

روش سطوح هم‌تراز مرتبه دوم در شبیه‌سازی عددی پسروی گرین

محمد مهدی قیصری^۱ و سید مهدی میرساجدی^{۲*}

۱- سازمان صنایع دفاع

۲- گروه مهندسی هوافضا، دانشگاه شهید بهشتی

* تهران، کدپستی: ۱۹۸۳۹۶۹۴۱۱

m_mirsajedi@sbu.ac.ir

در این تحقیق، پسروی گرین‌های دوبعدی موتورهای سوخت جامد با روش سطوح هم‌تراز مرتبه دوم شبیه‌سازی شده و این روش از نظر نحوه پیاده‌سازی، میزان دقت و زمان اجرا با روش سطوح هم‌تراز مرتبه اول مقایسه شده است. بدین منظور، با در نظر گرفتن الزامات کلی روش سطوح هم‌تراز و با هدف تحلیل پسروی، الگوریتمی متشکل از پنج گام شبکه‌بندی، محاسبه تابع حداقل فاصله، تعیین وضعیت نسبی، محاسبه مشخصه‌های بالستیکی و استخراج نتایج طراحی می‌شود. سپس در مرحله به‌روزرسانی تابع فاصله که در گام چهارم رخ می‌دهد، در یک مرحله از معادلات مرتبه اول و در مرحله بعد از معادلات مرتبه دوم استفاده می‌شود. برای اعتبارسنجی، ابتدا پسروی سه گرین ساده استوانه‌ای، چهارضلعی و شش‌ضلعی در نظر گرفته شده و نتایج به ازای دو شبکه ریز و درشت با نتایج تحلیلی مقایسه می‌شود؛ سپس با در نظر گرفتن چند گرین کاربردی پیچیده، تأثیر متقابل هندسه گرین، نوع سوزش، روش تحلیل و دقت نتایج سنجیده می‌شود. نتایج به‌دست آمده نشان می‌دهد روش سطوح هم‌تراز مرتبه دوم در تحلیل گرین‌های پیچیده، دقت بالاتری نسبت به روش مرتبه اول دارد، اما در گرین‌های ساده با وجود زمان اجرای بالاتر، تفاوت چشمگیری در نتایج دیده نمی‌شود. بنابراین، با مصالحه‌ای بین زمان اجرا و دقت حل، پیشنهاد می‌شود که تحلیل پسروی گرین‌های ساده با روش مرتبه اول و گرین‌های پیچیده با روش مرتبه دوم صورت پذیرد.

واژه‌های کلیدی: تحلیل عددی، پسروی گرین، سطوح هم‌تراز، روش مرتبه اول، روش مرتبه دوم

G	تابع شار عددی
g_{EO}	تابع شار عددی روش اینکوویست-اوشر
H	همیلتونین
m	تابع سوئیچ روش سطوح هم‌تراز مرتبه دوم
N	تعداد پره‌های گرین
\bar{n}	بردار یک‌عمود بر منحنی
P_b	محیط سوزش
R	شعاع موتور
\dot{r}	نرخ پسروی گرین
w	ضخامت جان گرین

علائم و اختصارات

A_p	سطح مقطع گذرگاه جریان
D^+	مشتق پیشرو مرتبه اول
D^-	مشتق پسرو مرتبه اول
$D^{\pm x \pm x}$	مشتق پیشرو (پسرو) مرتبه دوم در راستای X
$D^{\pm y \pm y}$	مشتق پیشرو (پسرو) مرتبه دوم در راستای Y
D^{+x-x}	مشتق مرکزی مرتبه دوم در راستای X
D^{+y-y}	مشتق مرکزی مرتبه دوم در راستای Y
EO	روش اینکوویست-اوشر برای تقریب عددی شار
F	تابع سرعت حرکت مرز در جهت قائم

۲. استادیار (نویسنده مخاطب)

۱. کارشناس ارشد

φ	تابع سطوح هم‌تراز
$r(r')$	شعاع انحنای گرین
$\varepsilon(\varepsilon')$	نسبت زاویه‌ای گرین
η	یکی از ۷ پارامتر مستقل گرین ستاره
$\beta(\beta')$	پارامتر زاویه‌ای گرین شاخه‌درختی

- روش میدان فازی^۷ [۷]

- روش سطوح هم‌تراز^۸

با توجه به اهمیت مسئلهٔ پسروری گرین همواره مطالعاتی در این زمینه انجام شده است؛ در سال ۱۹۸۹، ساینوت^۹ و همکارانش یک کد کامپیوتری را برای تحلیل پسروری گرین به صورت تابعی از فاصله و نرخ سوزش محلی ارائه دادند. اشکال این روش این بود که فقط در هندسه‌های متقارن قابل کاربرد بود [۸].

در سال ۱۹۹۴، هجل^{۱۰} و همکارانش با استفاده از روش نشان‌گر و سلول تحلیل پسروری گرین‌های دوبعدی را انجام دادند. روش حل آن‌ها فقط قابلیت کاربرد روی هندسه‌های متقارن را داشت و نتایج دقت بالایی نداشتند [۹].

در سال ۲۰۰۵، ویلکاکس^{۱۱} و همکارانش با استفاده از روش تابع حداقل فاصله شبیه‌سازی پسروری سطح سوزش گرین را انجام دادند. نتایج نشان داد که این روش دارای دقت کافی و زمان محاسبهٔ پذیرفتنی است ولی اشکالی که در نتایج ذکر شده، عدم پوشش هندسه‌های پیچیده بود [۱۰].

در سال ۲۰۰۸، فاوینی^{۱۲} و همکارانش باالستیک داخلی موتور زفیرو^{۱۳} (موتور مرحلهٔ سوم لانچر وگا^{۱۴}) را شبیه‌سازی کردند. در این تحقیق برای تحلیل پسروری از روش سطوح هم‌تراز و برای استخراج مشخصه‌های بالستیکی گرین از خواص توابع ضمنی (استفاده از توابع هویساید و دلتای دیراک) استفاده شده است. در این تحقیق مشخصه‌های بالستیکی موتور با داده‌های تجربی مقایسه شد که توافق خوبی را نشان دادند [۱۱].

در سال ۲۰۱۱، کاوالینی^{۱۵} و همکارانش یک کد عددی به نام "GREG"^{۱۶} را بر اساس روش سطوح هم‌تراز ارائه کردند. آن‌ها با لینک کردن این کد با کد تحلیل بالستیک داخلی موتور، به تحلیل جریان داخل موتور پرداختند و با مقایسهٔ نتایج خود با نتایج آزمایشگاهی جواب‌هایی با دقت بالا به‌دست آوردند [۱۲].

در سال ۲۰۱۲، قاسمی و برخوردار پسروری چند گرین سه‌بعدی کاربردی را به کمک روش سطوح هم‌تراز مرتبه اول شبیه‌سازی کردند. در این تحقیق با مدل‌سازی سوزش غیربک‌نواخت و تغییر شرایط مرزی اتمام سوزش، توانایی‌های بالای روش سطوح هم‌تراز نشان داده شده است [۱۳].

مقدمه

با شروع احتراق در یک موتور سوخت جامد، سطح اولیهٔ گرین در جهت عمود بر سطح سوزش پسروری می‌کند و هندسهٔ گرین را دست‌خوش تغییر می‌کند؛ بنابراین، طی عملکرد موتور، سطح سوزش و حجم محفظهٔ احتراق، همواره تغییر می‌کنند.

به‌منظور بررسی پارامترهای جریان داخل موتور موشک اعم از فشار، چگالی، سرعت، دما و ...، باید معادلات جریان در داخل محفظهٔ احتراق موتور حل شود؛ از آنجاکه حجم کنترل مربوط به حلگر جریان، همان سطح گذرگاه جریان یا حجم محفظهٔ احتراق است و این سطح طی زمان عملکرد موتور (پسروری گرین) در حال تغییر است، بنابراین، پیش‌بینی دقیق خصوصیات جریان داخل موتور منوط به تعیین دقیق مساحت سطح سوزش و حجم کنترل جریان در هر لحظه است [۲ و ۱].

تحلیل پسروری گرین، در واقع بررسی مرز متحرک و صرفاً یک تحلیل ریاضی و عددی است. بنابراین، تغییر شکل هندسی گرین، صرف‌نظر از جریان داخلی و اثرات حرارتی انجام شده و اطلاعات به‌دست آمده از تحلیل پسروری برای تحلیل بالستیک داخلی موتور مورد استفاده قرار می‌گیرد [۳].

به‌طور کلی، پسروری گرین به سه روش تحلیلی [۴]، ترسیمی و عددی قابل بررسی است؛ به دلیل عدم توانایی روش‌های تحلیلی و ترسیمی در بررسی گرین‌های با اشکال پیچیده و قابلیت‌های محدود این دو روش، بهتر است از روش‌های عددی استفاده شود. روش‌های عددی عموماً مرز متحرک بین گاز و پيشران جامد را مورد بررسی قرار می‌دهند و بر این اساس به دو دستهٔ کلی تعقیب مرز^۳ (لاگرانژی) و تسخیر مرز^۴ (ویلری) تقسیم می‌شوند. در روش‌های تسخیر مرز، طی گسترش مرز نقاط شبکه ثابت می‌مانند؛ روش‌های معروف تسخیر مرز عبارتند از:

- روش نشان‌گر و سلول^۵ [۵]

- روش حجم سیال^۶ [۶]

10. Hejl
11. Willcox
12. Favini
13. Zefiro 9
14. Vega
15. Cavallini
16. Grain Regression Model

3. Interface Tracking Method
4. Interface Capturing Method
5. Marker and Cell Method
6. Volume of Fluid Method: VOF
7. Phase Field Method
8. Level Set Method
9. Saintout

ابتدا حالت یک بعدی بررسی می شود که در این صورت $H(u) = \sqrt{u^2}$ و $\varphi_i + H(\varphi_x) = 0$ خواهد بود.

از طرف دیگر فرم یک بعدی و اسکالر قانون بقا هایدروبولیک به صورت رابطه (۶) در نظر گرفته شده و با استفاده از تقریب اختلاف محدود پیشرو برای ترم اول و تقریب اختلاف محدود مرکزی برای ترم دوم معادله بقا به صورت رابطه (۷) بازنویسی می شود.

$$u_t + [G(u)]_x = 0 \quad (6)$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = - \frac{g(u_i^n, u_{i+1}^n) - g(u_{i-1}^n, u_i^n)}{\Delta x} \quad (7)$$

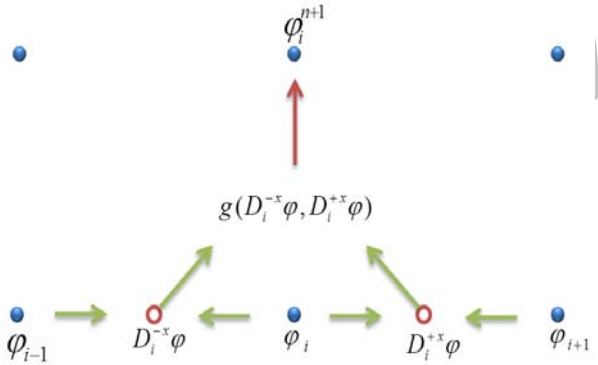
در سمت راست رابطه (۷)، تنها اختلاف مرکزی به تابع شار عددی g اعمال شده است؛ بنابراین، وقتی اندازه شبکه به سمت صفر میل کند، $g(u, u) = G(u)$ می شود.

برای حل معادله سطوح هم تراز، فرض می شود $u = \varphi_x$ ، در این صورت می توان نوشت:

$$\varphi_t + H(u) = 0 \quad (8)$$

با توجه به شبکه محاسباتی شکل (۱) برای به دست آوردن φ_i^{n+1} باید φ_i^n و متعاقباً $H(u_i^n)$ معلوم باشند. بدین منظور برای $H(u_i^n)$ از یک مقدار تقریبی که توسط تابع شار عددی g تعیین شده، استفاده می شود:

$$H(u) \approx g(u_{i-1/2}, u_{i+1/2}) \quad (9)$$



شکل ۱- به روزرسانی φ از طریق همیتونین عددی.

تنها پارامتر باقیمانده، محاسبه مقادیر u در وسط سلول های محاسباتی است؛ از آنجا که $u = \varphi_x$ ، برای یافتن مقادیر جدید از یک تقریب اختلاف مرکزی در φ استفاده می شود. بنابراین با استفاده از شکل (۱) می توان به رابطه (۱۰) رسید.

$$\varphi_i^{n+1} = \varphi_i^n - \Delta t g\left(\frac{\varphi_i^n - \varphi_{i-1}^n}{\Delta x}, \frac{\varphi_{i+1}^n - \varphi_i^n}{\Delta y}\right) \quad (10)$$

در ادامه، مقادیر شار باید به گونه ای انتخاب شوند که شکل بقایی معادله حفظ و شرایط بی نظمی نیز ارضا شود و علاوه بر آن یک جواب هموار با دقت بالا و به دور از ناپوستگی ایجاد شود. یکی

در سال ۲۰۱۲، مشیراستخاره و همکارانش با ترکیب روش های المان برشی و سطوح هم تراز مرتبه اول توانستند به دقت بالایی در تحلیل پسروی گرین دست یابند [۱۴].

در سال ۲۰۱۳، قیصری و میرساجدی با دو هدف کاهش زمان اجرا و افزایش دقت حل، الگوریتم تحلیل پسروی با روش سطوح هم تراز مرتبه اول را بهبود دادند [۱۵].

از بررسی منابع مختلفی که در زمینه تحلیل عددی پسروی گرین فعالیت داشته اند، دو نکته قابل استفاده است؛ اول این که بین روش های عددی، روش تسخیر مرز سطوح هم تراز در سال های اخیر بسیار مورد توجه محققان قرار گرفته و دقت بالایی را در پیگیری مرز از خود نشان داده است و نکته دوم اینکه در همه مطالعات گذشته تنها روش سطوح مرتبه اول مورد توجه قرار گرفته و روش مرتبه دوم بررسی نشده است. با توجه به این موارد، در این تحقیق، معادلات مرتبه دوم نیز پیاده سازی شده و نتایج حاصله از نظر دقت و زمان اجرا با نتایج معادلات مرتبه اول مقایسه می شوند.

تئوری و معادلات حاکم

روش سطوح هم تراز، زیرمجموعه ای از روش های تسخیر مرز است که در آن شبکه محاسباتی ایجاد شده بر روی جریان ثابت بوده و ذرات جریان توسط شبکه تسخیر می شوند.

ایده اصلی روش سطوح هم تراز، در نظر گرفتن موقعیت اولیه مرز به عنوان یک سطح تراز صفر، از یک تابع φ با بعد بالاتر است. برای به دست آوردن معادله حرکت این تابع سطح تراز φ و ترکیب سطح تراز صفر φ با توسعه مرز، ابتدا لازم است که مقدار سطح تراز یک جزء روی مرز صفر باشد از این رو:

$$\varphi(x(t), t) = 0 \quad (1)$$

و با استفاده از قانون مشتق زنجیره ای می توان نوشت:

$$\varphi_t + \nabla \varphi(x(t), t) \cdot x'(t) = 0 \quad (2)$$

از آنجا که F سرعت حرکت مرز در جهت عمود بر آن و به سمت بیرون است و $x'(t) \cdot n = F$ که $n = \nabla \varphi / |\nabla \varphi|$ ، بنابراین، معادله توسعه مرز φ به صورت زیر به دست می آید:

$$\varphi(x, t = 0) \quad \varphi_t + F |\nabla \varphi| = 0, \quad (3)$$

این رابطه سطوح هم تراز وابسته به زمان است که توسط ستیان ارائه شده است [۱۶].

برای تقریب عددی معادله روش سطوح هم تراز، ابتدا رابطه (۲) به شکل عمومی معادله همیتونین نوشته می شود:

$$\varphi_t + H(\varphi_x, \varphi_y) = 0 \quad (4)$$

در معادله فوق همیتونین به صورت زیر تعریف می شود:

$$H(u, v) = \sqrt{u^2 + v^2} \quad (5)$$

$$\nabla^+ = [\max(A, 0)^2 + \min(B, 0)^2 + \max(C, 0)^2 + \min(D, 0)^2]^{1/2} \quad (17)$$

$$\nabla^- = [\max(B, 0)^2 + \min(A, 0)^2 + \max(D, 0)^2 + \min(C, 0)^2]^{1/2}$$

که A, B, C و D به کمک روابط (۱۸) محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned} A &= D_{ijk}^{-x} + \frac{\Delta x}{2} m(D_{ijk}^{-x-x}, D_{ijk}^{+x-x}) \\ B &= D_{ijk}^{+x} - \frac{\Delta x}{2} m(D_{ijk}^{+x+x}, D_{ijk}^{+x-x}) \\ C &= D_{ijk}^{-y} + \frac{\Delta y}{2} m(D_{ijk}^{-y-y}, D_{ijk}^{+y-y}) \\ D &= D_{ijk}^{+y} - \frac{\Delta y}{2} m(D_{ijk}^{+y+y}, D_{ijk}^{+y-y}) \end{aligned} \quad (18)$$

در این روابط تابع سوئیچ به صورت رابطه (۱۹) تعریف می‌شود:

$$m(x, y) = \begin{cases} 0 & xy < 0 \\ \begin{cases} x & \text{if } |x| \leq |y| \\ y & \text{if } |x| > |y| \end{cases} & xy \geq 0 \end{cases} \quad (19)$$

شبیه‌سازی پسروری گرین

الگوریتمی که برای تحلیل پسروری گرین‌های دوبعدی با روش سطوح هم‌تراز استفاده می‌شود، از پنج گام تشکیل شده است [۱۴ و ۱۵].

گام ۱- شبکه‌بندی

در این گام ابتدا، اطلاعات شبکه پورت (شبکه اولیه) که بیرون از کد اصلی و توسط یک نرم‌افزار تولید شبکه ایجاد شده، به صورت یک فایل عددی فراخوانی می‌شود. سپس با طبقه‌بندی داده‌های شبکه اولیه، ابعاد گرین تعیین می‌شود و بر این اساس در صفحه‌ای که موتور در آن واقع شده یک شبکه کارترین ایجاد می‌شود.

گام ۲- تعیین تابع حداقل فاصله

برای تحلیل پسروری با روش سطوح هم‌تراز، ابتدا لازم است موقعیت اولیه مرز یا سطح تراز صفر تعیین شود که بدین منظور از تابع حداقل فاصله استفاده می‌شود. برای تعیین تابع فاصله، فاصله هر گره شبکه کارترین با تمام نقاط شبکه اولیه محاسبه می‌شود و کمترین فاصله محاسبه شده به عنوان تابع فاصله برای گره مورد نظر در شبکه کارترین (φ_{ij}) در نظر گرفته می‌شود و این عمل برای کلیه نقاط شبکه ثانویه تکرار می‌شود.

گام ۳- تعیین وضعیت نسبی نقاط

برای تعیین علامت تابع فاصله، باید موقعیت هر یک از نقاط شبکه کارترین نسبت به مرز گرین سنجیده شود. این کار به کمک

از ساده‌ترین تقریب‌های عددی شار روش انکوئیست-اوشر (EO) است. با کاربرد روش EO برای معادله برگرز که در آن $G(u) = u^2$ ، تابع شار به صورت زیر خواهد شد:

$$g_{EO}(u_1, u_2) = (\max(u_1, 0)^2 + \min(u_2, 0)^2) \quad (11)$$

بنابراین با در نظر گرفتن همیلتونین $H(u) = \sqrt{u^2}$ و با استفاده از رابطه (۱۱) می‌توان نوشت:

$$\varphi_i^{n+1} = \varphi_i^n - \Delta t (\max(D_i^{-x}, 0)^2 + \min(D_i^{+x}, 0)^2)^{1/2} \quad (12)$$

این رابطه، روش سطوح هم‌تراز یک‌بعدی ارائه شده توسط ستیان است [۱۶] و تا زمانی که همیلتونین در هر بعد فضا متقارن باشد، برای هر متغیر در ابعاد دیگر می‌تواند به کار گرفته شود.

برای به دست آوردن معادله سطوح هم‌تراز در فضای دوبعدی، با در نظر گرفتن تابع سرعت F، معادله همیلتونین $\varphi_t + H(\varphi_x, \varphi_y) = 0$ به صورت زیر تقریب زده خواهد شد:

$$\begin{aligned} \varphi_{i,j}^{n+1} &= \varphi_{i,j}^n - \Delta t g \left(\frac{\varphi_{i,j}^n - \varphi_{i-1,j}^n}{\Delta x}, \frac{\varphi_{i+1,j}^n - \varphi_{i,j}^n}{\Delta x}, \right. \\ &\quad \left. \frac{\varphi_{i,j}^n - \varphi_{i,j-1}^n}{\Delta y}, \frac{\varphi_{i,j+1}^n - \varphi_{i,j}^n}{\Delta y} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

و با کاربرد روش EO خواهد شد:

$$g(u_1, u_2, v_1, v_2) = (\max(u_1, 0)^2 + \min(u_2, 0)^2 + \max(v_1, 0)^2 + \min(v_2, 0)^2) \quad (14)$$

در نهایت، ستیان شکل کلی معادله سطوح هم‌تراز دوبعدی را به صورت زیر ارائه کرد:

$$\varphi_{i,j}^{n+1} = \varphi_{i,j}^n - \Delta t (\max(F, 0) \nabla^+ + \min(F, 0) \nabla^-) \quad (15)$$

سطوح هم‌تراز مرتبه اول

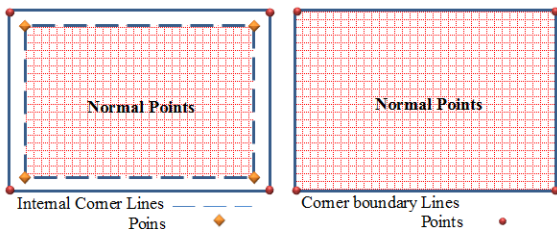
در روش سطوح هم‌تراز مرتبه اول دو پارامتر ∇^+ و ∇^- با استفاده از رابطه (۱۶) تعریف و در رابطه (۱۵) جایگذاری می‌شوند:

$$\begin{aligned} \nabla^+ &= [\max(D_{i,j}^{-x} \varphi_{i,j}^n, 0)^2 + \min(D_{i,j}^{+x} \varphi_{i,j}^n, 0)^2 + \max(D_{i,j}^{-y} \varphi_{i,j}^n, 0)^2 + \min(D_{i,j}^{+y} \varphi_{i,j}^n, 0)^2]^{0.5} \\ \nabla^- &= [\max(D_{i,j}^{+x} \varphi_{i,j}^n, 0)^2 + \min(D_{i,j}^{-x} \varphi_{i,j}^n, 0)^2 + \max(D_{i,j}^{+y} \varphi_{i,j}^n, 0)^2 + \min(D_{i,j}^{-y} \varphi_{i,j}^n, 0)^2]^{0.5} \end{aligned} \quad (16)$$

سطوح هم‌تراز مرتبه دوم

با بهره‌گیری از افزایش دقت در مسائل غیرنوسانی، می‌توان معادله سطوح هم‌تراز را برای مرتبه بالاتر گسترش داد [۱۷]. در این روش هر زمان یک شوک تشخیص داده شود خود به خود حل متوقف شده و در غیر این صورت نوسانات با تقریب مرتبه بالاتر حداقل می‌شود. شکل کلی این روش همان رابطه (۱۵) است، با این تفاوت که ∇^+ و ∇^- به صورت زیر تعریف می‌شوند:

- در روش مرتبه اول مشتقات پیشرو و پسرو تنها شامل مشتقات $D_{i,j}^{+x}$ ، $D_{i,j}^{+y}$ است، اما در روش مرتبه دوم علاوه بر مشتقات مرتبه اول، مشتقات $D_{i,j}^{+x-x}$ ، $D_{i,j}^{+y-y}$ ، $D_{i,j}^{+x-x}$ ، $D_{i,j}^{+y-y}$ نیز باید پیاده‌سازی شود.
- بر خلاف روش مرتبه اول، در روابط مرتبه دوم یک تابع سوئیچ وجود دارد (معادله ۱۹) که باید مدل‌سازی شود.
- با توجه به عدم تعریف مشتق پیشرو یا پسرو در نقاط مرزی، در پیاده‌سازی روش مرتبه اول نقاط شبکه ثانویه به سه گروه خطوط گوشه مرزی، نقاط گوشه مرزی و نقاط عادی تقسیم می‌شوند (شکل ۳-الف)، اما در روش مرتبه دوم از آنجا که مرتبه مشتقات بالاترند، نقاط شبکه ثانویه به پنج گروه خطوط گوشه مرزی، خطوط گوشه داخلی، نقاط گوشه مرزی، نقاط گوشه داخلی و نقاط عادی تقسیم می‌شوند (شکل ۳-ب).



الف) روش مرتبه اول (ب) روش مرتبه دوم

شکل ۳- گروه‌بندی نقاط شبکه ثانویه بر اساس تعریف مشتق پیشرو و پسرو در هر گروه

با توجه به موارد ذکر شده، باید گفت پیاده‌سازی روش سطوح هم‌تراز مرتبه دوم بسیار دشوارتر و پیچیده‌تر از روش مرتبه اول است اما با هدف بهبود دقت و مقایسه نتایج با روش مرتبه اول، این مهم انجام می‌شود.

اعتبارسنجی و تحلیل نتایج

منطقی‌ترین راه برای ارزیابی عملکرد روش سطوح هم‌تراز مرتبه دوم، مقایسه نتایج عددی این روش با نتایج تحلیلی است. با توجه به این که در بیشتر گرین‌های متداول دوبردی، رابطه‌ای تحلیلی برای توصیف پسروری وجود ندارد، سه گرین استوانه‌ای، چهارضلعی و شش ضلعی با مشخصات جدول (۱) برای اعتبارسنجی انتخاب می‌شوند [۴].

علاوه بر داشتن حل تحلیلی، در انتخاب این گرین‌ها دو دلیل دیگر مورد توجه بوده است:

- ۱- گرین‌های چهارضلعی و شش ضلعی دارای نقاط گوشه هستند و پیگیری نقاط گوشه از مهم‌ترین و دشوارترین نقاط در یک روش تسخیر مرز محسوب می‌شوند، به طوری که اگر یک

المان‌های مثلثی شبکه اولیه و روش ضرب خارجی انجام می‌شود. پس از مشخص شدن وضعیت نسبی نقاط تابع فاصله با توجه به قوانین زیر تصحیح می‌شود:

- ✓ اگر نقطه شبکه در داخل مرز واقع شده باشد، مقدار حداقل فاصله در ۱- ضرب می‌شود.
- ✓ اگر نقطه شبکه در خارج از مرز باشد، مقدار حداقل فاصله بدون تغییر باقی می‌ماند.
- ✓ اگر نقطه شبکه دقیقاً روی مرز قرار گیرد، حداقل فاصله صفر در نظر گرفته می‌شود.

گام ۴- محاسبه مشخصه‌های بالستیکی

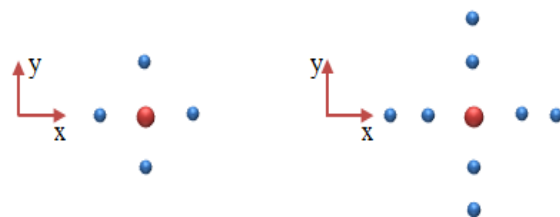
با پسروری گرین مشخصه‌های بالستیکی سطح سوزش و مساحت گذرگاه جریان تغییر می‌کنند، بنابراین لازم است در هر گام زمانی این مشخصه‌ها محاسبه شوند. بدین منظور در هر گام زمانی ابتدا مقدار تابع فاصله (ρ_{ij}) به کمک معادله سطوح هم‌تراز (رابطه ۱۵) به‌روزرسانی می‌شود؛ سپس با استفاده از مقادیر جدید تابع فاصله و روش المان برشی پارامترهای سطح سوزش و مساحت گذرگاه جریان محاسبه می‌شود [۱۴ و ۱۵].

گام ۵- استخراج نتایج

در انتهای الگوریتم، داده‌های مرتبط با شبکه‌های تشکیل شده، پارامترهای بالستیکی، پروفیل پسروری و زمان اجرا جمع‌بندی و استخراج می‌گردد.

با توجه به الگوریتم تشریح شده، تفاوت دو الگوریتم سطوح هم‌تراز مرتبه اول و دوم در گام ۴ و در نحوه به‌روزرسانی تابع فاصله است. بر این اساس، پیاده‌سازی الگوریتم روش سطوح هم‌تراز مرتبه اول و دوم از جنبه‌های زیر تفاوت دارند:

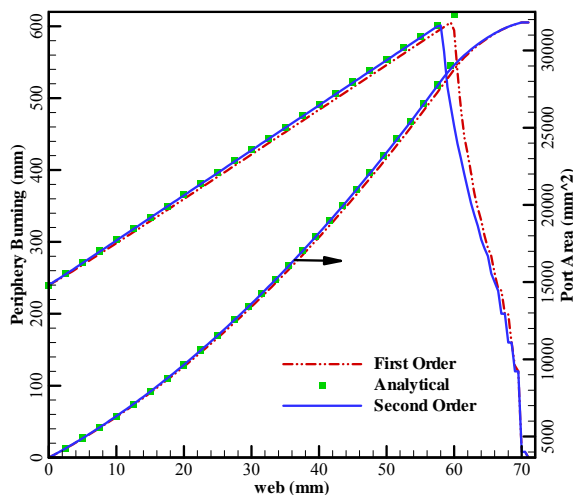
- در روش مرتبه اول به‌روزرسانی تابع فاصله تنها به کمک نزدیک‌ترین نقاط مجاور است (۴ گره) اما روش مرتبه دوم از نقاط بیشتری استفاده می‌کند (شکل ۲).



الف) روش مرتبه اول (ب) روش مرتبه دوم

شکل ۲- نقاط مورد استفاده برای به‌روزرسانی تابع فاصله

(b) به ازای یک شبکه بندی یکسان، روش مرتبه دوم دقت بالاتری در محاسبه محیط سوزش و سطح گذرگاه جریان دارد؛
(c) زمان اجرای روش مرتبه دوم بیشتر از روش مرتبه اول است؛
(d) عملکرد روش مرتبه دوم وابستگی کمتری به ابعاد شبکه دارد، به نحوی که با درشت شدن ابعاد شبکه، دقت روش مرتبه اول کاهش محسوسی می یابد اما دقت روش مرتبه دوم تغییر چندانی نمی کند.
(e) تأثیر روش مرتبه دوم در کاهش درصد خطای A_p بیشتر از P_b است؛
(f) بین سه گرین مفروض بیشترین و کمترین تأثیر روش مرتبه دوم به ترتیب برای گرین های استوانه ای و شش ضلعی است.
نتایج a تا d با توجه به مفهوم روش سطوح هم تراز مرتبه دوم به سادگی توجیح پذیرند؛ مورد a با توجه به ساختار و الگوریتم یکسان دو روش، حتی پیش از مشاهده نتایج نیز قابل پیش بینی بود؛ شکل (۴) با تأکید بر نتیجه a نشان می دهد به ازای یک شبکه بندی 256×256 با ۲۵۸ گره مرزی، هر دو روش رفتار مشابهی در پیگیری مرز دارند.



شکل ۴- مقایسه روش مرتبه اول و دوم در تحلیل پسروری گرین مربعی

همان گونه که پیشتر در شکل (۲) نشان داده شد، در روش سطوح هم تراز مرتبه دوم از ۸ گره برای به روزرسانی تابع فاصله استفاده می شود، در حالی که در روش مرتبه اول تنها ۴ گره مورد استفاده قرار می گیرد. این اختلاف ساختاری اگرچه نتایج b و c را توجیه می کند، اما می تواند این تردید را به وجود آورد که در شبکه های درشت به دلیل فاصله زیاد گره ها، ممکن است روش مرتبه دوم دچار خطا شود. نتایج جدول (۳) و مورد d با رد این پیش بینی نشان می دهند که همواره روش مرتبه دوم دقت بالاتری دارد؛ بنابراین در شبکه های درشت استفاده از روش مرتبه دوم در اولویت قرار دارد.

برای توجیه مورد e پروفیل پسروری گرین های مربع و شش ضلعی به صورت شکل (۵) در نظر گرفته می شوند؛ بررسی این

روش عددی تسخیر مرز بتواند نقاط گوشه را با دقت پیگیری کرده و دچار خطا نشود، روش عددی مطلوبی خواهد بود [۱۷]؛
۲- با وجود سه نوع گوشه تیز (۹۰ درجه)، متوسط (۱۲۰ درجه) و پخ (گرین استوانه ای) می توان تأثیر گوشه ها را در دقت پسروری هر روش بررسی کرد.

جدول ۱- مشخصات گرین های مفروض برای اعتبارسنجی

نوع گرین	شعاع خارجی (mm)	شعاع داخلی / طول ضلع (mm)	ضخامت جان (mm)
استوانه ای	۱۱۱	۴۱	۷۰
چهارضلعی	۱۴۱	۱۰۰	۷۰
شش ضلعی	۹۰	۳۰	۷۰

با در نظر گرفتن گرین های جدول (۱)، تحلیل عددی پسروری به ازای دو شبکه با ابعاد ریز و درشت انجام شده و نتایج دو روش سطوح هم تراز مرتبه اول و دوم در جدول های (۲) و (۳) نسبت به حل تحلیلی سنجیده می شود.

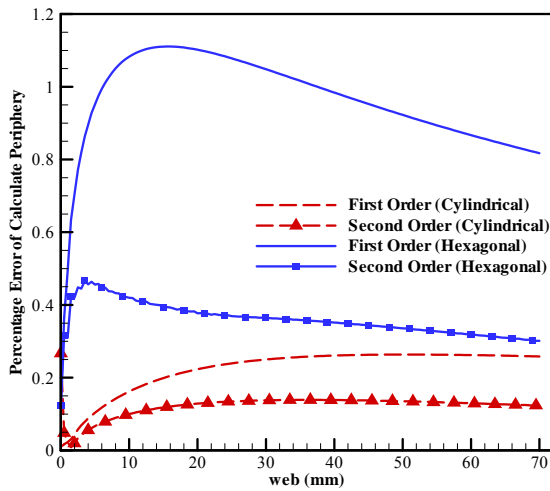
جدول ۲- ارزیابی دقت و زمان اجرای روش سطوح هم تراز مرتبه اول

اندازه شبکه	نوع گرین	حداکثر درصد خطا P_b	حداکثر درصد خطا A_p	زمان اجرا
256×256 گره ۲۵۸	استوانه ای	۰/۱۹	۰/۳۹	۳۰
	چهارضلعی	۱/۳۷	۱/۶۴	۱۶۹
	شش ضلعی	۱/۱۱	۱/۲۵	۱۶
128×128 گره ۱۴۰	استوانه ای	۰/۲۲	۰/۴۵	۱۱
	چهارضلعی	۱/۶۳	۱/۸۸	۴۰
	شش ضلعی	۱/۳۱	۱/۵۲	۶

جدول ۳- ارزیابی دقت و زمان اجرای روش سطوح هم تراز مرتبه دوم

اندازه شبکه	نوع گرین	حداکثر درصد خطا P_b	حداکثر درصد خطا A_p	زمان اجرا
256×256 گره ۲۵۸	استوانه ای	۰/۰۸	۰/۱۸	۳۶
	چهارضلعی	۰/۸۳	۰/۶۸	۱۸۰
	شش ضلعی	۰/۴۶	۰/۴۵	۲۱
128×128 گره ۱۴۰	استوانه ای	۰/۱۱	۰/۲۴	۱۵
	چهارضلعی	۰/۹۸	۱/۳۲	۴۵
	شش ضلعی	۰/۵۷	۰/۸۶	۹

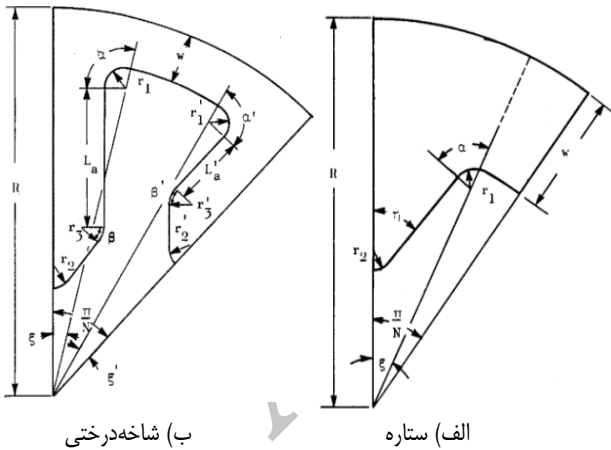
با بررسی داده های جدول های (۲) و (۳) می توان به نتایج ذیل رسید:
(a) هر دو روش سطوح هم تراز مرتبه اول و دوم دقت مناسبی در تحلیل پسروری دارد؛



شکل ۶- مقایسه درصد خطا در محاسبه Pb با دو روش مرتبه اول و دوم

الف) گرین‌های با هندسه پیچیده

به منظور ارزیابی روش سطوح هم‌تراز مرتبه دوم در مواجهه با پیچیدگی‌های هندسی، دو گرین کاربردی ستاره و شاخه‌درختی شش‌پر (N=6) با مشخصات جدول (۴) و شکل (۷) در موتوری با شعاع ۱۵۰ (R=150mm) بررسی می‌شوند.

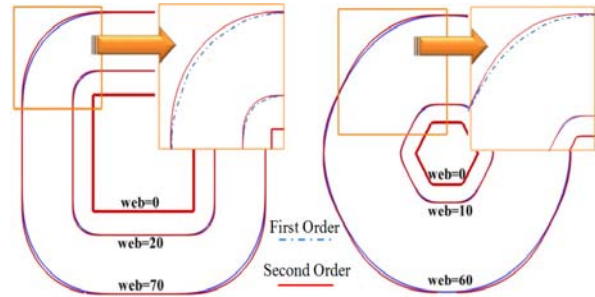


شکل ۷- پارامترهای مؤثر در ترسیم دو گرین کاربردی مفروض [۱]

جدول ۴- پارامترهای دو گرین مفروض در شکل ۷

گرین ستاره						
N	R	W	r ₁	r ₂	η	ε
۶	۰/۸۳	۶۰	۱۰	۸	۳۳/۵۳	۰/۸۳
گرین شاخه درختی						
W	r ₁ = r ₁ '	r ₂ = r ₂ '	r ₃ = r ₃ '	β = β'	l _a = l _a '	ε = ε'
۴۰	۵	۲/۵۱	۶	۴۰	۴۶/۷	۰/۲۶

پروفیل‌ها نشان می‌دهد که اختلاف دو روش تنها مربوط به توصیف نقاط گوشه است و در سایر نقاط دو روش رفتار مشابهی دارند. بنابراین، با مقایسه عملکرد دو روش در توصیف نقاط گوشه می‌توان علت تأثیر بیشتر روش مرتبه دوم بر Ap را دریافت.



شکل ۸- مقایسه پروفیل پسروری گرین‌های چهارضلعی و شش‌ضلعی با دو روش مرتبه اول و دوم

اختلاف عملکرد سطوح هم‌تراز مرتبه اول و دوم مربوط به توصیف نقاط گوشه است و مقدار این اختلاف بستگی به دو عامل «نوع گوشه» (میزان تیزی) و «تعداد گوشه‌ها» دارد. بر این اساس واضح است که روش مرتبه دوم کمترین تأثیر را بر گرین استوانه‌ای داشته باشد اما با توجه به این که در گرین مربعی ۴ گوشه ۹۰ درجه و در گرین شش‌ضلعی ۶ گوشه ۱۲۰ درجه وجود دارد، ممکن است تأثیر روش مرتبه دوم بر هر یک بیشتر باشد. ابعاد و طراحی گرین‌های مفروض در جدول (۱) به گونه‌ای است که تأثیر تعداد گوشه نسبت به نوع گوشه بیشتر است و همان گونه که در شکل (۶) نشان داده شده است، بیشترین تأثیر روش مرتبه دوم برای گرین شش‌ضلعی رخ می‌دهد (نتیجه f).

بررسی نتایج نشان می‌دهد، روش سطوح هم‌تراز مرتبه دوم همواره پسروری گرین را با دقت و زمان بالاتری نسبت به روش مرتبه اول تحلیل می‌کند. بنابراین، با مصالحه‌های بین زمان اجرا و دقت حل پیشنهاد می‌شود، گرین‌هایی که دارای تعداد انحنای زیاد یا انحنای کم باشند را با روش مرتبه دوم و گرین‌های با هندسه هموار را با روش مرتبه اول تحلیل کرد. به منظور بررسی دقیق‌تر موضوع، پسروری چند گرین پیچیده در ادامه مورد بررسی قرار می‌گیرد.

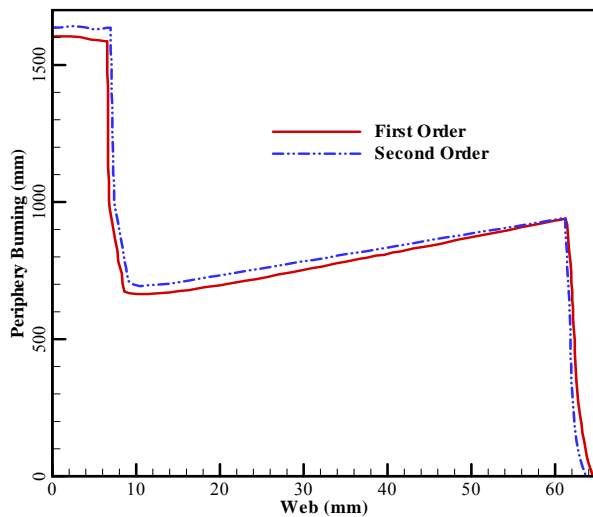
تحلیل پسروری گرین‌های پیچیده

در این تحقیق، منظور از گرین‌های پیچیده، گرین‌هایی است که دارای یکی از ویژگی‌های زیر باشد:

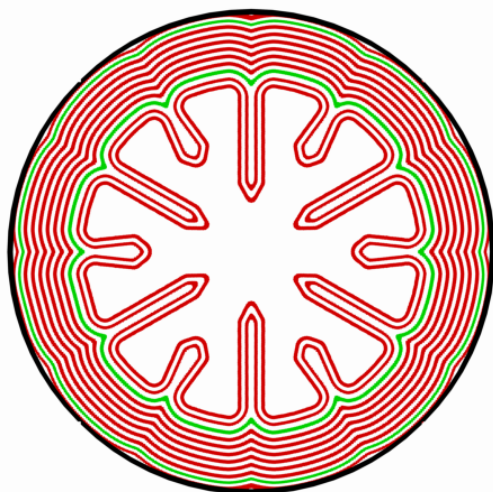
- ✓ انحنای زیاد و تیز (پیچیدگی هندسه)
- ✓ در حین پسروری نقاط گوشه تشکیل دهد (پیچیدگی هندسه)
- ✓ درون‌سوز- برون‌سوز (پیچیدگی تابع سرعت)

برخی دیگر زیاد است. برای توضیح این علت موضوع، از پروفیل پسروری گرین استفاده می‌شود. همان‌گونه که در شکل (۱۱) مشخص است، در مرحله اول سوزش گرین شاخه‌درختی، پیچیدگی‌ها زیاد است و در نتیجه اختلاف دو روش نیز قابل توجه خواهد بود. در مرحله دوم و پس از اتمام سوزش شاخه‌ها، همچنان تعدادی نقاط گوشه باقی می‌ماند که باعث اختلاف نتایج می‌شود؛ اما رفته رفته تیزی این نقاط کاهش یافته و مرز گرین به شکل دایروی نزدیک می‌شود که در نتیجه اختلاف دو روش نیز به کمترین مقدار خود می‌رسد.

به منظور این که اختلاف دو روش قابل نمایش باشد، از شبکه زمینه درشتی استفاده شد، در صورتی که به ازای شبکه‌های ریز اختلاف دو روش کمتر از مقدار نمایش داده شده است.



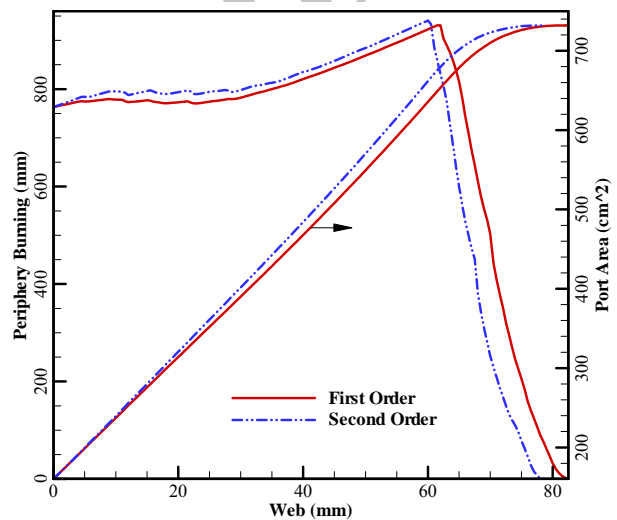
شکل ۱۰- مقایسه دقت روش سطوح هم‌تراز مرتبه اول و دوم در تحلیل یک گرین شاخه‌درختی



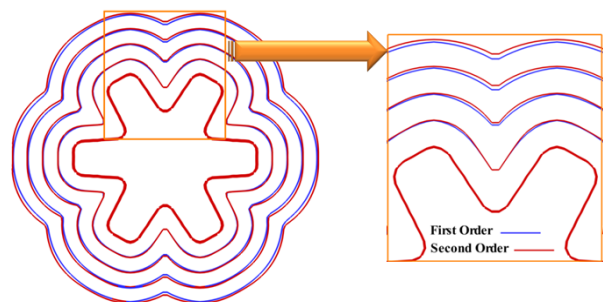
شکل ۱۱- پروفیل پسروری یک گرین شاخه‌درختی

همان‌گونه که شکل (۷-ب) و داده‌های جدول (۴) نشان می‌دهد، گرین شاخه‌درختی مفروض دارای تعداد انحنای زیاد و با شعاع کم است. از طرف دیگر حین پسروری گرین ستاره یکسری نقاط گوشه به وجود می‌آید، بنابراین، طبق نتایج قبل، انتظار می‌رود روش مرتبه دوم برای تحلیل این دو گرین مقرون به صرفه‌تر باشد.

برای بررسی این موضوع ابتدا گرین ستاره با دو روش مرتبه اول و دوم تحلیل می‌شود و تغییرات محیط سوزش و سطح گذرگاه جریان به صورت شکل (۸) ترسیم می‌شود. منحنی‌های این شکل نشان می‌دهد، در گام‌های ابتدایی دو روش نتایج مشابهی دارند اما با تشکیل نقاط تیز، نتایج دو روش رفته رفته از هم فاصله می‌گیرند که علت این مسئله را به وضوح می‌توان در شکل (۹) مشاهده کرد.

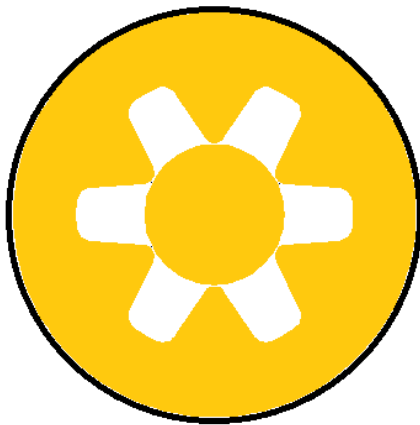


شکل ۸- مقایسه دقت روش سطوح هم‌تراز مرتبه اول و دوم در تحلیل یک گرین ستاره

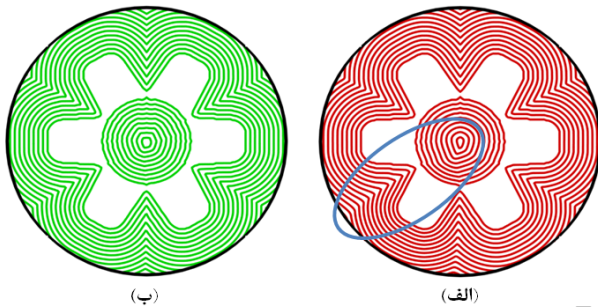


شکل ۹- مقایسه پروفیل پسروری گرین ستاره با دو روش سطوح هم‌تراز مرتبه اول و دوم

در ادامه، نتایج پسروری گرین شاخه‌درختی به صورت شکل (۱۰) ارائه می‌شود. بررسی این منحنی‌ها نشان می‌دهد، عملکرد دو روش همواره اختلاف دارند اما مقدار این اختلاف در برخی مناطق کم و در



شکل ۱۲- یک نمونه فرضی برای گرین های درون سوز- برون سوز



شکل ۱۳- پروفیل پسروری گرین مفروض با دو روش الف) مرتبه اول ب) مرتبه دوم

بررسی پروفیل های پسروری نشان می دهد که روش مرتبه اول بر خلاف روش مرتبه دوم در نقاطی از مرز دچار خطا می شود. علت این مسئله را می توان به عدم توانایی روش مرتبه اول در توصیف مرزهای دو تکه (با تابع سرعت پیچیده)، مربوط دانست. در مجموع بررسی نتایج نشان می دهد، روش سطوح هم تراز مرتبه دوم در تحلیل پسروری گرین های پیچیده (پیچیدگی هندسی و تابع سرعت) عملکرد مطلوب تری نسبت به روش مرتبه اول دارد.

نتیجه گیری

هدف از این تحقیق، پیاده سازی و ارزیابی روش سطوح هم تراز مرتبه دوم در تحلیل پسروری گرین های دوبعدی بود. بدین منظور با در نظر گرفتن الگوریتمی مناسب، از معادلات مرتبه اول و دوم در روش سطوح هم تراز برای محاسبه پارامترهای پسروری استفاده شد. برای ارزیابی عملکرد روش مرتبه دوم، ابتدا نتایج عددی این روش با نتایج تحلیلی و روش مرتبه اول مقایسه شد؛ سپس طی دو مرحله عملکرد روش در مواجهه با گرین هایی با هندسه پیچیده و

نکته دیگری که می تواند مورد توجه قرار گیرد، زمان اجراست؛ بدین منظور زمان اجرای الگوریتم دو روش به صورت گام به گام بررسی و نتایج به صورت جدول (۵) ارائه می شود. نتایج جدول (۵) از دو جنبه قابل بررسی است؛ اول این که زمان اجرای دو الگوریتم مرتبه اول و دوم در تمام گام ها به جز گام ۴ (محاسبه مشخصه های بالستیکی) تقریباً یکسان است. نکته دوم هم در این است که اختلاف زمان اجرای کلی دو روش قابل توجه نیست.

جدول ۵- مقایسه زمان اجرای روش سطوح هم تراز مرتبه اول و دوم

گرین	زمان اجرا (sec)				
	گام ۱	گام ۲	گام ۳	گام ۴	گام ۵
روش مرتبه اول					
ستاره	۱/۱	۶	۳۰۶/۱۵	۹۵/۶۹	۰/۰۷
شاخه-درختی	۴/۱۹	۱۹/۰۴	۸۰۱/۳۱۴	۸۱/۱۹	۰/۴۵
روش مرتبه دوم					
ستاره	۱/۱۵	۵/۸۸	۱۸۳/۵۸	۱۵۰/۴۹	۰/۱۱
شاخه-درختی	۴/۱۵	۱۸/۵۱	۸۲۷/۳۹	۱۲۷/۲۸	۰/۳۴

ارزیابی زمان های اجرا و دقت نتایج نشان می دهد، برای تحلیل پسروری گرین هایی با پیچیدگی هندسی، بهتر است از روش مرتبه دوم استفاده شود.

ب) گرین های با تابع سرعت پیچیده

در گرین های معمولی، مرز از یک منحنی بسته تشکیل شده که با یک سرعت مثبت به سمت بدنه موتور حرکت می کند؛ اما در گرین های درون سوز- برون سوز، در هر لحظه، مرز از دو منحنی تشکیل شده که یکی با تابع سرعت مثبت و دیگری با تابع سرعت منفی گسترش می یابند. در این قسمت با هدف ارزیابی روش سطوح هم تراز مرتبه دوم در مواجهه با پیچیدگی های تابع سرعت، گرینی مرکب از دو هندسه استوانه ای برون سوز (با شعاع ۴۶/۱۱) و ستاره ای درون سوز (با مشخصات جدول ۴) به صورت شکل (۱۲) در نظر گرفته می شود.

با تشکیل شبکه اولیه ای با ۲۹۳۹ گره و ۵۳۴۴ مان و شبکه ثانویه ای با ابعاد ۲۷۲×۲۷۲ پسروری گرین مفروض تحلیل می شود. برای بررسی عملکرد دو روش، پروفیل پسروری گرین استخراج و به صورت شکل (۱۳) نمایش داده می شود.

- Boundaries," *Computational Physics*, Vol. 39, No. 1, 1981, pp. 201-225.
- [7] Kelecyc, F.J. and Pletcher, R.H., "The Development of a Free Surface Capturing Approach for Multidimensional Free Surface Flows in Closed Containers," *Computational Physics*, Vol. 138, No. 2, 1997, pp. 939-980.
- [8] Saintout, E., Ribereau, D. and Perrin, P., "ELEA: A Tool for 3D Surface Regression Analysis in Propellant Grains," *25th AIAA, ASME, SAE, and ASEE, Joint Propulsion Conference*, Monterey, 1989.
- [9] Hejl, R. J. and Heister, S. D., "Solid Rocket Motor Grain Burnback Analysis Using Adaptive Grids," *30th AIAA, ASME, SAE, and ASEE, Joint Propulsion Conference and Exhibit*, Indianapolis, 1994.
- [10] Willcox, M. A., Brewster, M. Q., Tang, K. C., and Stewart, D. S., "Solid Propellant Grain Design and Burnback Simulation Using a Minimum Distance Function," *AIAA-2005-4350, 41th AIAA/ASME/SAE/ ASEE Joint Propulsion Conference*, Arizona, 2005.
- [11] Favivi, B., Cavallini, E., Di Giacinto, M., and Serraglia, F., "An Ignition-to-Burn Out Analysis of SRM Internal Ballistic and Performances," *AIAA-200805141, 44th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference*, Hartford, CT, 2008.
- [12] Cavallini, E., Modeling and Numerical Simulation of Solid Rocket Motors Internal Ballistics, (PhD Thesis), of Mechanical and Aeronautical Engineering, Sapienza University, Italy, 2009.
- [13] Ghassemi, H. and Barkordar, A., "Numerical Simulation of Burn-Back in 3D Complicated Grains," *Journal of Space Science & Technology*, Vol. 5, No.1, 2012, pp. 15-28 (In Persian).
- [14] Moshir Estekhahreh, S. G., Mostofizadeh, A. and Foladi, N., "3D Numerical Simulation of the Grain Burn-Back in Solid Propellant Rocket Motor Based on Level Set Method," *Journal of Energetic Material*, Vol. 7, No.16, 2012, pp. 29-39 (In Persian).
- [15] Gheisari, M. M. and Mirsajedi, S. M., "Numerical Analysis of the Grain Burn-Back in Solid Propellant Motors Based on Improved Level Set Method," *Journal of Energetic Material*, Vol. 8, No.19, 2013, pp. 57-68 (In Persian).
- [16] Sethian, J. A., *Level Set Methods and Fast Marching Methods*, 2nd Edition, Cambridge University Press, Berkeley, 1999.
- [17] Osher, S. and Sethian, J. A., "Fronts Propagating with Curvature Dependent Speed: Algorithms Based on Hamilton-Jacobi Formulations," *Computational Physics*, Vol. 79, No. 1, 1988, pp. 12-49.
- گرین‌های درون‌سوز - برون‌سوز مورد ارزیابی قرار گرفت. مهم‌ترین نتایج حاصل از این بررسی‌ها به صورت زیر خلاصه می‌شود:
- روش مرتبه دوم نسبت به ابعاد شبکه حساسیت کمتری داشته و در شبکه‌های درشت نیز دقتی مناسب دارد.
 - گرچه روش مرتبه دوم همواره نسبت به روش مرتبه اول دارای زمان اجرای بالاتری است اما در گرین‌های دوبعدی این اختلاف قابل توجه نیست.
 - روش مرتبه دوم توانایی بالایی در تحلیل نقاط گوشه دارد و مهم‌ترین اختلاف روش مرتبه اول و دوم در همین مسئله است.
 - بهتر است گرین‌هایی که دارای هندسه پیچیده (تعداد انحناهای زیاد یا انحناهایی با شعاع کم) هستند با روش مرتبه دوم و گرین‌های با هندسه هموار با روش مرتبه اول تحلیل شوند.
 - به منظور جلوگیری از خطاهای ناخواسته، بهتر است از روش مرتبه دوم برای تحلیل گرین‌های درون‌سوز - برون‌سوز استفاده شود.
- در مجموع، نتایج نشان می‌دهد، روش سطوح هم‌تراز مرتبه دوم نسبت به روش مرتبه اول قابلیت‌های بالاتری برای تحلیل گرین دارد، اما با توجه به دشواری پیاده‌سازی و زمان اجرای بالاتر در مقایسه با روش مرتبه اول، بهتر است کاربر با توجه به هندسه گرین، محدودیت‌های زمانی و میزان دقت مورد انتظار بین دو روش مذکور، حالت مناسب را انتخاب کند.

مراجع

- [1] Toker, K. A., Three Dimensional Retarding Walls and Flow in Their Vicinity, (PhD Thesis), Department of Mechanical Engineering, Middle East Technical University, Turkey, 2004.
- [2] Davenas, A., *Solid Rocket Propulsion Technology*, Pergamon Press, New York, 1993.
- [3] Puskulcu, G., Analysis of 3-D Grain Burnback of Solid Propellant Rocket Motors and Verification with Rocket Motor Tests, (M.Sc. Thesis), Department of Mechanical Engineering, Middle East Technical University, Turkey, 2004.
- [4] Heidari, M. R. and Adami, A. H., "General Grain Analysis and Rapid Internal Ballistic Simulation for Solid Motor," *Journal of Energetic Material*, Vol. 5, No.10, 2010, pp. 59-72 (In Persian).
- [5] Brackbill, J. U. and Ruppel, H. M., "A Method for Adaptively Zoned, Particle-In-Cell Calculations in Two Dimensions," *Computational Physics*, Vol. 65, No. 2, 1986, pp. 314-343.
- [6] Hirt, C. W. and Nicholas, B. D., "Volume of Fluid (VOF) Method for the Dynamics of Free