JSST
فصلنامهٔ علمی - پژوهشی علوم و فناوری فضایی

جلد ۵/ شمارهٔ ۲ / تابستان ۱۳۹۱
ص. ص ۳۴– ۲۵

# مدل‌سازی دینامیکی ربات انعطاف‌پذیر با استفاده از روش المان محدود و کنترل مسیر بهینهٔ آن

**محرم حبیب‌نژاد کورایم[1*]، مصطفی ناظمی‌زاده[2و1] و حامد رحیمی‌نهوجی[3]**

**۱- دانشکدهٔ مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران**

**۲- باشگاه پژوهشگران جوان، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد دماوند**

**۳- گروه مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد دماوند**

* تهران، نارمک، خ فرجام

**hkorayem@iust.ac.ir**

*ربات‌های انعطاف پذیر به دلیل وزن کم و قابلیت مانور پذیری بالا، کاربردهای فراوانی در صنایع فضایی دارند. در حقیقت نسبت بالای ظرفیت حمل بار به وزن اینگونه ربات‌ها موجب برتری آنها نسبت به نوع صلبشان گردیده است. همچنین مصرف انرژی کمتر، داشتن عملگرهای کوچکتر و همچنین سرعت عملکرد بالاتر این ربات‌ها را به‌عنوان انتخابی مناسب در کاربردهای فضایی معرفی کرده است. در این مقاله به مدل‌سازی دینامیکی ربات انعطاف‌پذیر با استفاده از روش المان محدود (finite element method) و طراحی مسیر حرکت نقطه به نقطه آن به روش کنترل بهینه پرداخته می‌شود. به منظور مدل‌سازی دینامیکی منیپولاتور(Manipulator) انعطاف‌پذیر، هر لینک آن به تعداد کافی المان تقسیم گردیده، و بردار جابجایی هر المان ربات به صورت مجموع یک حرکت صلب گونه، و یک جابجایی ناشی از انعطاف‌پذیری آن در نظر گرفته می‌شود. سپس با استفاده از اصل لاگرانژ معادلات دینامیکی ربات انعطاف‌پذیر استخراج شده، و تحلیل رفتار دینامیکی آن تحت اثر افزایش تعداد المان‌های لینک ربات مورد مطالعه قرار می‌گیرد. همچنین به منظور طراحی مسیر بهینه نقطه به نقطه منیپولاتور الاستیک، معادلات دینامیکی به عنوان قیود غیرخطی مسئله کنترل بهینه در نظر گرفته شده، و با تعریف تابعی هزینه مناسب شامل ترم‌های گشتاور و سرعت، فرمولاسیون مسئله انجام می‌شود. سپس با استفاده از روش حساب تغییرات، معادلات بهینگی ربات انعطاف- پذیر به صورت یک مجموعه معادلات دیفرانسیل غیرخطی استخراج می‌گردد، که به کمک روش‌های عددی قابل حل است. مزیت استفاده از روش کنترل بهینه در طراحی مسیر بهینه ربات انعطاف‌پذیر، و همچنین کاهش حجم معادلات دینامیکی غیر خطی ربات، مورد توجه بیشتری قرار گرفته، و شبیه‌سازی انجام شده برای یک ربات تک‌لینکی الاستیک نشان‌دهنده کارایی روش پیشنهادی است.*

**واژه‌های کلیدی:** ربات انعطاف‌پذیر، مدل‌سازی دینامیکی، روش المان محدود، کنترل مسیر، حرکت نقطه به نقطه، کنترل بهینه.

## اختصارات

| | |
|---|---|
| المان دلخواه $j$ام مربوط به لینک $i$ام ربات انعطاف‌پذیر | $ij$ |
| بردار جابه‌جایی المان $ij$ نسبت به مبدأ $O$ | $\vec{r}_{ij}$ |
| بردار جابه‌جایی $O_i$ نسبت به مبدأ $O$ | $\vec{r}_{O_i}$ |
| جابه‌جایی زاویه‌ای مفصل لینک $i$ام | $\theta_i$ |
| تعداد المان لینک $i$ام | $n_i$ |
| طول کلی لینک $i$ام | $L_i$ |
| جرم بر واحد طول لینک $i$ام | $m_i$ |
| طول المان $ij$ از لینک $i$ام | $l_{ij}$ |
| مدول الاستیسیته لینک $i$ام | $E_i$ |
| ممان اینرسی لینک $i$ام | $I_i$ |

۱. استاد (نویسنده مخاطب)
۲. دانشجوی کارشناسی ارشد
۳. مربی آموزشی

**دریافت مقاله: ۹۰/۰۷/۰۳ ، تأیید مقاله: ۹۱/۰۵/۲۳**

Archive of SID
www.SID.ir

## مقدمه

اغلب رباتها به‌گونه‌ای طراحی می‌شوند که بیشترین سفتی را داشته‌باشند. اما سفتی بالا را می‌توان با استفاده از مواد سنگین و ابعاد بزرگ به‌دست آورد که این منجر به محدودشدن سرعت عملکرد ربات، افزایش ابعاد عملگرها و مصرف بالای انرژی می‌شود. از آنجاکه در کاربردهای فضایی، سرعت بالای ربات، قابلیت مانور بالا و همچنین مصرف کم انرژی باید مورد توجه قرار گیرد، دلیل توجه بسیار طراحان به این گونه رباتها نسبت به گونهٔ صلب آنها بیشتر نمایان می‌شود.

رباتهای صلب به‌گونه‌ای طراحی می‌شوند که بیشترین سفتی و صلبیت را دارند. این مسئله باعث می‌شود که این رباتها وزن بیشتر و ابعاد بزرگ‌تری داشته باشند، که منجر به محدودشدن سرعت ربات، افزایش سایز عملگرها و مصرف بالای انرژی می‌شود. از طرفی در کاربردهای فضایی، نیاز به رباتهای با مصرف انرژی کم، قابلیت مانور بالا و عملکرد سریع بوده؛ و لذا رباتهای انعطاف‌پذیر در این زمینه کاربرد فراوانی یافته است. به بیان دقیق‌تر، رباتهای انعطاف‌پذیر در مقایسه با نوع صلبشان مزایایی چون وزن سبک‌تر، محرک‌های کوچک‌تر، انرژی مصرفی پائین‌تر و هزینهٔ ساخت کمتری دارند. بنابراین استفاده از بازوهای انعطاف‌پذیر در سال‌های گذشته مورد توجه بیشتری قرار گرفته و به ویژه در زمینهٔ تحقیقات هوا و فضا [۱-۲] مورد کاربرد فراوان بوده است. بدین منظور مدل‌سازی و بررسی رفتار دینامیکی ربات لینک الاستیک توسط بسیاری از محققان مورد مطالعه قرار گرفته است: بوک [۳] از روش لاگرانژین برگشت‌پذیر برای استخراج معادلات دینامیکی ربات انعطاف‌پذیر استفاده کرد. رخشا و گودنبرگ [۴] با استفاده از روش نیوتن- اویلر برای تحلیل رفتار دینامیکی ربات انعطاف‌پذیر یک‌لینکی پرداخت. باراکو و دیگران [۵] رفتار دینامیکی بازوی لینک الاستیک را توسط دو مجموعه معادلات دینامیکی بیان کردند. در مرجع [۶] از مدل جرم متمرکز برای مدل‌سازی ربات انعطاف‌پذیر استفاده شده است. مقداری [۷] به مطالعهٔ اثرات انعطاف‌پذیری در بازوهای الاستیک صفحه‌ای با درنظرگرفتن تغییر شکل‌های ناشی از خمش و پیچش پرداخت. در مرجع [۸] تغییر شکل الاستیک لینک‌های ربات انعطاف‌پذیر به روش مودهای پیش فرض[۴] مدل‌سازی، و معادلات دینامیکی آن استخراج شده است. تاجداری و دیگران [۹] از روش جدید المان محدود به‌منظور مدل‌سازی و شبیه‌سازی منیپولاتورهای انعطاف‌پذیر استفاده کردند. همچنین عابدی و همکارانش [۱۰] به مدل‌سازی دینامیکی ربات انعطاف‌پذیر دو لینکی پرداختند. کورایم و ناظمی‌زاده [۱۱] به بررسی رفتار دینامیکی ربات انعطاف‌پذیر با استفاده از المان‌های محدود پرداختند.

4. Assumed mode

از طرفی به‌منظور کنترل و هدایت سیستم‌های کاربردی هوا و فضا از روش‌های کنترلی مدرن استفاده می‌شود [۱۲، ۱۳]. وانگ و همکارانش [۱۴] به طراحی مسیر حرکت ربات صلب با استفاده از روش کنترل بهینه پرداختند. آنها از توابع B-Spline برای حل مستقیم مسئلهٔ کنترل بهینه استفاده کردند که این رویکرد باعث افزایش حجم محاسبات در حین طراحی مسیر بهینه می‌شود. کورایم و غریبلو [۱۵] از روش برنامه‌ریزی خطی تکراری[۵] به‌منظور کنترل منیپولاتور لینک الاستیک و محاسبهٔ ظرفیت حمل بار آن پرداختند. خطی‌سازی معادلات دینامیکی در مرحلهٔ طراحی مسیر و ارضانشدن کامل شرایط مرزی حرکت از مشکلات این روش است.

در این مقاله، با استفاده از روش المان محدود انجام هر لینک ربات به تعدادی المان تقسیم شده و بردار جابه‌جایی کلی المان به صورت مجموع بردار جابه‌جایی حرکت صلب و بردار جابه‌جایی انعطاف‌پذیری با درنظرگرفتن توابع فرمی هرمتین[۶] بیان می‌شود. با بیان بردار جابه‌جایی المان در مختصات مرجع، انرژی جنبشی و پتانسیل سیستم استخراج شده و با استفاده از اصل لاگرانژ معادلات دینامیکی ربات انعطاف‌پذیر استخراج می‌شود. تعداد المان‌های درنظرگرفته شده برای هر لینک ربات افزایش داده شده و تأثیر افزایش آن بر رفتار دینامیکی منیپولاتور مورد بررسی قرار می‌گیرد. همچنین با استفاده از روش کنترل بهینه به طراحی و کنترل مسیر حرکت نقطه به نقطهٔ ربات لینک الاستیک پرداخته می‌شود. بدین منظور معادلات دینامیکی ربات در فضای حالت به‌عنوان قیود مسئله کنترل بهینه درنظرگرفته شده و تابع هدف کم‌ترین انرژی مصرفی شامل ترم‌های گشتاور و سرعت تعریف می‌شود. سپس از روش حساب تغییرات و اصل می‌نیمم پونتریاگین[۷] استفاده شده و معادلات بهینگی سیستم به‌صورت یک مجموعه معادلات دیفرانسیل غیرخطی کوپله شده بیان می‌شود. این معادلات به کمک روش‌های عددی و با درنظرگرفتن شرایط مرزی مشخص حل شده و مسیر بهینهٔ حرکت ربات حاصل می‌شود. شبیه‌سازی انجام شده برای ربات انعطاف‌پذیر تک لینکی با درنظرگرفتن تعداد متفاوت المان‌ها و همچنین برتری استفاده از کنترل بهینهٔ مورد بحث قرار گرفته و نتایج حاصله نشان‌دهندهٔ کارایی روش پیشنهادی در کاربرد آن است.

## استخراج معادلات دینامیکی ربات انعطاف‌پذیر به روش المان محدود

در حالت کلی برای بیان معادلات دینامیکی ربات انعطاف‌پذیر با تعداد $m$ لینک، هر لینک دلخواه $i$ به $n_i$ المان به طول $l_{ij}$ تقسیم

5. Iterative linear programming
6. Hermetian shape functions
7. Ponryagin's minimum principle

Archive of SID
www.SID.ir

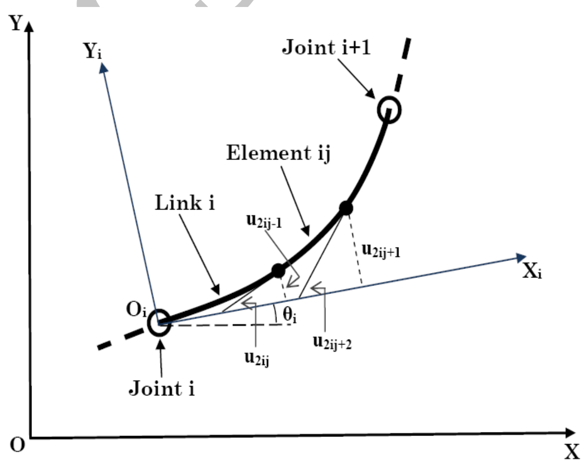
می‌شود. برای هر المان، بردار جابه‌جایی نسبت به دستگاه مرجع با $\vec{r}_{ij}$ نمایش داده و انرژی جنبشی $T_{ij}$ و انرژی پتانسیل $V_{ij}$ به‌دست می‌آید. در این‌صورت با بیان بردار مختصات تعمیم یافته $\vec{q}$، انرژی جنبشی و پتانسیل کلی سیستم از رابطهٔ (۱) به‌دست می‌آید:

$$T(\vec{q},\dot{\vec{q}}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} T_{ij} \quad V(\vec{q},\dot{\vec{q}}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} V_{ij} \qquad (۱)$$

و با تشکیل تابع لاگرانژین $L(\vec{q},\dot{\vec{q}}) = T - V$ و بیان اصل لاگرانژ، معادلات دینامیکی سیستم به شکل نهایی زیر بیان می‌شود:

$$M\ddot{\vec{q}} + f(\vec{q},\dot{\vec{q}}) = B\vec{\tau} \qquad (۲)$$

در شکل (۱) iامین لینک از منیپولاتور انعطاف‌پذیر نمایش داده شده‌است. دستگاه مختصات $OXY$ دستگاه مرجع و دستگاه مختصات $O_iX_iY_i$ دستگاه مختصات متصل به iامین لینک ربات است.




**شکل ۱**– ربات انعطاف‌پذیر

به‌منظور استخراج معادلات دینامیکی ربات انعطاف‌پذیر کافی است که انرژی جنبشی و پتانسیل المان دلخواه ij را محاسبه کرده و با استفاده از فرمول (۱) انرژی جنبشی و پتانسیل کلی سیستم را به‌دست آورد. سپس با استفاده از اصل لاگرانژین می‌توان به معادلات دینامیکی ربات انعطاف‌پذیر که به شکل رابطهٔ (۲) بیان می‌شود دست یافت. بنابراین در ادامه به بررسی المان دلخواه ij پرداخته و روابط انرژی را برای آن استخراج می‌کنیم.

## انرژی جنبشی و پتانسیل المان دلخواه ij از لینک iام

چنانچه $\vec{r}_{ij}$ بردار جابه‌جایی هر نقطهٔ دلخواه از المان ij نسبت به مبدأ $O$ دستگاه مرجع باشد، انرژی جنبشی المان ij را با $T_{ij}$ نشان داده و از رابطهٔ (۳) به‌دست می‌آید:

$$T_{ij} = \frac{1}{2}\int_0^{l_i} m_i \left[\frac{\partial \vec{r}_{ij}^{\,T}}{\partial t}.\frac{\partial \vec{r}_{ij}}{\partial t}\right] dx_{ij} \quad 0 < x_{ij} < l_{ij} \qquad (۳)$$

از طرفی بردار جابه‌جایی مطلق $\vec{r}_{ij}$ المان، شامل مجموع $\vec{r}_{ij,r}$ جابه‌جایی ناشی از یک حرکت صلب لینک iام و همچنین $\vec{r}_{ij,f}$ بردار جابه‌جایی ناشی از تغییر شکل‌های الاستیک لینک نسبت به دستگاه $O_iX_iY_i$ است. به عبارت دیگر با توجه به شکل (۱)، ربات ابتدا می‌تواند یک حرکت صلب‌گونه منطبق به جابه‌جایی زاویه‌ای $\theta_i$ مفصل داشته، و سپس جابه‌جایی ناشی از تغییر شکل الاستیک ربات نیز داشته باشد. رابطهٔ (۴) بردار جابه‌جایی کلی المان را نشان می‌دهد:

$$\vec{r}_{ij} = \vec{r}_{ij,r} + \vec{r}_{ij,f} \qquad (۴)$$

برای بیان حرکت صلب‌گونه ربات متحرک، بردار جابه‌جایی آن را در دستگاه مختصات مرجع به صورت مجموع جابه‌جایی مفصل لینک iام و همچنین جابه‌جایی المان در دستگاه مختصات محلی $O_iX_iY_i$ درنظرگرفته می‌شود، که بردار جابه‌جایی در مختصات محلی با استفاده از ماتریس تبدیل $T_0^i$ در مختصات مرجع بیان می‌شود. همچنین بردار جابه‌جایی ناشی از انعطاف‌پذیری ربات به علت خیز الاستیک آن است که با استفاده از روابط المان محدود ارائه می‌شود. لذا روابط زیر بیانگر بردارهای جابه‌جایی المان است:

$$\vec{r}_{ij,r} = \vec{r}_{O_i} + T_0^i \begin{bmatrix} (j-1)l_i + x_{ij} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (۵)$$

$$\vec{r}_{ij,f} = T_0^i \begin{bmatrix} 0 \\ y_{ij} \end{bmatrix} \qquad (۶)$$

از طرفی $y_{ij}$ جابه‌جایی قائم ناشی از انعطاف‌پذیری المان در دستگاه مختصات متصل به لینک iام بوده و به صورت مجموعی از حاصل‌ضرب توابع تغییر فرم هرمیتین در مختصات گره‌ای المان بیان می‌شود [۱۴]:

$$y_{ij}(x_{ij},t) = \sum_{k=1}^{4} \phi_k(x_{ij})\, u_{2ij-2+k} \qquad (۷)$$

در رابطهٔ (۷) عبارت $\phi_k$ بیانگر توابع فرمی و $u_{2ij-2+k}$ مختصات گره‌ای مربوط به المان ij است [۱۴]:

$$\phi_1(x_{ij}) = 1 - 3\frac{x_{ij}^2}{l_{ij}^2} + 2\frac{x_{ij}^3}{l_{ij}^3} \qquad (۸)$$

$$\phi_2(x_{ij}) = x_{ij} - 2\frac{x_{ij}^2}{l_{ij}} + \frac{x_{ij}^3}{l_{ij}^2} \qquad (۹)$$

Archive of SID

$$\phi_3(x_{ij}) = 3\frac{x_{ij}^2}{l_{ij}^2} - 2\frac{x_{ij}^3}{l_{ij}^3} \qquad (۱۰)$$

$$\phi_4(x_{ij}) = -\frac{x_{ij}^2}{l_{ij}} + \frac{x_{ij}^3}{l_{ij}^2} \qquad (۱۱)$$

با تعریف بردارهای مختصاتی $\vec{z}_{ij}=[\theta_i \ \ u_{2ij-1} \ \ u_{2ij} \ \ u_{2ij+1} \ \ u_{2ij+2}]^T$ و $\vec{\psi}_{ij}=[u_{2ij-1} \ \ u_{2ij} \ \ u_{2ij+1} \ \ u_{2ij+2}]^T$، رابطهٔ (۳) مربوط به انرژی جنبشی المان را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$T_{ij} = \frac{1}{2}\dot{\vec{z}}_{ij}^T M_{ij}\dot{\vec{z}}_{ij}$$
$$M_{ij}(l,p) = \int_0^{l_i} m_i \left[\frac{\partial \vec{r}_{ij}}{\partial z_{ij_l}}\right]^T \cdot \left[\frac{\partial \vec{r}_{ij}}{\partial z_{ij_p}}\right] dx_{ij} \qquad (۱۲)$$

ماتریس $M_{ij}$ ماتریس عمومی جرم برای المان ij نامیده می‌شود و $z_{ij_l}$ بیانگر ردیف *l*ام از بردار $z_{ij}$ است.

برای محاسبهٔ انرژی پتانسیل $V_{ij}$ المان دلخواه ij از لینک *i*ام، انرژی پتانسیل به صورت مجموع انرژی پتانسیل گرانشی $V_{g_{ij}}$ ناشی از وزن و انرژی پتانسیل کشسانی $V_{e_{ij}}$ ناشی از الاستیک بودن المان درنظرگرفته می‌شود:

$$V_{ij} = V_{gij} + V_{eij} \qquad (۱۳)$$

انرژی پتانسیل گرانشی با استفاده از مؤلفهٔ قائم بردار جابه‌جایی مطلق المان بیان شده و برابر با رابطهٔ (۱۴) است:

$$V_{gij} = \int_0^{l_i} m_i g[0 \quad 1]\vec{r}_{ij}\,dx_{ij} \qquad (۱۴)$$

و همچنین انرژی پتانسیل الاستیک المان از رابطهٔ زیر به‌دست می آید:

$$V_{eij} = \frac{1}{2}\int_0^{l_i} EI_i\left(\frac{\partial^2 y_{ij}}{\partial x_{ij}^2}\right)dx_{ij} = \frac{1}{2}\vec{\psi}_{ij}^T K_{ij}\vec{\psi}_{ij} \qquad (۱۵)$$

که در آن $K_{ij}$ ماتریس سختی المان ij است و برابر با رابطهٔ (۱۶) است [۱۴]:

$$K_{ij} = \frac{EI_i}{l_i^3}\begin{bmatrix} 12 & 6l_i & -12 & 6l_i \\ 6l_i & 4l_i^2 & -6l_i & 2l_i^2 \\ -12 & -6l_i & 12 & -6l_i \\ 6l_i & 2l_i^2 & -6l_i & 4l_i^2 \end{bmatrix} \qquad (۱۶)$$

## اعمال شرایط مرزی

چنانچه معادلات دینامیکی ربات انعطاف‌پذیر با دقت بررسی شود، مطابق شکل (۱) به این نتیجه می‌توان رسید که گرهٔ اول لینک دلخواه iام منطبق بر مفصل همان لینک است. به عبارت دیگر مقادیر خیز و شیب گرهٔ اول هر یک از لینک‌ها همواره صفر بوده و لذا مختصات تعمیم‌یافته مربوط به آنها باید از معادلات دینامیکی ربات انعطاف‌پذیر حذف شود.

$$u_{i1}(t) = 0 \ , \ u_{i2}(t) = 0 \qquad (۱۷)$$

به‌منظور اعمال شرایط مرزی، به علت آنکه برخی از متغیرهای تعمیم‌یافته سیستم حذف می‌شود، بهتر است این حذف متغیرها در مرحلهٔ نوشتن تابع لاگرانژین سیستم انجام پذیرد، تا حجم محاسبات کاهش یابد.

## شبیه‌سازی رفتار دینامیکی ربات انعطاف‌پذیر

در این رفتار دینامیکی یک ربات انعطاف‌پذیر تک‌لینکی مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

پارامترهای ربات انعطاف‌پذیر در شبیه‌سازی انجام شده در جدول (۱) نشان داده شده است:

**جدول ۱-** مقادیر پارامتری ربات انعطاف‌پذیر تک‌لینکی

| پارامتر ربات | مقادیر |
|---|---|
| $L_i$ | ۱ متر |
| $m_i$ | ۵ کیلوگرم بر متر |
| $E_i$ | ۲۰ گیگا پاسکال |
| $I_i$ | $۵۰ \times ۱۰^{-۹}$ کیلوگرم بر مترمربع |

به‌منظور بررسی رفتار دینامیکی ربات انعطاف‌پذیر و بررسی تأثیر تعداد المان بر پاسخ دینامیکی ربات انعطاف‌پذیر، ابتدا لینک ربات را با یک المان درنظرگرفته که با اعمال شرایط مرزی مختصات تعمیم یافته برابر با $\vec{q} = [\theta_1 \quad u_3 \quad u_4]$ است. همچنین در شبیه‌سازی دیگر لینک الاستیک به دو المان تقسیم می‌شود که مختصات تعمیم‌یافته در این حالت برابر $\vec{q} = [\theta_1 \quad u_3 \quad u_4 \quad u_5 \quad u_6]$ است. همچنین برای استخراج معادلات دینامیکی ربات الاستیک تک‌لینکی، ماتریس تبدیل به صورت زیر بیان می‌شود:

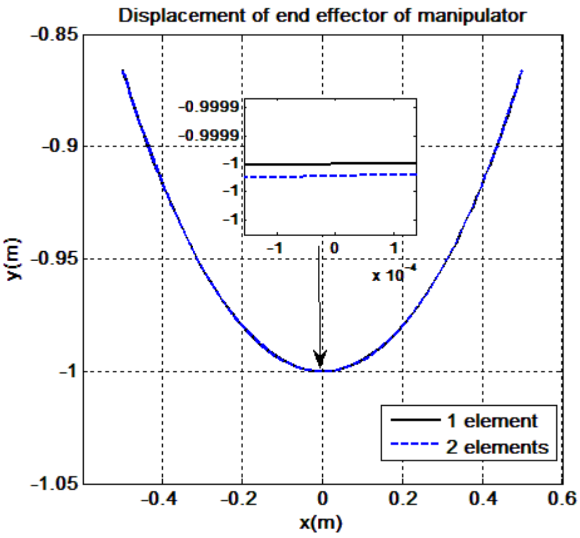
$$T_0^1 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix} \qquad (۱۸)$$

در شبیه‌سازی انجام شده، ربات از شرایط اولیه $\theta_1 = \frac{-\pi}{3}$ و $\dot{\theta}_1 = 0$ در مدت زمان $t_f = 1.2\,s$ حرکت می‌کند.

موقعیت انتهایی ربات در شکل (۲) نشان داده شده است:

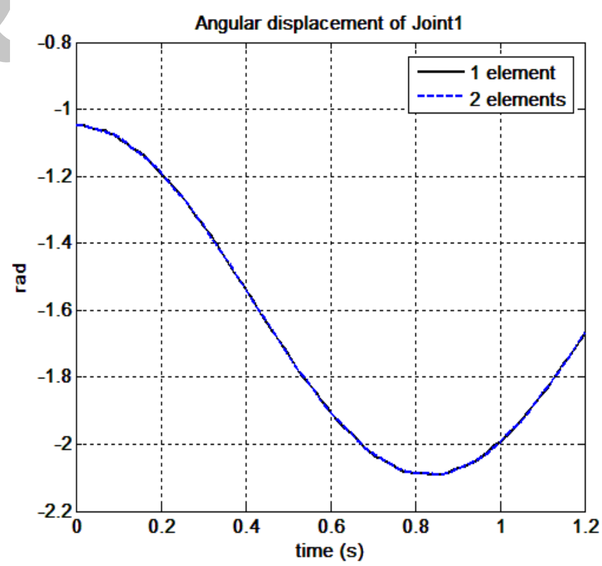
Archive of SID

www.SID.ir




**شکل ۲**– موقعیت انتهای ربات الاستیک تک لینکی

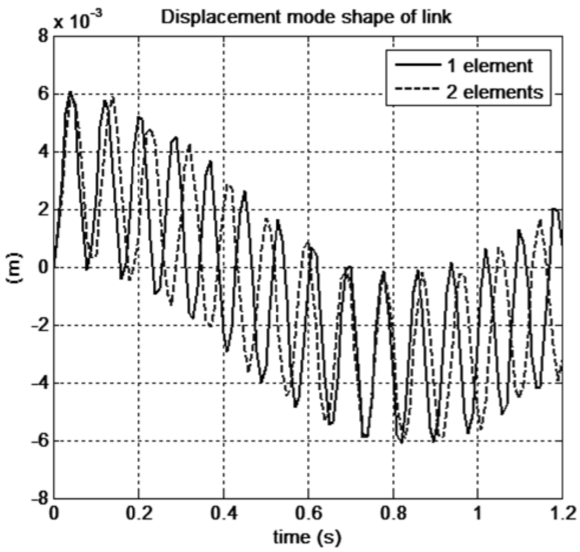
همچنین جابه‌جایی زاویه‌ای مفصل ربات در شکل (۳) نشان داده شده است:



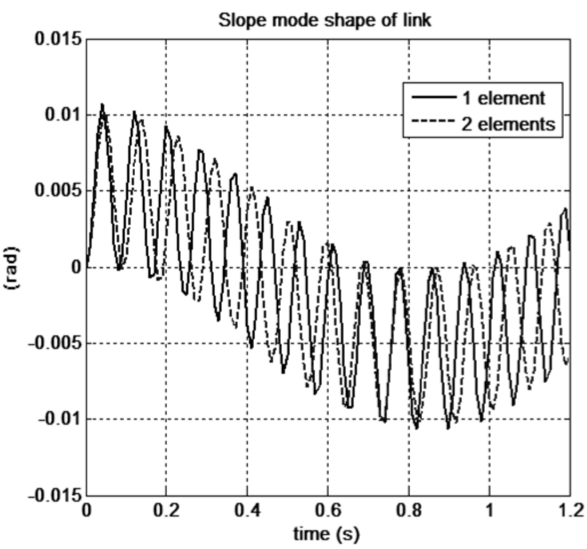

**شکل ۳**– جابه‌جایی زاویه‌ای مفصل ربات

همان‌طورکه در شکل‌های (۲) و (۳) نشان داده شده است، با افزایش تعداد المان نمودارهای موقعیت پنجه و جابه‌جایی زاویه‌ای ربات تغییر چندانی نمی‌کند.

همچنین در شکل‌های زیر خیز و شیب الاستیک انتهای منیپولاتور انعطاف‌پذیر نمایش داده شده است:




**شکل ۴**– خیز الاستیک انتهای ربات

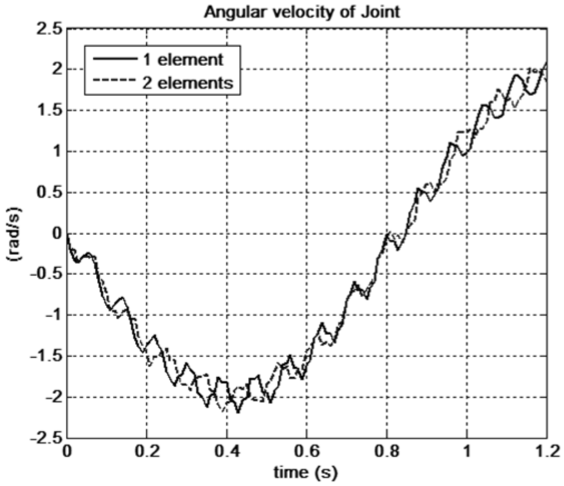



**شکل ۵**– شیب الاستیک انتهای ربات

همان‌طورکه در شکل‌های (۴) و (۵) مشاهده می‌شود، با افزایش تعداد المان ماکزیمم مقادیر خیز الاستیک انتهای ربات از مقدار ۰/۰۰۶۳ متر به ۰/۰۰۶۰ متر تغییر کرده، و همچنین ماکزیمم مقدار شیب الاستیک از rad ۰/۰۱۰۷ به ۰/۰۱۰۵ رادیان کاهش می‌یابد. البته به‌منظور بررسی همگرایی پاسخ دینامیکی سیستم با افزایش تعداد المان، شبیه‌سازی برای حالت سه المان نیز انجام شد، که در این حالت ماکزیمم خیز برابر با ۰/۰۰۵۹ متر و ماکزیمم شیب برابر با ۰/۰۱۰۴ رادیان بوده است. لذا مشاهده می‌شود که با افزایش تعداد المان، همگرایی نسبی در نتایج شبیه‌سازی ایجاد شده است.

در شکل (۶)، سرعت زاویه‌ای مفصل ربات نشان داده شده است:

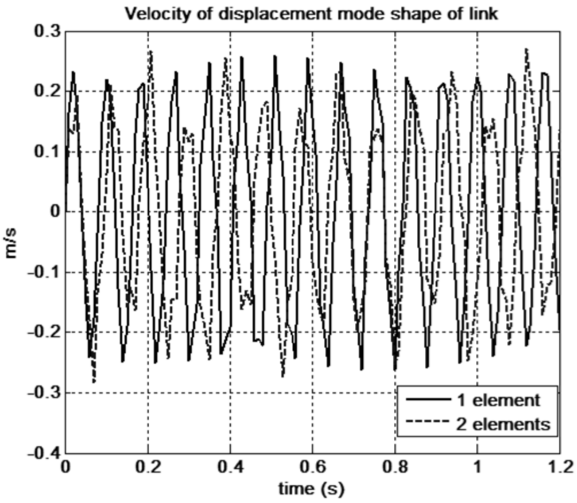
www.SID.ir




**شکل ۶**- سرعت زاویه‌ای مفصل ربات

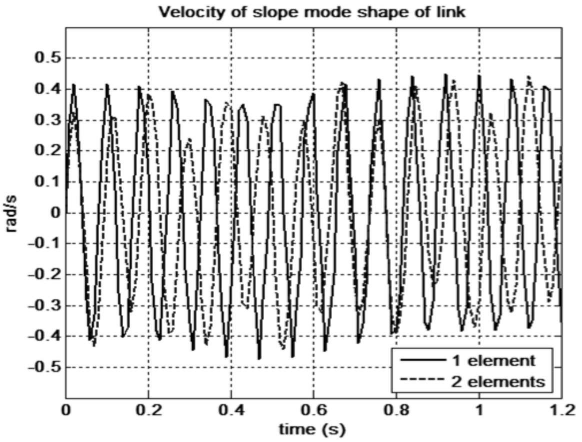
همان‌طورکه در شکل (۶) مشاهده می‌شود، با افزایش تعداد المان تغییرات سرعت زاویه‌ای مفصل ربات محسوس‌تر است.

در شکل‌های زیر نیز مشتق زمانی خیز و شیب الاستیک ربات نشان داده شده است:




**شکل ۷**- مشتق زمانی خیز الاستیک انتهای ربات

در شکل‌های (۷) و (۸) با افزایش تعداد المان، ماکزیمم مقدار سرعت خیز الاستیک انتهای ربات از مقدار ۰/۲۶۲۱ متر بر ثانیه به ۰/۲۸۳۳ متر بر ثانیه تغییر کرده‌است، و ماکزیمم مقدار سرعت شیب الاستیک انتهای ربات از مقدار ۰/۴۷۴۴ رادیان بر ثانیه به ۰/۴۳۲۳ رادیان بر ثانیه تغییر می‌کند. البته شبیه‌سازی برای حالت سه المان نیز انجام شد، که در این حالت ماکزیمم سرعت‌خیز برابر با ۰/۲۹۲۳ متر بر ثانیه و ماکزیمم سرعت شیب برابر با ۰/۴۲۱۴ رادیان بر ثانیه بوده است. نتایج به‌دست‌آمده نشان‌دهندهٔ آن است که به ازای افزایش تعداد المان، میزان همگرایی مقادیر سرعت‌های مختصات طبیعی




**شکل ۸**- مشتق زمانی شیب الاستیک انتهای ربات

سیستم کمتر است و برای همگرایی مقادیر سرعت باید تعداد المان را افزایش داد که باعث افزایش حجم معادلات دینامیکی سیستم و حجم محاسبات می‌شود. روش دیگر استفاده از روش‌های کنترلی پیشرفته است که در بخش بعد مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

## طراحی و کنترل بهینهٔ مسیر نقطه به نقطهٔ ربات انعطاف‌پذیر

در این بخش، به طراحی و کنترل بهینهٔ مسیر نقطه به نقطهٔ حرکت ربات انعطاف‌پذیر پرداخته می‌شود. بدین منظور از روش کنترل بهینه برای طراحی مسیر ربات استفاده می‌شود. استفاده از روش کنترل بهینه در طراحی مسیر و کنترل سیستم‌ها با درجات آزادی بالا و معادلات دینامیکی غیرخطی، مناسب محسوب می‌شود و مورد استفاده قرار می‌گیرد [۱۵].

### فرمولاسیون کنترل بهینه

به‌منظور فرمولاسیون مسئلهٔ کنترل بهینه، معادلات دینامیکی ربات انعطاف‌پذیر در فضای حالت $\dot{X} = f(X, U)$ به عنوان قیود مسئله تعریف می‌شود و هدف یافتن بردار وضعیت بهینه $X^*$ و کنترل ورودی بهینه $U^*$ به گونه‌ای است که معادلات قیدی سیستم برقرار و تابع هدف زیر کمینه شود:

$$J(X, U) = \int_{t_o}^{t_f} L\big(X(t), U(t), t\big)dt \qquad (۱۹)$$

با تشکیل مسئلهٔ کنترل بهینه، برای حل آن از روش حساب تغییرات و اصل می‌نیمم پونتریاگن استفاده می‌شود. ابتدا تابع

Archive of SID
www.SID.ir

همیلتونین به صورت $H = L + P^T \dot{X}$ تشکیل می‌شود که بردار P را بردار شبه حالت می‌نامند. سپس با انجام برخی محاسبات ریاضی، در نهایت شرایط بهینگی به‌صورت مجموعه معادلات دیفرانسیل غیرخطی کوپله شده استخراج می‌شود [۱۶]:

$$\dot{X}^*(t) = \frac{\partial H}{\partial P}\left(X^*(t), U^*(t), P^*(t), t\right) \quad (۲۰)$$

$$\dot{P}^*(t) = -\frac{\partial H}{\partial X}\left(X^*(t), U^*(t), P^*(t), t\right) \quad (۲۱)$$

$$0 = \frac{\partial H}{\partial U}\left(x^*(t), u^*(t), P^*(t), t\right) \quad (۲۲)$$

همچنین از اصل می‌نیمم پونتریاگین استفاده می‌شود. این اصل بیان می‌کند که باید مقادیر بهینهٔ به‌دست‌آمده، تابع همیلتونین را نیز کمینه کند، و لذا با درنظرگرفتن قید بر روی کنترل ورودی سیستم، رابطهٔ بهینگی (۲۲) به صورت زیر بیان می‌کند:

$$u^*(t) = \begin{cases} u_{min} & u^* < u_{min} \\ u^* & u_{min} < u^* < u_{max} \\ u_{max} & u_{max} < u^* \end{cases} \quad (۲۳)$$

که در رابطهٔ (۲۳)، $u_{min}, u_{max}$ به ترتیب مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم اشباع محرک ربات را نشان می‌دهد.

در نهایت، معادلات بهینگی به صورت یک مسئلهٔ مقدار مرزی استخراج می‌شود که با استفاده از دستور bvp4c در نرم‌افزار متلب قابل حل است.

نکتهٔ مهم دیگر، تعیین تابع هزینهٔ مناسب است. در این مقاله به‌منظور کمینه‌کردن مصرف انرژی ربات انعطاف‌پذیر (که هدف مهمی در کاربردهای هوا و فضا محسوب می‌شود)، تابع هزینهٔ سیستم به‌صورت مجموع ترم‌های گشتاور ورودی ربات و سرعت‌های سیستم درنظرگرفته می‌شود:

$$J = \int_{t_0}^{t_f}\left(\frac{1}{2}\|X_v\|_W^2 + \frac{1}{2}\|U\|_R^2\right) \quad (۲۴)$$

که $\|X_v\|_K^2$ نرم مربعی تعمیم یافتهٔ[8] بردار $X_v$ شامل متغیرهای حالت سرعت نسبت به ماتریس وزنی K است. W ماتریس وزنی فضای حالت است و به‌صورت قطر $W = diag(w_1 \quad \dots \quad w_{2n+2})$ درنظرگرفته شده، و R ماتریس وزنی گشتاور ورودی سیستم است و برابر با $R = diag(r_1 \quad \dots \quad r_m)$ لحاظ می‌شود.

## شبیه‌سازی کنترل مسیر

در این بخش، با درنظرگرفتن مقادیر پارامترهای ربات انعطاف‌پذیر تک لینکی مطابق با جدول (۲)، به طراحی مسیر و کنترل بهینهٔ حرکت ربات پرداخته می‌شود.

در این شبیه‌سازی، لینک منیپولاتور انعطاف‌پذیر با یک المان درنظر گرفته شده و مختصات تعمیم‌یافته برابر با $\bar{q} = [\theta_1 \quad u_3 \quad u_4]$ است.

همچنین در مفصل ربات از یک موتور جریان مستقیم استفاده می‌شود که دارای معادله مشخصه زیر است:

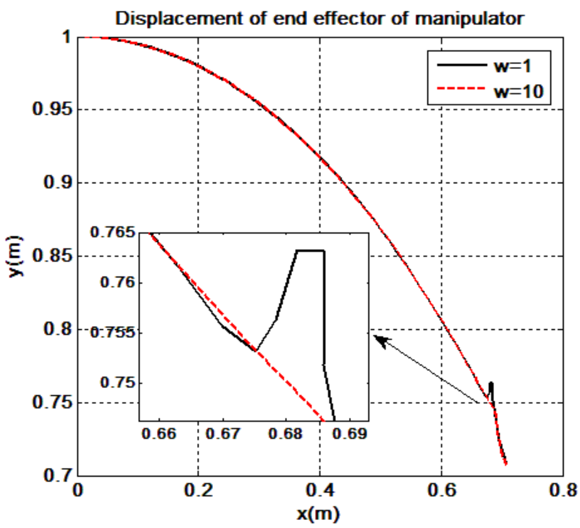
$$\begin{aligned} u_{max} &= K_1 - K_2\,\dot{\theta}_1 \\ u_{min} &= -K_1 - K_2\,\dot{\theta}_1 \end{aligned} \quad (۲۵)$$

و ضرایب ثابت به‌صورت $K_1 = 40\,Nm$ و $K_2 = 1.12\,Nms/rad$ درنظرگرفته می‌شود.

در طراحی مسیر نقطه به نقطهٔ ربات، منیپولاتور از شرایط اولیهٔ $\theta_{1,i} = \frac{\pi}{4}, \dot{\theta}_{1,i} = 0$ به شرایط نهایی $\theta_{1,f} = \frac{\pi}{2}, \dot{\theta}_{1,f} = 0$ در مدت زمان $t_f = 1.5\,s$ حرکت می‌کند.

از مزایای روش کنترل بهینه آن است که با تغییر نسبی ضرایب وزنی در تابع هزینه، می‌توان مسیرهای بهینهٔ متنوعی برای حرکت نقطه به نقطه ربات درنظرگرفت. لذا در این شبیه سازی با فرض آنکه ماتریس‌های وزنی به‌صورت $W = diag(0 \quad 0 \quad 0 \quad w \quad w \quad w)$ و $R = diag(r)$ باشد، مقادیر r=1 و w=1 or 10 در نظرگرفته شده و تأثیر تغییر ضرایب وزنی بر کنترل مسیر بهینه بررسی می‌شود.

مسیر بهینهٔ پنجه ربات انعطاف‌پذیر در شکل (۹) نشان داده شده است:

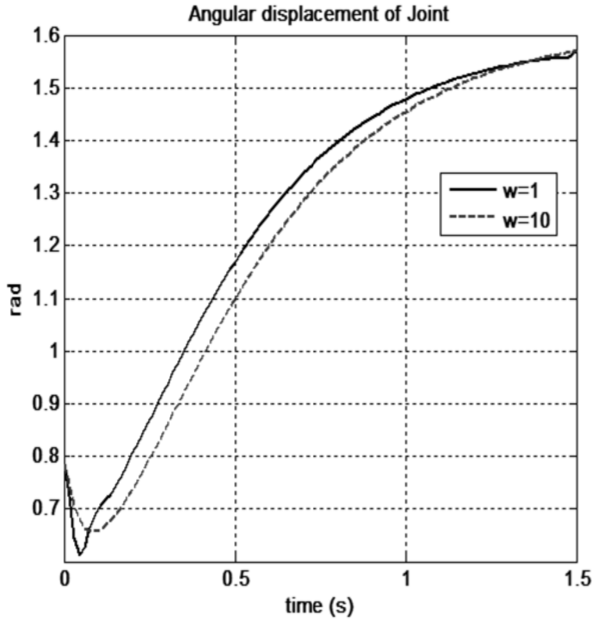



**شکل ۹**- مسیر بهینهٔ ربات انعطاف‌پذیر

همچنین نمودار جابه‌جایی زاویه‌ای ربات در شکل (۱۰) نشان داده شده است:

8. Generalized Squared Norm

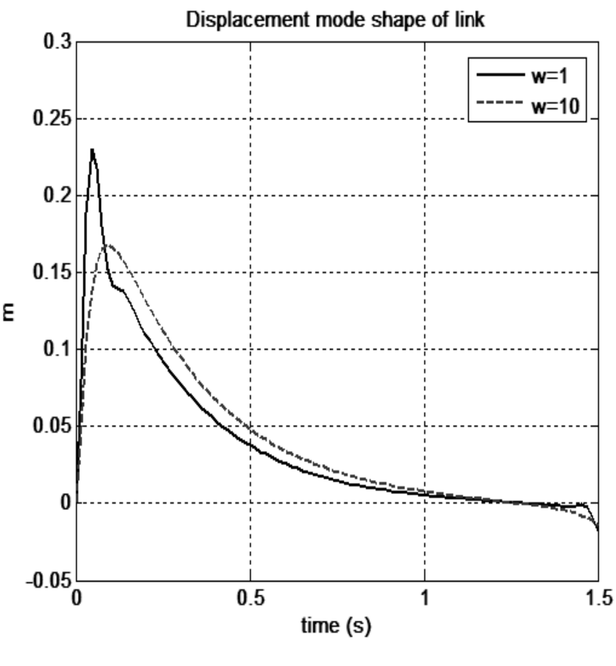
Archive of SID
www.SID.ir



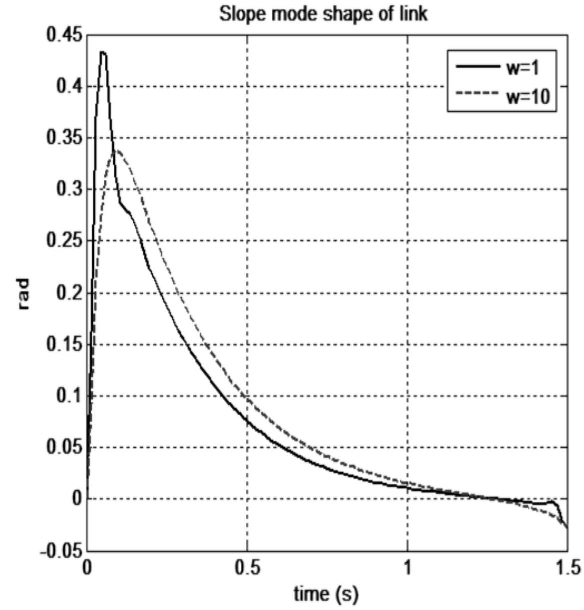

**شکل ۱۰**- جابه‌جایی زاویه‌ای بهینهٔ مفصل ربات

همان‌طورکه در شکل (۱۰) مشاهده می‌شود، با افزایش ضریب وزنی، اکسترمم جابه‌جایی زاویه‌ای کاهش یافته است.

در شکل‌های (۱۱) و (۱۲) خیز و شیب الاستیک بهینه نمایش داده شده است.



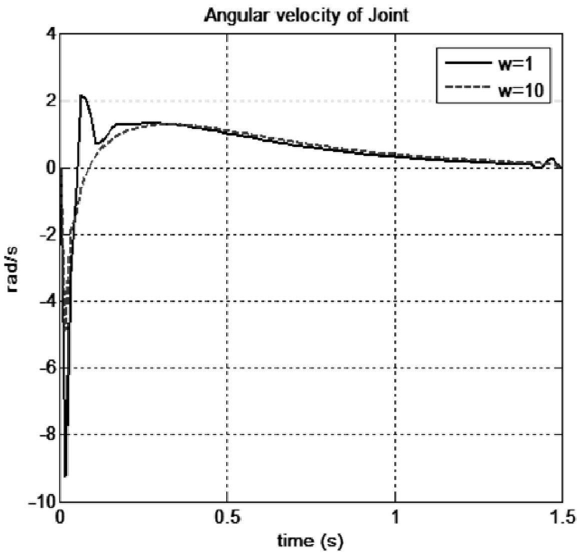

**شکل ۱۱**- خیز الاستیک بهینهٔ انتهای ربات




**شکل ۱۲**- شیب الاستیک بهینهٔ انتهای ربات

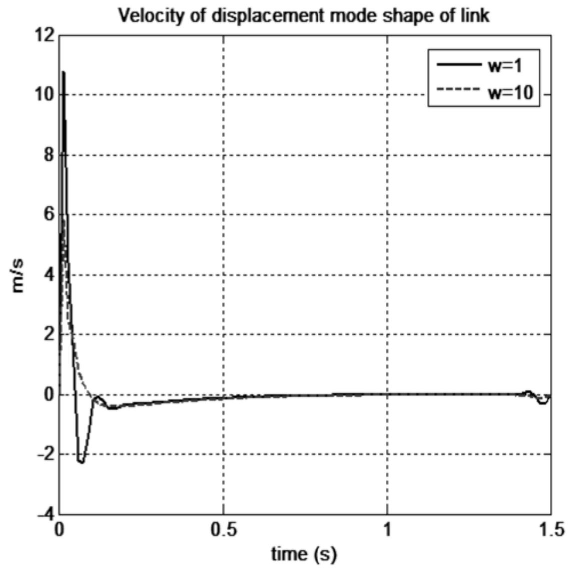
همان‌طورکه در شکل‌های بالا مشاهده می‌شود، با استفاده از روش کنترل بهینه مقادیر خیز و شیب الاستیک حالت نوسانی کمتری دارند.

در شکل‌های (۱۳) تا (۱۵) سرعت زاویه‌ای مفصل ربات و همچنین مشتق زمانی خیز و شیب الاستیک انتهای ربات نشان داده شده است:

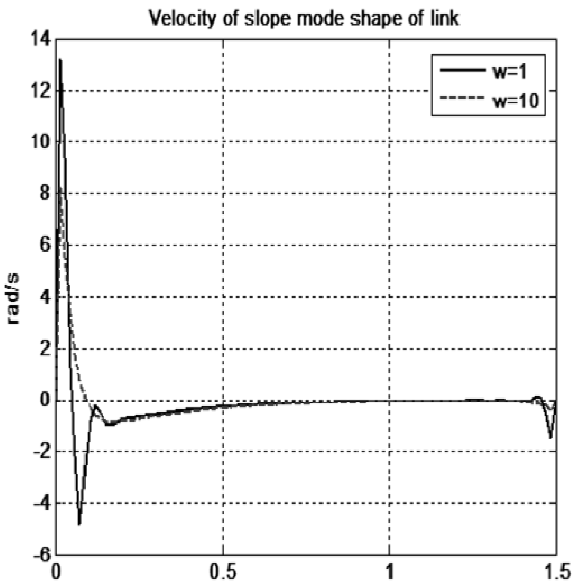



**شکل ۱۳**- سرعت زاویه‌ای بهینهٔ مفصل ربات

www.SID.ir

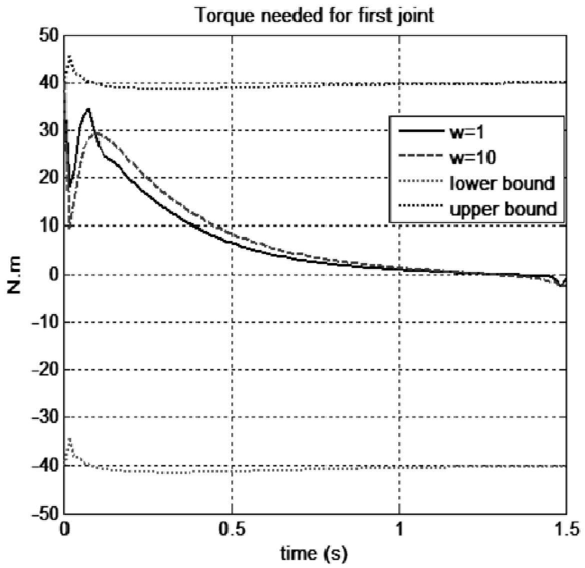



**شکل ۱۴**– مشتق زمانی خیز الاستیک انتهای ربات




**شکل ۱۵**– مشتق زمانی شیب الاستیک انتهای ربات

همان‌طورکه در شکل‌های (۱۳) تا (۱۵) نشان داده شده است، با افزایش ضریب وزنی سرعت، میزان اکسترمم مقادیر سرعت بهینه کاهش زیادی می‌یابد و مسیر بهینهٔ مناسب‌تری به‌دست می‌آید. اما باید توجه داشت که با افزایش ضریب وزنی حالت، مقادیر اکسترمم گشتاور، افزایش نسبی یافته که در شکل (۱۶) نشان داده شده است:




**شکل ۱۶**– گشتاور بهینه وارد بر مفصل ربات

## نتیجه‌گیری

هدف از این مقاله، بررسی رفتار دینامیکی و کنترل بهینهٔ مسیر ربات انعطاف‌پذیر با درنظرگرفتن کاربردهای فراوان آن در علم هوا و فضا بوده است. ابتدا به‌منظور مدل‌سازی دینامیکی ربات از روش المان محدود استفاده می‌شود و بردار جابه‌جایی کلی المان به صورت مجموع بردار جابه‌جایی حرکت صلب و بردار جابه‌جایی انعطاف‌پذیری بیان شده است. با بیان بردار جابه‌جایی المان در مختصات مرجع، انرژی جنبشی و پتانسیل سیستم استخراج شده و با استفاده از اصل لاگرانژ معادلات دینامیکی ربات انعطاف‌پذیر استخراج می‌شود. به‌منظور تحلیل رفتار دینامیکی منیپولاتور، تعداد المان‌های ربات را افزایش داده و تأثیر آن بر همگرایی پاسخ سیستم شبیه‌سازی شده و مورد بحث قرارگرفته است. همچنین از روش کنترل بهینه به‌منظور طراحی مسیر بهینه و کنترل مسیر نقطه به نقطهٔ ربات استفاده شده است. با درنظرگرفتن معادلات دینامیکی ربات و تابع هزینهٔ مناسب، فرمولاسیون مسئلهٔ کنترل بهینه انجام شده و با استفاده از روش حساب، تغییرات معادلات بهینگی سیستم به صورت یک مجموعه معادلات دیفرانسیل غیرخطی استخراج شده است. سپس با حل عددی آن، طراحی مسیر بهینه و کنترل بهینهٔ ربات انعطاف‌پذیر شبیه‌سازی شده و تأثیر تغییر ضرایب وزنی تابع هزینه در طراحی مسیر بهینه مورد بحث قرارگرفته است. شبیه‌سازی‌های انجام شده نشان می‌دهد که با افزایش ضرایب وزنی، مسیر بهینهٔ به‌دست‌آمده هموارتر می‌شود. همچنین برتری استفاده از روش کنترل بهینه در کاهش اثرات غیرخطی سیستم و

Archive of SID

www.SID.ir

ایجاد متغیرهای حالت هموارتر نشان داده شده و نتایج حاصله، نشان‌دهندهٔ کارایی روش پیشنهادی در کاربرد آن است.

## مراجع

[1] Satoko, A. and Kazuya, Y., “Adaptive Reaction Control for Space Robotic Applications with Dynamic Model Uncertainty,” *Advanced Robotics*, Vol. 24, No. 8-9, 2010, pp. 1099-1126.

[2] Mahmoodi, S.N. and Ahmadian M., “Modified Acceleration Feedback for Active Vibration Control of Aerospace Structures,” *Smart Materials and Structures*, Vol. 19, No. 6, 2010, pp. 125-132.

[3] Book, W. J., “Recursive Lagrangian Dynamics of Flexible Manipulator Arms,” *International Journal of Robotics Research*, Vol. 3, No. 3, 1999, pp. 87– 93.

[4] Rakhsha, F. and Godenberg, A. A., “Dynamic Modeling of a Single Link Flexible Robot,” *Proceeding of IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 1985, pp. 1090-1095.

[5] Barraco, A., Cany, A. and Ishiomin, A., “Dynamic Models for Flexible Robot, Different Approaches,” *International Journal of Robotics Research,* Vol. 11, No. 4, 1986, pp. 1038-1042.

[6] Megahed, S. M. and Hamza, K. T., “Modeling and Simulation of Planar Flexible Link Manipulators with Rigid Tip Connections to Revolute Joints,” *Robotica*, Vol. 22, No. 3, 2004, pp. 285-300.

[7] Meghdari, A., “A Variational Approach for Modeling Flexibility Effects in Manipulator Arms,” *Robotica*, Vol. 9, No. 2, 1991, pp. 213-217.

[8] Green, A. and Sasiadek, J. Z., “Robot Manipulator Control for Rigid and Assumed Mode Flexible Dynamics Models,” *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit*, 2003, pp. 324-331.

[9] Tajdari, M., Hajabasi, M. A. and Khoogar, A. R., “A New Approach to Finite Element Modeling and Simulation of Flexible Robot Manipulators,” *Mech. & Aerospace Eng. Journal,* Vol. 4, No. 3, 2008, pp. 85-95.

[10] Abedi, E., Nadooshan, A. and Salehi, S., “Dynamic Modeling of Two Flexible Link Manipulators,” *International Journal of Natural Sciences and Engineering*, Vol. 2, No. 2, 2009, pp. 186–192.

[11] Korayem, M.H., Nazemizadeh M. and Rahimi, H.N., “Application of Finite Element Method on Modeling of Dynamic Behavior of Special Flexible Manipulator, and its Point-to-Point Path Planning”, *the 10th Conference of Iranian Aerospace Society,* Tehran, Tarbiat Moddares University, 1389 (In Persian).

[12] Pourtakdoust, S. H., Fakhri, M., and Assadian, N., “Development of an Integrated Design Environment for Optimal Ascent Trajectory Planning”, *Journal of Space Sience and Technology,* Vol. 1, No. 1, 2008, pp. 1-10 (In Persian).

[13] Fazelzadeh, S.A. and Varzandian, Gh.A., “Optimal Low-Thrust Spacecraft Trajectories Using Time-Domain Finite Element Method”, *Journal of Space Sience and Technology,* Vol. 1, No. 2, 2009, pp. 43-50 (In Persian).

[14] Wang, Ch., Timoszyk, E. and Bobrow J.E., “Payload Maximization for Open Chained Manipulator: Finding Motion for a Puma 762 Robot,” *IEEE Transaction on Robotics and Automation*, Vol. 17, No. 2, 2001, pp. 325-332.

[15] Ghariblu, H., Korayem, M.H., “Trajectory Optimization of Flexible Mobile Manipulators,” *Robotica*, Vol. 24, No. 3, 2006, pp. 333-335.

[16] Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. and Zhu, J.Z., *The Finite Element Method, its Basis and Fundamentals*, Elsevier Butterworth Heinemann, 2005.

[17] Korayem, M.H. and Nikoobin, A., “Maximum Payload for Flexible Joint Manipulators in Point-to-Point Task Using Optimal Control Approach,” The *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Vol. 38, No. 9-8, 2008, pp. 1045-1060.

[18] Kirk, D.E., *Optimal Control Theory, an Introduction*, Dover publications, 1970.

Archive of SID

www.SID.ir