دوفصلنامه مطالعات برنامه درسی آموزش عالی
سال ۶، شماره ۱۲، پاییزو زمستان ۱۳۹۴، ۳۴- ۹

Journal of Higher Education Curriculum Studies Vol.6, No.12,9-34

واکاوی چالش‌های آموزش رویکرد هندسی حل معادلات دیفرانسیل خودگردان: مصاحبه تکلیف- مدار[1]

Analysis of Educational Challenges of Geometric Approach on Autonomus Differential Equations: Task Based Interview

تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۹۳/۱۲/۱۱، **تاریخ ارزیابی**: ۱۳۹۴/۳/۱۳، **تاریخ پذیرش مقاله**: ۱۳۹۴/۶/۶

یونس کریمی فردین پور[2]- دکتر زهرا گویا[3]

چکیده: مطالعه چالش‌های آموزش رویکرد هندسی حل معادلات دیفرانسیل (DE) خودگردان یکی از بحث‌های آموزش ریاضی در سطح آموزش عالی است. به این دلیل، پژوهشی طراحی شد که هدف اصلی آن، شناخت جامعیت و عمق درک و فهم دانشجویان از (DE) بود. در این مطالعه، ۱۷ دانشجوی علوم پایه و مهندسی شرکت کردند و داده‌ها، با استفاده از روش مصاحبه تکلیف -مدار جمع‌آوری شد. در این مصاحبه‌ها، از دانشجویان خواسته شد که معادله دیفرانسیل داده شده را با رویکرد هندسی حل کرده و منحنی‌های جواب به دست آمده را با میدان شیب داده شده، منطبق نموده و دلیل انطباق را بیان کنند. تجزیه و تحلیل مصاحبه‌ها معلوم کرد که درک وجود ارتباط بین دستگاه‌های [y, f(y)] و [t, y(t)]، تعداد ریشه‌های f(y)=0 و تعداد جواب‌های تعادل، ارتباط بین تعداد نقاط تقاطع نمودار f(y) با محور افقی و تعداد جواب‌های تعادل، نقش دوگانه y، رابطه بین علامت f(y) و یکنوایی منحنی‌های جواب، تنظیم خط فاز و بر چسب‌زدنِ جواب‌های تعادل، همگی از چالش‌های آموزش رویکرد هندسی حل معادلات دیفرانسیل بودند. با این آگاهی، علت وجود این چالش‌ها مورد بررسی قرار گرفت

کلمات کلیدی: آموزش‌عالی، آموزش‌ریاضی، آموزش‌معادلات دیفرانسیل، چالش‌های رویکرد هندسی به آموزش‌معادلات دیفرانسیل.

Yunes Karimi Fardinpour- Dr.Zahra Gooya

Abstract: Educational challenges of geometric approach to Differential Equations (DE) is one of the important issues of undergraduate mathematics curriculum. Thus, a study was designed to investigate the breadth and depth of students' understanding of DE. 17 undergraduate students majoring in science and engineering, participated in the study. The data were collected via task- based interviews. Students were asked to solve a DE using geometric approach and then, compare the response curves with the given slope field and justify their answers. The analysis of the data helped to identify various challenges including their understanding of the relationships between [y, f (y)] and [t, y (t)], the number of roots of f(y) = 0 and the number of equilibrium solutions, the number of intersection points of the graph of f(y) with the horizontal axis and the number of equilibrium solutions, the sign of f(y) and monotonicity of solution curves, phase line and labling of equilibrium solutions.

Keywords: Higher education, mathematics education, teaching Differential Equations, challenges of using geometric approach to DE.

۱. این مقاله، برگرفته از رساله دکتری ریاضی نویسنده اول با زمینه پژوهشی آموزش ریاضی دانشگاهی است.

۲. دانشجوی دکترای ریاضی با گرایش آموزش ریاضی

۳. استاد دانشگاه شهید بهشتی: zahra_gooya@yahoo.com

۱. مقدمه

در قرن بیست یکم، دلیل اصلی توجه محققان آموزشی ریاضی دانشگاهی به مبحث معادلات دیفرانسیل، قابلیت‌های این حوزه در بحث آموزش مدل‌سازی است (فردین‌پور و گویا، ۱۳۹۲ و هِیبر[1]، ۲۰۰۰). اهمیت معادلات دیفرانسیل در این است که از پدیده‌های ساده فیزیکی مانند رشد و نمو نمایی، دستگاه‌های فنر- جرم و مدل‌های الکتریکی گرفته تا فرآیندهای طبیعی دینامیکی را مدل‌سازی نموده و کاربست صنعتی پیدا می‌کند (فردین‌پور، ۱۳۹۳ ب و هیبر، ۲۰۰۳). در واقع مدل‌سازی‌های مسائل دنیای واقعی، معمولاً از تلفیق و تعمیم این مدل‌های ساده ولی اساسی حاصل می‌شود و اطلاعات جامعی از مدل‌های ساده فیزیکی ارائه می‌دهد (کین[2]، ۲۰۰۷). برای مدل‌سازی و حل مسائل دنیای واقعی با کمک معادلات دیفرانسیل، اغلب سه رویکرد جبری[3]، عددی[4] و هندسی[5] به حل معادلات دیفرانسیل، مورد نیاز است (آلین[6]، ۲۰۰۶).

معادلات دیفرانسیل یکی از شاخه‌های مهم ریاضی است که در قرن هفدهم، توسط نیوتن و لایب‌نیتیز و در جریان مطالعات حساب دیفرانسیل و انتگرال، شکل گرفت (بویس، دی‌پریما و میترِا، ۲۰۱۰[7]) و تا آخر قرن هجدهم، بسیاری از روش‌های مقدماتی حل جبری معادلات دیفرانسیل معمولی، توسط ریاضی‌دانان برجسته‌ای مانند برادران برنولی، اویلر و لاگرانژ، کشف شدند. منظور از رویکرد جبری (تحلیلی) در آموزش معادلات دیفرانسیل، روشی است که در آن، ابتدا مشخص می‌شود که معادله دیفرانسیل، به چه رده‌ای از قبیل معمولی یا با مشتقات جزئی، خطی یا غیر خطی[8]، مرتبه اول یا دوم و غیره، تعلق دارد. سپس تکنیک‌ها و الگوریتم‌های مشخصی برای حل آن اعمال می‌شود (فردین‌پور، ۱۳۹۳ پ). در طول قرن نوزدهم، در زمینه حل معادلات دیفرانسیل، بیشتر به بررسی مسائل نظری وجود، یکتایی و بسط به سری‌های توانی پرداخته شد. در این بین، تعدادی از معادلات دیفرانسیل به وسیله روش‌های جبری قابل حل نبودند و همین، باعث ابداع روش‌های عددی شد. ولی کاربرد رویکرد عددی در حل معادلات دیفرانسیل به خاطر محدودیت محاسبات دستی، تا گسترش تکنولوژی و تولید نرم افزارهای

---

1 Habre
2 Keene
3 Algebraic (Analytic)
4 Numerical
5 Geometric (Graphical, Qualitative)
6 Allen
7 Boyce, DiPrima & Mitrea
8 Nonlinear Differential Equations

مناسب، به تعویق افتاد. شروع قرن بیستم برای معادلات دیفرانسیل، با ابداع رویکرد هندسی (گرافیکی، کیفی) حل معادلات دیفرانسیل آغاز شد (کاماچو[1]، ۲۰۱۲ و فردین‌پور، ۱۳۹۳ الف). هدف این رویکرد، به خصوص برای معادلات دیفرانسیل غیرخطی، درک رفتار کیفی جواب‌ها از دیدگاه هندسی است (فردین‌پور، ۱۳۹۴ و دانا-پیکارد[2]، ۲۰۰۸). این در حالی است که راسموسن[3] (۲۰۰۱)، رویکرد غالب را به آموزش معادلات دیفرانسیل در قرن بیست و یکم، تلفیقی از روش‌های جبری، عددی و گرافیکی می‌داند. در واقع، به باور راسموسن و وایتهد[4] (2003)، این تلفیق، معادلات دیفرانسیل را به صورت منبع باروری از مسائل جذاب و مهم در بحث سیستم‌های دینامیکی[5] با کاربردهای متنوع صنعتی کرده است. در نتیجه، به دلیل اهمیت رویکرد هندسی به حل معادلات دیفرانسیل، ضرورت انجام تحقیق برای روشن شدن ابعاد یادگیری و تدریس این رویکرد، مورد توجه واقع شده است. در همین راستا، ارسلان[6] (۲۰۱۰) یادآور شده است که تأکید رویکرد جبری به حل معادلات دیفرانسیل، کمتر مفهومی و بیشتر رویه‌ای[7] است و در آن، کاربست معادلات دیفرانسیل، مورد توجه جدی قرار نمی‌گیرد.

رویکرد هندسی، نتایجی از حل یک معادله دیفرانسیل را روشن می‌کند که ممکن است به وسیله فرمول‌های جبری پیچیده، در ابهام مانده باشد. در واقع حل مسئله در دنیای واقعی، معمولاً بر تحلیل مقدماتی برای تعیین ویژگی‌های کیفی جواب‌ها با رویکرد هندسی به عنوان راهنمای محاسبه، بررسی حالت‌های حدی خاص، یا کشف بُرد متغیرها و پارامترهای لازم استوار است (راسموسن و وایتهد، ۲۰۰۳). هم‌چنین، احساس نیاز به دلیل ضرورت ایجاد نوآوری در آموزش عالی و افزایش علاقه‌مندی به سیستم‌های دینامیکی، ماهیت آموزش معادلات دیفرانسیل نیز نیازمند تحول است (فردین‌پور و گویا، ۱۳۹۲). در حقیقت، تأکید بر معادلات دیفرانسیل غیرخطی، دستگاه معادلات دیفرانسیل و رویکردهای عددی و گرافیکی در مدل‌سازی ریاضی، اهمیت رویکرد هندسی یعنی تحلیل رفتار کیفی را به معادلات دیفرانسیل، بیشتر کرده است.

---

[1] Camacho
[2] Dana-Picard
[3] Rasmussen
[4] Rasmussen & Whitehead
[5] Systems of Differential Equations
[6] Arslan
[7] Procedural Learning

۲. پیشینه پژوهش

واکاوی چالش‌های مربوط به آموزش تحلیل رفتار کیفی معادلات دیفرانسیل خودگردان به منظور بررسی مشکلات مربوط به درک و فهم حل معادلات دیفرانسیل با رویکرد هندسی، هدف مشترک تحقیقات متعددی در دو دهه اخیر بوده است. در این راستا، راسموسن و وایتهد (۲۰۰۳) بر این نکته تأکید دارند که برای شناسایی جزئیات مربوط به چالش‌ها و مشکلات دانشجویان در درک رویکرد هندسی به حل معادلات دیفرانسیل، استفاده از مصاحبه‌های تکلیف-مدار، روش مؤثری است. به گفته آنان، اولین تحقیق در این زمینه و به روش مصاحبه تکلیف-مدار، در سال ۱۹۹۲، توسط میشل آرتیگ[1] در دانشگاه لیل در فرانسه با دانشجویان سال اول انجام شد. در این پژوهش، آرتیگ نزدیک سی و پنج ساعت آموزش معادلات دیفرانسیل مرتبه اول را به حدود ۳۰۰ دانشجو ارائه نمود و بعد از هر جلسه درس، چند جلسه کلاس حل تمرین/ تکلیف، با استفاده از کامپیوتر، برگزار می‌شد. تکلیف‌ها چنان تنظیم شده بودند که حل شدن هر یک، نیازمند تفسیر هم‌زمان راه‌حل جبری، راه‌حل هندسی و دیدن ارتباط بین آن‌ها بود. به طور مثال یکی از تکلیف‌ها از دانشجویان می‌خواست که هفت معادلات دیفرانسیل داده شده را با هفت نمودار منحنی‌های جواب، منطبق کنند و دلیل نظیرکردن هر معادله دیفرانسیل را با نمودار منحنی جواب آن، توضیح دهند. در این کلاس‌ها، تنها تعداد بسیار کمی از دانشجویان، موفق به تکمیل همه تکلیف‌ها شدند، اما پس از «مداخله آموزشی[2]»، تعداد آن‌ها افزایش چشمگیری یافت. آرتیگ، پیش‌نیازهای لازم را برای موفق شدن دانشجویان، به صورت زیر، فهرست نمود:

- ارتباط برقرار کردن بین علامت f در $dy/dt=f(y)$ با یکنوایی[3] منحنی‌های جواب
- ارتباط برقرار کردن بین ریشه‌های f و شیب‌های افقی
- ارتباط برقرار کردن بین حد نامتناهی f و شیب‌های عمودی
- ارتباط برقرار کردن بین مقدار f در نقاط خاص و شیب منحنی‌های جواب در آن نقطه
- شناخت راه‌حل‌های خاص در ارتباط با خطوط راست در محیط گرافیکی و بررسی آن‌ها با رویکرد جبری.

[1] Michelle Artigue
[2] Intervention
[3] Monotonicity

آرتیگ اظهار امیدواری کرده بودکه اگر همه دانشجویان، با این پیش‌نیازها از طریق حسابان آشنا شده باشند، می‌توان آن‌ها را به عنوان پایه‌ای برای استفاده از رویکردهای جبری و هندسی به آموزش معادلات دیفرانسیل، در نظر گرفت که در آن، هر معادله دیفرانسیل با نمودار منحنی‌های جواب متناظرش، مرتبط می‌شود.

پس از آرتیگ (۱۹۹۲)، زندیه و مک‌دونالد[1] (۱۹۹۹، نقل شده راسموسن و وایتهد، ۲۰۰۳)، به بررسی درک دانشجویان از جواب‌های تعادل و راه‌حل‌های معادلات دیفرانسیل پرداختند. آن‌ها با ۲۳ دانشجو از دو کلاس- یکی در یک دانشگاه بزرگ ایالتی در جنوب غرب آمریکا و دیگری در کالجی کوچک- مصاحبه کردند و علاوه بر سؤال‌هایی از قبیل «معادله دیفرانسیل چیست؟» و «جواب معادله دیفرانسیل یعنی چه؟»، تکلیف‌هایی نیز به مصاحبه‌شوندگان دادند تا انجام دهند. مانند پژوهش آرتیگ (۱۹۹۲)، یکی از تکلیف‌ها، ارتباط دادن معادلات دیفرانسیل با میدان‌های شیب نظیرشان بود. در تکلیف دیگری نیز، از دانشجویان خواسته شده بود که برای میدان شیب داده شده $dy/dt=y+1$، جواب‌هایی رسم کنند. مشابه یافته‌های تحقیقات قبلی، هفت نفر از ۲۳ دانشجو، درکشان از جواب‌های تعادل را به تمام متغیرهایی که در آن dy/dt برابر صفر می‌شوند، تعمیم داده بودند. وقتی از آن‌ها خواسته شده بود که تابع‌های جواب را رسم کنند، سه نفر از آنان موفق به رسم جواب تعادل $y(t)=-۱$ نشده بودند. پژوهشگران اظهار نمودند که بر خلاف انتظارشان که فکر می‌کردند درک دانشجویان از جواب‌های تعادل، زیر مجموعه‌ای از درکشان از راه‌حل‌های یک معادله دیفرانسیل است، چنین اتفاقی نیفتاد.

از این گذشته، یافته‌های پژوهش‌های راسموسن، زندیه و واورو[2] (۲۰۰۹) و کین، راسموسن و استفان[3] (۲۰۱۲)، نشان داد که درک وجود ارتباط بین ریشه‌های $f(y)=0$ و جواب‌های تعادل معادله دیفرانسیل خودگردان $dy/dt=f(y)$، از چالش‌های جدی دانشجویان در حل معادلات دیفرانسیل است.

راسموسن (۲۰۰۱) نیز در تحقیق دیگری، متوجه شد که با وجودی که بعضی دانشجویان عملیات را به درستی انجام می‌دهند، ولی در درک این ارتباط، با چالش‌های اساسی روبرو هستند. او با انجام مصاحبه‌های عمیق همراه با «بلند فکر کردن[4]»، جزئیات بیشتری درباره مشکلات ناپیدای دانشجویان دراین رابطه، به دست آورد. وی در تحقیق خود، با شش دانشجوی درس معادلات دیفرانسیل، مصاحبه‌های تکلیف-مدار انجام داد. در یکی از مصاحبه‌ها، هشت

[1] Zandieh & McDonald
[2] Rasmussen, Zandieh & Wawro
[3] Keene & Rasmussen & Stephan
[4] Think aloud

معادله دیفرانسیل به دانشجویان داده شد که برای چهار معادله دیفرانسیل، میدان شیب و برای چهار تای دیگر، میدان شیب داده نشده بود. مصاحبه بر مبنای این تکلیف بود که از دانشجویان خواسته شد که چهار معادله دیفرانسیلی را که میدان شیب آن‌ها داده نشده بود، با میدان‌های شیب نظیرشان در چهار معادله دیگر، منطبق کنند. تجزیه و تحلیل مصاحبه‌ها معلوم کرد که تمام دانشجویان، با استفاده از پیش‌نیازهایی که آرتیگ (۱۹۹۲) مطرح کرده بود، در انجام این تکلیف موفق شدند. این در حالی بود که اشتباهات آن‌ها، قابل تأمل بود. مثلاً هنگام روبرو شدن با معادلات دیفرانسیل $dy/dt=y-t$ و $dy/dt=t+1$، بیشتر دانشجویان $y=t$ و $t=-1$ را به عنوان جواب‌های تعادل معرفی کرده و این اشتباه را هنگام منطبق کردن معادلات دیفرانسیل با میدان‌های شیب، به عنوان یک معیار در نظر گرفته بودند. یا این که سه نفر از آن‌ها، درک نادرستی از جواب‌های تعادل داشتند و تصور می‌کردند «جواب‌های تعادل زمانی وجود دارند که معادلات دیفرانسیل صفر باشد» و توجه نکرده بودند که این گزاره، فقط برای معادلات دیفرانسیل خودگردان درست است و در حالت کلی، درست نیست. راسموسن (۲۰۰۱) نتیجه گرفت که درک این دانشجویان، نشان‌دهنده تعمیم نادرستی از تحلیل رفتار کیفی به معادلات دیفرانسیل غیر-خودگردان بود. وی هم‌چنین، بیان نمود که احتمالاً، ریشه این مشکل در این است که دانشجویان، راه حل یک معادله دیفرانسیل را تنها به عنوان پیدا کردن تابعی بدانند که در آن معادله دیفرانسیل، صدق می‌کند. حدس دیگر وی به تجربه‌های آموزشی دانشجویان از ریاضی برمی‌گردد که عادت کرده‌اند که جواب هر مسئله ریاضی، یک عدد باشد، در صورتی که جواب یک معادله دیفرانسیل، یک تابع است. در واقع «y » در یک معادله دیفرانسیل، هم معرف یک تابع مجهول به عنوان پاسخ معادله دیفرانسیل است و هم نشان‌دهنده یک متغیر در خود معادله دیفرانسیل است. حدس دیگری که راسموسن برای این بدفهمی ارائه داد، به درک جواب‌های تعادل که هم‌زمان در $dy/dt=0$ و $f(y)=0$ صدق می‌کنند، بود. به گفته وی، از یک سو دانشجویان اغلب مشتق را عددی مربوط به شیب خط تانژانت در یک نقطه می‌دانند و از سوی دیگر، نقاط تعادل ریشه‌های $f(y)=0$، به عنوان چیزی که مشتق در آنجا صفر می‌شود، معرفی می‌شوند. پس طبیعی است که بعضی دانشجویان، نقاط تعادل را مقادیری ثابت بدانند و توجه نکنند که نقاط تعادل، در واقع توابعی با مقدار ثابت هستند که در معادله دیفرانسیل، صدق می‌کنند (راسموسن، ۲۰۰۱).

در تکلیف دیگری، راسموسن (2001) یک معادله دیفرانسیل خودگردان و نمودار مربوط به آن را به دانشجویان داد و سه سؤال زیر را، مطرح نمود:

۱. جواب‌های تعادل چیست؟

۲. کدام‌یک از جواب‌های تعادل، پایدار و کدام‌یک ناپایدارند؟
۳. حد جمعیت با شرایط اولیه N(۰)=۲، N(۰)=۳ و N(۰)=۷ چیست؟

در این پژوهش، شش نفر مصاحبه‌شونده به سؤال اول و دوم پاسخ درست دادند، اما چهار نفر نتوانستند به سؤال سوم پاسخ دهند. این اتفاق به این دلیل تعجب‌آور بود که دانشجویان، عموماً برای پاسخ دادن به دو سؤال اول، منحنی‌های جوابِ تقریباً درستی رسم کرده بودند که برای پاسخ دادن به سؤال سوم، کافی به نظر می‌رسید.

سؤال راسموسن (2001) این بود که چرا دانشجویان که به سؤال‌های اول و دوم پاسخ درست داده بودند، از دیدن ارتباط بین منحنی‌های جوابی که خودشان رسم کرده بودند و جواب سؤالی که رفتار بلندمدت جمعیت را با شرایط اولیه داده شده از روی همان منحنی‌های جواب پیش‌بینی می‌کرد، ناتوان بودند؟ طی مصاحبه با دانشجویان، پژوهشگر دریافت که به تصور آن‌ها، منحنی‌های جوابی که خودشان رسم کرده بودند را جواب معادله دیفرانسیل نمی‌دیدند. برای نمونه، یکی از دانشجویان ابراز کرده بود که او، منحنی‌ها را «فقط برای بررسی پایداری» رسم کرده بود که نشان می‌داد درک وی از رویکرد هندسی، به تشخیص پایداری یا ناپایداری پاسخ‌ها محدود بوده و درک ناقصش از منحنی‌هایی که رسم کرده بود، مانع از این شده بود که آن‌ها را به عنوان جواب‌ها و راه‌حل‌های معادلات دیفرانسیل در نظر بگیرد.

در مجموع، یافته‌های تحقیقی با تمرکز بر درک دانشجویان از تحلیل رفتار کیفی معادلات دیفرانسیل، نشان می‌دهند که رویکرد هندسی نیز به تنهایی، باعث ارتقای درک مفهومی دانشجویان از معادلات دیفرانسیل نمی‌شود. در رویکردهای سنتی هم اشکال اصلی این است که دانشجویان، اغلب یک سری تکنیک‌های جبری و تحلیلی را یاد می‌گیرند (فردین‌پور، ۱۳۹۳ پ)، بدون این که ارتباطات مهم و معانی مفهومی مهم حل معادلات دیفرانسیل را درک کرده باشند (Arsalan, 2010). از طرف دیگر، همین اتفاق ممکن است با استفاده از رویکرد هندسی به حل معادلات دیفرانسیل نیز اتفاق بیافتد. بدین سبب پژوهشگران متعددی از جمله راسموسن (2001) ، راسموسن و وایتهد (2003)، ارسلان (2010) و فردین پور (۱۳۹۴ ب)، در قرارگاه‌های متنوع تحقیقی، به این نتیجه رسیده‌اند که دست‌ورزی با تکنیک‌های جبری و تحلیلی بدون درک رویکرد هندسی، ممکن است به عدم درک رویکرد جبری بیانجامد. در این رابطه، راسموسن و وایتهد (2003) معتقدند که آن‌چه یک دانشجو تصور نموده یا استدلال می‌کند، بیشتر مبتنی بر میزان درک شناختیِ فردی وی از ریاضی است که آن هم، بازتابی از تجارب آموزشی وی است، مثل این که پاسخ مسئله‌های ریاضی، اشیای ریاضی از قبیل عدد هستند که با دست‌ورزی‌های نمادین یا تحلیل‌های جبری، همراه است. پس اگر از دانشجویان، به طور مداوم توضیح و استدلال کردن از نتیجه‌گیری‌ها خواسته نشود، قابل انتظار است که بیشتر آن‌ها، تحلیل

رفتار کیفی معادلات دیفرانسیل را به صورت رویه‌ای و گام به گام انجام دهند و ارتباط آن را با سایر رویکردهای حل معادلات دیفرانسیل، درنیابند. در نتیجه، ممکن است ندیدن این ارتباط، مانعی برای استفاده از تحلیل رفتار کیفی معادلات دیفرانسیل و بازنمایی گرافیکی دسته منحنی‌های جواب برای درک راه حل‌های معادلات دیفرانسیل به صورت دسته توابع، باشد.

به سبب اهمیت شناخت درک دانشجویان از بازنمایی‌های دیداریِ راه‌حل‌های معادلات دیفرانسیل، هِیبِر (۲۰۱۳ a) به بررسی این موضوع پرداخت. داده‌های این مطالعه، شامل مشاهدات کلاسی و کارگاهی، تمرین‌ها و امتحان‌های دانشجویان و مصاحبه با هشت نفر از آن‌ها بود. یکی از سؤال‌های مصاحبه، در مورد برداشت دانشجویان از مفهوم راه حل یک معادله دیفرانسیل بود و از آن‌ها پرسیده شد که «وقتی از شما خواسته می‌شود یک معادله دیفرانسیل را حل کنید، چه چیزی به ذهنتان می‌آید»؟ پاسخ‌های اولیه در تمام مصاحبه‌ها، نشان داد که دانشجویان، بیشتر به راه‌حل‌های جبری فکر می‌کردند. هِیبِر (۲۰۱۳ a) خاطرنشان نموده که با این که مقدار قابل توجهی از وقت کلاس، صرف یادگیری رویکرد هندسی متکی بر تکنولوژی و در خصوص میدان‌های برداری و سایر بازنمایی‌های گرافیکی شده بود، اما هم‌چنان درک دانشجویان از راه‌حل و پاسخ یک معادله دیفرانسیل، رویکرد جبری بود که تحقیق بعدی وی نیز، تأییدی بر این ادعا شد (۲۰۱۳ b). با وجود چنین باوری، درک تحلیل رفتار کیفی معادلات دیفرانسیل در بین دانشجویان، به عنوان یک پاسخ و راه‌حل، دشوار است زیرا باورها در مقابل تغییر، مقاوم‌اند.

۳. روش‌شناسی پژوهش

هدف این پژوهش، شناخت عمیق‌تر چگونگیِ فهم و درک دانشجویان و چالش‌های آنان، در رابطه با رویکرد هندسی به حل معادلات دیفرانسیل بود. پس با توجه به ماهیت و هدف این پژوهش، از روش تحقیق کیفی استفاده شد (شونفیلد[1]، ۲۰۰۰). بنا به اظهار چارماز[2] (۲۰۰۶)، در روش‌های کیفی برخلاف کمی، غنای یافته‌ها به جای تعداد، از طریق تنوع داده‌ها، مدت و عمق مصاحبه‌ها، و نوع تجزیه و تحلیل آن‌هاست.

تجربه سال‌ها تدریس معادلات دیفرانسیل توسط نویسنده اول و مطالعه پیشینه پژوهشی در آموزش رویکرد هندسی حل معادلات دیفرانسیل، پژوهشگران را به این جمع‌بندی رساند که مهم‌ترین چالش‌ها برای آموزش رویکرد هندسی، به شرح زیرند:

[1] Schoenfeld
[2] Charmaz

- درک رابطه بین ریشه‌های $f(y)=0$ و جواب‌های تعادل $dy/dt=f(y)$
- درک نقش دوگانه y
- درک ارتباط بین علامت $f(y).f'(y)$ و جهت تقعر منحنی‌های جواب
- درک شرایط اولیه برای پیش‌بینی رفتار بلند مدت معادلات دیفرانسیل
- درک اهمیت رویکرد هندسی حل معادلات دیفرانسیل خودگردان.

داده‌های این پژوهش، از طریق مصاحبه‌های تکلیف- مدار[1] جمع‌آوری شدند و برای این کار، بر اساس چالش‌های شناسایی شدۀ آموزش رویکرد هندسی در پیشینه پژوهش، سه تکلیف از کتاب بویس، دیپریما و میتِرا (۲۰۱۰)، استخراج، و برای این مطالعه تنظیم شدند (پیوست الف). پس از اجرای مقدماتی و مشورت با چند ریاضی‌دان که معادلات دیفرانسیل را به عنوان یک درس عمومی، برای دانشجویان رشته‌های علوم پایه و علوم مهندسی تدریس کرده بودند، این سه تکلیف با اندکی جرح و تعدیل، نهایی شدند.

شرکت‌کنندگان در این پژوهش، نُه دانشجوی پسر و هشت دانشجوی دخترِ رشته‌های علوم پایه و مهندسی از سه دانشگاه دولتی بودند که همگی، داوطلبانه با محققان همکاری کردند. دانشجویان به صورت انفرادی مصاحبه شدند. قبل از هر مصاحبه، نویسنده اول حدود بیست دقیقه با دانشجوی مصاحبه شونده راجع به رویکرد هندسی حل معادلات دیفرانسیل بحث کرده و جدول راهنمای انجام رویکرد هندسی را در اختیار دانشجو قرار می‌داد. هیچ یک از مصاحبه-شوندگان از قبل، با این رویکرد و چرایی استفاده از آن آشنا نبودند. در حین مصاحبه، از دانشجویان خواسته شد که از روش بلند فکر کردن[2] استفاده کنند. تمام مصاحبه‌ها به جز یکی، با رضایت مصاحبه‌شوندگان، ضبط شنیداری شدند. در آن یک مورد هم، مصاحبه‌شونده تمایل نداشت و به این دلیل، توسط مصاحبه‌کننده- نویسنده اول مقاله- آن مصاحبه یادداشت‌برداری شد. تمام مصاحبه‌های انجام شده کلمه به کلمه[3] پیاده و بعد، کدگذاری شدند. کمترین زمان مصاحبه ۳۸ دقیقه و بیشترین زمان، ۵۶ دقیقه بود. هم‌چنین، موقع ارجاع به بخش‌هایی از مصاحبه‌ها، برای مصاحبه‌کننده/ پژوهشگر از «م» و برای تمام مصاحبه‌شونده‌ها، از «د» استفاده شد. علت این است که مصاحبه‌هایی که در بخش تحلیل به آن‌ها ارجاع داده شده، همگی

۱Task Based Interview
۲ Thinking Loudly
3 Verbatim

«معرف[1]» هستند و در نتیجه، نیازی به تفکیک دانشجویان نبود. با این حال، هر وقت از مورد ویژه‌ای[2] استفاده شده، به ویژگی‌های آن اشاره شده است.

۴. یافته‌های پژوهش

در این بخش، نتایج حاصل از تجزیه و تحلیل داده‌های جمع‌آوری شده از طریق مصاحبه‌های تکلیف- مدار، ارائه می‌شود.

دانشجویان برای حل $f(y)=0$ و به دست آوردن نقاط تعادل برای تکلیف‌های یک و دو، با چالش عمده‌ای روبرو نشدند و از ۱۳ دانشجو، تنها سه نفر در به دست آوردن نقاط تعادل، مشکل داشتند. در صورتی که بیشتر دانشجویان در رابطه با تکلیف سوم، و به دست آوردن نقاط تعادل و حل $f(y)=0$، مشکل داشتند. مصاحبه‌ها معلوم کرد که علت اصلی مشکل آن‌ها، پارامتریک بودن معادله دیفرانسیل $dy/dt=ay-b\sqrt{y}$[3] مربوط به تکلیف سوم بود که در دو تکلیف اول و دوم، چنین نبود. به عنوان مثال، یکی از دانشجویان برای به دست آوردن ریشه‌های $f(y)=0$ در معادله دیفرانسیل پارامتریک $dy/dt=ay-b\sqrt{y}$، مقادیر $y=\pm b/a$ را به عنوان نقاط تعادل حاصل از حل $f(y)=0$ معرفی نمود (شکل ۱). در صورتی که $y=+b/a$ و $y=-b/a$، هیچ‌کدام در معادله دیفرانسیل تکلیف سوم، صدق نمی‌کردند. جواب تعادل $y=0$ نیز که یکی از نقاط حاصل از حل $f(y)=0$ است، توسط وی نادیده گرفته شده بود.

$$f(y)=\frac{dy}{dt}=ay-b\sqrt{y} \qquad f(y)=0 \Rightarrow ay-b\sqrt{y}=0 \rightarrow ay=b\sqrt{y} \Rightarrow a^2y^2=b^2y \rightarrow$$

$$\frac{y^2}{y}=\frac{b^2}{a^2} \Rightarrow y=\frac{b^2}{a^2} \Rightarrow y=\pm\frac{b}{a}$$

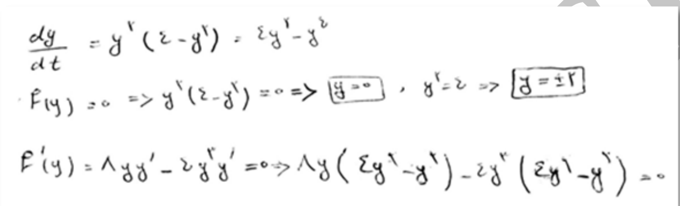
شکل ۱: به دست آوردن مقادیر $y=\pm b/a$ به عنوان ریشه‌های $f(y)=0$

درک وجود ارتباط بین ریشه‌های $f(y)=0$ و جواب‌های تعادل معادله دیفرانسیل خودگردان $dy/dt=f(y)$، چالش دیگری بود که بین تعداد ریشه‌ها و تعداد جواب‌های تعادل، پررنگ‌تر دیده شد. از بین هفده مصاحبه انجام شده، شش مورد (تکلیف اول؛ ۲ مورد، تکلیف

[1] Representative
[2] Idiocyncratic

[3] در این معادله، $\sqrt{y}$ همان رادیکال y است.

دوم؛ ۱ مورد و تکلیف سوم؛ ۳ مورد) با عدم همانگی بین تعداد ریشه‌ها و تعداد جواب‌های تعادل، همراه بود. در واقع، همان‌طور که راسموسن (۲۰۰۱) نیز دریافته بود، دانشجویان در تفسیر یک مقدار ثابت به عنوان یک تابع، با چالش روبرو بودند. کین، راسموسن و استفان (۲۰۱۲) نیز با ردیابی دوباره این چالش در مصاحبه‌های تکلیف- مدار خود، متوجه شدند که بسیاری از دانشجویان، جواب‌های تعادل را به عنوان نقاطی که در آن‌ها مشتق صفر است، در نظر گرفته بودند، نه آن که جواب‌های تعادل را به عنوان توابعی با مقادیر ثابت در نظر بگیرند که در معادله دیفرانسیل، صدق می‌کنند. شکل ۲ که مربوط به تکلیف اول است، چالش مصاحبه‌شونده را برای درک نقش دوگانه y رویکرد هندسی، نشان می‌دهد.


$$\frac{dy}{dt} = y^2(4-y^2) = 4y^2 - y^4$$
$$f(y)=0 \Rightarrow y^2(4-y^2)=0 \Rightarrow \boxed{y=0}\ ,\ y^2=4 \Rightarrow \boxed{y=\pm 2}$$
$$f'(y) = 8yy' - 4y^3y' = 0 \Rightarrow 8y(4y^2-y^4) - 4y^3(4y^2-y^4) = 0$$

شکل ۲: نادیده گرفته شدن نقش y به عنوان متغیر موقع محاسبه مشتق $f(y)$

بررسی فرایند مصاحبه تکلیف- مدار مربوط به راه حلی که در شکل ۲ ارائه شده، ماهیت چالش دانشجو را با نقش دوگانه y در این رویکرد، آشکار می‌کند. لازم به توضیح است که با هر مصاحبه‌شونده، راجع به تفاوت «بلند فکرکردن» در حین انجام تکلیف و «توضیح دادن» بعد از انجام آن، بحث شد و با انجام چند نمونه، وجه تمایزشان روشن شد.

م: می‌شه موقع حل مسئله، با صدای بلند فکر کنین؟

د: از $f(y)$ مشتق می‌گیرم.

م: چطوری؟

د: اول y^2 را در داخل پارانتز ضرب می‌کنم و بعد مشتق می‌گیرم.

م: و بعد. . . ؟

د: خب y^2 در چهار، می‌شه $4y^2$. که اگه ازش مشتق بگیرم، می‌شه $8yy'$. y^2 در y^2 هم می‌شه y^4 که اگه از اونم مشتق بگیرم، می‌شه $4y^3y'$.

م: این y'ها از کجا آمدن؟

د: قاعده مشتق‌گیری $(u^n)'=nu^{(n-1)}u'$.

م: y' چیه؟

د: [سکوت]

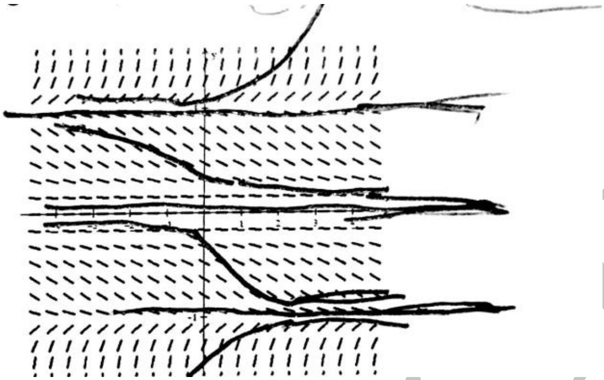
م: در اینجا، y یه تابعِ یا یه متغیر؟

د: یه تابع.

این مصاحبه نشان داد که این دانشجو، برای y نقشی به عنوان یک متغیر قائل نیست. این چالش به ناتوانی وی در درک این مطلب مربوط می‌شد که در رویکرد هندسی حل معادلات دیفرانسیل، y نقش دوگانه‌ای بازی می‌کند؛ گاهی y به عنوان یک متغیر مستقل، ریشه‌های $f(y)=0$ است و در همان حال، متغیر وابسته‌ای است که به عنوان یک تابع، در $dy/dt=0$ صدق می‌کند (فردین‌پور، ۱۳۹۴ ب). یعنی با وجودی که y یک تابع مجهول است که از حل $dy/dt=f(y)$ به دست می‌آید، اما برای رسم نمودار $f(y)$، باید به y، نقش متغیر مستقل داده شود که در این نقش، y دیگر تابع نیست و نباید با قاعده $(u^n)'=nu^{(n-1)}u'$، از آن مشتق گرفته شود و چالش اصلی، از اینجا شروع شد. مصاحبه‌ها معلوم کرد که اگرچه این دانشجو عملیات مشتق‌گیری را به خوبی می‌دانست، ولی چالش پیشِ روی وی، ریشه در درک نقش دوگانه y داشت. مثلاً در نمونه بالا، وقتی مصاحبه‌کننده برای دانستن این که آیا دانشجو می‌داند که اگر y تابع نباشد، پس نیازی هم به مشتق‌گیری نیست، از وی پرسید که «y' چیه؟» و دانشجو بلافاصله، به جای y' عبارت $4y^3-y^4$ را قرار داد که این جایگزاری، تأیید دوباره‌ای بر این حدسیه بود که او، نقش y را به عنوان یک متغیر، نادیده گرفته بود و البته، استفاده از قاعده $(u^n)'=nu^{(n-1)}u'$ نیز، مؤید همین بود. وقتی هم که در آخر مصاحبه، از دانشجو پرسیده شد که «اینجا y یک تابع است یا متغیر؟»، پاسخ صریح وی که «تابع» است، جای شکی نسبت به وجود این چالش، باقی نگذاشت.

با وجود منحصربه‌فرد بودن این مصاحبه، طرح آن در این مقاله، اهمیت زیادی دارد، زیرا اگرچه در پیشینه پژوهشی، به درک نقش دوگانه y به عنوان یک چالش جدی اشاره شده، ولی آن چالش توسط راسموسن (2001)، در قبال تعمیم نادرست جواب‌های تعادل به معادلات دیفرانسیل غیر-خودگردان مطرح شده بود. در حالی که در این نمونه، همان چالش در محاسبه مشتق y مورد بررسی قرار گرفت و بُعد دیگری به یافته‌های پژوهشی در این حوزه افزود. این مصاحبه نشان داد که چالش‌های درک رویکرد هندسی، می‌توانند ظاهری متفاوت داشته باشند، اما دو روی یک سکه‌اند. به این معنا که در پسِ بسیاری از پاسخ‌های به ظاهر درست، ممکن است یک چالش مفهومی وجود داشته باشد که منجر به بروز یک چالش جدی آموزشی شود.

تجزیه و تحلیل داده‌ها مشخص نمود که یکی دیگر از چالش‌های آموزش رویکرد هندسی به معادلات دیفرانسیل، مربوط به رسم منحنی‌های جواب است.



شکل۳: منحنی‌های جواب رسم شده روی میدان معادله دیفرانسیل $dy/dt=y^2(y^2-1)$

در ادامه، به یک بخش از یک مصاحبه معرف که در ارتباط با تصویر بالاست، اشاره می‌شود تا ماهیت چالش دانشجویان در رابطه با رسم منحنی‌های جواب، بهتر معلوم شود.

م: در این میدان شیب، چند جواب تعادل وجود دارد؟

د: سه تا.

م: از حل $f(y)=0$، چند ریشه به دست آمده؟

د: سه تا.

م: آیا بین تعداد جواب‌های تعادل و تعداد ریشه‌های $f(y)=0$، همیشه تناظر یک به یک وجود دارد؟

د: بله! چون $f(y)$ برابر dy/dt است. پس ریشه‌های $f(y)=0$ برابر جواب‌های $dy/dt=0$ است. یعنی چیزی که $f(y)$ را صفر می‌کند، dy/dt را هم صفر می‌کند.

م: آیا منحنی‌های جوابی که قبلا رسم کردین، با منحنی‌های جوابی که روی میدان شیب رسم کردین، مطابقت داره؟

د: تقریباً! $y=1$ درسته و ناپایداره. اما $y=0$ باید نیمه‌پایدار باشه، ولی مجانبی پایدار شده. $Y=-1$ هم باید مجانبی پایدار باشه، اما ناپایدار شده.

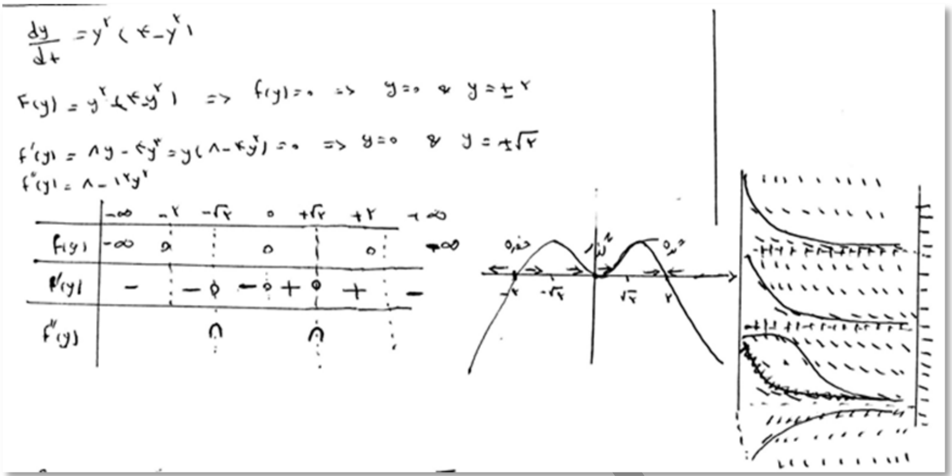
م: فکر میکنین چرا نوع جواب‌های تعادل $y=0$ و $y=-1$ که قبلاً رسم کردین، درست نیستن؟ مگه منحنی‌های جواب رو بر اساس خط فاز رسم نکردین؟

د: بر اساس خط فاز رسم کردم؟ نمی‌دانم! شاید خط فاز درست نباشه.

بعد از این که دانشجو به این نتیجه رسید که علت عدم تطابق منحنی‌های جوابی که در قسمت الف تکلیف رسم کرده، با منحنی‌های جوابی که روی میدان شیب رسم کرده، درست تنظیم نشدن خط فاز بوده، این موضوع مورد بحث واقع شد. بعد با سؤال و جواب‌های متوالی، این نتیجه به دست آمد که علت درست تنظیم نشدن خط فاز، عدم تنظیم درست جدول تعیین علامت بوده است. بالاخره او به علامت y^2 در جدول تعیین علامت توجه نمود که علامت y^2 که باید همواره مثبت باشد، در حالی که مانند علامت y تعیین علامت شده بود. با ادامه بحث، معلوم شد که این مورد، یکی از چالش‌های دانشجو در استفاده از رویکرد هندسی به حل معادله دیفرانسیل $dy/dt=y^2(y^2-1)$ بود و دانشجو هم به این درک درست رسید که اگر $f(y)$ به درستی تعیین علامت نشود، جهت پیکان‌های روی خط فاز، و به تبع آن، صعودی یا نزولی بودن منحنی‌های جواب نیز، درست تعیین نخواهد شد. در واقع، این یافته برای پژوهشگران مهم بود که تعیین علامت $f(y)$، نقش کلیدی در تحلیل رفتار کیفی یک معادله دیفرانسیل خودگردان، بازی می‌کند. از این رو درک رابطه بین علامت $f(y)$ و یکنوایی منحنی‌های جواب، به عنوان یکی از چالش‌های آموزش رویکرد هندسی شناخته شد. ذکر این نکته واجب است که از بین ۱۷مصاحبه‌شونده، فقط یک نفر موفق شد که منحنی‌های جوابی مطابق با میدان شیب، به دست آورد. اگرچه همان یک نفر هم، با مداخله آموزشی توانست این کار را بکند.

از این گذشته، تحلیل بخشی از داده‌ها نشان داد که یکی دیگر از چالش‌ها، مربوط به تنظیم خط فاز بود. این چالش‌ها که مربوط به تبدیل کردن محور افقی به خط فاز عمودی بودند، به سه دسته تقسیم شدند. دسته اول به تعیین علامت نادرست، دسته دوم به چرخش نادرست محور افقی و دسته سوم به قرار دادن خط فاز در سمت چپ دستگاه $[t, y(t)]$ مرتبط بودند. از بین ۱۷ شرکت‌کننده در این پژوهش، ۱۶ نفر خط فاز را درست تنظیم نکردند و از بین این‌ها، هشت نفر به خاطر تعیین علامت نادرست یا رسم نادرست $f(y)$، شش نفر به خاطر چرخش در جهت ساعتِ خط فاز و دو نفر هم به خاطر قرار دادن خط فاز در سمت چپ منحنی‌های جواب، در تنظیم خط فاز با چالش روبرو شده بودند.

برای مثال، بعضی از مشکلات، ناشی از این بود که دانشجویان، در شکل ۴، محور افقی را به جای دَوَران ۹۰ درجه‌ای در خلاف جهت گردش ساعت، در جهت چرخش گردش ساعت دوران داده بودند (شکل ۴).



شکل۴: پاسخ به رویکرد هندسی حل معادله دیفرانسیل $dy/dt=y^2(4-y^2)$

برای شناخت عمیق‌تر این مشکل، بخشی از مصاحبه در رابطه با شکل ۴، آمده است.

م: با توجه به منحنی‌های جواب که رسم کردین، چندتا جواب تعادل وجود داره؟

د: سه تا.

م: می‌شه مقادیر جواب‌های تعادل رو مشخص کنین؟

د: مقادیر جواب‌های تعادل؟!

م: بله! مگه جواب‌های تعادل همون نقاط تعادل نیستن؟ چندتا نقطه تعادل دارین؟ مقادیر نقطه‌های تعادل چیه؟

د: ۰ و به‌علاوه و منهای ۲ [با دست، نقاط تعادل حاصل از حل $f(y)=0$ را نشان داد.]

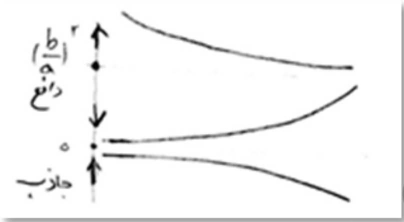
م: خوب! الان، مثلاً ۲ که یک نقطه تعادله، نظیر کدام‌یک از این سه جواب تعادل در بین منحنی‌های جوابه؟ [مصاحبه‌کننده، محنی‌های جواب را با دست نشان داد.]

د: این [در حالی که با دست، جواب تعادل مجانبی پایدار را نشان داد.]

این پاسخ نشان می‌دهد که این دانشجو، نقطه تعادل $y=2$ را نظیر جواب تعادلی مجانبی پایدار گرفته است. یعنی دانشجو با چرخش ۹۰ درجه‌ایِ محور افقی در جهت چرخش ساعت که جهتی نادرست است، خط فاز عمودی را به دست آورد. این دانشجو، به ویژگی‌های جواب‌های

تعادل شامل تعداد، محل و نوع آن‌ها، یعنی مجانبیِ پایدار، ناپایدار و نیمه‌پایدار بودن جواب‌های روی خط فاز، توجه نکرده بود.

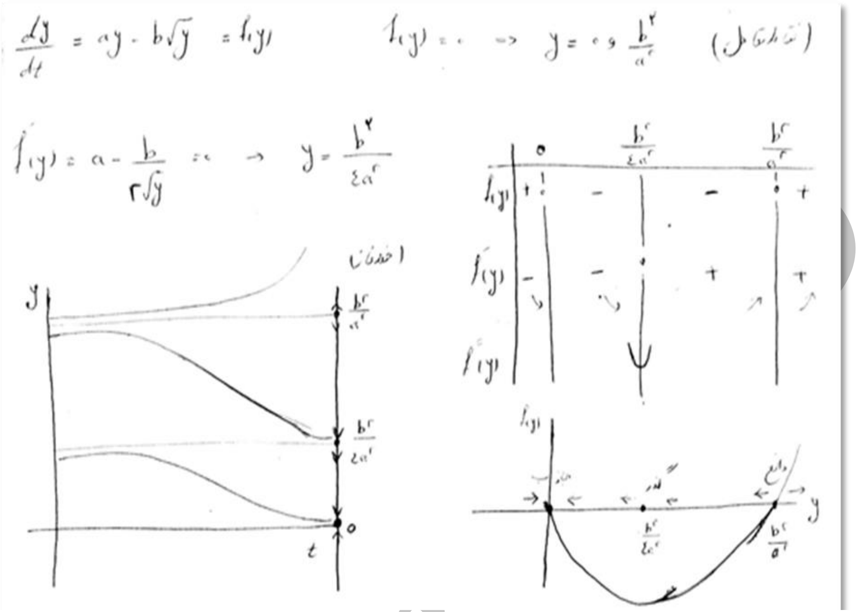
هم‌چنین، این مصاحبه و منحنی رسم‌شده توسط مصاحبه‌شونده، روشن کرد که علاوه بر چرخش در جهتی نادرست، گاهی خط فاز در مکانی نادرست نسبت به دستگاه [t, y(t)] قرار گرفته بود که گاهی همین امر، باعث بروز چالش برای دانشجویان می‌شود. شکل ۵، خط فاز عمودی نسبت به دستگاه [t, y(t)] را نشان می‌دهد که در مکانی نادرست قرار گرفته است.



شکل ۵: قرار گرفتن خط فاز در سمت چپ منحنی‌های جواب

در شکل ۵، خط فاز به جای این که در سمت راست منحنی‌های جواب باشد، در سمت چپ آن‌ها قرار گرفت و باعث شد که برچسب‌گذاری جواب‌های تعادل، به درستی انجام نشود.

منشأ یکی دیگر از چالش‌های درک رویکرد هندسی حل معادلات دیفرانسیل خودگردان، ناتوانی در درک وجود هماهنگی بین تعداد نقاط تعادل حاصل از حل f(y)=0 با تعداد نقاط تقاطع نمودار f(y) با محور افقی بود. تحلیل داده‌های این مطالعه نشان داد که برای دانشجویان، درک این که نقاط تقاطع نمودار f(y) با محور افقی، دقیقاً مشخص‌کننده همان نقاط تعادل‌اند، یک چالش جدی بود.

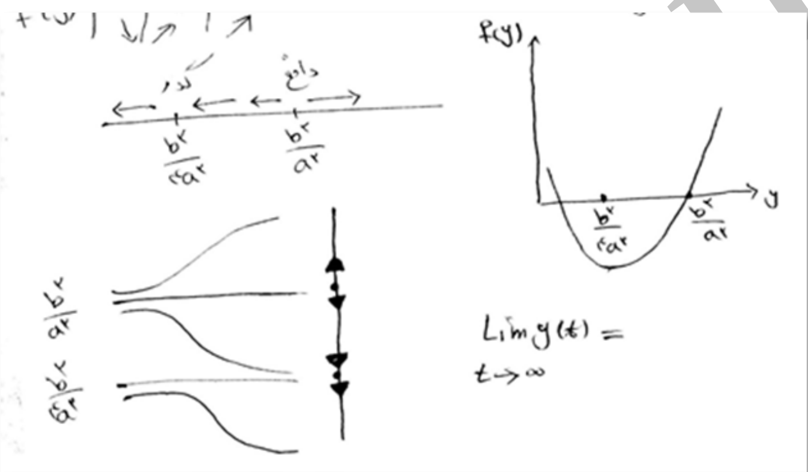


شکل ۶: عدم هماهنگی بین تعداد ریشه‌های حاصل از حل $f(y)=0$ با تعداد نقاط تعادل

عدم درک وجود ارتباط بین دستگاه‌های $[y, f(y)]$ و $[t, y(t)]$ نسبت داده بود. به عنوان نمونه در مثال‌های زیر، بین تعداد نقاط تعادل حاصل از حل $f(y)=0$ با تعداد نقاط تقاطع نمودار $f(y)$ با خط فاز افقی، هماهنگی وجود ندارد. در شکل 6، دو نقطه تعادل $y=0$ و $y=b^2/a^2$ از حل $f(y)=0$ حاصل شده‌اند، در صورتی که سه نقطه $y=b^2/(4a^2)$، $y=0$ و $y=b^2/a^2$ ، به عنوان نقاط تعادل در محور افقی مشخص شده‌اند. در شکل ۶ و شکل ۷، نقطه $b^2/(4a^2)$ که در واقع یک نقطه اکسترمم نمودار $f(y)$ است، به عنوان یک نقطه تعادل در نظر گرفته شده است. هر دو نفری که این دو راه حل را ارائه دادند، بیان کردند که به نظر آن‌ها، «همواره نقاط اکسترمم تابع، از اهمیت خاصی برخوردار بوده است». بدین سبب نقطه اکسترمم نمودار $f(y)$ را نیز، یک نقطه تعادل در نظر گرفته بودند. توجه به تعداد جواب‌های تعادل و درک وجود و هماهنگی بین تعداد ریشه‌های $f(y)=0$، تعداد نقاط تقاطع نمودار $f(y)$ با محور افقی و تعداد

نقاط تعادل روی خط فاز، به عنوان یک چالش در آموزش رویکرد هندسی حل معادلات دیفرانسیل شناسایی شد.

در رسم منحنی‌های جواب در دستگاه $[t,y(t)]$، گاهی دانشجویان به طور مفروض، کرانی برای منحنی‌های جواب در نظر می‌گیرند که بیانگر ارتباط بین حد نامتناهی f و شیب عمودی است. در شکل ۷، منحنی جواب رسم شده در بازه $y>b^2/a^2$، می‌بایست مطابق جهت پیکانِ روی خط فاز، صعودی و بیکران رسم می‌شد. اما کران بالای مفروضی برای این منحنی جواب، در نظر گرفته شده بود.



شکل7: پاسخی به رویکرد هندسی حل معادله دیفرانسیل $dy/dt=ay-b\sqrt{y}$

بخشی از مصاحبه‌ای که در ادامه می‌آید، جزئیات مربوط به شکل ۷ را روشن‌تر می‌کند.

م: پیش‌بینیِ شما برای رفتار بلندمدتِ بازه $y>b^2/a^2$ چیست؟

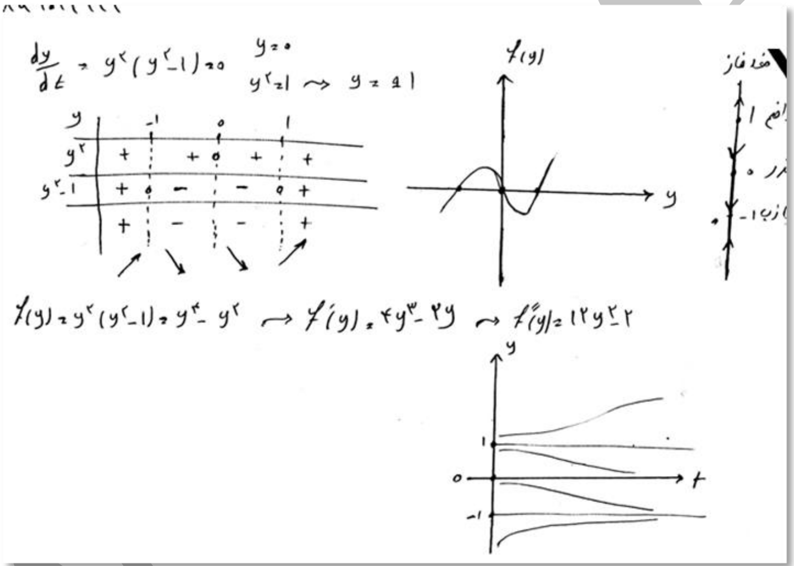
د: اینجا باید یه مقداری باشه [با دست به نقطه‌ای روی خط فاز، بالاتر از b^2/a^2 اشاره می‌کند. به نظر می‌رسد انتظار دارد مقدار حد، مقداری متناهی باشد.]

م: می‌شه حد، بینهایت بشه؟

د: نه! جمعیت ماهی‌ها که نمی‌تونه نامحدود افزایش پیدا کنه. محدودیت غذا و فضا وجود داره.

تجزیه و تحلیل این مصاحبه معلوم کرد که این دانشجو، انتظار نداشت که جواب حد، بینهایت باشد. در شکل ۷، منحنی جواب رسم شده در بازه $y>b^2/a^2$ نیز می‌بایست مطابق جهت

پیکانِ روی خط فاز، نزولی و بیکران رسم می‌شد. اما کران پایین مفروضی نیز، برای این منحنی جواب در نظر گرفته شده بود. به باور این دانشجو، همواره باید منحنی‌های جواب به گونه‌ای باشند که به یک خط افقی، مجانب شوند. در اینجا دانشجو با استناد به معادله دیفرانسیل مربوط به لجستیک جمعیت ماهی‌ها، معتقد بود که «جمعیت ماهی‌ها نمی‌تواند به طور نامحدود افزایش پیدا کند و محدودیت غذا و فضا باعث می‌شود که جمعیت ماهی‌ها به طور نامحدود افزایش پیدا نکند». در حالی که این استدلال، فقط برای منحنی‌های جوابی که بین دو جواب تعادل قرار گرفته‌اند، صدق می‌کند و در حالت کلی، صادق نیست. منحنی‌های جواب وقتی به یکی از جواب‌های تعادل نزدیک می‌شوند، شیب ملایم‌تری پیدا می‌کنند. در حقیقت بنابر قضیه اساسی وجود و یکتایی، از هر نقطه صفحه جواب، تنها یک جواب می‌گذرد. یعنی منحنی‌های جواب، به جواب‌های تعادلی مجانب می‌شوند، اما نمی‌توانند در زمانی متناهی، آن را قطع کنند.



شکل ۸: پاسخی به رویکرد هندسی حل معادله دیفرانسیل

در شکل ۸، بین نمودار f(y) رسم شده در دستگاه [y, f(y)] و منحنی‌های رسم شده در دستگاه [t, y(t)] تناقض وجود دارد. در بازه (-1,0) روی محور yها در دستگاه [y, f(y)] نمودار f(y) بالای محور yها رسم شده است، در حالی که در همان بازه در دستگاه [t, y(t)]، منحنی‌جواب نزولی رسم شده است. این دانشجو، هنگام مصاحبه با اشاره به «وجود تناقض بین بالای محور yها بودنِ نمودار f(y) در دستگاه [y, f(y)] و با نزولی رسم شدن منحنی‌جواب در

دستگاه [t, y(t)] در بازه (-1,0)»، از دانشجو خواسته شد که علت به وجود آمدن این تناقض را توضیح دهد. بخشی از توضیحات دانشجو در ادامه آمده است.

من منحنی‌های جواب را از روی خط فاز کشیدم. [با دست خط فاز و پیکان‌های روی آن را نشان می‌دهد.] جهت این فلش‌ها هم که از روی علامت f دیگه. [با دست پیکان‌های زیر جدول تعیین علامت را نشان می‌دهد. این پیکان‌ها مطابق علامت بالای هر کدام، زمانی که علامت مثبت است، صعودی و زمانی که علامت منفی است، نزولی رسم شده‌اند.] ... بعدش‌ام که نمودار f را کشیدم. اول صعودی، بعد دوتا نزولی و بعد صعودی. [با انگشت یک بار مسیر حرکت پیکان‌های کشیده شده در زیر جدول تعیین علامت را دنبال می‌کند و یک بار هم مشابه همان حرکت این بار مسیر روی نمودار f(y) در دستگاه [y, f(y)] را دنبال می‌کند.]

از این توضیحات چنین برمی‌آید که این دانشجو، نمودار f(y) را مطابق پیکان‌های زیرِ جدول تعیین علامت رسم کرده بود و نمودار f(y)، به درستی رسم نشده بود، اگرچه بین جهتِ پیکان‌های روی خط فاز عمودی و نزولی و صعودی بودن منحنی‌های جواب، هماهنگی وجود دارد. اما درست رسم نشدن نمودار f(y) باعث شده است که بین نمودار f(y) رسم شده در دستگاه [y, f(y)] و منحنی‌های رسم شده در دستگاه [t, y(t)]، هماهنگی وجود نداشته باشد. این مثال نشان می‌دهد که دانشجویان، اغلب در درک رابطه بین دستگاه [y, f(y)] و دستگاه [t, y(t)] با چالش عمده روبرو می‌شوند. یافته‌های این تحقیق نشان می‌دهد که از ۱۷ دانشجوی مصاحبه شده، برای ۱۳ نفر، درک رابطه بین دستگاه [y, f(y)] و دستگاه [t, y(t)]، چالشی عمده است.

۵. بحث و نتیجه‌گیری

یکی از مهم‌ترین عوامل علاقه محققان آموزشی ریاضی دانشگاهی به بحث آموزش معادلات دیفرانسیل، قابلیت‌های این حوزه در در خصوص آموزش مدل‌سازی است. مدل‌سازیِ مسائل دنیای واقعی، اغلب به معادلات دیفرانسیلی ختم می‌شوند که برای حل آن‌ها، توجه به هر سه رویکرد جبری، عددی و هندسی حل معادلات دیفرانسیل، مفید است (بویس، دیپریما و میتِرا، ۲۰۱۰). این پژوهش نشان داد که آموزش تحلیل رفتار کیفی معادلات دیفرانسیل، به عنوان رویکرد هندسی و تلفیق آن با رویکردهای جبری و عددی، اثربخش است. آنچه که در بین

تحقیقاتِ مربوط به آموزش و یادگیری معادلات دیفرانسیل مشترک است، تلاش برای شناسایی چالش‌های دانشجویان در رابطه با یادگیری رویکرد هندسی حل معادلات دیفرانسیل، و حرکت انعطاف‌پذیر بین بازنمایی‌های جبری، عددی و هندسی است. مدل‌سازی مسایل واقعی مربوط به پزشکی، مهندسی، محیط زیست، اقتصاد، جمعیت‌شناسی و بسیاری حوزه‌های دیگر، همگی نیازمند معادلات دیفرانسیل هستند و بدین سبب، ، شناسایی چالش‌های آموزش و یادگیری معادلات دیفرانسیل، یک ضرورت است.

بر اساس یافته‌های این پژوهش، اکثر چالش‌های آموزش رویکرد هندسی حل معادلات دیفرانسیل خودگردان، ناشی از عدم درک وجود ارتباط بین دستگاه های $[y, f(y)]$ و $[t, y(t)]$ است. چالش‌هایی از قبیل «درک ارتباط بین تعداد ریشه‌های $f(y)=0$ و تعداد جواب‌های تعادل»، «درک ارتباط بین تعداد نقاط تقاطع نمودار $f(y)$ با محور افقی و تعداد جواب‌های تعادل»، «نقش دوگانه y»، «درک رابطه بین علامت $f(y)$ و یکنوایی منحنی‌های جواب»، «تنظیم خط فاز» و «بر چسب زدن جواب‌های تعادل»، همگی به درک وجود ارتباط بین دستگاه‌های $[y, f(y)]$ و $[t, y(t)]$ بستگی دارند.

۶. سخن پایانی

در آموزش حل معادلات دیفرانسیل خودگردان، رویکرد هندسی قدرت پیش‌بینی رفتار بلند مدت، رویکرد عددی قدرت خطایابی محاسباتی و رویکرد جبری قدرت تحلیلی دانشجویان را برای مدل‌سازی، افزایش می‌دهد. هدف اکثر پژوهش‌های انجام شده در این حوزه، برنامه‌ریزی برای تلفیق آموزش رویکردهای جبری، عددی و هندسی، به منظور تقویت مهارت‌های مدل‌سازی است، زیرا هیچ یک از این سه رویکرد به تنهایی، تمام ابعاد مهارت‌های مدل‌سازی را پوشش نمی‌دهند. تمرکز این پژوهش، تنها بر بررسی چالش‌های آموزش رویکرد هندسی حل معادلات دیفرانسیل خودگردان با هدف بود. توصیه می‌شود که در پژوهش‌های بعدی، چالش‌های برنامه‌ریزی آموزشی و تلفیق رویکرد عددی نیز مورد مطالعه قرار گیرند.

منابع فارسی

فردین‌پور، یونس کریمی. (۱۳۹۴ الف). چالش‌های آموزشی رویکرد هندسی به معادلات دیفرانسیل: تجزیه و تحلیل منسجم رفتار کیفی. *دوازدهمین سمینار معادلات دیفرانسیل و سیستم‌های دینامیکی (SDEDS)*. تبریز، ایران.

فردین‌پور، یونس کریمی. (۱۲۹۳ الف). ماهیت یادگیری معادلات دیفرانسیل معمولی. *گزارش ۴۵اُمین کنفرانس ریاضی*. دانشگاه سمنان، سمنان.

فردین‌پور، یونس کریمی. (۱۳۹۳ ب). نظریه داده بنیاد در آموزش معادلات دیفرانسیل برای مفهوم آموزش پویای مبتنی بر کلاس درس. ارائه شده در *سیزدهمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران*. دانشگاه شهید رجایی، تهران.

فردین‌پور، یونس کریمی. (۱۳۹۳ پ). چارچوبی برای تحلیل خطاهای دانشجویان مهندسی در حل معادلات دیفرانسیل: مدل بافت. *مجله ایرانی آموزش مهندسی*. دوره ۱۶، شماره ۶۳، صص. ۶۳ تا ۱۱۱. فرهنگستان علوم ایران.

فردین‌پور، یونس کریمی. (۱۳۹۲). آموزش ریاضی دانشگاهی برای دانشجویان مهندسی. ۴۴ماهیت یادگیری معادلات دیفرانسیل معمولی. *گزارش ۴۴اُمین کنفرانس ریاضی*. دانشگاه فردوسی، مشهد.

فردین‌پور، یونس کریمی و گویا، زهرا. (۱۳۹۲). دیدگاه نوآورانه به آموزش ریاضی با تأکید بر نیازهای آموزش مهندسی. *پنجمین کنفرانس ملی آموزش. دانشگاه شهید رجایی*. تهران.

فردین‌پور، یونس کریمی و گویا، زهرا. (۱۳۹۱). تحلیل خطاها در درس‌های معادلات دیفرانسیل. *۴۳اُمین کنفرانس ریاضی*. دانشگاه تبریز، تبریز.

منابع انگلیسی

Artigue, M. (1992). Cognitive difficulties and teaching practices. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.); *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 109- 132). Washington DC: The mathematical Association of America.

Allen, K.S. (2006). *Students' participation in a differential equations class: Parametric reasoning to understand systems*. An unpublished master thesis. Purdue University.PDF file. Retrieved January 2013 from: http://www4.ncsu.edu/~kakeene/karen%20final.

Arslan, S. (2010). Traditional instruction of differential equations and conceptual learning. *Teaching Mathematics and its Applications.* # 29, pp. 94-107, Available at: www.teamat.oxfordjournals.org.

Boyce, W. E., DiPrima, R. C.; & Mitrea, D. (2010). *Elementary differential equations and boundary value problems*. Wiley.

Camacho, M.; & et al. (2012). An exploration of students' conceptual knowledge built in a first ordinary differential equations course (part i). *The Teaching of Mathematics*. Vol. XV- 1. pp. 1–20.

Charmaz, K. (2006). *Constructing grounded theory: A practical guide through qualitative analysis*. Pine Forge Press.

Dana-Picard, T. & Kidron, I. (2008). Exploring the phase space of a system of differential equations: Different mathematical registers. *International Journal of Science and Mathematics Education*. 6: 695Y717, National Science Council, Taiwan.

Fardinpour, Y. K. (2015). Challenges of understanding of qualitative behavior analysis. 9th *Congress of European Research in Mathematics Education (CERME 9)*. February 4-8, Prague, Czech Republic.

Fardinpour, Y. K. & Gooya, Z. (2013). Using "IRDO" model to identify errors made by students in differential equations exams. *8th Congress of European Research in Mathematics Education (CERME8).* Antalya, CERME8 WG14 – 141212.

Habre, S. (2003). Investigating students' approval of a geometrical approach to differential equations and their solutions. *Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 34, 651–662.

Habre, S. (2013). *Writing in a reformed differential equations class*. Retrieved January 2013 from: http://www.math.uoc.gr/~ictm2/Proceedings/pap64.pdf,

Habre, S. (2013). *Writing in mathematics enhanced by technology*. Retrieved January 2013 from: http://archives.math.utk.edu/ICTCM/VOL23/S110/paper.pdf.

Habre, S. (2000). Exploring students' strategies to solve differential equations in a reformed setting. *Journal of Mathematical Behavior*, 18(4), 455-472.

Keene, K. A. (2007). A characterization of dynamic reasoning: Reasoning with time as parameter. *The Journal of Mathematical Behavior*, 26(3), 230-246.

Keene, K. A.; Rasmussen, C.; & Stephan, M. (2012). Gestures and a chain of signification: The case of equilibrium solutions. *Mathematics Education Research Journal*, 24(3), 347-369.

Rasmussen, C. and K. Whitehead. (2003). Learning and teaching ordinary differential equations. *MAA Online Research Sampler*. , Retrieved January 2013 from:

http://calculus- course.maa.org/t_and_l/sampler/rs_7.html#support.

Rasmussen, C. L. (2001). New directions in differential equations: A framework for interpreting students' understandings and difficulties. *The Journal of Mathematical Behaviour*, 20, pp. 55–87.

Rasmussen, C.; & Kwon, O. N. (2007). An inquiry-oriented approach to undergraduate mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior*, 26(3), 189-194.

Rasmussen, C.; Zandieh, M.; & Wawro, M. (2009). How do you know which way the arrows go? The emergence and brokering of a classroom mathematics practice. *Mathematical representations at the interface of the body and culture*, 171-218.

Schoenfeld, A. (2000). Purposes and methods of research in mathematics education. *Notices of the AMS*, Volume 47, Number 6, June/July 2000.

Zandieh, M. & McDonald, M. (1999). Student understanding of equilibrium solution in differential equations. In F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 253-258). Columbus, OH: ERIC.

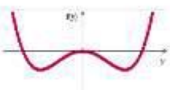
پیوست الف
تکلیف‌های مصاحبه

1- الف) مدلسازی یک پدیده طبیعی به صورت معادله دیفرانسیل

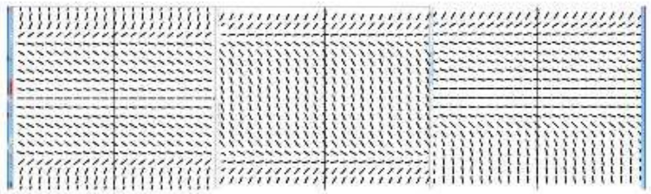
$$dy/dt=y^2(y^2-1)\ ,\ -\infty<y_0<+\infty$$

بیان شده است. ابتدا نمودار $f(y)=y^2(y^2-2)$ را رسم کنید. سپس با تعیین نوع نقاط تعادل (جاذب / دافع / گذر)، تنظیم خط فاز، تعیین نوع جواب‌های تعادل (مجانبی پایدار/ ناپایدار / نیمه پایدار) و با رسم منحنی‌های جواب، تحلیل رفتار کیفی این پدیده را بیان کنید. با هر یک از شرایط اولیه $y(0)=1/2$، $y(0)=-1$ و $y(0)=-\sqrt{2}$ به ترتیب حاصل $\lim_{t\to+\infty} y(t)$ چیست؟

ب) نمودار $f(y)=y^2(y^2-2)$ به صورت زیر میباشد. نموداری را که در قسمت الف رسم کرده اید، با این نمودار مقایسه کنید. آیا اختلافی بین نموداری که شما رسم کرده اید با نمودار وجود دارد؟ توضیح دهید.



ج) کدامیک از میدانهای شیب زیر میتواند، مربوط به معادله دیفرانسیل $dy/dt=y^2(y^2-1)$ باشد. منحنیهای جواب را در میدان شیب مورد نظر رسم کنید. آیا اختلافی بین منحنیهای جوابی که در قسمت الف رسم کردید با آنچه که در این قسمت رسم میکنید وجود دارد؟ توضیح دهید.

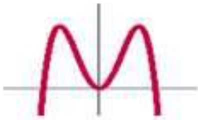


2-الف) مدلسازی یک پدیده طبیعی به صورت معادله دیفرانسیل

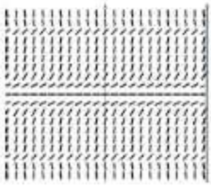
$$dy/dt=y^2(4-y^2)\ ,\ -\infty<y_0<+\infty$$

بیان شده است. ابتدا نمودار $f(y)=y^2(4-y^2)$ را رسم کنید. سپس با تعیین نوع نقاط تعادل (جاذب / دافع / گذر)، تنظیم خط فاز، تعیین نوع جواب‌های تعادل (مجانبی پایدار / ناپایدار / نیمه پایدار) و با رسم منحنی‌های جواب، تحلیل رفتار کیفی این پدیده را بیان کنید. با هر یک از شرایط اولیه $y(0)=3$، $y(0)=2$ و $y(0)=-\sqrt{2}$ به ترتیب حاصل $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t)$ چیست؟

ب) نمودار $f(y)=y^2(4-y^2)$ به صورت زیر میباشد. نموداری را که در قسمت الف رسم کرده‌اید، با این نمودار مقایسه کنید. آیا اختلافی بین نموداری که شما رسم کرده اید با نمودار وجود دارد؟ توضیح دهید.



ج) میدان شیب زیر مربوط به معادله دیفرانسیل $dy/dt=y^2(4-y^2)$ است. منحنیهای جواب را در میدان شیب مورد نظر رسم کنید. آیا اختلافی بین منحنیهای جوابی که در قسمت الف رسم کردید با آنچه که در این قسمت رسم میکنید وجود دارد؟ توضیح دهید.



3-الف) مدلسازی یک پدیده طبیعی به صورت معادله دیفرانسیل

$$dy/dt=ay-b\sqrt{y}\ ,\ 0\le y_0<+\infty$$

بیان شده است. (a و b پارامترهای ثابت میباشند) ابتدا نمودار $dy/dt=ay-b\sqrt{y}$ را رسم کنید. سپس با تعیین نوع نقاط تعادل (جاذب / دافع / گذر)، تنظیم خط فاز، تعیین نوع جواب‌های تعادل (مجانبی پایدار/ ناپایدار / نیمه پایدار) و با رسم منحنی‌های جواب، تحلیل رفتار کیفی این پدیده را بیان کنید.

ب) نمودار $f(y)=ay-b\sqrt{y}$ به صورت زیر میباشد. نموداری را که در قسمت الف رسم کرده اید، با این نمودار مقایسه کنید. آیا اختلافی بین نموداری که شما رسم کرده اید با نمودار وجود دارد؟ توضیح دهید.