Callejo

پس از تشکیل بانک سؤالات مربوط به استدلال استنتاجی و استقرایی، دو آزمون در قالب پیش‌آزمون و پس‌آزمون برای سنجش مهارت استدلال طراحی شد. سپس آزمون‌ها به متخصصین موضوعی و آموزش‌گران مجرب ارسال شد. بعد از کسب تأییدیه و اطمینان از روایی محتوا، پیش‌آزمون و پس‌آزمون استدلال به شکل آزمایشی در یکی از مدارس دخترانه دولتی در منطقه ۳ آموزش و پرورش تهران بر روی تعدادی از دانش‌آموزان، در دو رشته ریاضی و تجربی به اجرا گذاشته شد که علاوه بر اطمینان از روان بودن واژه‌پردازی‌ها، از مدت زمان لازم برای برگزاری آزمون و همین‌طور تناسب سطح دشواری دو آزمون با هم و تناسب سطح دشواری هر آزمون با توانایی دانش‌آموزان، تخمین مناسبی حاصل شود. بعد از نمره‌گذاری پیش‌آزمون و پس‌آزمون و بررسی و تحلیل نتایج حاصل از اجرای آن در مرحله آزمایشی، آزمون‌ها مورد اصلاح و ویرایش قرار گرفت و بدین ترتیب نهایتاً در هر آزمون در قالب ۹ سؤال مجزا، ۴ سؤال به استدلال استنتاجی و ۵ سؤال به استدلال استقرایی اختصاص یافت. نمره کل آزمون استدلال ریاضی، ۲۳ لحاظ شد.

در اجرای اصلی پس از برگزاری مرحله آزمایشی، پیش‌آزمون استدلال، ۱۰ روز پس از شروع سال تحصیلی، برگزار شد. دوره آموزشی حدود سه ماه به طول انجامید و طی آن درس ریاضی دو با تأکید بر راه‌حل‌های چندگانه به دانش‌آموزان دو کلاس تجربی و ریاضی آموزش داده شد. دلیل انتخاب این درس، آن بود که هم قابلیت تدریس به کمک راه‌حل‌های چندگانه را به خوبی دارا بود و هم این‌که در برنامه‌ریزی هفتگی مدارس، پنج ساعت آموزشی را به خود اختصاص داده بود و چنین زمانی برای تحقق هدف این پژوهش، زمان مناسبی به نظر می‌رسید. امتیاز دیگر این درس، آن بود که در دو رشته تجربی و ریاضی به شکلی واحد و با کتاب درسی یکسان ارائه شده، امکان مقایسه اثربخشی رویکرد مورد استفاده در این پژوهش را در دو گروه با توانایی بالاتر و توانایی کم‌تر، فراهم می‌ساخت. پس از اتمام دوره آموزشی، پس‌آزمون بر روی گروه آزمایشی و گروه کنترل به اجرا گذاشته شد.

یافته‌ها

پس از برگزاری پیش‌آزمون و پس‌آزمون و تصحیح آن توسط دو مصحح، تحلیل نتایج در دستور کار قرار گرفت. در راستای هدف این مطالعه که تأثیر آموزش با راه‌حل‌های چندگانه را بر مهارت استدلال، در دو گروه ریاضی و تجربی مد نظر داشت، به‌واسطه آنکه علاوه بر تفاوت بین گروه‌ها، تغییرات دو گروه، از پیش‌آزمون به پس‌آزمون و نیز بررسی برتری یک گروه نسبت به گروه دیگر از طریق اثر تعاملی مد نظر بود، از آزمون اندازه‌گیری مکرر (طرح یک‌بین-یک‌درون) استفاده شد. نتایج به‌دست‌آمده از شاخص‌های توصیفی در بین گروه مداخله (گروه ریاضی و تجربی) در استدلال، در دو مرحله اندازه‌گیری (قبل و بعد از آموزش) در جدول ۲ گزارش شده است. نتایج نشان می‌دهد میانگین نمره استدلال دانش‌آموزان رشته ریاضی از پیش‌آزمون به پس‌آزمون به شکل معناداری افزایش یافته و در گروه تجربی، تغییرات میانگین اندک است.

جدول ۲: آماره‌های توصیفی استدلال در دو گروه مداخله در پیش‌آزمون و پس‌آزمون

گروه	رشته‌ی ریاضی (۲۰ نفر)	رشته‌ی تجربی (۲۷ نفر)
متغیر	انحراف استاندارد	انحراف استاندارد
پیش‌آزمون	۱۴/۷۴	۱۳/۵۷
پس‌آزمون	۱۹/۲۳	۱۴/۹۲

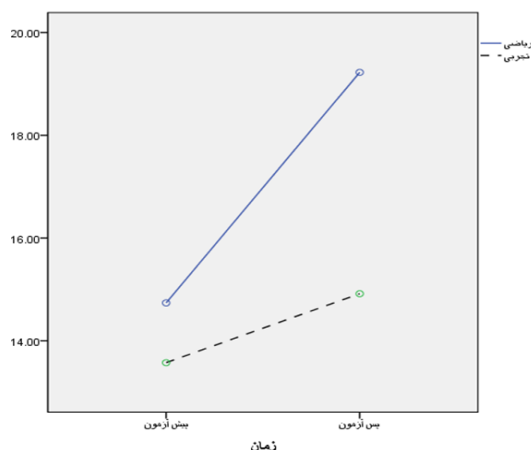
آزمون همگنی واریانس (لوین) برای واریانس را در بین دو گروه مداخله در دو مرحله اندازه‌گیری تأیید کرد، لذا دو گروه از نظر پراکندگی یکسان بوده‌اند.

نتایج آزمون تحلیل واریانس تک‌متغیری (اثر بین آزمودنی) نشان داد که بین دو گروه مداخله (تجربی و ریاضی) در محور استدلال ($\eta^2=0/10$, $p=0/03$, $F_{(1,45)}=5/17$, $MS_e=33/28$) تفاوت معنادار وجود دارد و میانگین گروه ریاضی بالاتر است. نتایج اثر درون‌آزمودنی نیز نشان داد که از پیش‌آزمون به پس‌آزمون میانگین استدلال ($\eta^2=0/32$, $p=0/001$)، افزایش داشته است و با توجه به معناداری اثر تعاملی زمان×گروه ($\eta^2=0/12$, $p=0/02$)، $F_{(1,45)}=21/15$, $MS_e=9/23$)، نتایج حاکی از این است که گروه دانش‌آموزان رشته ریاضی در مهارت استدلال، عملکرد بهتری نسبت به رشته تجربی داشته‌اند (جدول ۳).

جدول ۳: نتایج تحلیل واریانس تک‌متغیری با اندازه‌گیری مکرر

منبع اثر	SS	df	MS	F	P	η^2
اثر بین آزمودنی (گروه) استدلال	۱۷۲	۱	۱۷۲	۵/۱۷	۰/۰۳	۰/۱۰
خطای بین آزمودنی (گروه) استدلال	۱۴۹۷/۷۴	۴۵	۳۳/۲۸			
اثر درون آزمودنی (زمان) استدلال	۱۹۵/۲۶	۱	۱۹۵/۲۶	۲۱/۱۵	۰/۰۰۱	۰/۳۲
اثر تعاملی زمان×گروه؛ استدلال	۵۶/۸۲	۱	۵۶/۸۲	۶/۱۵	۰/۰۲	۰/۱۲
خطای درون آزمودنی استدلال	۴۱۵/۵۴	۴۵	۹/۲۳			

شکل ۱ میانگین استدلال را در دو گروه دانش‌آموزان رشته ریاضی و تجربی نشان می‌دهد. همان‌طور که شکل گویای آن است، میانگین استدلال در پیش‌آزمون در دو گروه یکسان بوده است اما در پس‌آزمون گروه دانش‌آموزان رشته ریاضی عملکرد بهتری داشته‌اند.



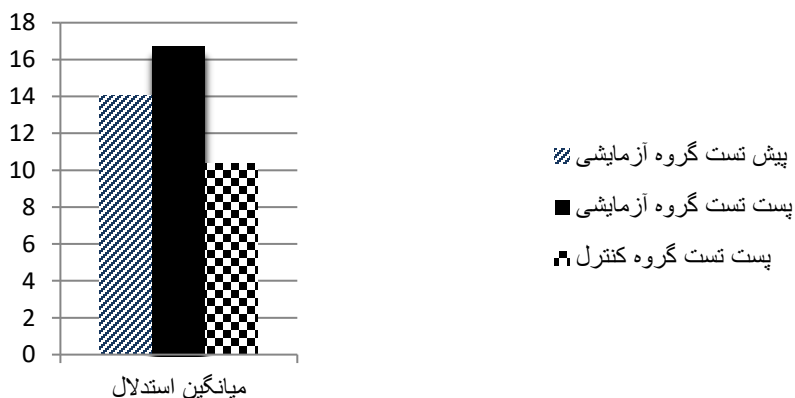
شکل ۱: میانگین استدلال در پیش آزمون و پس آزمون در دو گروه دانش آموزان رشته ریاضی و تجربی

جهت افزایش اعتبار بخشی به نتایج تأثیر آموزش در پس آزمون، دو گروه معادل به عنوان گروه کنترل در کنار دو گروه مداخله، مورد آزمون قرار گرفتند و پس آزمون استدلال روی آنان اجرا شد. نتایج به دست آمده نشان داد میانگین گروه مداخله ریاضی، نسبت به گروه کنترل معادل گروه ریاضی در استدلال بالاتر است. این تغییرات در گروه تجربی نیز بررسی شد و در گروه تجربی نیز، میانگین استدلال در گروه مداخله بالاتر از گروه کنترل است. لذا آموزش داده شده بر تقویت استدلال مؤثر بوده است.

در جدول ۶ دانش آموزان گروه آزمایشی و کنترل صرف نظر از رشته تحصیلی در پیش آزمون و پس آزمون مورد مقایسه قرار گرفته اند. نمودار ۱ تصویر روشنی از این مقایسه به دست می دهد و گویای رشد نتایج در محور استدلال، از پیش آزمون به پس آزمون در گروه آزمایشی و نیز عملکرد بهتر دانش آموزان گروه آزمایشی نسبت به گروه کنترل در پس آزمون است.

جدول ۶: میانگین نمرات استدلال در پیش آزمون و پس آزمون (گروه آزمایشی و کنترل)

میانگین آزمون استدلال	پیش آزمون گروه مداخله	پس آزمون گروه مداخله	پس آزمون گروه کنترل
	۱۴/۰۷	۱۶/۷۵	۱۰/۱۶



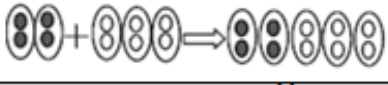
نمودار ۱: مقایسه میانگین نمرات کلی استدلال در پیش آزمون و پس آزمون (گروه آزمایشی و کنترل)

بررسی پاسخ‌های دانش‌آموزان

علاوه بر بهره‌وری از نگاه کمی در تحلیل‌ها، نگاه کیفی و تحلیل سؤال به سؤال نتایج پیش‌آزمون و پس‌آزمون، نتایجی دیگر و مجالی دیگر برای تأمل در اختیار می‌نهد. سؤالات پیش‌آزمون و پس‌آزمون در این مطالعه به دو محور استدلال استنتاجی و استدلال استقرایی اختصاص داشت.

الف) استدلال استنتاجی

در پیش‌آزمون و پس‌آزمون، پنج سؤال از ۹ سؤال، به سنجش استدلال استنتاجی اختصاص داشت. در این‌گونه سؤالات انتظار می‌رود که شخص با استفاده از قوانین منطقی از مجموعه‌ای از فرضیات اولیه به نتایجی معتبر دست پیدا کند (کریستو^۱ و پاپاچرجیو^۲، ۲۰۰۷). پرسش‌های مربوط به این قسمت، به دو شکل مطرح شد. در برخی سؤالات، راه‌حل‌هایی برای مسأله ارائه و از دانش‌آموز خواسته شد که صحت و سقم هر کدام را بررسی کنند و برخی سؤالات نیز نیازمند ارائه راه‌حل توسط خود دانش‌آموز است. در ادامه به‌نمونه‌ای از مدل اول در پیش‌آزمون و پس‌آزمون اشاره می‌شود (شکل ۷ و ۶).

<p>تعدادی از دانش‌آموزان کلاس دوم دبیرستان، سعی داشتند که درستی عبارت زیر را ثابت کنند:</p> <p>"حاصل جمع هر دو عدد زوج، برابری عددی زوج می‌شود."</p> <p>پاسخ‌های مختلف ۳ نفر از دانش‌آموزان را ذکر کرده‌ایم. هر کدام را به دقت بررسی کنید و نظر خود را راجع به آن بنویسید:</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>راه‌حل مریم:</p> <p>$2+4=6$ ، $4+6=10$ ، $6+8=14$ ، $8+10=18$ ، $10+12=22$ ، $12+14=26$ ، $14+16=30$ ، $16+18=34$ ، $18+20=38$</p> <p>پس جمع دو عدد زوج همیشه یک عدد زوج است.</p> </div> <p>الف) آیا در راه‌حل مریم اشتباهی وجود دارد؟ <input type="radio"/> بله <input type="radio"/> خیر <input type="radio"/> نمی‌دانم</p> <p>برای جواب خود دلیل بیاورید.</p>	سؤال ۳
<p>راه‌حل مینا:</p> <p>می‌خواهیم جمع دو عدد زوج را پیدا کنیم، فرض می‌کنیم که a و b آن دو عدد زوج باشند، پس می‌توان آن‌ها را به صورت $2m$ و $2n$ نوشت که m و n دو عدد صحیح هستند. حالا این دو عدد را با هم جمع می‌کنیم و داریم:</p> <p>$a+b = 2m + 2n = 2(m+n)$ یعنی مجموع این دو عبارت، مضرب ۲ است، پس زوج است.</p> <p>ب) آیا در راه‌حل مینا اشتباهی وجود دارد؟ <input type="radio"/> بله <input type="radio"/> خیر <input type="radio"/> نمی‌دانم</p> <p>برای جواب خود دلیل بیاورید.</p>	
<p>راه‌حل مهدیس:</p> <p>اگر مانند شکل زیر، اعداد زوج را دوتا دوتا دسته بندی کنیم، حاصل جمع، نیز به صورت دسته‌های دوتایی در کنار هم، قرار می‌گیرند. پس جمع دو عدد زوج، یک عدد زوج می‌شود.</p> <div style="text-align: center; margin: 10px 0;">  </div> <p>ج) آیا در راه‌حل مهدیس اشتباهی وجود دارد؟ <input type="radio"/> بله <input type="radio"/> خیر <input type="radio"/> نمی‌دانم</p> <p>د) به نظر شما بهترین راه‌حل مربوط به چه کسی است؟ چرا؟</p>	

^۱ Christou

^۲ Papageorgiou

شکل ۶: نمونه سؤال استدلال استنتاجی (برگرفته از هیلز و هویلز، ۲۰۰۰؛ از نوع بررسی راه حل ارائه شده) در پیش-

آزمون

پرسش نظیر این سؤال در پس آزمون بدین شکل است:

<p>تعدادی از دانش آموزان کلاس دوم دبیرستان، سعی داشتند که درستی عبارت زیر را ثابت کنند: "حاصل جمع هر دو عدد زوج، برابر عددی زوج می شود." راه حل های مختلف ۳ نفر از دانش آموزان را ذکر کرده ایم. هر کدام را به دقت بررسی کنید و نظر خود را راجع به آن بنویسید:</p>	
<p>راه حل زهرا: اعداد زوج، اعدادی هستند که بر ۲ بخش پذیرند، پس وقتی دو عدد زوج را با هم جمع می کنیم، می توانیم عامل مشترک ۲ را از هر دو عدد فاکتور بگیریم. یعنی جواب بر ۲ بخش پذیر است، پس جواب زوج است.</p>	
الف	<p>آیا در راه حلی که زهرا برای اثبات ارائه کرده، اشتباهی وجود دارد؟ <input type="radio"/> بله <input type="radio"/> خیر <input type="radio"/> نمی دانم</p> <p>برای جواب خود دلیل بیاورید.</p>
<p>راه حل آرزو: اگر a یک عدد زوج باشد، عدد زوج بعدی $a+2$ است و جمع این دو عدد می شود: $(a+1) + 2 = 2a + 2 = 2(a+1)$ یعنی جواب مضرب دو است پس زوج است و ما نشان داده ایم که جمع هر دو عدد زوج، زوج است.</p>	
ب	<p>آیا در راه حلی که آرزو برای اثبات ارائه کرده، اشتباهی وجود دارد؟ <input type="radio"/> بله <input type="radio"/> خیر <input type="radio"/> نمی دانم</p> <p>برای جواب خود دلیل بیاورید.</p>
<p>راه حل سارا: اگر x یک عدد فرد باشد پس $x-1$ و $x+1$ زوج هستند و داریم: $2x = x-1 + x+1$ یعنی جمع هر دو عدد زوج، عددی زوج است.</p>	
ج	<p>آیا در راه حلی که سارا برای اثبات ارائه کرده، اشتباهی وجود دارد؟ <input type="radio"/> بله <input type="radio"/> خیر <input type="radio"/> نمی دانم</p> <p>برای جواب خود دلیل بیاورید.</p>
<p>د) به نظر شما بهترین راه حل مربوط به چه کسی است؟ چرا؟</p>	

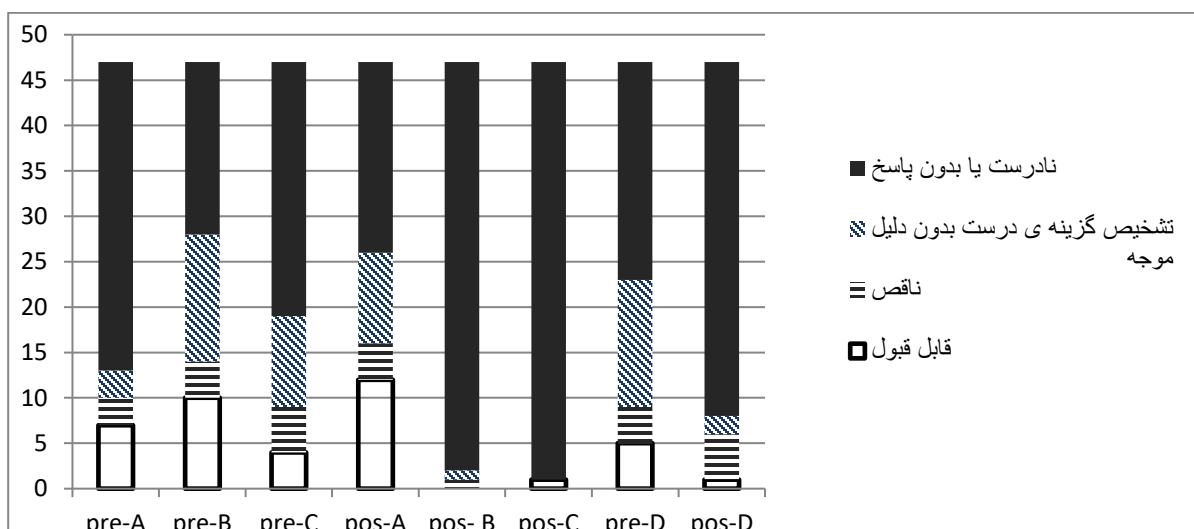
شکل ۷: نمونه سؤال استدلال استنتاجی (برگرفته از هیلز و هویلز، ۲۰۰۰؛ از نوع بررسی راه حل ارائه شده) در پس آزمون

این سؤال، با الهام از آزمون هیلز و هویلز (۲۰۰۰) برای اثبات این فرض که «جمع هر دو عدد زوج، عددی زوج است»، شش اثبات مختلف (در هر آزمون سه اثبات) به دانش آموزان ارائه کرده و از آنان می خواهد که صحت اثبات های ارائه شده را بررسی کنند و از این میان، یکی را با ذکر دلیل به عنوان بهترین اثبات برگزینند. از آنجا که این پرسش، مقوله پیچیده ای را مورد سؤال قرار نداده و از طرفی دانش آموز به جای آن که خود به دنبال یافتن پاسخ باشد، کافی است که به بررسی صحت و سقم پاسخ موجود بپردازد، انتظار می رفت که اکثر دانش آموزان در پاسخ گویی به آن موفق باشند. حال آنکه در عمل ۶۸٪ دانش آموان در پاسخ به این سوال کاملاً ناموفق بوده اند (جدول ۷ و نمودار ۲)

جدول ۷: پاسخ گویی به سؤال ۱ در پیش آزمون و پس آزمون

قابل قبول	ناقص	تشخیص گزینه ی درست	نادرست
۷	۳	بدون دلیل موجه	یا بدون پاسخ
پیش آزمون	۷	۳	۳۴
ب	۱۰	۴	۱۹

۲۸	۱۰	۵	۴	ج	
۲۴	۱۴	۴	۵	د	
۲۱	۱۰	۴	۱۲	الف	پس آزمون
۴۵	۱	۱	۰	ب	
۴۶	۰	۰	۱	ج	
۳۹	۲	۵	۱	د	
۲۵۶	۵۴	۲۶	۴۰		در مجموع
%۶۸	%۱۴/۴	%۷	%۱۰/۶		درصد



نمودار ۲: پاسخ گویی به سؤال ۱ در پیش آزمون و پس آزمون

در بررسی کیفی پاسخ های مربوط به هر پرسش مواردی قابل تأمل مشاهده می شود که به جهت سهولت بررسی در

قالب جدول ۸ و ۹ بدان اشاره می شود (جدول ۸ و ۹).

جدول ۸: برخی پاسخ های نادرست به سؤال ۱، بخش الف در پیش آزمون

چرا مجموع دو عدد زوج، عددی زوج است؟	
راه حل مریم:	
$۲+۶=۸$ ، $۶+۲=۸$ ، $۴+۶=۱۰$ ، $۶+۴=۱۰$ ، $۴+۲=۶$ ، $۲+۴=۶$ ، $۲+۲=۴$ ، $۴+۴=۸$	
پس جمع دو عدد زوج همیشه یک عدد زوج است.	
پاسخ مورد انتظار	برخی از پاسخ های نادرست مشاهده شده
برای این که بفهمیم جمله ای درست است یا نه مثل مریم آن را امتحان می کنیم.	

این راه حل نادرست است زیرا گزاره داده شده را باید در حالت کلی ثابت کنیم و مثال زدن اثبات معتبری نیست.	درست است، چون مریم به طور واضح و با مثال زدن عددی نشان داده که حاصل جمع هر دو عدد زوج، عددی زوج است.
	زیرا من با چند مثال دیگری که برای خودم زدم به این موضوع پی بردم.
	این راه درسته، چون عددهایی که با هم جمع شده زوج هستند و جواب هم زوج است.

جدول ۹: برخی پاسخ های نادرست به سؤال ۱، بخش ب و ج در پس آزمون

چرا مجموع دو عدد زوج، عددی زوج است؟	
راه حل آرزو:	
اگر a یک عدد زوج باشد، عدد زوج بعدی $a + 2$ است و جمع این دو عدد می شود:	
$a + (a + 2) = 2a + 2 = 2(a + 1)$	
یعنی جواب مضرب دو است پس زوج است و ما نشان داده ایم که جمع هر دو عدد زوج، زوج می شود.	
پاسخ مورد انتظار	برخی از پاسخ های نادرست مشاهده شده
این راه حل نادرست است زیرا فقط نشان داده است که جمع دو عدد زوج متوالی زوج است و گزاره داده شده را در حالت کلی اثبات نکرده است.	درست است چون وقتی یک عدد زوج را با عدد بعد از آن که زوج است جمع می کنیم حاصل عددی می شود که آن هم مضربی از ۲ است.
	$2 + (2 + 2) = 4 + 2 = 2(2 + 1)$
	خب اشتباهی وجود ندارد. امتحانش کردم درست بود.
	راه حل صحیح است، زیرا اعداد زوج متوالی با جمع دو واحد جلو می روند و با جمع این دو و فاکتورگیری، چون پاسخ مضرب ۲ است، پس جواب زوج است.
	به نظرم راه آرزو درست است. چون نتیجه آخر یعنی $2(a + 1)$ ، ۱۰۰٪ زوج است، به خاطر اینکه ۲ قرار است در پرانتز ضرب شود.
	تنها مشکلمش فکر می کنم این است که جمع دو عدد زوج متفاوت نیست و به جای a تنها یک عدد زوج می توانیم بگذاریم.
	این جواب درست است، زیرا آن را به زبان ریاضی نوشته و وقتی به جای a یک عدد زوج می گذاریم حل می شود.
	مهم نیست که a چه عددی است و حاصل پرانتز چیست. این راه، ریاضی است و فرمول کلی است نه برای عددی خاص.
	فکر می کنم درست است زیرا راه حل فرمولی برای اثبات بهتر است.

(ب) استدلال استقرایی

در سؤالات مربوط به استدلال استقرایی دانش‌آموزان باید با بررسی چند مثال و مورد خاص، درستی حدس خود را تأیید کرده و دلیلی برای درستی گزاره مورد نظر ارائه دهند (ادوارد، ۱۹۹۷، نقل شده در مانسی، ۲۰۰۳). نمونه‌ای از این پرسش در پیش‌آزمون و پس‌آزمون در شکل ۸ آمده است.

پس‌آزمون	پیش‌آزمون
به عبارتهای روبرو دقت کنید:	به عبارتهای روبرو دقت کنید:
$1 = 1$	$2 + 4 + 5 = 2 \times 4$
$1 + 2 = 2^2$	$6 + 7 + 8 = 2 \times 7$
$1 + 2 + 5 = 2^2$	$11 + 12 + 13 = 2 \times 12$
$1 + 2 + 5 + 7 = 4^2$	با توجه به این عبارتها چه قانون کلی را می‌توان حدس زد؟
با توجه به این عبارتها چه قانون کلی را می‌توان حدس زد؟ آن را بیان کنید.	آن را بیان کنید.

شکل ۸: نمونه‌ای از سؤالات مربوط به استدلال استقرایی در پیش‌آزمون و پس‌آزمون (میسن، ۲۰۱۰)

در پاسخ‌های مربوط به این سؤال و سؤالات مشابه، به کرات مشاهده می‌شود که دانش‌آموزان در ارائه نمادین مفاهیم ریاضی و بیان آنچه که در ذهن دارند، با مشکل مواجهند. نمایش دو عدد زوج با اشکال نمادین $2x$ و $4x$ یا $x+2$ و $x+4$ ، نمایش اعداد فرد به صورت مضاربی از عدد ۳، یا دسته‌بندی سه تایی اشکال برای نمایش اعداد فرد، نشان دادن سه برابر k با نماد k^3 یا نمایش سه عدد صحیح متوالی با $3a$ و $2a$ و a شواهدی بر این مدعا است.

پاسخ به پرسش‌های تحقیق

این مطالعه در پاسخ به چگونگی اثربخشی آموزش به کمک راه‌حل‌های چندگانه بر توانایی استدلال در دانش‌آموزان متوسطه، صورت پذیرفت. نتایج تحلیل آزمون‌های برگزار شده نشان می‌دهد که استفاده از این روش، توانسته است مهارت استدلال را در دانش‌آموزان افزایش دهد.

پرسش دوم به دنبال مقایسه میزان اثربخشی این رویکرد بر مهارت استدلال دانش‌آموزان با مهارت بالا و پایین‌تر در درس ریاضی است. نتایج تحلیل‌ها نشان می‌دهد که میانگین نمره استدلال دانش‌آموزان رشته ریاضی از پیش‌آزمون به پس‌آزمون افزایش یافته است، در حالی که در گروه تجربی، تغییرات میانگین اندک است. نتایج اثر درون‌آزمودنی نیز نشان داد که از پیش‌آزمون به پس‌آزمون میانگین استدلال افزایش داشته و با توجه به معناداری اثر تعاملی زمان \times گروه، گروه دانش‌آموزان رشته ریاضی در مهارت استدلال، عملکرد بهتری نسبت به رشته تجربی داشته‌اند.

بحث و نتیجه‌گیری

این مطالعه در راستای بررسی اثر روش تدریس با کمک راه‌حل‌های چندگانه بر تقویت استدلال دانش‌آموزان در دو گروه با مهارت بالاتر و پایین‌تر طراحی شد. افزایش معنادار مهارت استدلال در دانش‌آموزان، هم‌سو با مطالعاتی نظیر لینچ و استار (۲۰۱۴) و استار و جانسن (۲۰۰۸) است که مدعی‌اند مقایسه چند راه‌حل برای حل یک مسأله، تأثیری مثبت بر روند بهبود تلاش‌های یادگیری دانش‌آموزان دارد و استفاده از این روش را کلید دستیابی به دانش عمیق ریاضی می‌داند (اسکیلو و کروگ، ۲۰۱۴). این روش هر چند در گروهی که از توانایی بالاتری در درس ریاضی برخوردارند، تأثیری به مراتب بهتر به همراه داشته، اما در گروه تجربی که مهارت پایین‌تری در ریاضی داشته‌اند نیز با شکست مواجه نشده است.

برخی مطالعات، برآنند که این روش، یادگیرندگان را با سردرگمی مواجه خواهد ساخت (لینچ و استار، ۲۰۱۴) و ارائه تصاویر چندگانه به ابهام بیشتر تصویر اولیه دامن خواهد زد (وو، ۱۹۹۶). به همین لحاظ جایی برای این تردید می‌گشایند که این روش ممکن است برای تمامی دانش‌آموزان مفید و کارآمد نبوده یا فقط برای دانش‌آموزانی با توانایی بالای علمی، عملی باشد (لینچ و همکاران، ۲۰۱۴). نتایج این مطالعه در پاسخ به این تردید، هر چند مشکلات و چالش‌های استفاده از این روش را به تمامی رد نمی‌کند، اما در مجموع استفاده از این روش را در دانش‌آموزان با توانایی بالاتر در ریاضیات کاملاً مؤثر می‌داند و اثربخشی آن را در دانش‌آموزان با توانایی کمتر، رد نمی‌کند و البته پیاده‌سازی آن را با مشکلات بیشتری همراه می‌داند.

بررسی کیفی پاسخ‌های دانش‌آموزان و توجه به نمودار و جدول فوق، نمایان‌گر برخی بیماری‌هاست که در بدنه سیستم آموزشی به چشم می‌خورد. در واقع به نظر می‌رسد دانش‌آموزان پایه دهم ضرورت ارائه اثبات را به درستی درک نکرده و گاه بین تشخیص درستی یا نادرستی یک گزاره و تشخیص صحت اثبات آن گزاره، تمایز روشنی قائل نیستند. ارائه مثال برای اثبات یک گزاره، رد اثبات‌های غیر رسمی نظیر رسم شکل یا اثبات‌های کلامی و پذیرش بی‌قید و شرط اثبات‌های نمادین، همگی دال بر این است که اکثر دانش‌آموزان هنوز فهم روشنی از اثبات‌های معتبر ندارند و اغلب با ساختار اثبات‌های جبری و استدلال‌های استنتاجی آشنا نیستند و به‌خوبی از مفهوم و اهداف اثبات‌های ریاضی آگاهی ندارند. این نتیجه با مطالعات کلاهدوز (۱۳۹۰) هم‌سوست.

به نظر می‌رسد آموزش به کمک ارائه راه‌حل‌های مختلف برای یک مسأله بر فهم دانش‌آموزان از اثبات و ضرورت آن تأثیر مثبتی نداشته است. عدم آشنایی دانش‌آموزان با گونه‌های معتبر اثبات، می‌تواند تا حد زیادی به خلأ موجود در کتاب‌های درسی دانش‌آموزان^۱ و لذا عدم ارائه چنین آموزشی توسط معلمان ریاضی به آنها، منتسب باشد.

بخشی از خطای دانش‌آموزان را در تشخیص محدودیت برخی اثبات‌ها در پس‌آزمون می‌توان ناشی از عدم آشنایی آنان با سورهای عمومی و وجودی و بی‌توجهی به واژه‌ی «هر» در گزاره‌ی «جمع هر دو عد زوج، زوج است» دانست. به نظر می‌رسد فهم دقیقی از آنچه به یک اثبات قوت و اعتبار می‌بخشد، یا آنچه به اعتبار و قوت آن آسیب می‌رساند، وجود ندارد.

^۱ در کتاب‌های جدیدالتألیف این مسأله مورد توجه قرار گرفته و در پایه‌های مختلف، مباحثی به انواع اثبات و ضرورت آن اختصاص داده شده است.

تا بدانجا که حتی گاهی اشارات مستقیم یا غیر مستقیمی هم به متوالی بودن دو عدد زوج شده است، ولی این توالی، محدودیتی برای اثبات قلمداد نشده است.

به علاوه یافته‌های این مطالعه، حاکی از آن است که در پایه دهم که چیزی بیش از سه سال به پایان تحصیلات عمومی دانش‌آموزان نمانده، هنوز گذر از تفکر حسابی به تفکر جبری با موفقیت انجام پذیرفته و غالب دانش‌آموزان با مفهوم متغیر و ضرورت استفاده از آن، بیگانه‌اند. همین‌طور شواهد نشان می‌دهند که همه دانش‌آموزان در بیان شفاف آنچه در ذهن دارند و استفاده از زبان ریاضی، موفق عمل نمی‌کنند. لذا در مجموع، مرور کیفی پاسخ‌ها حاکی از فهم نادرست دانش‌آموزان از اثبات، ضرورت اثبات و ویژگی‌های اثبات معتبر، عدم آشنایی آنان با سوره‌های وجودی و عمومی، عدم آشنایی کامل با مفهوم متغیر و شکاف بین تفکر حسابی و تفکر جبری و ضعف در گفتمان ریاضی است. مواردی از این دست که به نظر می‌رسد بهتر است ضرورت پرداختن به آن در کتب درسی و نیز آموزش معلمان به نحوی شایسته‌تر مورد توجه قرار گیرد.

سخن آخر

در این پژوهش، انتخاب مسیری مد نظر بود که متنها و مقصد آن تقویت مهارت استدلال در دانش‌آموزان - به مثابه اساسی‌ترین هدف از آموزش ریاضی - باشد. این مطالعه، نه مدعی یگانگی مسیر دست‌یابی به چنین مقصدی است و نه مدعی ارائه الگویی که تبعیت گام‌به‌گام از آن، محصولی واحد را برای همگان رقم بزند؛ بلکه با استناد به اصل عدم قطعیت و منحصر به فردی موقعیت‌های مختلف کلاس درس و با دقت نظر به پیچیدگی‌ها و ظرافت‌های رفتارهای انسانی، تلاش برای به‌کارگیری مجموعه‌ای از قواعد را، با روح تدریس در تضاد دانسته و معتقد است تدریس، کنشی بین انسانی، پیچیده و هنرمندانه است که تن به قالب تکنیک نخواهد داد (گیلبرت هایت^۱، ویلیام جیمز^۲، ای پال تورنس^۳ و هانتز^۴، به نقل از مهرمحمدی و عابدی، ۱۳۸۰، آیزنر^۵، ۱۹۹۴). لذا این پژوهش، شأنیت معلمین را در قضاوت فکورانه، نقادانه و هشیارانه نسبت به استفاده یا عدم استفاده از یافته‌های این پژوهش به رسمیت می‌شناسد و تنها مدعی است که توانسته است با تأکید بر راه‌حل‌های چندگانه در آموزش ریاضی، مهارت استدلال را در دانش‌آموزان افزایش دهد.

منابع

ادیب حاج باقری، محسن؛ پرویزی، سرور؛ صلصالی، مهوش (۱۳۹۰). روش‌های تحقیق کیفی. تهران: نشر و تبلیغ بشری.

^۱ Gilbert Highet

^۲ William James

^۳ E. Paul Torrance

^۴ Hunter

^۵ Eisner

برنامه درسی ملی جمهوری اسلامی ایران (اسفند ۱۳۹۱). شورای عالی آموزش و پرورش. وزارت آموزش و پرورش. سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی.

حاجی حسینی نژاد، غلامرضا؛ بالغی زاده، سوسن (۱۳۸۹). «تأثیر آموزش مبتنی بر (تدریس برای فهمیدن) بر برنامه‌ی درسی تجربه شده درس تاریخ هنر»، فصل‌نامه مطالعات برنامه درسی ایران، شماره ۱۷، صص ۳۹-۵۵

ریحانی، ابراهیم؛ حمیدی، فریده؛ کلاهدوز، فهیمه (۱۳۹۱). «بررسی درک و فهم دانش آموزان سال دوم متوسطه از استدلال و اثبات ریاضی»، فصل‌نامه مطالعات برنامه درسی ایران، سال ۶، شماره ۲۴، صص ۱۵۷-۱۸۲.

سیف، علی‌اکبر (۱۳۸۳). روان‌شناسی پرورشی (روان‌شناسی یادگیری و آموزش). ویرایش ششم، تهران: آگاه.

شجاعی، کورش (۱۳۹۱). «بررسی تعمیم و توجیه دانش آموزان سال اول متوسطه در باب الگوهای عددی و هندسی خطی»، پایان‌نامه کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی.

صدیقی، مریم (۱۳۸۷). بررسی مهارت جبری در دانش آموزان دختر سال اول متوسطه، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، رشته آموزش ریاضی، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی.

غلام‌آزاد، سهیلا، [بی‌تا]. «دوباره‌نگری به برنامه جبر دبیرستانی»، آموزش ریاضی، سال هفدهم، شماره ۶۳، صص ۱۲-۴. فردانش، هاشم (۱۳۸۳). طبقه‌بندی الگوهای طراحی سازنده‌گرا بر اساس رویکردهای یادگیری و تدریس. مشهد: مطالعات تربیتی و روان‌شناسی دانشگاه فردوسی مشهد.

کریمی، عبدالعظیم. بخشعلی‌زاده، شهرناز و کبیری، مسعود (۱۳۹۱). گزارش اجمالی از مهم‌ترین نتایج تیمز و پرلز ۲۰۱۱ و مقایسه‌ی آن با عملکرد دانش آموزان ایران در دوره‌های قبل، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، پژوهشگاه مطالعات آموزش و پرورش، مرکز مطالعات تیمز و پرلز.

کلاهدوز، فهیمه (۱۳۹۰). «بررسی درک و فهم دانش آموزان سال دوم متوسطه از استدلال و اثبات ریاضی»، پایان‌نامه کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی.

کمیته مطالعه یادگیری ریاضی (۲۰۰۱). کمک کنیم کودکان ریاضی یاد بگیرند. ترجمه بهزاد، مهدی و گویا، زهرا (۱۳۸۷). تهران: فاطمی.

ملکی، حسن؛ حبیبی‌پور، مجید (۱۳۸۵). «پرورش تفکر انتقادی هدف اساسی تعلیم و تربیت»، فصل‌نامه نوآوری‌های آموزشی، شماره ۱۰۸: ۱۹-۹۳.

مهرمحمدی، محمود و عابدی، لطفعلی (۱۳۸۰). «ماهیت تدریس و ابعاد زیبا شناختی آن»، فصل‌نامه مدرس، دوره ۵، شماره ۳، پاییز. صص ۴۳-۵۷

Amit, M., & Neria, D. (۲۰۰۸). "Rising to the challenge": using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of talented pre-algebra students. *ZDM*, ۴۰(۱), ۱۱۱-۱۲۹.

Ball, D. L. & Bass, H. (۲۰۰۳). Making mathematics reasonable in school. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), A research companion to principles and standards for school mathematics (pp. ۲۷-۴۴). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Bessant, K. C. (۱۹۹۵). Factors associated with types of mathematics anxiety in college students. *Journal for Research in Mathematics Education*, ۳۲۷-۳۴۵.

- Becker, J. R., & Rivera, F. D. (۲۰۰۸). **Generalization in algebra: the foundation of algebraic thinking and reasoning across the grades**. ZDM, ۴۰(۱), ۱-۱.
- Brodie, Karin (۲۰۱۰). **Teaching Mathematical Reasoning in Secondary School Classrooms**, New York: Springer, Retrieved May ۱۰, ۲۰۱۱ from <http://www.springer.com>.
- Carraher, D. W., Martinez, M. V., & Schliemann, A. D. (۲۰۰۸). **Early algebra and mathematical generalization**. ZDM, ۴۰(۱), ۳-۲۲.
- Chin, E-T. & Lin, F-L. (۲۰۰۹). **A Comparative Study on Junior High School Students' Proof Conceptions in Algebra between Taiwan and the UK**. Journal of Mathematics Education, ۲(۲), ۵۲-۶۷.
- Cooper, T. J., & Warren, E. (۲۰۰۸). **The effect of different representations on Years ۷ to ۹ students' ability to generalise**. ZDM, ۴۰(۱), ۲۳-۳۷.
- Dee Vanspronsen, Hillary (۲۰۰۸). **Proof processes of novice mathematics proof writers**, Unpublished doctoral dissertation, university of Montana, USA. Retrieved from ProQuest Digital Dissertations.
- Eisner, w. Elliot, ۱۹۹۴, **The Educational Imagination**, ۲nd (ed.), New York: Macmillan.
- Harel, G., & Sowder, L. (۱۹۹۸). **Students' proofs schemes: Results from exploratory studies**. In A. Schenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), Research in Colligate Mathematics Education III (pg. ۲۳۴-۲۸۳). Providence, RI: American Mathematical Society
- Healy, L. & Hoyles, C. (۲۰۰۰). **A study of proof conceptions in algebra**. Journal for Research in Mathematics Education, ۳۱(۴), ۳۹۶-۴۲۸.
- Henningsen, M., & Stein, M. K. (۱۹۹۷). **Mathematical tasks and student cognition: Classroom-based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning**. Journal for Research in Mathematics Education, ۲۸-۵۴۹.
- Jurdak, M. E., & El Mouhayar, R. R. (۲۰۱۴). **Trends in the development of student level of reasoning in pattern generalization tasks across grade level**. Educational Studies in Mathematics, ۸۵(۱), ۷۵-۹۲.
- Leighton, J. P. (۲۰۰۳). **Defining and Describing Reasoning**. In J. P. Leighton & R. J. Sternberg (Eds.), The Nature of Reasoning. New York, NY: Cambridge.
- Leikin, Roza. ۲۰۱۱, **Multiple-solution tasks: from a teacher education course to teacher practice**, ZDM Mathematics Education, ۴۳:۹۹۳-۱۰۰۶
- Levav-Waynberg, Anet.; Leikin, Roza., ۲۰۱۰, **multiple solutions for a problem: a tool for evaluation of mathematical thinking in geometry**, university of Haifa- Israel.
- Levav-Waynberg, Anet; Leikin, Roza; ۲۰۱۲, **The role of multiple solution tasks in developing knowledge and creativity in geometry**, The Journal of Mathematical Behavior,
- Lynch, K., Star, J.R., ۲۰۱۳, **Views of struggling students on instruction incorporating multiple strategies in Algebra I: An exploratory study**, Journal for Research in Mathematics Education.
- Mansi , K.E. (۲۰۰۳). **Reasoning and proof in mathematics Education: A Review of the Litereture**. A Theses submitted to the graduate faculty of north Carolina State university in partial fulfillment of the degree of master of science.
- Mason J.; Burton L.; Stacey K., ۲۰۱۰, **Thinking mathematically**, Second edition,
- Miyazaki, M. (۲۰۰۰). **Levels of proof in lower secondary school mathematics**. Educational Studies in Mathematics, ۴۱(۱), ۴۷-۶۸.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), ۲۰۰۰, **Principles and Standards for School Mathematics**.
- National Governors Association Center for Best Practices & Council of Chief State School Officers. (۲۰۱۰). **Common core state standards for mathematics**.
- National Research Council (NRC), ۲۰۰۱, **Helping Children Learn Mathematics**, Mathematics Learning Study Committee.
- Newark, Jenifa Cai, ۲۰۰۲, **Assessing and Understanding U.S. and Chinese Students' Mathematical Thinking: Some Insights from Cross-National Studies**, ZDM ۲۰۰۲, Vol. ۳۴ (۶).
- Paddack, Megan (۲۰۰۹). **The process of making meaning: The interplay between teachers knowledge of mathematical proofs and their classroom practices**. Unpublished doctoral dissertation, university of new Hampshire, United States. Retrieved from ProQuest Digital Dissertations.

- Pedemonte, B., & Buchbinder, O. (۲۰۱۱). **Examining the role of examples in proving processes through a cognitive lens: the case of triangular numbers.** ZDM, ۴۳(۲), ۲۵۷-۲۶۷.
- Recio, A. M., & Godino, J. D. (۲۰۰۱). Institutional and personal meanings of mathematical proof. Educational Studies in Mathematics, ۴۸, ۸۳-۹۹.
- Reid, D. A., & Knipping, C. (۲۰۱۰). **Proof in mathematics education.** Reserach, learning and teaching. Rotterdam: Sense Publisher.
- Rivera, F. D. (۲۰۱۰). **Visual templates in pattern generalization activity.** Educational Studies in Mathematics, ۷۳(۳), ۲۹۷-۳۲۸.
- Rivera, F. D., & Becker, J. R. (۲۰۰۸). **Middle school children's cognitive perceptions of constructive and deconstructive generalizations involving linear figural patterns.** ZDM, ۴۰(۱), ۶۵-۸۲.
- Schukajlow, S., & Krug, A. (۲۰۱۴). **Do multiple solutions matter? Prompting multiple solutions, interest, competence, and autonomy.** Journal for Research in Mathematics Education, ۴۵(۴), ۴۹۷-۵۳۳.
- Stacey, Kay. (۲۰۰۶), **What is mathematical thinking and why is it important?**
- Star, J. R. & Rittle, Johnson, B. (۲۰۰۸). **Flexibility in problem solving: The case of equation solving.** Learning and Instruction, ۱۸, ۵۶۵-۵۷۹.
- Stylianides, Andreas J. (۲۰۰۵). **proof and proving in school mathematics instruction: making the elementary grades part of the equation.** Unpublished doctoral dissertation, university of Michigan, Ann Arbor.
- Stylianides, Andreas J. (۲۰۰۷). **Proof and proving in school mathematics.** Journal for research in mathematics education, ۳۸(۳), ۲۸۹-۳۲۱.
- Stylianides, Gabriel J. & Stylianides, Andreas J. (۲۰۰۸). **Proof in School Mathematics: Insights from Psychological Research into Students' Ability for Deductive Reasoning,** Mathematical Thinking and Learning, ۱۰, ۱۰۳-۱۳۳.
- Tanisli, D., & Ozdas, A. (۲۰۰۹). **The Strategies of Using the Generalizing Patterns of the Primary School ۵th Grade Students.** Educational Sciences: Theory and Practice, ۹(۳), ۱۴۸۵-۱۴۹۷.
- Varghese, Thomas, (۲۰۰۷). **Student teachers conception of mathematical proof.** Unpublished doctoral dissertation, University of Alberta, Canada.
- Vogel, R. (۲۰۰۵). **Patterns—a fundamental idea of mathematical thinking and learning.** ZDM, ۳۷(۵), ۴۴۵-۴۴۹.
- Warner, L. B., Schorr, R. Y., & Davis, G. E. (۲۰۰۹). **Flexible use of symbolic tools for problem solving, generalization, and explanation.** ZDM, ۴۱(۵), ۶۶۳-۶۷۹.
- Weber, K. (۲۰۰۴). **A framework for describing the processes that undergraduates use to construct proofs.** Proceedings of the ۲۸th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, ۴, ۴۲۵-۴۳۲.
- Weber, K. (۲۰۰۵). **Problem-solving, proving, and learning: The relationship between problem-solving processes and learning opportunities in the activity of proof construction.** Journal of Mathematical Behavior, ۲۴, ۳۵۱-۳۶۰.
- Wu, ۱۹۹۶, **The Role of Euclidean Geometry in High School,** Journal of Mathematical Behavior, ۱۵, ۲۲۱-۲۳۷
- Yeşildere, S., & Akkoç, H. (۲۰۱۰). **Algebraic generalization strategies of number patterns used by pre-service elementary mathematics teachers.** Procedia-Social and Behavioral Sciences, ۲(۲), ۱۱۴۲-۱۱۴۷.
- Zapatera, A., & Callejo, M. L. (۲۰۱۳). **Preservice Primary Teachers's Noticing of Students' Generalization Process.**
- Zazkis, R., Liljedahl, P., & Chernoff, E. J. (۲۰۰۸). **The role of examples in forming and refuting generalizations.** ZDM, ۴۰(۱), ۱۳۱-۱۴۱.

Teaching Based on Multiple Solutions: A Step Toward Enhancing Mathematical Reasoning

Zahra Rahimi^۱, Ebrahim Talaei^{۲*}, Ebrahim Reyhani^۳, Hashem Fardanesh^۴

Abstract

The aim of this study is to examine the effectiveness of teaching based on multiple solutions in enhancing the skills of mathematical reasoning in high school students. The research sample includes ۴۷ students in the experimental group and ۵۴ students in the control group, all of whom were second grade students in public secondary schools for girls in Tehran in the academic year of ۲۰۱۵-۲۰۱۶ who study mathematics and science. The instrument of this study is a test based on the Miyazaki (۲۰۰۰) classification of deductive and inductive reasoning. The research methodology is an action-research one that has enjoyed quasi-experimental research design. Data analysis shows that teaching based on multiple solutions can increase the reasoning skill meaningfully in the students of mathematics major but it has no significant effect on students of science. The qualitative analyses reveal the gap between arithmetic and algebraic thinking, weakness in the math discourse and lack of complete knowledge of students about the necessity of proof, standards of having a valid proof, the concept of variable and the language of algebra, to mention a few.

Keywords: multiple solutions, mathematical reasoning, action-research.

^۱. Ph.D. student in Curriculum Studies, Tarbiat Modares University, mehrshida@yahoo.com

^۲. Assistant professor, Department of education, Tarbiat Modares University

^۳. Associate professor, Department of mathematics, Shahid Rajaee Teacher Training University

^۴. Associate professor, Department of education, Tarbiat Modares University