Shahid Beheshti University
Journal of Financial Management Perspective
No. 25, Spring 2019
PP: 31-57

P-ISSN: 2645-4637
E-ISSN: 2645-4645

The Analysis of the Tehran Stock Exchange Index in the Framework of Markov Chains

Sayyed Mohammad Reza Davoodi*, Kimiya Mirsaeedi**

Abstract

Markov chains as a special kind of random processes such that the future status of process is dependent on current status, has many applications in industry, biology, finance, etc. The Markov Chain Analysis framework provides answers to questions that may not be appropriate in other analytical frameworks such as fundamental, technical, and time series. This study with two different methods show that two week rate of return (fourteen days) of Tehran Stock Exchange Index is a markov chain in a state space consists of six status and defined on the basis of return and risk. The average time to transfer between the state space is also between 4 to 13 days, and also the maximum amount of probability (which represents the long-term behavior of the process) relates to a situation in which the return is greater than average.

Keywords: Chain Marmarok; Probability of Transmission; Subtleties; Goodness of Fit.

Received: 2018.March.2., Accepted: 2018.September.5.
* Assistant Prof, Department of Management, Islamic Azad University of Dehaghan Branch, Isfahan, Iran (corresponding author). E-mail: Smrdavoodi@dehaghan.ac.ir
** MSc in Industrial Engineering, Islamic Azad University of Dehaghan Branch, Isfahan, Iran.

دانشگاه شهیدبهشتی
نشریه چشم‌انداز مدیریت مالی
شماره ۲۵ ـ بهار ۱۳۹۸
ص‌ص ۵۷ ـ ۳۱

شاپای چاپی: ۴۶۳۷-۲۶۴۵
شاپای الکترونیکی: ۴۶۴۵-۲۶۴۵

تجزیه‌وتحلیل شاخص بورس اوراق بهادار تهران در چارچوب زنجیره‌های مارکوف

سید محمدرضا داودی* کیمیا میرسعیدی**

چکیده

زنجیر مارکوف، یک فرآیند تصادفی است که کاربردهای فراوانی در صنایع، زیست‌شناسی، مالی و غیره دارد و در آن موقعیت آتی فرآیند، فقط به موقعیت فعلی آن بستگی دارد. چار چوب تحلیل به کمک زنجیرهای مارکوف، امکان پاسخگویی به سؤال‌هایی را فراهم می کند که در چارچوب‌های تحلیلی دیگر مانند چارچوب بنیادی، تکنیکی امکان چنین رویکردی جود ندارد. در این پژوهش با استفاده از دو روش نشان داده می‌شود که بازده‌های دوهفته‌ای (چهارده روز کاری) شاخص کل بازار «بورس اوراق بهادار تهران» در بازه سال‌های ۱۳۷۶-۱۳۹۴ در یک فضای حالت شش عضویی که بر اساس بازده و ریسک تعریف می شود، دارای خاصیت مارکوفی است. خاصیت مارکوفی نشان می‌دهد که متوسط زمان لازم برای انتقال بین فضای حالت بین ۴ تا ۱۳ دوره (هر دوره ۱۴ روز) است و بیشترین مقدار احتمالات حدی که رفتار درازمدت فرآیند را نشان می‌دهد، مربوط به حالتی است که در آن بازده کسب‌شده از متوسط بیشتر است.

کلیدواژه‌ها: زنجیره مارکوف؛ احتمال انتقال؛ حالات حدی؛ نیکویی برازش.

تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۹۶/۱۲/۱۱ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۷/۰۶/۱۴.

* استادیار گروه مدیریت دانشگاه آزاد اسلامی واحد دهاقان، اصفهان، ایران (نویسنده مسئول).
E-mail: Smrdavoodi@dehaghan.ac.ir
** کارشناسی ارشد مهندسی صنایع، دانشگاه آزاد اسلامی واحد دهاقان، اصفهان، ایران.

۱.مقدمه

بازار اوراق بهادار به‌عنوان یک بازار متشکل و رسمی سرمایه در هر اقتصادی شناخته می‌شود که مهم‌ترین وظیفه آن تجهیز و تخصیص منابع مالی و تبدیل آن‌ها به سرمایه است؛ بنابراین از ارکان مهم اقتصاد محسوب می‌شود و می‌تواند نقش مهمی در رشد و توسعه اقتصادی کشورها داشته باشد؛ ازاین‌رو هر گونه اخلالی در آن تخصیص بهینه سرمایه را با مشکل مواجه خواهد کرد. این نوع اختلال قیمت‌ها سبب گسترش نگرانی‌ها و ایجاد سردرگمی شدید در سرمایه‌گذاران، ایجاد نااطمینانی نسبت به عملکرد بازارهای یاشده و درنهایت کاهش اعتماد عمومی سرمایه‌گذاران به این نوع بازارها خواهد شد؛ به همین دلیل در طول دهه‌های گذشته تلاش‌های بسیاری برای پیش‌بینی نوسانات و سقوط‌های شدید بازارهای مالی صورت گرفته است و پژوهشگران مدل‌های بسیاری در این حوزه برای تخمین رفتار آتی این نوع بازارها و پیش‌بینی پویایی‌های قیمت سهام ارائه کرده‌اند تا شرایط مطلوب تخصیص بهینه منابع مالی و امکان تصمیم‌گیری بهتر فراهم آید. هدف این پژوهش تجزیه‌وتحلیل بازار سهام در چارچوب زنجیره مارکوف و استفاده از خواص زنجیره‌های مارکوف در راستای پاسخ به سؤال‌های مهمی در مورد احتمالات و زمان تغییر حالات و حالات حدی بازده دارایی‌های مالی است.

۲. مبانی نظری و پیشینه پژوهش

قیمت سهام را می‌توان به‌عنوان یک فرآیند تصادفی در نظر گرفت؛ بدین مفهوم که قیمت سهام در هر لحظه یک متغیر تصادفی است و درنظرگرفتن تمام این متغیرهای تصادفی در یک بازه زمانی خاص به تولید یک فرآیند تصادفی می‌انجامد [۲، ۳]؛ ازاین‌رو مقدار واقعی مشاهده‌شده در آن بازه زمانی یک عینی‌سازی یا مسیر نمونه‌ای از فرآیند است. چنین دیدگاهی به تحلیل پیچیده و پیشرفته‌ای از بازار سهام منجر می‌شود. فرآیندهای آریما[۱]فرآیندهای وینر[۲] و فرآیندهای لوی[۳]، حاصل چنین دیدگاهی به بازار سهام هستند. دسته مهمی از فرآیندهای تصادفی بسیار پرکاربرد فرآیندهای مارکوف هستند.

یک دنباله از متغیرهای تصادفی را یک «فرآیند تصادفی» می‌گویند و درصورتی‌که فضای حالت آن گسسته باشد و موقعیت آتی فرآیند فقط به موقعیت فعلی آن وابسته باشد آن را «زنجیره مارکوف» می‌گویند. در این فرآیندها موقعیت آتی فرآیند فقط به موقعیت فعلی آن بستگی دارد و دانستن موقعیت‌های قبلی فرآیند اطلاعات اضافی در اختیار قرار نمی‌دهد [۱۴].

1. ARIMA
2. Wiener
3. L´evy

زنجیر مارکوف می‌تواند با گذشت زمان از یک حالت به حالت دیگر (در فضای حالات تعریف‌شده) برود. این انتقال با یک تابع توزیع مشخص می‌شود. برای هر دو حالت دلخواه مقدار این احتمال را «احتمال انتقال» می‌گویند و درصورتی‌که یک زنجیر مارکوف دارای این خاصیت باشد که با گذشت زمان کافی از ابتدای فرآیند، حالت سیستم مستقل از ابتدای فرآیند باشد، گفته می‌شود که سیستم دارای حالت حدی و پایدار است.

به‌صورت دقیق و با زبان ریاضی می‌توان گفت: «یک دنباله از متغیرهای تصادفی مانند $\{X_t\}$ یک فرآیند مارکوف است اگر شرایط زیر برقرار باشند»:

۱. در لحظه t مقدار X_t را بدانیم؛

۲. مقدار X_s برای $s>t$ به مقادیر X_u برای $u<t$ وابسته نباشد. این بدان معنی که مقادیر آتی فرآیند فقط به مقدار فعلی آن وابسته است.

زنجیر مارکوف زمان گسسته، فرآیند مارکوفی است که فضای حالت آن، یعنی مجموعه مقادیری که متغیرهای تصادفی تشکیل‌دهنده فرآیند می‌توانند به خود بگیرند، مجموعه‌ای قابل‌شمارش و یا متناهی باشد و در آن شاخص مجموعه زمان به‌صورت $T=\{0,1,2,\ldots\}$ نشان داده می‌شود. در ادامه همواره فرض می‌شود که زمان گسسته است.

به‌صورت رسمی، زنجیر $\{X_t\}$ یک زنجیر مارکوف است هر گاه:

$$\mathrm{P}\{\mathrm{X}_{n+1}=\mathrm{j}|\mathrm{X}_0=i_0,\ldots,\mathrm{X}_{n-1}=i_{n-1},\mathrm{X}_n=i\}=\mathrm{P}\{\mathrm{X}_{n+1}=\mathrm{j}|\mathrm{X}_n=i\} \quad (۱)$$

در رابطه(۱) برای همه مقادیر n و همه حالت‌های $i_0,i_1,\ldots,i_{n-1},i,j$ صادق باشد [۱۰].

درصورتی‌که یک فرآیند مارکوف باشد می‌توان به سؤال‌های مهمی پاسخ داد. این سؤال‌ها در مورد احتمال تغییر حالت سیستم از یک حالت به حالت دیگر پس از گذشت تعدادی دوره زمانی است؛ همچنین متوسط زمان لازم برای این جابه‌جایی‌ها و یافتن حالت پایدار سیستم که توصیف‌کننده رفتار سیستم در درازمدت است، سؤال دیگری است که در این چارچوب می‌توان به آن پاسخ داد.

حال سؤال این است که چگونه می‌توان سری بازده یک دارایی مالی را مارکوف کرد. برای این کار باید یک فضای حالت مناسب تعریف شود که جابه‌جایی سری قیمت در آن در ویژگی مارکوفی صدق کند. ازآنجاکه ویژگی مارکوفی یک فرمول احتمالی است، برای بررسی درستی آن باید از آزمون‌های آماری مانند «آزمون نیکویی برازش» استفاده کرد.

هاسن و نث(۲۰۰۵)، از مدل‌های زنجیره مارکوف مخفی در پیش‌بینی قیمت سهام در شرکت‌های هواپیمایی بهره گرفتند [۵]. ژانگ و ژانگ(۲۰۰۹)، یک مدل فرآیند مارکوف با یک

فضای حالت سه‌عنصری برای پیش‌بینی تغییرات روند بازار سهام ارائه دادند و از آن به‌عنوان مکمل تحلیل تکنیکال موجود استفاده کردند [۱۵]. لنداسکاس و والاکویچ(۲۰۱۱)، به‌منظور کم-رنگ‌کردن مفروضات توزیع احتمال قیمت سهام، رویکردی مبتنی بر شبیه‌سازی مونت کارلوی زنجیره مارکوفرف را توسعه دادند[۷]. لوکاس(۲۰۱۲)، شاخص سهام بازار مبادلات پراگ را با استفاده از تحلیل زنجیره مارکوف پیش‌بینی کرد [۹]. وی برای این منظور از یک زنجیر مارکوف با فضای حالت هشت‌عضویی (در مورد بازده) بهره گرفت. لی و شین به‌منظور افزایش قابلیت پیش‌بینی قیمت سهام، نرخ بازده سهام را به‌صورت ترکیبی از زنجیره مارکوف گسسته و گوسی مدل کردند [۸]. آن‌ها مدلی با نام «مارکوف دابل» را معرفی کردند و کارایی بالاتر آن نسبت به مدل معمولی را نشان دادند. هاسن و همکاران(۲۰۰۷)،کاربرد ترکیب مدل‌های مارکوف مخفی، شبکه‌های عصبی و الگوریتم ژنتیک را در پیش‌بینی رفتار سهام بررسی کردند [۶]. در این پژوهش آن‌ها به کمک شبکه‌های عصبی، داده‌های طبقه بندی شده را به عنوان ورودی زنجیره-های مارکوف مخفی قرار داده و از الگوریتم ژنتیک به‌عنوان بهینه‌کننده پارامترهای آغازین سیستم استفاده کردند.

وانگ و همکاران(۲۰۱۰)، مفهوم زنجیره مارکوف را به‌منظور پیش‌بینی شاخص‌های سهام وارد فضای تصادفی–فازی کرده وکارایی مدل را به مدت سه ماه دنبال کردند. نتیجه پژوهش آن‌ها حاکی از دقت بالای مدل بود. کینگ ژو، با استفاده از زنجیر مارکوف وزن‌دار و با درنظر-گرفتن یک فضای حالت شش‌مقداری به پیش‌بینی قیمت سهام پرداخت و دقت بالاتر پیش‌بینی روش وزن‌دار را نسبت به استفاده از زنجیرهای مارکوف ساده نشان داد [۱۲].

آبونوری و همکاران(۲۰۱۶) در پژوهشی با عنوان «پیش‌بینی نوسانات "بورس اوراق بهادار تهران" با رویکرد مارکوف GARCH»، چندین مدل GARCH را در رابطه با توانایی آن‌ها برای پیش‌بینی نوسانات در «بورس اوراق بهادار تهران» ارزیابی کردند [۱].

مقصودی و بیگلری‌کامی(۲۰۱۳)، از مدل زنجیره مارکوف به‌منظور ارائه راهکاری در پیش-بینی رفتار قیمت سهام در آینده و بررسی خاصیت بی حافظگی بورس بهره گرفتند. بدین منظور برای هر یک از متغیرهای درصد تغییر قیمت سهام و درصد تغییر حجم مبادلات، سه سطح مثبت، خنثی و منفی در نظر گرفته شده و از تعامل آن‌ها ۹ حالت یا وضعیت برای مدل زنجیره مارکوف تعریف شد .کارایی مدل موردنظر در یک مطالعه موردی روی شاخص صنایع[1]داوجونز بررسی شد و نتایج نشان داد که استفاده از زنجیره مارکوف در پیش‌بینی قیمت سهام می‌تواند مطلوب باشد و همچنین تحت شرایطی می‌توان خاصیت بی حافظگی به بورس نسبت داد [۱۰].

1. Industrial Index

راعی و همکاران، انتقال‌های رژیمی در بازده و نوسان‌های «بورس اوراق بهادار تهران» را با استفاده از شاخص قیمت و بازده نقدی و همچنین آثار شوک‌های مثبت و منفی نفت خام و نوسان‌های قیمت طلا را بر تغییرات رژیمی بازار سهام با استفاده از مدل گارچ‌نمایی سوئیچینگ مارکوف با فرض توزیع t طی دوره ۱۳۷۸/۰۳/۰۱ تا ۱۳۹۰/۰۹/۲۹ بررسی کردند. نتایج نشان‌دهنده شواهد معناداری از سوئیچینگ رژیمی در بازده و نوسان‌های آن است [۱۱].

زندیه و خامی از الگوریتم ژنتیک به‌منظور تعیین و تنظیم پارامترهای مدل مارکوف پنهان استفاده کردند و سپس از مدل مارکوف پنهان تنظیم‌شده برای شناسایی و شناخت الگوهای مشابه در داده‌های تاریخی بهره گرفتند. آن‌ها مقدار قیمت برای روز بعد را با استفاده از الگوهای مشابه و مفهوم زنجیره مارکوف محاسبه کردند [۱۴].

علامتیان و وفایی جهان، استفاده از شبکه‌های بیزین و مدل مخفی مارکوف را برای پیش‌بینی روند روزانه بازار بورس ایران پیشنهاد دادند. بهترین درصد صحت این سیستم پیشنهادی ۸۵/۲۵ درصد است [۴].

با توجه به پیشینه ارائه‌شده می‌توان نتیجه گرفت پژوهش حاضر ازنظر اجرا روی شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران، معرفی فضای حالت برحسب بازده و ریسک، اتخاذ دو شیوه برای اثبات مارکوفی بودن و محاسبات صورت گرفته در جهت محاسبه متوسط زمان و حالات حدی، نسبت به پژوهش‌های پیشین، منحصربه‌فرد است.

۳. روش‌شناسی

اگر $\{S_n\}$ سری شاخص باشد، آنگاه بازده روزانه آن از رابطه ۲، به‌دست می‌آید.

$$K_n = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_{n-1}} \tag{۲}$$

داده‌های بازده روزانه به ۲۷۰ دسته داده که در هر دسته ۱۴ داده متوالی از بازده روزانه (این عدد به‌صورت تجربی و آزمایش و خطا مشخص شده است) موجود است، دسته‌بندی شدند؛ سپس بازده چهارده روزی شاخص به روش تجمعی محاسبه شد. متوسط بازده‌های چهارده روزی با μ و انحراف معیار استاندارد بازده‌های ۱۴ روزه (ریسک) با σ نشان داده می‌شود.

فرآیند تصادفی که قرار است به کمک زنجیرهای مارکوف تجزیه‌وتحلیل شود، سری $\{\mu_i\}_{i=0}^{N-1}$ است. فضای حالتی که برای این فرآیند زمان گسسته در نظر گرفته شده، یک فضای حالت شش عضویی (با الهام از توزیع نرمال) مطابق جدول ۱، است:

جدول ۱. فضای حالت

حالت	ناحیه
۰	$\mu_i > \mu + \sigma$
۱	$\mu + 0.5\sigma \le \mu_i < \mu + \sigma$
۲	$\mu \le \mu_i < \mu + 0.5\sigma$
۳	$\mu - 0.5\sigma \le \mu_i < \mu$
۴	$\mu - \sigma \le \mu_i < \mu - 0.5\sigma$
۵	$\mu_i < \mu - \sigma$

برای تشکیل ماتریس احتمال انتقال فرآیند، ابتدا به شمارش فراوانی هر حالت در سری داده‌ها و همچنین فراوانی تعداد تغییر حالات پرداخته می‌شود. برای نمونه، با درنظرگرفتن دو حالت نوعی i و j و فرض اینکه فراوانی حالت i در سری داده‌ها برابر n(i) و فراوانی تغییر حالت $\mathrm{i} \to j$ برابر N_{ij} است، در این صورت برآوردگر حداکثر درست‌نمایی برای احتمال تغییر حالت از i به j که با P_{ij} نشان داده می‌شود به‌صورت رابطه ۳،است:

$$P_{ij} = \frac{N_{ij}}{n(\mathrm{i})} \qquad (۳)$$

بنابراین ماتریس احتمال انتقال زیر تشکیل می‌شود:

$$P = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & \cdots & p_{05} \\ p_{10} & p_{11} & \cdots & p_{15} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{50} & p_{51} & \cdots & p_{55} \end{bmatrix}$$

برای بررسی اینکه آیا فرآیند موردبررسی یک زنجیر مارکوف است یا خیر دو روش موردبررسی قرار می‌گیرد:

۱. روش نخست: در این روش ابتدا خاصیت مانایی فرآیند بررسی می‌شود. در پژوهش‌هایی که در آن‌ها از زنجیر مارکوف به‌عنوان ابزار تجزیه‌وتحلیل استفاده شده است، روش پیشنهادی برای بررسی مانایی به این صورت است که بازه زمانی که داده‌ها در آن فاصله نمونه‌گیری شده‌اند به تعداد مناسبی زیربازه تبدیل شود. این تعداد مناسب باید به گونه‌ای باشد که تعداد داده‌های هر زیربازه کفایت لازم برای برآورد احتمالات مربوط به تغییرات حالات را داشته باشند. در پژوهش حاضر چهار زیربازه انتخاب شده است. درصورتی‌که فرآیند مانایی زمانی داشته باشد، توزیع

احتمالات مربوط به تغییر حالات زنجیر در زیربازه‌ها نباید با توزیع به‌دست‌آمده برای تغییر حالات در کل داده‌ها متفاوت باشد. با فرض اینکه برای زیربازه rام ماتریس تعداد انتقال به‌صورت ماتریس رابطه ۴، برآورد شده باشد.

$$P_r = \begin{bmatrix} N_{00,r} & N_{01,r} & \cdots & N_{05,r} \\ N_{10,r} & N_{11,r} & \cdots & N_{16,r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{50,r} & N_{51,r} & \cdots & N_{55,r} \end{bmatrix} \qquad (۴)$$

در این صورت برای بررسی مانایی فرآیند به بررسی یک آزمون فرض نیکویی برازش مطابق رابطه ۵، پرداخته می‌شود:

$$\begin{cases} H_0: & \forall ij : P_{ij,r} = P_{ij} \\ H_1: & \exists i,j : P_{ij,r} \neq P_{ij} \end{cases} \qquad (۵)$$

برای انجام آزمون نیکویی برازش از آماره مربع کای پیرسون به‌صورت رابطه ۶ استفاده می‌شود.

$$\chi^2 = \sum_{i=0}^{5} \sum_{j=0}^{5} (e_{ij,r} - f_{ij,r})^2 / e_{ij,r} \qquad (۶)$$

که در آن $f_{ij,r}$ فراوانی انتقال از حالت i به j در زیربازه rام و $e_{ij,r}$ فراوانی مورد انتظار است که با قبول فرض صفر برابر با رابطه ۷، است.

$$e_{ij,r} = N_{ij,r} \times P_{ij} \qquad (۷)$$

آماره مربع کای پیرسون محاسبه‌شده دارای توزیع مربع کای با ۲۵=(۶-۱)(۶-۱) درجه آزادی است. در سطح معناداری $\alpha = 0.05$ در صورتی فرض صفر تأیید می‌شود که:

$$\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha}(25) = 37.652$$

اگر در تمام زیربازه‌ها فرض صفر پذیرفته شود، آنگاه می‌توان ادعا کرد که فرآیند در سطح معناداری موردنظر مانا است.

مرحله دوم. مرحله دوم بررسی خاصیت مارکوفی است؛ یعنی باید رابطه ۸، ازنظر آماری تأیید شود.

$$P(X_{n+1}=k|X_n=i\ \&\ X_{n-1}=j)=P(X_{n+1}=j|X_n=i) \quad (۸)$$

برای بررسی این موضوع، تغییر حالات به کمک دو گام شمارش می‌شود. برای نمونه، این شمارش‌ها در جدول‌های ۲ و ۳، ارائه‌شده است. عدد نوعی abc در هر جدول به این مطلب اشاره دارد که از حالت c به حالت b و سپس به حالت a جابه‌جا شود.

جدول ۲. تغییر حالات منتهی به حالت صفر

۰۰۰	۰۱۰	۰۲۰	۰۳۰	۰۴۰	۰۵۰
۱۰۰	۱۱۰	۱۲۰	۱۳۰	۱۴۰	۱۵۰
۲۰۰	۲۱۰	۲۲۰	۲۳۰	۲۴۰	۲۵۰
۳۰۰	۳۱۰	۳۲۰	۳۳۰	۳۴۰	۳۵۰
۴۰۰	۴۱۰	۴۲۰	۴۳۰	۴۴۰	۴۵۰
۵۰۰	۵۱۰	۵۲۰	۵۳۰	۵۴۰	۵۵۰

جدول ۳. تغییر حالات منتهی به حالت ۱

۰۰۱	۰۱۱	۰۲۱	۰۳۱	۰۴۱	۰۵۱
۱۰۱	۱۱۱	۱۲۱	۱۳۱	۱۴۱	۱۵۱
۲۰۱	۲۱۱	۲۲۱	۲۳۱	۲۴۱	۲۵۱
۳۰۱	۳۱۱	۳۲۱	۳۳۱	۳۴۱	۳۵۱
۴۰۱	۴۱۱	۴۲۱	۴۳۱	۴۴۱	۴۵۱
۵۰۱	۵۱۱	۵۲۱	۵۳۱	۵۴۱	۵۵۱

همان‌طور که مشخص است، جدول iام از تمام انتقالات سه‌تایی تشکیل‌شده است که به i ختم می‌شوند. برای برآورد رابطه ۹، از رابطه (۱۰) استفاده می‌شود:

$$P_{ijk}=P(X_{n+1}=k|X_n=i\ \&\ X_{n-1}=j) \quad (۹)$$

$$P_{ijk}=\frac{N_{ijk}}{n(\mathrm{i},\mathrm{j})} \quad (۱۰)$$

در رابطه ۱۰، N_{ijk} تعداد تغییر حالات از i به j و سپس k بوده و n(i,j)، تعداد زمان‌هایی است که فرآیند در آن زمان در حالت i و در یک‌زمان بعدتر در حالت j است. درصورتی‌که فرآیند دارای خاصیت مارکوفی باشد باید توزیع احتمالات برای انتقالات دوامی، مستقل از نقطه شروع باشد. برای آزمودن این مطلب برای هر جدول، برای مثال جدول kام، آزمون نیکویی برازشی به‌صورت رابطه ۱۱، ترتیب داده می‌شود.

$$\begin{cases} H_0: & \forall ij : P_{ijk} = P_{jk} \\ H_1: & \exists i, j : P_{ijk} \neq P_{jk} \end{cases} \qquad (۱۱)$$

برای آزمون نیکویی برازش از آماره مربع کای پیرسون به‌صورت رابطه ۱۲، استفاده می‌شود:

$$\chi^2 = \sum_{i=0}^{5} \sum_{j=0}^{5} (e_{ijk} - f_{ijk})^2 / e_{ijk} \qquad (۱۲)$$

که در آن f_{ijk} فراوانی انتقالات رفتن از i به j و سپس k است و e_{ijk} فراوانی مورد انتظار رفتن از i به j و سپس k است که با قبول فرض صفر رابطه ۱۳، برقرار است.

$$e_{ijk} = N_{ijk} \times P_{jk} \qquad (۱۳)$$

آماره معرفی‌شده دارای توزیع مربع کای با ۲۵=(۱-۶)(۶-۱) درجه آزادی است و در صورتی فرض صفر تأیید می‌شود که رابطه ۱۱، برقرار باشد؛ بنابراین اگر در تمام جدول‌ها فرض صفر پذیرفته شود، آنگاه می‌توان ادعا کرد که فرآیند موردنظر دارای خاصیت مارکوفی است.

۲. روش دوم: تشخیص زنجیره مارکوف بودن فرآیند $\{\mu_i\}_{i=0}^{N-1}$: در این روش نشان داده می‌شود که رابطه چپمن-کلموگروف[1] برای تمام انتقالات چند قدمی برقرار است. برای استفاده از این روش باید ابتدا جدول فراوانی تبدیل انتقالات چند گامی محاسبه شود. برای نمونه، ماتریس فراوانی انتقالات برای تعداد گام۱ <r به‌صورت ماتریس زیر نشان داده می‌شود:

1. Chapman-Kolmogorov

$$N^r = \begin{bmatrix} N_{00}^r & N_{01}^r & \cdots & N_{05}^r \\ N_{10}^r & N_{11}^r & \cdots & N_{15}^r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{50}^r & N_{51}^r & \cdots & N_{55}^r \end{bmatrix}$$

در رابطه(۱۲) N_{ij}^r تعداد تغییر حالات از i به j با r قدم است. ماتریس احتمال انتقال r قدمی را می‌توان به کمک رابطه ۱۴، برآورد کرد.

$$P_{ij}^r = \frac{N_{ij}^r}{n^r(\mathrm{i})} \qquad (۱۴)$$

در رابطه بالا، $n^k(\mathrm{i})$ تعداد الگوهایی است که شروع آن از حالت i است. برای آزمون برقراری رابطه کلوموگروف ازنظر آماری، آزمون فرض ۱۵،در نظر گرفته می‌شود.

$$\begin{cases} H_0: & \forall ij: P_{ij}^r = (\mathrm{i, j})\,\mathrm{entry\,in}\ \ matrix\,\mathrm{P}^r \\ H_1: & \exists i, j: P_{ij}^r \neq (\mathrm{i, j})\,\mathrm{entry\,in}\ \ matrix\ \mathrm{P}^r \end{cases} \qquad (۱۵)$$

برای این آزمون نیکویی برازش از آماره مربع کای پیرسون به‌صورت رابطه ۱۶، استفاده می‌شود.

$$\chi^2 = \sum_{i=0}^{5} \sum_{j=0}^{5} (\mathrm{e}_{ij}^r - \mathrm{f}_{ij}^r)^2 / \mathrm{e}_{ij}^r \qquad (۱۶)$$

درصورتی‌که رابطه کلوموگروف برقرار باشد، یعنی فرض صفر موردقبول باشد، رابطه ۱۷، برقرار است.

$$e_{ij}^r = N_{ij}^r \times P_{ij}^r \qquad (۱۷)$$

در رابطه ۱۷، e_{ij}^r تعداد تغییر حالات مورد انتظار از i به j با r قدم است و P_{ij}^r درایه (i,j) در ماتریس توان rام P است.

ازآنجاکه در عمل استفاده از این فرمول برای تمام گام‌ها غیرممکن است تا جایی پیشروی صورت می‌گیرد که توان‌های ماتریس احتمال انتقال یک‌قدمی تا دقت خاصی همگرا شود.

درصورتی‌که زنجیره مارکوف بودن فرآیند ثابت شد از این ابزار برای تجزیه‌وتحلیل‌های زیر استفاده می‌شود:

۱. محاسبه متوسط تعداد گام‌های لازم برای تغییر حالات:

در حالت کلی فرض کنید $\{X_n\}$ یک زنجیر مارکوف با ماتریس احتمال انتقال

$$P=\begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & \cdots & p_{0n} \\ p_{10} & p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n0} & p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

باشد و متوسط تعداد گام‌های لازم برای رسیدن از حالت i به j برابر T_{ij} تعریف شود که در رابطه ۱۸، نشان داده‌شده است.

$$T_{ij}=E(\min\{n\geq 0, X_n=j \mid X_0=i\}) \quad (۱۸)$$

آنگاه طبق قانون احتمال کل رابطه ۱۹، به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$T_{ij}=1+T_{0j}\ P_{i0}+T_{1j}\ P_{i1}+T_{2j}\ P_{i2}+\ldots+T_{nj}\ P_{in} \quad (۱۹)$$
$$i=0,1,2,\ldots,n$$

هم‌اکنون یک دستگاه با n+1 معادله و n+1 مجهول شامل مجهولات $T_{0j},T_{1j},\ldots,T_{nj}$ وجود دارد که با حل این دستگاه می‌توان متوسط زمان‌ها را محاسبه کرد.

۲. محاسبه احتمال‌های حدی یا رفتار انتقالی سیستم در درازمدت یا رفتار پایای سیستم:

با فرض اینکه ماتریس احتمال انتقال یک زنجیر مارکوف، یعنی P با تعدادی متناهی حالت مانند $\{0,1,2,\ldots,N\}$ دارای این خاصیت باشد که برای برخی توان‌های k، تمام عناصر ماتریس P^K به‌طور أکید مثبت شوند، چنین ماتریس‌هایی باقاعده نامیده می‌شوند که در رابطه(۲۰)قابل‌مشاهده است. از خصوصیات این‌گونه ماتریس‌ها این است که دارای احتمالات حدی هستند.

$$\Pi=(\pi_0,\pi_1,\ldots,\pi_N) \quad \pi_j>0 \quad for \ \ j=0,1,2,\ldots,N \ \ and \ \ \sum_{j=0}^{N}\pi_j=1.$$

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{n}=\pi_j>0 \quad j=0,1,\ldots,N \quad (۲۰)$$

درنتیجه این احتمالات مستقل از حالت اولیه است؛ به‌عبارت‌دیگر تعریف این احتمالات حدی برحسب زنجیر مارکوف $\{X_n\}$ به‌صورت رابطه ۲۱، است

$$\lim_{n\to\infty} P\{X_n = j \mid X_0 = i\} = \pi_j > 0 \qquad (۲۱)$$

این همگرایی بدان معنا است که در درازمدت $n \to \infty$ احتمالِ بودن زنجیر در حالت j، مستقل از حالت اولیه زنجیر است.

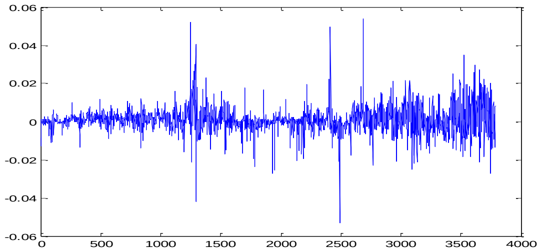
برای روشن‌شده مطلب به مثال زیر توجه کنید.

با فرض اینکه ماتریس احتمال انتقال P با تعدادی متناهی حالت مانند $\{0,1,2,\ldots,N\}$ باشد، آنگاه احتمالات حدی $\Pi = (\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_N)$ برابر با جواب یگانه نامنفی دستگاه رابطه ۲۲، است:

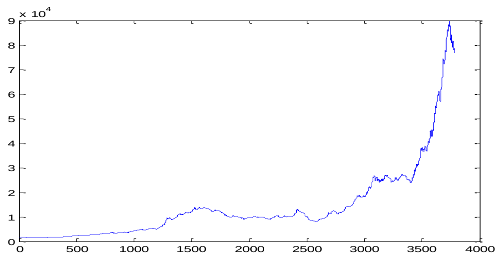
$$\pi_j = \sum_{k=0}^{N} \pi_k \cdot p_{kj} \qquad j = 0,1,2,\ldots,N \qquad (۲۲)$$
$$\sum_{j=0}^{N} \pi_j = 1$$

٤. تحلیل داده ها و یافته‌ها

نمودار ۳۷۹۰ داده روزانه مربوط به شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران در فاصله سال‌های ۱۳۷۵–۱۳۹۳ و نمودار بازده روزانه شاخص در شکل‌های ۱ و ۲، مشاهده می‌شود.

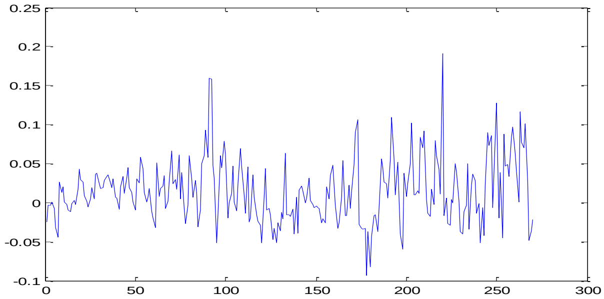


شکل ۱ بازده روزانه شاخص سهام



شکل ۲ نمودار شاخص کل بورس تهران

نمودار ۲۷۰ داده از بازده‌های چهارده‌روزه شاخص $\{\mu_i\}$ در شکل ۳، ارائه‌شده است.



نمودار ۳ بازده دو هفتگی شاخص

متوسط بازده‌های چهارده‌روزه که با μ و انحراف معیار استاندارد بازده‌های ۱۴ روزه (ریسک) که با σ نشان داده می‌شود به ترتیب ۰/۰۱۵۲ و ۰/۰۴۰۶ محاسبه شدند. فضای حالت فرآیند $\{\mu_i\}$ شامل شش حالت به شرح جدول ۴، انتخاب شد:

جدول ۴. معرفی فضای حالت

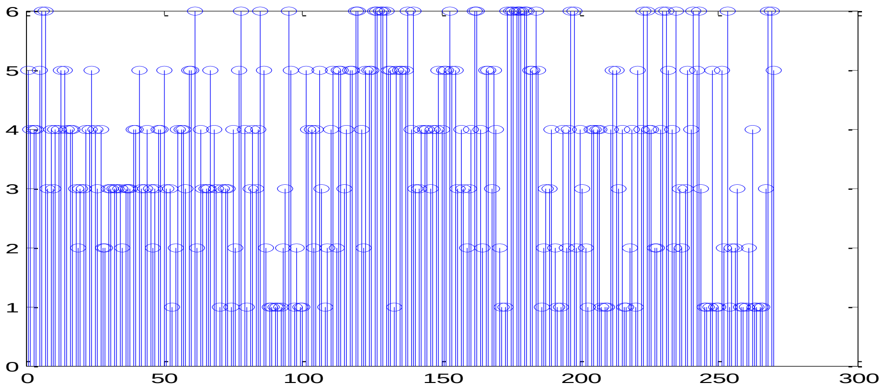
ناحیه	مقدار
$k > \mu + \sigma$	$k > 0.0558$
$\mu + 0.5\sigma \le k < \mu + \sigma$	$0.0355 \le k < 0.0558$
$\mu \le k < \mu + 0.5\sigma$	$0.0152 \le k < 0.0355$
$\mu - 0.5\sigma \le k < \mu$	$-0.0051 \le k < 0.0152$
$\mu - \sigma \le k < \mu - 0.5\sigma$	$-0.0254 \le k < -0.0051$
$k < \mu - \sigma$	$k < -0.0254$

– روش اول در اثبات خاصیت مارکوفی فراوانی حالات کسب‌شده توسط داده‌ها در جدول ۵، مشاهده می‌شود.

جدول ۵. فراوانی حالات ایجادشده توسط داده‌ها

تعداد (n(i))	حالت
۳۹	۰
۳۲	۱
۴۹	۲
۶۲	۳
۴۹	۴
۳۹	۵

نمودار تغییرات حالت با یک گام برای داده‌های مورداستفاده به‌صورت شکل ۴، است.



نمودار۴ تغییر حالات یک گامی

ماتریس تعداد تغییرات حالت با یک گام در ماتریس رابطه ۲۳، مشاهده می‌شود.

$$N^1 = \begin{bmatrix} 18 & 8 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & 9 & 9 & 4 & 2 \\ 6 & 6 & 15 & 16 & 4 & 2 \\ 5 & 10 & 11 & 18 & 11 & 7 \\ 4 & 3 & 7 & 10 & 15 & 9 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 9 & 18 \end{bmatrix} \qquad (۲۳)$$

مطابق رابطه ۲۲، برآوردگر ماتریس احتمال انتقال یک گامی به‌صورت ماتریس رابطه ۲۴، محاسبه شد.

$$P^1 = \begin{bmatrix} 0.4615 & 0.2051 & 0.0769 & 0.1026 & 0.1282 & 0.0256 \\ 0.1563 & 0.0938 & 0.2813 & 0.2813 & 0.1250 & 0.0625 \\ 0.1224 & 0.1224 & 0.3061 & 0.3265 & 0.0816 & 0.0408 \\ 0.0806 & 0.1613 & 0.1774 & 0.2903 & 0.1774 & 0.1129 \\ 0.0816 & 0.0612 & 0.1429 & 0.2041 & 0.3061 & 0.1837 \\ 0.0256 & 0.0513 & 0.1026 & 0.1282 & 0.2308 & 0.4615 \end{bmatrix} \qquad (۲۴)$$

برای پاسخ دادن به این سؤال است که آیا فرآیند موردبررسی، یعنی $\{\mu_i\}$ به همراه P، تشکیل یک زنجیر مارکوف می‌دهد یا خیر؟ ابتدا پایایی یا مانایی (زمانی) فرآیند بررسی می‌شود. برای این منظور و برای محفوظ ماندن کفایت داده‌ها در جهت برآورد احتمالات، زمان نمونه به چهار

زیر نمونه، هر یک به طول ۶۷ واحد زمانی (۶۷ تا ۱۴ روزه)، تقسیم شد. ماتریس تعداد انتقال یک گامی در هر یک از این زیربازه‌ها به‌صورت ماتریس روابط ۲۵، است.

$$N_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 9 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 10 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$N_2 = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$N_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 8 \end{bmatrix} \quad (۲۵)$$

$$N_4 = \begin{bmatrix} 8 & 3 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

بر این اساس و با قبول این فرض که توزیع انتقالات در زیربازه‌ها با توزیع انتقالات در کل داده‌ها برابر متوسط مورد انتظار تعداد انتقالات در زیربازه‌ها در روابط ۲۶، است

$$e_1 = \begin{bmatrix} 0.4615 & 0.2051 & 0.0769 & 0.1026 & 0.1282 & 0.0256 \\ 1.0938 & 0.6563 & 1.9688 & 1.9688 & 0.8750 & 0.4375 \\ 2.9388 & 2.9388 & 7.3469 & 7.8367 & 1.9592 & 0.9796 \\ 1.7742 & 3.5484 & 3.9032 & 6.3871 & 3.9032 & 2.4839 \\ 0.7347 & 0.5510 & 1.2857 & 1.8367 & 2.7551 & 1.6531 \\ 0.0769 & 0.1538 & 0.3077 & 0.3846 & 0.6923 & 1.3846 \end{bmatrix}$$

$$e_2 = \begin{bmatrix} 5.5385 & 2.4615 & 0.9231 & 1.2308 & 1.5385 & 0.3077 \\ 1.2500 & 0.7500 & 2.2500 & 2.2500 & 1.0000 & 0.5000 \\ 1.1020 & 1.1020 & 2.7551 & 2.9388 & 0.7347 & 0.3673 \\ 0.8871 & 1.7742 & 1.9516 & 3.1935 & 1.9516 & 1.2419 \\ 1.2245 & 0.9184 & 2.1429 & 3.0612 & 4.5918 & 2.7551 \\ 0.2564 & 0.5128 & 1.0256 & 1.2821 & 2.3077 & 4.6154 \end{bmatrix}$$

$$e_3 = \begin{bmatrix} 2.3077 & 1.0256 & 0.3846 & 0.5128 & 0.6410 & 0.1282 \\ 0.9375 & 0.5625 & 1.6875 & 1.6875 & 0.7500 & 0.3750 \\ 1.1020 & 1.1020 & 2.7551 & 2.9388 & 0.7347 & 0.3673 \\ 1.1290 & 2.2581 & 2.4839 & 4.0645 & 2.4839 & 1.5806 \\ 1.1429 & 0.8571 & 2.0000 & 2.8571 & 4.2857 & 2.5714 \\ 0.4103 & 0.8205 & 1.6410 & 2.0513 & 3.6923 & 7.3846 \end{bmatrix} \qquad (۲۶)$$

$$e_4 = \begin{bmatrix} 8.3077 & 3.6923 & 1.3846 & 1.8462 & 2.3077 & 0.4615 \\ 1.5625 & 0.9375 & 2.8125 & 2.8125 & 1.2500 & 0.6250 \\ 0.6122 & 0.6122 & 1.5306 & 1.6327 & 0.4082 & 0.2041 \\ 1.1290 & 2.2581 & 2.4839 & 4.0645 & 2.4839 & 1.5806 \\ 0.6531 & 0.4898 & 1.1429 & 1.6327 & 2.4490 & 1.4694 \\ 0.2051 & 0.4103 & 0.8205 & 1.0256 & 1.8462 & 3.6923 \end{bmatrix}$$

برای آزمون مانایی فرآیند از چهار آزمون نیکویی برازش استفاده شد که نتیجه آن را در جدول ۶، آورده شده است.

جدول۶: نتیجه آزمون نیکویی برازش

نتیجه آزمون	مقدار بحرانی آماره در سطح معناداری ۵٪	آماره مربع کای پیرسون	درجه آزادی	فرض صفر
پذیرش فرض صفر	۳۷/۶۵۲	۳۱/۱۴۴۱	۲۵	توزیع ماتریس احتمال انتقال در زیر نمونه اول از ماتریس P پیروی می‌کند.
پذیرش فرض صفر	۳۷/۶۵۲	۲۲/۹۰۱۵	۲۵	توزیع ماتریس احتمال انتقال در زیر نمونه دوم از ماتریس P پیروی می‌کند.
پذیرش فرض صفر	۳۷/۶۵۲	۱۹/۸۵۲۸	۲۵	توزیع ماتریس احتمال انتقال در زیر نمونه سوم از ماتریس P پیروی می‌کند.
پذیرش فرض صفر	۳۷/۶۵۲	۳۵/۲۰۲۸	۲۵	توزیع ماتریس احتمال انتقال در زیر نمونه چهارم از ماتریس P پیروی می‌کند.

با پذیرش فرض صفر در تمام زیربازه‌ها می‌توان نتیجه گرفت که فرآیند مانا است.

برای بررسی خاصیت بی حافظگی فرآیند یعنی رابطه ۲۷

$$P(X_{n+1}=j|X_n=i \ \& \ X_{n-1}=k)=P(X_{n+1}=j|X_n=i) \tag{۲۷}$$

که ویژگی اصلی یک فرآیند مارکوف است به شمارش انتقالات سه‌حالتی یا دوامی پرداخته شد که نتیجه آن را در ماتریس‌های رابطه ۲۸، مشاهده می‌شود:

$$N_{ij0}=\begin{bmatrix} 8&1&0&0&1&0\\ 4&0&1&2&0&1\\ 2&1&2&1&0&0\\ 3&2&1&1&0&0\\ 1&1&1&0&1&0\\ 0&0&1&1&2&0 \end{bmatrix}$$

$$N_{ij1}=\begin{bmatrix} 3&1&0&2&1&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 2&0&1&2&0&0\\ 0&2&4&2&1&0\\ 2&0&0&2&0&1\\ 1&0&1&2&1&1 \end{bmatrix}$$

$$N_{ij2}=\begin{bmatrix} 1&2&1&0&0&0\\ 0&2&4&2&0&1\\ 1&5&6&4&0&0\\ 1&0&1&3&3&1\\ 0&0&2&2&4&1\\ 0&0&1&0&0&1 \end{bmatrix}$$

$$N_{ij4}=\begin{bmatrix} 3&0&0&1&1&0\\ 0&0&1&2&3&0\\ 0&0&1&1&1&1\\ 1&3&1&6&4&2\\ 1&1&1&1&3&2\\ 0&0&0&0&3&4 \end{bmatrix} \tag{۲۸}$$

$$N_{ij5}=\begin{bmatrix} 1&0&1&0&0&1\\ 0&0&1&2&1&0\\ 0&0&0&2&0&1\\ 0&1&0&0&1&4\\ 0&1&0&2&6&3\\ 0&0&0&1&1&9 \end{bmatrix}$$

بر این اساس و با قبول فرض برقراری خاصیت بی حافظگی مارکوف، متوسط مورد انتظار تعداد انتقالات عبارت از ماتریس‌های رابطه ۲۹، است.

$$
e_{ij0} = \begin{bmatrix} 8.3077 & 1.2500 & 0.3673 & 0.3226 & 0.4082 & 0.0256 \\ 2.3077 & 0.4688 & 1.1020 & 0.7258 & 0.3265 & 0.0513 \\ 2.7692 & 0.9375 & 1.8367 & 1.2903 & 0.3265 & 0.0513 \\ 2.3077 & 1.5625 & 1.3469 & 1.4516 & 0.8980 & 0.1795 \\ 1.8462 & 0.4688 & 0.8571 & 0.8065 & 1.2245 & 0.2308 \\ 0.4615 & 0.3125 & 0.4898 & 0.4032 & 0.7347 & 0.4615 \end{bmatrix}
$$

$$
e_{ij1} = \begin{bmatrix} 3.6923 & 0.7500 & 0.3673 & 0.6452 & 0.3061 & 0.0513 \\ 1.0256 & 0.2813 & 1.1020 & 1.4516 & 0.2449 & 0.1026 \\ 1.2308 & 0.5625 & 1.8367 & 2.5806 & 0.2449 & 0.1026 \\ 1.0256 & 0.9375 & 1.3469 & 2.9032 & 0.6735 & 0.3590 \\ 0.8205 & 0.2813 & 0.8571 & 1.6129 & 0.9184 & 0.4615 \\ 0.2051 & 0.1875 & 0.4898 & 0.8065 & 0.5510 & 0.9231 \end{bmatrix}
$$

$$
e_{ij2} = \begin{bmatrix} 1.3846 & 2.2500 & 0.9184 & 0.7097 & 0.7143 & 0.1026 \\ 0.3846 & 0.8438 & 2.7551 & 1.5968 & 0.5714 & 0.2051 \\ 0.4615 & 1.6875 & 4.5918 & 2.8387 & 0.5714 & 0.2051 \\ 0.3846 & 2.8125 & 3.3673 & 3.1935 & 1.5714 & 0.7179 \\ 0.3077 & 0.8438 & 2.1429 & 1.7742 & 2.1429 & 0.9231 \\ 0.0769 & 0.5625 & 1.2245 & 0.8871 & 1.2857 & 1.8462 \end{bmatrix}
$$

$$
e_{ij3} = \begin{bmatrix} 1.8462 & 2.2500 & 0.9796 & 1.1613 & 1.0204 & 0.1282 \\ 0.5128 & 0.8438 & 2.9388 & 2.6129 & 0.8163 & 0.2564 \\ 0.6154 & 1.6875 & 4.8980 & 4.6452 & 0.8163 & 0.2564 \\ 0.5128 & 2.8125 & 3.5918 & 5.2258 & 2.2449 & 0.8974 \\ 0.4103 & 0.8438 & 2.2857 & 2.9032 & 3.0612 & 1.1538 \\ 0.1026 & 0.5625 & 1.3061 & 1.4516 & 1.8367 & 2.3077 \end{bmatrix} \qquad (۲۹)
$$

$$
e_{ij4} = \begin{bmatrix} 2.3077 & 1.0000 & 0.2449 & 0.7097 & 1.5306 & 0.2308 \\ 0.6410 & 0.3750 & 0.7347 & 1.5968 & 1.2245 & 0.4615 \\ 0.7692 & 0.7500 & 1.2245 & 2.8387 & 1.2245 & 0.4615 \\ 0.6410 & 1.2500 & 0.8980 & 3.1935 & 3.3673 & 1.6154 \\ 0.5128 & 0.3750 & 0.5714 & 1.7742 & 4.5918 & 2.0769 \\ 0.1282 & 0.2500 & 0.3265 & 0.8871 & 2.7551 & 4.1538 \end{bmatrix}
$$

$$
e_{ij5} = \begin{bmatrix} 0.4615 & 0.5000 & 0.1224 & 0.4516 & 0.9184 & 0.4615 \\ 0.1282 & 0.1875 & 0.3673 & 1.0161 & 0.7347 & 0.9231 \\ 0.1538 & 0.3750 & 0.6122 & 1.8065 & 0.7347 & 0.9231 \\ 0.1282 & 0.6250 & 0.4490 & 2.0323 & 2.0204 & 3.2308 \\ 0.1026 & 0.1875 & 0.2857 & 1.1290 & 2.7551 & 4.1538 \\ 0.0256 & 0.1250 & 0.1633 & 0.5645 & 1.6531 & 8.3077 \end{bmatrix}
$$

برای آزمون برقراری خاصیت مارکوفی از شش آزمون نیکویی برازش مطابق جدول ۷، استفاده شد.

جدول ۷. نتیجه آزمون نیکویی برازش

نتیجه	مقدار بحرانی در سطح معناداری ۵٪	آماره مربع کای	درجه آزادی	فرض صفر
پذیرش فرض صفر	۳۷/۶۵۲	۱۷/۷۶۷۹	۲۵	$\forall i, j : p_{ij0} = P_{j0}$
پذیرش فرض صفر	۳۷/۶۵۲	۳۵/۱۲۳۰	۲۵	$\forall i, j : p_{ij1} = P_{j1}$
پذیرش فرض صفر	۳۷/۶۵۲	۲۲/۷۹۱۵	۲۵	$\forall i, j : p_{ij2} = P_{j2}$
پذیرش فرض صفر	۳۷/۶۵۲	۲۴/۴۷۶۴	۲۵	$\forall i, j : p_{ij3} = P_{j3}$
پذیرش فرض صفر	۳۷/۶۵۲	۳۳/۴۱۵۶	۲۵	$\forall i, j : p_{ij4} = P_{j4}$
پذیرش فرض صفر	۳۷/۶۵۲	۲۹/۵۴۹۲	۲۵	$\forall i, j : p_{ij5} = P_{j5}$

بنابراین نتیجه این آزمون، تأیید خاصیت مارکوفی فرآیند است.

– روش دوم در اثبات خاصیت مارکوفی: روش دیگری که برای تأیید مارکوفی بودن فرآیند استفاده می‌شود، تأیید این مطلب است که رابطه چپمن‌کلموگروف برای تمامی توان‌های ماتریس احتمال انتقال یک گامی برقرار است؛ اما در عمل برای فرآیند موردبررسی این آزمون تا توان هشتم صورت گرفته است؛ چون از این توان به بعد عملاً ماتریس توان‌ها تا دقت دو رقم اعشار همگرا شده است. در ماتریس‌های رابطه ۳۰، توان‌های ماتریس احتمال انتقال مشاهده می‌شود:

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0.2739 & 0.1490 & 0.1559 & 0.1894 & 0.1545 & 0.0748 \\ 0.1557 & 0.1315 & 0.1986 & 0.2494 & 0.1573 & 0.1049 \\ 0.1472 & 0.1338 & 0.2113 & 0.2636 & 0.1483 & 0.0940 \\ 0.1249 & 0.1169 & 0.1943 & 0.2465 & 0.1769 & 0.1369 \\ 0.1109 & 0.1011 & 0.1660 & 0.2175 & 0.2021 & 0.1758 \\ 0.0734 & 0.0811 & 0.1508 & 0.1940 & 0.2180 & 0.2779 \end{bmatrix}$$

$$P^3 = \begin{bmatrix} 0.1986 & 0.1331 & 0.1740 & 0.2170 & 0.1646 & 0.1070 \\ 0.1524 & 0.1238 & 0.1873 & 0.2358 & 0.1692 & 0.1258 \\ 0.1505 & 0.1250 & 0.1913 & 0.2406 & 0.1667 & 0.1212 \\ 0.1375 & 0.1180 & 0.1850 & 0.2343 & 0.1760 & 0.1419 \\ 0.1258 & 0.1090 & 0.1733 & 0.2209 & 0.1814 & 0.1587 \\ 0.1056 & 0.1000 & 0.1687 & 0.2160 & 0.1972 & 0.2033 \end{bmatrix}$$

$$P^4 = \begin{bmatrix} 0.1674 & 0.1251 & 0.1790 & 0.2249 & 0.1699 & 0.1246 \\ 0.1487 & 0.1206 & 0.1828 & 0.2307 & 0.1730 & 0.1350 \\ 0.1485 & 0.1212 & 0.1842 & 0.2325 & 0.1722 & 0.1332 \\ 0.1415 & 0.1178 & 0.1817 & 0.2298 & 0.1757 & 0.1427 \\ 0.1330 & 0.1121 & 0.1748 & 0.2217 & 0.1753 & 0.1486 \\ 0.1238 & 0.1090 & 0.1752 & 0.2231 & 0.1854 & 0.1703 \end{bmatrix} \quad (۳۰)$$

$$P^5 = \begin{bmatrix} 0.1539 & 0.1211 & 0.1798 & 0.2267 & 0.1724 & 0.1335 \\ 0.1460 & 0.1189 & 0.1808 & 0.2284 & 0.1741 & 0.1390 \\ 0.1463 & 0.1193 & 0.1814 & 0.2292 & 0.1739 & 0.1383 \\ 0.1425 & 0.1175 & 0.1801 & 0.2278 & 0.1752 & 0.1425 \\ 0.1363 & 0.1133 & 0.1749 & 0.2214 & 0.1726 & 0.1434 \\ 0.1331 & 0.1131 & 0.1774 & 0.2250 & 0.1794 & 0.1550 \end{bmatrix}$$

$$P^6 = \begin{bmatrix} 0.1478 & 0.1189 & 0.1795 & 0.2267 & 0.1733 & 0.1377 \\ 0.1443 & 0.1179 & 0.1797 & 0.2271 & 0.1742 & 0.1405 \\ 0.1446 & 0.1181 & 0.1800 & 0.2276 & 0.1743 & 0.1402 \\ 0.1425 & 0.1171 & 0.1792 & 0.2266 & 0.1746 & 0.1420 \\ 0.1377 & 0.1136 & 0.1745 & 0.2209 & 0.1711 & 0.1406 \\ 0.1376 & 0.1149 & 0.1778 & 0.2252 & 0.1763 & 0.1476 \end{bmatrix}$$

$$P^7 = \begin{bmatrix} 0.1447 & 0.1177 & 0.1789 & 0.2260 & 0.1735 & 0.1395 \\ 0.1432 & 0.1172 & 0.1789 & 0.2261 & 0.1740 & 0.1409 \\ 0.1434 & 0.1173 & 0.1791 & 0.2265 & 0.1741 & 0.1409 \\ 0.1422 & 0.1167 & 0.1785 & 0.2257 & 0.1740 & 0.1415 \\ 0.1380 & 0.1136 & 0.1740 & 0.2201 & 0.1701 & 0.1390 \\ 0.1396 & 0.1155 & 0.1776 & 0.2248 & 0.1745 & 0.1439 \end{bmatrix}$$

$$P^8 = \begin{bmatrix} 0.1430 & 0.1169 & 0.1782 & 0.2253 & 0.1733 & 0.1402 \\ 0.1423 & 0.1166 & 0.1781 & 0.2252 & 0.1735 & 0.1408 \\ 0.1425 & 0.1168 & 0.1784 & 0.2255 & 0.1737 & 0.1409 \\ 0.1417 & 0.1163 & 0.1778 & 0.2248 & 0.1733 & 0.1410 \\ 0.1380 & 0.1133 & 0.1735 & 0.2194 & 0.1693 & 0.1380 \\ 0.1403 & 0.1155 & 0.1771 & 0.2241 & 0.1733 & 0.1419 \end{bmatrix}$$

برای آزمون این مطلب، ماتریس‌های تعداد انتقال حالات با ۲ تا ۸ قدم در روابط ۳۱، آورده شده است.

$$N^2 = \begin{bmatrix} 10 & 7 & 4 & 10 & 5 & 3 \\ 8 & 0 & 9 & 5 & 6 & 4 \\ 6 & 5 & 16 & 15 & 4 & 3 \\ 7 & 9 & 9 & 14 & 17 & 6 \\ 4 & 5 & 9 & 9 & 9 & 12 \\ 4 & 6 & 2 & 8 & 7 & 11 \end{bmatrix}$$

$$N^3 = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 6 & 8 & 6 & 7 \\ 4 & 4 & 7 & 8 & 4 & 5 \\ 6 & 8 & 8 & 14 & 10 & 3 \\ 8 & 6 & 17 & 13 & 10 & 8 \\ 10 & 3 & 3 & 12 & 12 & 8 \\ 3 & 7 & 8 & 5 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$N^4 = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 3 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 4 & 5 & 6 & 4 & 5 \\ 4 & 8 & 12 & 14 & 7 & 3 \\ 6 & 5 & 12 & 19 & 12 & 8 \\ 7 & 8 & 11 & 9 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 6 & 4 & 11 & 7 \end{bmatrix}$$

$$N^5 = \begin{bmatrix} 8 & 5 & 3 & 7 & 6 & 9 \\ 4 & 3 & 5 & 9 & 8 & 3 \\ 7 & 4 & 12 & 14 & 6 & 5 \\ 9 & 8 & 12 & 16 & 8 & 9 \\ 4 & 10 & 11 & 7 & 8 & 8 \\ 7 & 2 & 6 & 6 & 11 & 5 \end{bmatrix} \qquad (۳۱)$$

$$N^6 = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 2 & 6 & 7 & 7 \\ 4 & 7 & 5 & 8 & 3 & 5 \\ 7 & 2 & 13 & 16 & 7 & 3 \\ 7 & 9 & 10 & 16 & 11 & 9 \\ 5 & 5 & 16 & 7 & 7 & 8 \\ 7 & 3 & 3 & 6 & 12 & 6 \end{bmatrix}$$

$$N^7 = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 5 & 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 7 & 6 & 2 & 8 \\ 6 & 6 & 11 & 11 & 9 & 5 \\ 5 & 8 & 13 & 21 & 11 & 4 \\ 8 & 4 & 10 & 12 & 8 & 6 \\ 5 & 3 & 3 & 7 & 12 & 7 \end{bmatrix}$$

با قبول فرض برقراری رابطه کلموگروف ماتریس‌های رابطه (۳۲) بدست می‌آید

$$e^2 = \begin{bmatrix} 10.6814 & 5.8122 & 6.0795 & 7.3856 & 6.0236 & 2.9155 \\ 4.9821 & 4.2080 & 6.3568 & 7.9810 & 5.0335 & 3.3570 \\ 7.2116 & 6.5581 & 10.3561 & 12.9187 & 7.2685 & 4.6053 \\ 7.7462 & 7.2457 & 12.0474 & 15.2853 & 10.9653 & 8.4856 \\ 5.4338 & 4.9517 & 8.1344 & 10.6580 & 9.9022 & 8.6138 \\ 2.8633 & 3.1630 & 5.8829 & 7.5672 & 8.5008 & 10.8392 \end{bmatrix}$$

$$e^3 = \begin{bmatrix} 7.7446 & 5.1899 & 6.7873 & 8.4627 & 6.4194 & 4.1712 \\ 4.8759 & 3.9624 & 5.9921 & 7.5449 & 5.4152 & 4.0252 \\ 7.3745 & 6.1271 & 9.3722 & 11.7901 & 8.1696 & 5.9366 \\ 8.5279 & 7.3153 & 11.4704 & 14.5296 & 10.9091 & 8.7994 \\ 6.1664 & 5.3419 & 8.4898 & 10.8256 & 8.8897 & 7.7785 \\ 4.1182 & 3.9011 & 6.5794 & 8.4256 & 7.6889 & 7.9296 \end{bmatrix}$$

$$e^4 = \begin{bmatrix} 6.5299 & 4.8782 & 6.9795 & 8.7720 & 6.6248 & 4.8597 \\ 4.7570 & 3.8603 & 5.8489 & 7.3828 & 5.5348 & 4.3215 \\ 7.2785 & 5.9410 & 9.0273 & 11.3912 & 8.4391 & 6.5262 \\ 8.7714 & 7.3023 & 11.2635 & 14.2503 & 10.8921 & 8.8495 \\ 6.5184 & 5.4945 & 8.5641 & 10.8614 & 8.5884 & 7.2836 \\ 4.8264 & 4.2525 & 6.8346 & 8.6999 & 7.2312 & 6.6413 \end{bmatrix}$$

$$e^5 = \begin{bmatrix} 6.0035 & 4.7211 & 7.0120 & 8.8425 & 6.7225 & 5.2073 \\ 4.6729 & 3.8051 & 5.7858 & 7.3104 & 5.5713 & 4.4466 \\ 7.1679 & 5.8440 & 8.8902 & 11.2312 & 8.5232 & 6.7746 \\ 8.8338 & 7.2822 & 11.1684 & 14.1259 & 10.8616 & 8.8349 \\ 6.6794 & 5.5521 & 8.5694 & 10.8501 & 8.4586 & 7.0255 \\ 5.1911 & 4.4121 & 6.9172 & 8.7757 & 6.9980 & 6.0442 \end{bmatrix} \qquad (۳۲)$$

$$e^6 = \begin{bmatrix} 5.7625 & 4.6375 & 6.9994 & 8.8399 & 6.7606 & 5.3717 \\ 4.6181 & 3.7720 & 5.7498 & 7.2682 & 5.5757 & 4.4948 \\ 7.0852 & 5.7875 & 8.8216 & 11.1504 & 8.5403 & 6.8722 \\ 8.8349 & 7.2588 & 11.1106 & 14.0514 & 10.8245 & 8.8050 \\ 6.7453 & 5.5681 & 8.5526 & 10.8217 & 8.3855 & 6.8892 \\ 5.3663 & 4.4793 & 6.9344 & 8.7829 & 6.8758 & 5.7570 \end{bmatrix}$$

$$e^7 = \begin{bmatrix} 5.6438 & 4.5891 & 6.9754 & 8.8157 & 6.7674 & 5.4423 \\ 4.5814 & 3.7491 & 5.7233 & 7.2363 & 5.5665 & 4.5081 \\ 7.0272 & 5.7499 & 8.7764 & 11.0961 & 8.5305 & 6.9028 \\ 8.8149 & 7.2339 & 11.0648 & 13.9930 & 10.7856 & 8.7722 \\ 6.7644 & 5.5650 & 8.5275 & 10.7869 & 8.3358 & 6.8117 \\ 5.4429 & 4.5026 & 6.9263 & 8.7656 & 6.8056 & 5.6122 \end{bmatrix}$$

$$e^8 = \begin{bmatrix} 5.5789 & 4.5574 & 6.9492 & 8.7854 & 6.7583 & 5.4664 \\ 4.5547 & 3.7312 & 5.7003 & 7.2080 & 5.5514 & 4.5055 \\ 6.9846 & 5.7211 & 8.7396 & 11.0510 & 8.5091 & 6.9033 \\ 8.7874 & 7.2084 & 11.0229 & 13.9399 & 10.7463 & 8.7393 \\ 6.7608 & 5.5530 & 8.4992 & 10.7496 & 8.2965 & 6.7621 \\ 5.4701 & 4.5050 & 6.9084 & 8.7395 & 6.7597 & 5.5336 \end{bmatrix}$$

برای آزمون برقراری رابطه کلموگروف از هفت آزمون نیکیویی برازش مطابق جدول ۸، استفاده شد.

جدول ۸. نتیجه آزمون نیکویی برازش

نتیجه آزمون	مقدار بحرانی آماره در سطح معناداری ۵٪	آماره مربع کای	درجه آزادی	فرض صفر
پذیرش فرض صفر	۳۷/۶۵۲	۳۰/۰۸۸۷	۲۵	توزیع ماتریس احتمال دومرحله‌ای فرآیند از p^2 پیروی می‌کند.
پذیرش فرض صفر	۳۷/۶۵۲	۲۲/۸۷۳۷	۲۵	توزیع ماتریس احتمال سه مرحله‌ای فرآیند از p^3 پیروی می‌کند.
پذیرش فرض صفر	۳۷/۶۵۲	۲۸/۱۹۸۸	۲۵	توزیع ماتریس احتمال چهارمرحله‌ای فرآیند از p^4 پیروی می‌کند.
پذیرش فرض صفر	۳۷/۶۵۲	۲۵/۴۷۴۷	۲۵	توزیع ماتریس احتمال پنج مرحله‌ای فرآیند از p^5 پیروی می‌کند.
پذیرش فرض صفر	۳۷/۶۵۲	۳۸/۳۶۴۳	۲۵	توزیع ماتریس احتمال شش مرحله‌ای فرآیند از p^6 پیروی می‌کند.
پذیرش فرض صفر	۳۷/۶۵۲	۳۵/۳۹۱۱	۲۵	توزیع ماتریس احتمال هفت مرحله‌ای فرآیند از p^7 پیروی می‌کند.
پذیرش فرض صفر	۳۷/۶۵۲	۳۶/۰۷۷۸	۲۵	توزیع ماتریس احتمال هشت مرحله‌ای فرآیند از p^8 پیروی می‌کند.

با پذیرش فروض صفر در جدول ۸، زنجیره مارکوف بودن فرآیند $\{\mu_i\}$ تأیید می‌شود.

محاسبه متوسط زمان تغییر حالات پس از نشان دادن مارکوفی بودن فرآیند $\{\mu_i\}$ به محاسبه متوسط زمان لازم برای انتقال از حالتی به حالت دیگر پرداخته شد. متوسط تعداد گام‌های لازم برای رسیدن از حالت i به حالت j برابر T_{ij} تعریف می‌شود. یعنی رابطه (۳۳)

$$T_{ij} = E(\min\{n \geq 0, X_n = j | X_0 = i\}) \tag{۳۳}$$

آنگاه طبق قانون احتمال کل رابطه ۳۴ نوشته می‌شود

$$T_{ij} = 1 + T_{0j}\ P_{i0} + T_{1j}\ P_{i1} + T_{2j}\ P_{i2} + \ldots + T_{nj}\ P_{in} \tag{۳۴}$$

$$i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

یک دستگاه با n+1 معادله و n+1 مجهول شامل مجهولات $T_{0j}, T_{1j}, \ldots, T_{nj}$ موجود است که با حل این دستگاه می‌توان نتیجه را در رابطه ۳۵، مشاهده کرد.

$$Expect\ time = \begin{bmatrix} 9.9838 & 10.2895 & 10.8589 & 10.8068 & 11.9848 \\ 6.9713 & 7.9070 & 7.8097 & 8.6363 & 9.2559 \\ 7.0337 & 5.6049 & 6.1953 & 6.4265 & 6.9552 \\ 5.4423 & 4.3044 & 4.0255 & 4.6942 & 5.3048 \\ 7.1653 & 7.1037 & 7.4228 & 6.6268 & 5.8666 \\ 12.2333 & 11.5156 & 11.8010 & 10.7377 & 9.4843 \end{bmatrix} \qquad (۳۵)$$

در ماتریس ۳۵، درایه (i,j) متوسط تعداد گام‌های لازم (هرگام ۱۴ روز) برای رفتن از حالت i به j است. کمترین و بیشترین مقادیر زمان لازم برای جابه‌جایی چهار و سیزده دوره است. بیشترین زمان انتقال مربوط به جابه‌جایی از حالت پنج به صفر است که با توجه به فاصله آن‌ها بدیهی می‌باشد.

محاسبه احتمال حالات حدی: فرض کنیم ماتریس احتمال انتقال یک زنجیر مارکوف یعنی P با تعدادی متناهی حالت مانند $\{0, 1, 2, \ldots, N\}$ دارای این خاصیت باشد که برای برخی توان‌های k، تمام عناصر ماتریس P^K به‌طور أکید مثبت شوند. چنین ماتریس‌هایی باقاعده نامیده می‌شود. از خصوصیات این‌گونه ماتریس‌ها این است که دارای احتمالات حدی هستند؛ یعنی رابطه (۳۶).

$$\Pi = (\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_N) \quad \pi_j > 0 \quad for \quad j = 0,1,2,\ldots,N \quad and \quad \sum_{j=0}^{N} \pi_j = 1.$$
$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{n} = \pi_j > 0 \quad j = 0,1,\ldots,N \qquad (۳۶)$$

بنابراین این احتمالات مستقل از حالت اولیه است؛ به‌عبارت‌دیگر تعریف این احتمالات حدی برحسب زنجیر مارکوف $\{X_n\}$ عبارت است از رابطه (۳۷).

$$\lim_{n\to\infty} P\{X_n = j \mid X_0 = i\} = \pi_j > 0 \qquad (۳۷)$$

این همگرایی بدان معنا است که در درازمدت $(n \to \infty)$ احتمالِ بودن زنجیر در حالت j مستقل از حالت اولیه زنجیر است.

احتمالات حدی $\Pi = (\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_N)$ برابر با جواب یگانه نامنفی دستگاه رابطه ۳۸، است:

$$\pi_j = \sum_{k=0}^{N} \pi_k \cdot p_{kj} \qquad j = 0,1,2,\ldots,N \qquad (۳۸)$$
$$\sum_{j=0}^{N} \pi_j = 1$$

با حل رابطه ۳۸، احتمالات حدی زنجیره مارکوف $\{\mu_i\}$ محاسبه شد که نتیجه آن در رابطه ۳۹، مشاهده می‌شود.

$$\Pi = (0.1693, 0.1392, \ 0.2131, 0.2696, 0.2089, 0.1761) \quad (۳۹)$$

حالتی که بیشترین مقدار احتمال را در درازمدت از آن خودکرده است، حالت سوم است که در آن بازده از متوسط بالاتر است.

۵. بحث و نتیجه‌گیری

در پژوهش حاضر بازار سهام در چارچوب زنجیره مارکوف بررسی و تحلیل شد. همان‌طور که در پیشینه اشاره شد، تنها پژوهش صورت گرفته داخلی به کمک زنجیر مارکوف پژوهش و مقصودی و بیگلری‌کامی(۲۰۱۳) است که بر روی شاخص داوجونز اجراشده ولی در این پژوهش، تنها از یک شیوه برای اثبات مارکوفی بودن فرآیند استفاده شده است؛ بنابراین پژوهش حاضر ازنظر اجرا روی شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران، معرفی فضای حالت، اتخاذ دو شیوه برای اثبات مارکوفی بودن و محاسبات صورت‌گرفته در جهت محاسبه متوسط زمان و حالات حدی منحصربه‌فرد است. در این پژوهش با درنظرگرفتن سری بازده‌های چهارده‌روزه، به‌عنوان فرآیند منتج‌شده از شاخص کل، یک فضای حالت شش‌عضویی بر اساس متوسط و ریسک بازده‌های چهارده طراحی شد؛ سپس به دو روش اثبات شد که فرآیند با توجه به این فضای حالت یک زنجیر مارکوف است.

پس از نشان دادن مارکوفی بودن فرآیند، متوسط زمان لازم برای انتقال از حالتی به حالت دیگر محاسبه شد که کمترین و بیشترین مقادیر زمان لازم برای جابه‌جایی چهار و سیزده دوره است. احتمالات حدی زنجیر مارکوف نیز محاسبه شد که در درازمدت احتمالِ بودن در حالت صفر برابر۰/۱۶۹۳، در حالت اول برابر ۰/۱۳۹۲، در حالت دوم برابر ۰/۲۱۳۱، در حالت سوم برابر ۰/۲۶۹۶، در حالت چهارم برابر ۰/۲۰۸۹ و در حالت پنجم برابر۰/۱۷۶۱ است.

با توجه به اثبات مارکوفی بودن شاخص کل، به سرمایه‌گذاران بازار سهام پیشنهاد می‌شود تا با تطبیق سری قیمت سهام موردنظر خود با زنجیرهای مارکوف، بر اساس مبانی نظری مطرح‌شده در این پژوهش (یا ساخت فضای حالت جدید)، از فواید تحلیل احتمال و زمانی تجزیه‌وتحلیل در چارچوب زنجیرهای مارکوف استفاده کنند. بدین‌وسیله می‌توانند متوسط زمان تغییر حالات را محاسبه کنند و آن را به‌عنوان معیاری در مورد افق سرمایه‌گذاری مدنظر قرار دهند؛ همچنین حالات حدی به سرمایه‌گذاران پیشنهاد می‌دهد که بورس را در درازمدت به‌عنوان یکی از گزینه‌های سرمایه‌گذاری مدنظر قرار دهند.

منابع

1. Abounoori, E., Elmi, Z. M., & Nademi, Y. (2016). Forecasting Tehran stock exchange volatility; Markov switching GARCH approach. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 445,* 264-282.
2. Adebiyi, A.A., Ayo, C.K. & Otakito, S.O. (2011). Fuzzy-neural model with hybrid market indicators for stock forecasting. *International journal of electronic finance, 5(3).*
3. Adebiyi, A.A., Ayo, C.K. & Otokiti, S.O. (2009). Stock price prediction using hybridized market indicators. *Proceedings of International Conference on Artificial Intelligence and Pattern Recognition, MutiConf'09, Orlando USA,* 362–367.
4. Alamatian, V., Wafaei jahan, M. (2016). The stock price prediction in Iran is based on the superiority of the networks and the Hidden Mysteries. *Journal of Financial Engineering and Management of Securities. Number th and second*. 283-298 (In Persian).
5. Hassan, M. R. & B. Nath (2005). Stock market forecasting using hidden Markovmodel: a new approach. Intelligent Systems Design and Applications, 2005.ISDA'05. Proceedings. 5th International Conference on, IEEE.
6. Hassan, M. R., Nath, B., & Kirley, M. (2007). A fusion model of HMM, ANN and GA for stock market forecasting. Expert systems with Applications, 33(1), 171-180.Hassan, Md Rafiul, Baikunth Nath & Michael Kirley (2007). A Fusion Model of Hmm, Ann and Ga for Stock Market Forecasting. *Expert Systems with Applications, 33(1),* 171-180.
7. Landauskas, M. & Valakevičius, E. (2011). Modelling of Stock Prices by MarkovChain Monte Carlo Method. *Intelektinė ekonomika*, *5(2),* 244-256.
8. Lee, J. and Shin, M. (2009) "Stock forecasting using hidden Markov process", http://cs229.stanford.edu/proj2009/ShinLee.pdfProcesses.
9. Lukáš, A. (2012). Application of Markov chain analysis to trendprediction of stock indices. *Proceedings of 30th International ConferenceMathematical Methods in Economics.*
10. Maghsoudi, A., Biglari Kami, M. (2013). Stock behavior prediction using Markov chain model. *Journal of Financial Engineering and Management of Securities, 5(20),* 94-79 (In Persian).
11. Raei, R., Mohammadi, S., Sarean, A.R. (2013). Tehran Stock Exchange dynamics using the Markov model on the average switching ratio. Quarterly Journal of Financial Research, (1), 1698-77 (In Persian).
12. Zhou, Q. X. (2015). Application of Weighted Markov Chain in Stock Price Forecasting of China Sport Industry. *International Journal of u- and e- Service, Science and Technology, 8(2), 219*-226.
13. Wang, Y.-F., S. Cheng, et al. (2010). Incorporating the Markov chain concept intofuzzy stochastic prediction of stock indexes. *Applied Soft Computing, 10(2),* 613-617.
14. Zandieh, M., & Khamis, M. (2014). Stock price prediction using the combination of the Markov Hidden Markov Model. *Magazine Outlook Financial Management. 12,* 27-40 (In Persian).
15. Zhang, D. & X. Zhang (2009). Study on forecasting the stock market trend basedon stochastic analysis method. *International Journal of Business andManagement, 4(6),* 163-170.