JSST
فصلنامهٔ علمی - پژوهشی علوم و فناوری فضایی

جلد ۸ / شمارهٔ ۳/ پاییز ۱۳۹۴
ص. ص. ۴۰- ۲۷

کنترل بهینهٔ غیرخطی مسئلهٔ ملاقات و اتصال فضایی

محمد نوابی[1*] و مهدی رضا اخلومدی[2]

۱-۲- دانشکدهٔ مهندسی و فناوری‌های نوین، دانشگاه شهید بهشتی

*تهران، کد پستی: ۱۹۸۳۹۶۳۱۱۳

m_navabi@sbu.ac.ir

در این مقاله، یک کنترل بهینه غیرخطی برای مسئله ملاقات و اتصال مداری پیشنهاد شده است. فضاپیمایی که قصد ملاقات و اتصال با هدف را دارد توسط عملگرهای کنترلی به نوعی کنترل می‌شود تا ملاقاتی امن و پایدار با رعایت ملزومات و قیود مسئله صورت پذیرد. با استفاده از معادلات غیرخطی دینامیک موقعیت و وضعیت فضاپیما به صورت نسبی برای مدار دایروی و بیضوی در حضور چرخ‌های عکس‌العملی و بدون چرخ به طراحی کنترلر بهینه پرداخته می‌شود. تابع هزینهٔ کنترل بهینه به فرم تنظیم‌کنندهٔ مربعی غیرخطی بیان می‌شود و قیود کنترلی به مسئله اعمال می‌شود تا کنترل استخراج شده در محدودهٔ مجاز مومنتوم خروجی چرخ‌ها قرار گیرد. به دلیل اهمیت مقاومت به عدم قطعیت‌ها در سیستم، کنترل بهینهٔ غیرخطی برای این مسئله با استفاده از معادلهٔ ریکاتی وابسته به حالت بر اساس روش تحلیلی بردارهای ویژه ماتریس همیلتونین استخراج می‌شود. نتایج شبیه‌سازی مبین مناسب بودن این روش کنترل غیرخطی برای فرایند ملاقات و اتصال مداری است.

واژه‌های کلیدی: ملاقات و اتصال مداری، کنترل بهینهٔ غیرخطی، تنظیم‌کنندهٔ مربعی غیرخطی، معادلهٔ ریکاتی وابسته به حالت، بردارهای ویژهٔ ماتریس همیلتونین

علائم و اختصارات

شتاب‌های خطی	a_x, a_y, a_z
ماتریس‌های سیستم	A, B
خروج از مرکزیت	e
آنومالی اسنتریک	E
همیلتونین	H
مومنتوم زاویه‌ای مدار	h
مومنتوم زاویه‌ای فضاپیما هدف و رهگیر	H_T, H_C
ماتریس همیلتونین	HM
ماتریس ممان اینرسی فضاپیما هدف و رهگیر	I_T, I_C
معیار عملکرد	J
آنومالی متوسط	M
گشتاور اغتشاشی	N
جهت‌های یکه دستگاه حرکت نسبی	$\hat{O}_r, \hat{O}_h, \hat{O}$
ضریب تعریف شده برای کمک حالت	$p(x(t), u(t))$
ثابت هندسی مدار	p
کواترنیون‌های نسبی	q_1, q_2, q_3, q_4
ماتریس‌های وزنی کنترل و حالت	R, Q
شعاع فضاپیما هدف و رهگیر	r_T, r_C
مسیر نسبی	S
زمان	t
گشتاور کنترلی	T_{Cx}, T_{Cy}, T_{Cz}
زیر ماتریس‌های متناظر با بردارهای ویژه ماتریس همیلتونین	X, Y
بردار حالت و کنترل سیستم	$x(t), u(t)$
موقعیت‌های نسبی	x, y, z
آنومالی حقیقی	θ
کمک حالت	$\lambda(t)$
مقادیر ویژه ماتریس همیلتونین	$\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$
پارامتر جاذبه استاندارد	μ
سرعت زاویه‌ای مدار	ω_O

۱. استادیار (نویسنده مخاطب)
۲. دانشجوی کارشناسی ارشد

دریافت مقاله: ۹۴/۰۳/۰۹ ، تأیید مقاله: ۹۴/۰۸/۱۸

شتاب زاویه‌ای مدار	$\dot{\omega}_O$
سرعت‌های زاویه‌ای فضاپیما	$\omega_x, \omega_y, \omega_z$
سرعت زاویه‌ای فضاپیما رهگیر بیان شده در فریم فضاپیما رهگیر	ω_C^C
سرعت‌های زاویه‌ای فضاپیما رهگیر نسبت به هدف بیان شده در دستگاه بدنی فضاپیما هدف	$\omega_x^T, \omega_y^T, \omega_z^T$
سرعت زاویه‌ای فضاپیما هدف بیان شده در فریم بدنی فضاپیما هدف	ω_T^T
در جهت‌های مختصات حرکت نسبی	x, y, z
برای هدف	T
برای رهگیر	C
حداکثر	max
بیان شده در دستگاه اینرسی	$\mathcal{I}$
بیان شده در فریم بدنی هدف	T
بیان شده در فریم بدنی رهگیر	$\mathcal{C}$

مقدمه

ملاقات فضایی مانوری است که در آن دو فضاپیما در یک مدار با فاصلهٔ بسیار کم در حد چند متر تا پنجاه سانتی متر به یکدیگر می‌رسند. ملاقات به تطبیق و برابر شدن سرعت دو فضاپیما نیازمند است تا آن‌ها بتوانند در یک فاصلهٔ ثابت در فاز حفظ ایستگاه باقی بمانند. ملاقات ممکن است با پهلوگیری یا اتصال دنبال شود، این فرایند معرف ارتباط فیزیکی و سخت‌افزاری بین فضاپیماهاست. در واقع صفر شدن سرعت نسبی دو فضاپیما در فاصلهٔ بسیار نزدیک معرف ملاقات و تنظیم وضعیت فضاپیمای ملاقات‌کننده نسبت به درگاه اتصال فضاپیمای هدف[3] و معرف فرایند اتصال فضایی است [۱].

مسئلهٔ ملاقات و اتصال مداری از اوایل دههٔ شصت میلادی به دلیل نیازهای عملیاتی فضایی ذهن دانشمندان را به خود مشغول کرده بود. برای اولین بار، بازآلدرین در سال ۱۹۶۳، رسالهٔ دکترای خود را با عنوان تکنیک‌های هدایت افق دید برای ملاقات مداری سرنشین‌دار ارائه داد [۱]. او که خود بعدها به عنوان یک فضانورد در چنین مأموریتی حضور داشت بابی را در موضوع ملاقات و اتصال مداری گشود. روش‌های کنترلی مختلف راجع به کنترل این مسئله به کار گرفته شده است. در مقالهٔ مربوط به مرجع [۲] مقدمه‌ای مناسب راجع به فرایند ملاقات و اتصال مداری ارائه شده است. مراجع [۳, ۴] قیودی برای جلوگیری از تصادم دو فضاپیما یا ممانعت از برخورد با زباله‌های فضایی در مسیر ملاقات [۵] در نظر گرفته‌اند. از نکات مورد توجه در زمینهٔ ملاقات مداری بررسی ملاقات و اتصال خودکار فضایی بوده است [۱, ۶]. همچنین مأموریت‌های جدید مانند مسافرت فضایی با انجام مانور ملاقات مورد بررسی قرار گرفته است [۷].

روش‌های مختلف کنترلی برای این موضوع ارائه شده است که از جمله می‌توان به کنترل تطبیقی برای تخمین و تنظیم پارامترهای فرایند ملاقات و اتصال اشاره کرد [۸, ۹]، همچنین برای کنترل فرایند ملاقات و اتصال مداری روش‌های تکاملی [۱۰,۱۱] و فازی [۱۰] نیز مورد توجه محققان بوده است. به دلیل وجود عدم قطعیت‌های پارامتری سیستم یا اغتشاشات وارده از روش‌های مقاوم مانند H_∞ نیز برای حل این مسئله استفاده شده است [۶-۹، ۱۲-۱۶].

همچنین حل مسئلهٔ ملاقات سوخت بهینه [۳، ۱۷] و زمان بهینه [۱۸] یا بهینه‌سازی مسیر ملاقات [۱۷] مورد توجه قرار گرفته است. از روش‌های کنترلی دیگر که در این زمینه به‌کار گرفته شده است؛ می‌توان به کنترل مدل پیش‌بین اشاره کرد [۱۹]. کنترل بهینهٔ مسئلهٔ ملاقات و اتصال به صورت خطی و غیرخطی با روش‌های مختلف و گاه نوآورانه و ابتکاری مورد بررسی محققان قرار گرفته شده است [۴، ۱۱-۱۷]. مقالات تألیف شده، معمولاً مسئلهٔ ملاقات و اتصال را به صورت جداگانه مد نظر قرار می‌دهند، در صورت عدم نامیزانی در پیشرانش‌ها با مرکز جرم فضاپیما، در صورت عدم حضور گشتاورهای اغتشاشی و در صورتی که فاصلهٔ نسبی بیشتر از یک متر فرض شود، چنین رویکردی کاملاً صحیح است و فرایند ملاقات و اتصال و در واقع موقعیت و وضعیت فضاپیما غیرکوپل می‌شوند [۲۰]. در حل همزمان ملاقات و اتصال با هدف در مدار دایروی کنترل بهینهٔ غیرخطی ریکاتی وابسته به حالت[4] با روش حل مرحله به مرحله تنظیم‌کنندهٔ مربعی خطی نیز صورت پذیرفته است [۲۰، ۲۱].

مراجع ذکر شده، عملگر کنترل وضعیت حین فرایند اتصال پیشرانش‌ها را مد نظر قرار داده‌اند، در بعضی مراجع برای فرایند اتصال از چرخ عکس‌العملی نیز استفاده شده است [۲۲].

با مرور در مراجع مشاهده می‌شود که در مقالات تألیف شده ملاقات و اتصال با هدف در مدار بیضوی مورد توجه قرار نگرفته است، در حالی‌که در مقالهٔ حاضر، ملاقات و اتصال در حالت کلی مدار بیضوی هدف مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین در کارهای انجام‌شده وضعیت نسبی دو فضاپیما در صورت وجود چرخ‌های عکس‌العملی در فضاپیمای رهگیر بیان نشده و برای فرایند اتصال در حضور چرخ‌های عکس‌العملی نیز تحقیقی درخور صورت نگرفته است،

در صورتی‌که در این مقاله، معادلات وضعیت نسبی در حضور چرخ‌های عکس‌العملی استخراج شده و کنترل فرایند اتصال با استفاده از این چرخ‌ها نیز تحلیل شده است. مراجع در صورت

3. Target

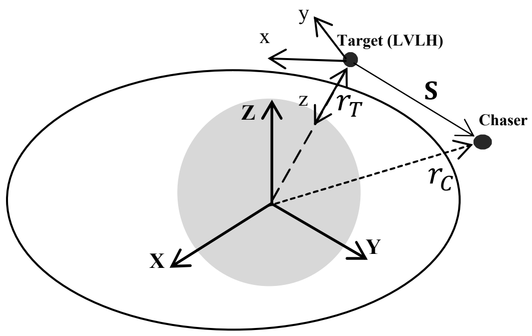
4. State Dependent Riccati Equation (SDRE)

استفاده از روش ریکاتی وابسته به حالت [۲۱، ۲۰] از روش حل عددی تنظیم‌کنندهٔ مربعی خطی در هر مرحله از حل استفاده کرده‌اند، در صورتی که در مقالهٔ حاضر، از روش حل تحلیلی بردارهای ویژهٔ ماتریس همیلتونین استفاده می‌شود. همچنین در [۲۰، ۲۱] قیودی روی کنترل در نظر گرفته نشده است، در حالی که در این مقاله قیود کنترلی لحاظ شده‌اند. از مهم‌ترین ویژگی روش ریکاتی وابسته به حالت می‌توان به قابلیت اعمال آن بر سیستم غیرخطی و مقاومت آن نسبت به عدم قطعیت در حالت‌های سیستم و اغتشاشات اشاره کرد. در این مقاله، فرض بر این است که ملاقات در مدارات بیضوی در نزدیکی زمین صورت می‌پذیرد.

ساختار مقاله به این صورت است که در قسمت بعدی دینامیک حرکت انتقالی نسبی و در قسمت سوم دینامیک وضعیت نسبی به صورت غیرخطی استخراج می‌شود، سپس در قسمت چهارم، تابع هزینهٔ کنترل بهینهٔ سیستم انتخاب می‌شود. بعد در قسمت پنجم مسئلهٔ تنظیم‌کنندهٔ مربعی غیرخطی[5] بیان می‌شود و روش ریکاتی وابسته به حالت معرفی می‌شود، سپس به پارامترسازی سیستم معادلات موقعیت و وضعیت برای مبادرت به حل پرداخته می‌شود. روش حل تحلیلی بردارهای ویژهٔ ماتریس همیلتونین بیان می‌شود و طرز اعمال قیود به مسئله مطرح می‌شود، سپس با انتخاب ماتریس‌های وزنی مناسب پیش‌نیازهای حل به طور کامل فراهم می‌شود. بعد در قسمت هفتم مسئلهٔ شبیه‌سازی شده و نتایج استخراج می‌شود. در نهایت در قسمت هشتم به جمع‌بندی و نتیجه‌گیری از مقاله پرداخته می‌شود.

دینامیک حرکت انتقالی نسبی

دو فضاپیمای صلب که در مدار زمین قرار دارند را مد نظر قرار داده، یکی فضاپیمای هدف T و دیگری فضاپیمای رهگیر[6] C است. هدف در این قسمت، بیان حرکت نسبی و استخراج معادلات حاکم بر آن است. برای بیان این حرکت دستگاه‌های مختصاتی که در ادامه ذکر می‌شوند لازم است: فریم مرجع راست‌گرد کارتزین اینرسی زمین مرکز که با $\mathcal{I}$ نمایش داده می‌شود، دیگری فریم مرجع قائم محلی افق محلی[7] (LVLH) است که روی فضاپیمای هدف فیکس شده است و با $\mathcal{T}$ نمایش داده می‌شود و نهایتاً فریم LVLH متصل به فضاپیمای رهگیر است که با $\mathcal{C}$ نمایش داده می‌شود (شکل ۱). در این دستگاه که محور $\hat{x}$ در جهت بردار شعاعی فضاپیمای هدف، محور $\hat{z}$ در جهت عمود بر صفحهٔ مداری فضاپیمای هدف و نهایتاً محور $\hat{y}$ دستگاه را کامل می‌کند. در موضوع بحث در این مقاله فرض شده است که فریم مداری $\mathcal{T}$ با فریم بدنی $\mathcal{T}$ هم‌راستا هستند.



شکل ۱- دستگاه مختصات و فریم LVLH متصل روی هدف

برپایهٔ قوانین حرکت نیوتن، معادلات حرکت برای فضاپیمای هدف و رهگیر در شرایط عدم حضور نیروهای اغتشاشی خارجی به صورت (۱) استخراج می‌شود:

$$\ddot{r}_T = -\frac{\mu}{r^3_T}\vec{r}_T, \qquad \ddot{r}_C = -\frac{\mu}{r^3_C}\vec{r}_C \tag{۱}$$

که در آن $\vec{r}_C, \vec{r}_T \in R^3$ معرف مرکز جرم فضاپیمای رهگیر و هدف در دستگاه اینرسی هستند و μ ثابت گرانش زمین است. اندازهٔ بردار-های موقعیت به صورت (۲) قابل بیان است:

$$r_T = \|\vec{r}_T\|_2 = \frac{a_T\left(1-e^2_T\right)}{1+e_T\cos\left(\theta_T\right)}, \qquad r_C = \|\vec{r}_C\|_2 = \frac{a_C\left(1-e^2_C\right)}{1+e_C\cos\left(\theta_C\right)} \tag{۲}$$

که در این معادلات $a_T\,,a_C$ نیم محورهای بزرگ بیضی، $e_T\,,e_C$ خروج از مرکزیت و $\theta_C\,,\theta_T$ آنومالی‌های حقیقی مدار هدف و رهگیر هستند. با تعریف بردار حرکت نسبی به صورت $\vec{s} = \vec{r}_T - \vec{r}_C$ دینامیک حرکت انتقالی C به T به صورت (۳) قابل نوشتن است [۲۳]:

$$\ddot{x} - 2\omega_{OT}\dot{y} - \dot{\omega}_{OT}y - \omega_{OT}{}^2x = -\frac{\mu\left(r_T + x\right)}{[\left(r_T + x\right)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{\mu}{r_T{}^2} + a_x \tag{۳- الف}$$

$$\ddot{y} + 2\omega_{OT}\dot{x} + \dot{\omega}_{OT}x - \omega_{OT}{}^2y = -\frac{\mu y}{[\left(r_T + x\right)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} + a_y \tag{۳- ب}$$

$$\ddot{z} = -\frac{\mu z}{[\left(r_T + x\right)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} + a_z \tag{۳- پ}$$

که در روابط (۳) $\dot{\omega}_{OT}, \omega_{OT}$ سرعت زاویه‌ای مداری فضاپیما هدف و مشتق آن است، با فرض بسیار کوچک‌تر بودن فاصلهٔ نسبی فضاپیما رهگیر نسبت به هدف نسبت به بردار شعاعی فضاپیما هدف $s \ll r_T$ می‌توان معادلات حرکت نسبی خطی را به صورت (۴) برای مدار دایروی استخراج کرد. این معادلات به معادلات کلوهسی- ویلتشایر معروف هستند:

---

5. Nonlinear Quadratic Regulator
6. Chaser
7. Local Verical Local Horizontal

$$\begin{aligned} \ddot{x}-2\omega_{0T}\dot{z} &= a_x \\ \ddot{y}+\omega_{0T}{}^2 y &= a_y \\ \ddot{z}+2\omega_{0T}\dot{x}-3\omega_{0T}{}^2 z &= a_z \end{aligned} \qquad (۴)$$

که ω_0 سرعت زاویه‌ای مدار دایروی است. معادلهٔ (۴) با فرض صفر بودن شتاب‌های خارجی قابل حل تحلیلی است [۲۳]:

$$x(t)=A_0\cos(\omega_{00T}t+\alpha)+x_{0ff} \qquad (۵\text{- الف})$$

$$y(t)=-2A_0\sin(\omega_{00T}t+\alpha)-\frac{3}{2}\omega_0 t x_{0ff}+y_{0ff} \qquad (۵\text{- ب})$$

$$z(t)=B_0\cos(\omega_{00T}t+\beta) \qquad (۵\text{- پ})$$

که $A_0, B_0, \alpha, \beta, x_{0ff}, y_{0ff}$ ثابت‌های انتگرالی هستند و می‌توان با شرایط اولیه محاسبه شوند. با توجه به معادلات، معادلهٔ (۵ ب) به دلیل حضور ترم زمانی به صورت خطی افزایش می‌یابد. برای اجتناب از این این افزایش به سمت بی‌نهایت باید رابطهٔ (۶) برقرار باشد:

$$\dot{y}_0+\omega_{00T}x_0=0 \qquad (۶)$$

با فرض (۶) ضریب انتگرالی x_{0ff} صفر خواهد شد.

برای شبیه‌سازی ملاقات در مدار بیضوی همان گونه که در معادلات (۳) دیده می‌شود، باید سرعت‌های زاویه‌ای و مشتق آن در هر لحظه از زمان محاسبه شود. بدین ترتیب با کمک مکانیک مداری و حل معادلهٔ کپلر می‌توان از زمان به آنومالی حقیقی و شعاع مداری در هر لحظه رسید. برای مدار کپلری دلخواه رابطهٔ (۷) برقرار است:

$$r_T=\frac{p_T}{1+e_T\cos(\theta_T)} \qquad (۷)$$

که در آن p_T ثابت هندسی مدار، e_T خروج از مرکزیت، θ_T آنومالی حقیقی و r_T شعاع مداری است. سرعت زاویه‌ای مدار به صورت رابطهٔ (۸) تعریف می‌شود:

$$\omega_{OT}=\frac{d\theta_T}{dt}=\sqrt{\frac{\mu}{r_T{}^3}} \qquad (۸)$$

با مشتق گیری از روابط (۷) و (۸) به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_{OT} &= \frac{d\omega_{OT}}{dt}=-\frac{3}{2}r_T{}^{-5/2}\sqrt{\mu}\frac{dr_T}{d\theta_T}\frac{d\theta_T}{dt} \\ \frac{dr_T}{d\theta_T} &= \frac{p_T e_T\sin(\theta_T)}{\left(1+e_T\cos(\theta_T)\right)^2} \end{aligned} \qquad (۹)$$

با داشتن زمان از حضیض در مدار t می‌توان آنومالی متوسط M_T را به صورت (۱۰) به‌دست آورد:

$$M_T=n_T t \qquad (۱۰)$$

که در آن $n_T=\sqrt{\frac{\mu}{a_T{}^3}}$ است. با استفاده از معادلهٔ کپلر (۱۱) می‌توان آنومالی استنریک E را استخراج کرد:

$$M_T=E_T-e_T\sin(E_T) \qquad (۱۱)$$

که (۱۱) باید با روشی عددی در هر لحظه از زمان حل شود، با استخراج E_T می‌توان با کمک رابطهٔ (۱۲) آنومالی حقیقی را استخراج کرد:

$$\tan\left(\frac{E_T}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-e_T}{1+e_T}}\tan\left(\frac{\theta_T}{2}\right) \qquad (۱۲)$$

با استخراج θ_T می‌توان در هر لحظه $r_T, \omega_{OT}, \dot{\omega}_{OT}$ لازم در معادلات (۳) را استخراج کرد.

دینامیک حرکت چرخشی نسبی

در این قسمت، هدف استخراج مدل ریاضی مناسبی است که حرکت وضعی رهگیر C را نسبت به هدف T بر حسب وضعیت و سرعت‌های زاویه‌ای هدف بیان کند، بدین ترتیب، سرعت زاویه‌ای رهگیر نسبت به هدف به صورت (۱۳) بیان می‌شود:

$$\omega \triangleq \omega_C-\omega_T \qquad (۱۳)$$

در معادلهٔ (۱۳) ω_T, ω_C سرعت‌های زاویه‌ای هدف و رهگیر با توجه به یک فریم دلخواه هستند. تعریف $\vec{a}_N$ بیانگر برداری در فریم N است، و همچنین $\left.\frac{d\vec{a}}{dt}\right|_N$ معرف مشتق زمانی بردار $\vec{a}$ در فریم مرجع N است.

وضعیت فضاپیمای رهگیر نسبت به هدف با استفاده از کواترنیون‌ها q_1, q_2, q_3, q_4 بیان خواهد شد. ماتریس چرخش D با توجه به ترم‌های کواترنیون‌ها به صورت (۱۴) قابل تعریف است:

$$D(q) = \begin{bmatrix} q_1{}^2-q_2{}^2-q_3{}^2+q_4{}^2 & 2(q_1q_2-q_3q_4) & 2(q_1q_3+q_2q_4) \\ 2(q_1q_2+q_3q_4) & -q_1{}^2+q_2{}^2-q_3{}^2+q_4{}^2 & 2(q_2q_3-q_1q_4) \\ 2(q_1q_3-q_2q_4) & 2(q_2q_3+q_1q_4) & -q_1{}^2-q_2{}^2+q_3{}^2+q_4{}^2 \end{bmatrix} \qquad (۱۴)$$

که رابطهٔ (۱۴) یک بردار را از فریم C به فریم T انتقال می‌دهد و در آن $q=[q_1, q_2, q_3, q_4]^T$ است. بدین ترتیب، سینماتیک وضعیت فضاپیمای رهگیر نسبت به هدف به صورت (۱۵) قابل بیان است:

$$\dot{q}=\frac{1}{2}Q(q)\omega^C \qquad (۱۵)$$

که در رابطهٔ (۱۵) ماتریس $Q(q)$ به صورت (۱۶) است:

$$Q=\begin{bmatrix} q_4 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_4 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_4 \\ -q_1 & -q_2 & -q_3 \end{bmatrix} \qquad (۱۶)$$

وضعیت فضاپیمای رهگیر نسبت به هدف، بیان شده در دستگاه هدف T با توجه به مرجع [۲۴] استخراج خواهد شد. ابتدا از معادلهٔ (۱۳) در فریم اینرسی I مشتق گرفته می‌شود:

$$\left.\frac{d\omega}{dt}\right|_{\mathcal{T}} = \left.\frac{d\omega_C}{dt}\right|_{\mathcal{I}} - \left.\frac{d\omega_T}{dt}\right|_{\mathcal{I}} \tag{۱۷}$$

معادلهٔ (۱۷) با توجه به ماتریس انتقال و چرخش دستگاه بدنی به اینرسی قابل بازنویسی است [۲۴]:

$$\left(\left.\frac{d\omega}{dt}\right|_{\mathcal{T}}\right)^{\mathcal{T}} = D(q)\left(\left.\frac{d\omega_C}{dt}\right|_{\mathcal{I}}\right)^{\mathcal{C}} - \left(\left.\frac{d\omega_T}{dt}\right|_{\mathcal{I}}\right)^{\mathcal{T}} - Skew(\omega_T)^{\mathcal{T}}\omega^{\mathcal{T}} \tag{۱۸}$$

که در رابطهٔ (۱۸) ماتریس $Skew(\vec{a})$ با $\vec{a}=[a_1,a_2,a_3]^T$ به صورت (۱۹) قابل تعریف است:

$$Skew(\vec{a}) = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{۱۹}$$

با ضرب‌کردن معادلهٔ (۱۸) در تانسور اینرسی فضاپیمای هدف $I_T \in R^3$ به‌دست می‌آید [۲۴]:

$$I_T\left(\left.\frac{d\omega}{dt}\right|_{\mathcal{T}}\right)^{\mathcal{T}} = I_T D(q)\left(\left.\frac{d\omega_C}{dt}\right|_{\mathcal{C}}\right)^{\mathcal{C}} - I_T\left(\left.\frac{d\omega_T}{dt}\right|_{\mathcal{T}}\right)^{\mathcal{T}} - I_T Skew(\omega_T)^{\mathcal{T}}\omega^{\mathcal{T}} \tag{۲۰}$$

اگر $\vec{H}$ مومنتوم زاویه‌ای کل جسم صلب باشد و N گشتاور خارجی وارد بر فضاپیما باشد برای فضاپیمای رهگیر:

$$\left.\frac{dH_C}{dt}\right|_{\mathcal{I}} = \left.\frac{dH_C}{dt}\right|_{\mathcal{C}} + \omega_C \times H_C = N_C \tag{۲۱}$$

و برای فضاپیمای هدف:

$$\left.\frac{dH_T}{dt}\right|_{\mathcal{I}} = \left.\frac{dH_T}{dt}\right|_{\mathcal{T}} + \omega_T \times H_T = N_T \tag{۲۲}$$

که در روابط (۲۱) و (۲۲)

$$H_C = I_C\omega_C \;,\; H_T = I_T\omega_T \tag{۲۳}$$

به دلیل حساست مانور اتصال، در بعضی مواقع لازم است از کنترل‌کننده‌هایی استفاده شود که تولید اغتشاش نکنند، به همین دلیل از چرخ‌های عکس‌العملی نیز ممکن است حین این مانور استفاده شود. در صورت وجود چرخ عکس‌العملی [۲۵]:

$$H_C = I_C\omega_C + h_{WC} \tag{۲۴}$$

که h_{WC} معرف مومنتوم زاویه‌ای چرخ‌های عکس‌العملی فضاپیمای رهگیر است. بدین ترتیب، برای حالت بدون چرخ عکس‌العملی به‌دست می‌آید:

$$I_C\left.\frac{d\omega_C}{dt}\right|_{\mathcal{I}} = I_C\left.\frac{d\omega_C}{dt}\right|_{\mathcal{C}} + \omega_C \times I_C\omega_C = N_C \tag{۲۵ الف}$$

$$I_T\left.\frac{d\omega_T}{dt}\right|_{\mathcal{I}} = I_T\left.\frac{d\omega_T}{dt}\right|_{\mathcal{T}} + \omega_T \times I_T\omega_T = N_T \tag{۲۵ ب}$$

و در صورت وجود چرخ عکس‌العملی در فضاپیمای رهگیر معادلهٔ آن به فرم (۲۶) به‌دست می‌آید:

$$I_C\left.\frac{d\omega_C}{dt}\right|_{\mathcal{I}} = I_C\left.\frac{d\omega_C}{dt}\right|_{\mathcal{C}} + \dot{h}_{WC} + \omega_C \times I_C\omega_C + \omega_C \times h_{WC} = N_C \tag{۲۶}$$

با استفاده از معادلات (۲۵آ) و (۲۵ب) و (۲۶) و جایگذاری آن‌ها در معادلهٔ (۲۰)، معادلهٔ دینامیک وضعیت نسبی برای حالت فضاپیمای رهگیر بدون چرخ عکس‌العملی به صورت (۲۷) استخراج می‌شود [۲۰]:

$$I_T\left(\left.\frac{d\omega}{dt}\right|_{\mathcal{T}}\right)^{\mathcal{T}} = I_T D(q) I_C^{-1}[N_C - \omega_C^{\mathcal{C}} \times I_C\omega_C^{\mathcal{C}}] - I_T\omega_T^{\mathcal{T}} \times \omega_T^{\mathcal{T}} - [N_T - \omega_T^{\mathcal{T}} \times I_T\omega_T^{\mathcal{T}}] \tag{۲۷}$$

با داشتن $\omega_C^{\mathcal{C}} = D(q)^{-1}\left(\omega^{\mathcal{T}} + \omega_T^{\mathcal{T}}\right)$ معادلهٔ (۲۷) به صورت (۲۸) بازنویسی مجدد است [۲۴]:

$$I_T\dot{\omega}^{\mathcal{T}} = I_T D(q) I_C^{-1}[N_C - D(q)^{-1}\left(\omega^{\mathcal{T}} + \omega_T^{\mathcal{T}}\right) \times I_C D(q)^{-1}\left(\omega^{\mathcal{T}} + \omega_T^{\mathcal{T}}\right)] - I_T\omega_T^{\mathcal{T}} \times \omega^{\mathcal{T}} - [N_T - \omega_T^{\mathcal{T}} \times I_T\omega_T^{\mathcal{T}}] \tag{۲۸}$$

در صورت وجود چرخ عکس‌العملی در فضاپیمای رهگیر معادلهٔ (۲۸) به صورت (۲۹) استخراج می‌شود:

$$I_T\dot{\omega}^{\mathcal{T}} = I_T D(q) I_C^{-1}[N_C - D(q)^{-1}\left(\omega^{\mathcal{T}} + \omega_T^{\mathcal{T}}\right) \times I_C D(q)^{-1}\left(\omega^{\mathcal{T}} + \omega_T^{\mathcal{T}}\right) - D(q)^{-1}\left(\omega^{\mathcal{T}} + \omega_T^{\mathcal{T}}\right) h_{WC} - \dot{h}_{WC}] \; I_T\omega_T^{\mathcal{T}} \times \omega^{\mathcal{T}} - [N_T - \omega_T^{\mathcal{T}} \times I_T\omega_T^{\mathcal{T}}] \tag{۲۹}$$

معادلهٔ (۲۸) به همراه (۱۵) معرف ۷ حالت $[q,\omega]$ است، که در کنار سه کنترل سیستم را تکمیل می‌کنند. در صورت داشتن سیستمی به فرم (۲۹) سه حالت مربوط به h_{WC} به سیستم اضافه می‌شوند. معادلات (۲۸) یا (۲۹) و (۱۵) برای بیان وضعیت کافی هستند و همچنین به همراه معادلهٔ (۳) یا (۴) که مبین موقعیت هستند؛ معادلات لازم برای بیان مانور ملاقات و اتصال مداری غیرکوپل هستند. در صورتی که فاصلهٔ لازم برای ملاقات با توجه به ابعاد فضاپیما یک متر فرض شود و از گشتاورهای اغتشاشی کوپل‌کنندهٔ حرکت (مانند گرادیان جاذبه) صرف‌نظر شود، این دو معادله غیرکوپل خواهند شد.

تابع هزینه به فرم تنظیم‌کنندهٔ مربعی

هدف از کنترل فرایند ملاقات و اتصال صفر کردن حالت‌های نهایی نسبی موقعیت، وضعیت و سرعت‌های آن‌هاست. همچنین در عین حال باید به دلیل اهمیت مصرف انرژی تلاش کنترلی حداقل شود.

به منظور حداقل کردن تلاش کنترلی یا به عبارت دیگر حداقل‌کردن مصرف سوخت، همچنین تنظیم‌کردن حالت‌های نسبی در شرایط پایدار نهایی صفر و در عین هموار کردن مسیر برای جلوگیری از صدمات سازه‌ای و اغتشاشات تابع هزینه به فرم تنظیم‌کننده (۳۰) بیان می‌شود:

$$J=\frac{1}{2}\int_{0}^{t_f}\left[x(t)^T Q\, x(t)+u(t)^T R\, u(t)\right]dt \qquad (۳۰)$$

این امکان وجود داشت که به جای استفاده از تابع هزینه به فرم تنظیم‌کنندهٔ مربعی، تابع هزینه به فرم انتگرالی مصرف انرژی تعریف شود، در چنین حالتی با استخراج شروط لازم بهینگی و حل مسئله مقدار مرزی با شرایط نهایی مربوط به حالت‌های نهایی صفر جواب سوخت بهینه استخراج می‌شد؛ ولی در چنین حالتی به دلیل لحاظ نکردن ترم مسیر یا حالت‌های سیستم جواب‌های بهینه حداقل سوخت ناهموار خواهند بود، که از لحاظ عملی مشکلات فراوانی خواهد داشت. این تابع هزینه هم برای حل موقعیت فضاپیما و هم برای وضعیت آن در حین مانور ملاقات و اتصال لحاظ می‌شود که در تابع هزینه رابطهٔ (۳۰)، $x(t)$ معرف بردار حالت سیستم است و $u(t)$ کنترل است که برای موقعیت فضاپیما به صورت (۳۱) انتخاب شده است.

$$\mathbf{x}(t)_{Position}=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\\ \dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{bmatrix},\ \mathbf{u}(t)_{Position}=\begin{bmatrix}u_x\\ u_y\\ u_z\end{bmatrix} \qquad (۳۱)$$

همچنین برای وضعیت فضاپیما نیز باید متغیرهای حالت به گونه‌ای انتخاب شود که سیستم قابلیت ارضا ملزومات روش حل کنترل بهینه را داشته باشد. در «زیر فصل پارامترسازی معادلات سیستم» این انتخاب بیان خواهد شد.

در رابطهٔ (۳۰) ماتریس‌های R, Q ماتریس‌های وزنی هستند و به ناظر بر اهمیت حالت یا کنترل خاصی برای تنظیم شدن هستند. در این مقاله، این ماتریس‌ها قطری و ثابت در نظر گرفته شده‌اند و به ترتیب باید مثبت نیمه معین و مثبت معین باشند. وجود ترم $x(t)$ در تابع هزینه باعث هموار شدن جواب‌هاخواهدشد، همچنین این ترم باعث مقاومت نسبت به تغییر حالت‌ها خواهد شد [۲۶].

مسئلهٔ تنظیم‌کنندهٔ مربعی غیرخطی

روش تنظیم‌کنندهٔ مربعی خطی LQR با حداقل‌کردن معیار عملکرد تعریف شده توسط طراح برای سیستم‌های خطی شده مناسب است. ولی برای یک سیستم غیرخطی رویکرد تنظیم‌کننده مربعی غیرخطی NQR لازم است [۲۷]. در سیستم غیرخطی حالت‌ها و کنترل به صورت ترم‌های غیرخطی ظاهر می‌شوند. سیستم معادلهٔ (۳۲) را درنظر گرفته:

$$\begin{aligned}&\dot{x}=f(x(t))+g(x(t),u(t))\\ &x(0)=x_0\end{aligned} \qquad (۳۲)$$

و تابع هزینهٔ (۳۳) که باید توسط کنترل بهینه حداقل شود:

$$J(x_0,u)=\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}\left[x(t)^T Q\, x(t)+u(t)^T R\, u(t)\right]dt \qquad (۳۳)$$

با تشکیل تابع همیلتونین (۳۴) و لحاظ‌کردن شرایط لازم بهینگی (۳۵) کنترل بهینه به صورت (۳۶) استخراج می‌شود، که در آن کمک حالت سیستم است:

$$\begin{aligned}H=&\frac{1}{2}x(t)^T Q\, x(t)+\frac{1}{2}u(t)^T R\, u(t)+\\ &\lambda^T(t)A(t)x(t)+\lambda^T(t)B(t)u(t)\end{aligned} \qquad (۳۴)$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial H}{\partial u}=0=Ru+\frac{\partial g^T}{\partial u}(x,u)\lambda\\ &\frac{\partial H}{\partial \lambda}=\dot{x}=f(x)+g(x,u)\\ &\frac{\partial H}{\partial x}=-\dot{\lambda}^T=Qx-\frac{\partial f^T}{\partial x}(x)\lambda+\frac{\partial g^T}{\partial x}(x,u)\lambda\end{aligned} \qquad (۳۵)$$

$$u(t)=-R^{-1}\frac{\partial g^T}{\partial u}(x(t),u(t))\lambda(t) \qquad (۳۶)$$

روش معادلهٔ ریکاتی وابسته به حالت

روش معادلهٔ ریکاتی وابسته به حالت، راهی برای حل‌کردن معادلات (۳۵) برای استخراج کنترل بهینه فراهم می‌کند. اولین گام در این روش شبه خطی‌سازی دینامیک سیستم به صورت معادلهٔ (۳۷) است:

$$\begin{aligned}&f(x)=A(x)x\\ &g(x,u)=B(x,u)u\end{aligned} \qquad (۳۷)$$

این فرایند شبه خطی‌سازی با عنوان پارامترسازی SDC شناخته می‌شود، این نوع فاکتورگیری وقتی تعداد حالت بیشتر از یک باشد یکتا نیست. در این پارامترسازی باید معادلهٔ (۳۸) برقرار باشد:

$$f(0)=0 \qquad (۳۸)$$

این به این معنی است که مرکز نقطه تعادلی برای سیستم است. با توجه به معادلهٔ (۳۷) روش معادلهٔ ریکاتی وابسته به حالت با جستجوی کمک حالتی به فرم (۳۹) به نوعی از روش تنظیم‌کنندهٔ مربعی خطی تقلید می‌کند.

$$\lambda(t)=p(x(t),u(t))x(t) \qquad (۳۹)$$

همانند تنظیم‌کنندهٔ مربعی خطی لازم است جفت A, B کنترل‌پذیر و جفت C, A مشاهده‌پذیر باشد. اولین معادلهٔ حداقل‌سازی به فرم معادلهٔ (۴۰) قابل نوشتن است:

$$\begin{aligned}u(t)=&-R^{-1}(B^t(x,u)P(x,u)x-\\ &\sum_{i=1}^{k}u_i\left(\frac{\partial B_{1\to m,i}}{\partial u}(x,u)\right)P(x,u)x)\end{aligned} \qquad (۴۰)$$

بر اساس معادلات (۳۹) و (۴۰) و معادلات شرط لازم بهینگی، معادله‌ای شبیه ریکاتی به فرم معادلهٔ (۴۱) بازنویسی می‌شود.

$$\begin{aligned} &P(x,u)A(x)+A^T(x)P(x,u)- \\ &P(x,u)B(x,u)R^{-1}B^T(x,u)P(x,u)+Q= \\ &-\begin{bmatrix} \dot P(x,u)+\sum_{i=1}^{k} x_i\left(\frac{\partial A_{1\to m,i}}{\partial x}(x,u)\right)^T P(x,u) \\ +\sum_{i=1}^{k} u_i\left(\frac{\partial B_{1\to m,i}}{\partial x}(x,u)\right)P(x,u)- \\ P(x,u)B(x,u)R^{-1}\sum_{i=1}^{k} u_i\left(\frac{\partial B_{1\to m,i}}{\partial u}(x,u)\right)P(x,u) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{۴۱}$$

با فرض قابل صرف‌نظر بودن مشتقات SDC معادلهٔ (۴۱) به صورت زیادی ساده می‌شود و معادلهٔ (۴۲) حاصل می‌شود [۲۷].

$$\begin{aligned} &P(x,u)A(x)+A^T(x)P(x,u)- \\ &P(x,u)B(x,u)R^{-1}B^T(x,u)P(x,u)+Q=0 \\ &u(x)=-R^{-1}\left(B^T(x,u)P(x,u)\right)x \end{aligned} \tag{۴۲}$$

به‌دلیل این فرض، جواب شبه بهینه خواهد بود و دقت آن به میزان اعتبار فرض وابسته خواهد شد، این نوع جواب پایدار خواهد بود [۲۷]. معادلهٔ (۴۲) معادله‌ای ریکاتی با ماتریس‌های A,B وابسته به حالت است، که با انتگرال‌گیری از آخر یا روشی که در ادامه ذکر می‌شود قابل حل است.

پارامترسازی معادلات سیستم

پارامترسازی یا فاکتورگیری SDC برای مسئلهٔ ملاقات مداری براساس معادلات موقعیت (۳) و (۴) در این مقاله به صورت (۴۳) و (۴۴) انتخاب شده است. برای معادلات کلوهسی- ویلتشایر ماتریس سیستم A به صورت (۳۷) قابل استخراج است:

$$A_{Position}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\omega_{0OT} \\ 0 & -\omega_{0OT}^{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3\omega_{0OT}^{2} & -2\omega_{0OT} & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{۴۳}$$

برای ملاقات در مدار بیضوی ماتریس سیستم به صورت وابسته به حالت و متغیر با زمان به صورت (۴۴) استخراج شده است:

$$A_{Position}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-\mu}{r_C^{3}}+\omega_{OT}^{2} & 0 & \dot\omega_{OT} & 0 & 0 & 2\omega_{OT} \\ 0 & \frac{-\mu}{r_C^{3}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\dot\omega_{OT} & 0 & \omega_{OT}^{2}+\frac{2\mu}{r_C^{3}} & -2\omega_{OT} & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{۴۴}$$

که در رابطهٔ (۴۴) $r_C=[(r_T+x)^2+y^2+z^2]^{0.5}$ است. همچنین برای هر دو حالت ماتریس کنترل به صورت (۴۵) است:

$$B_{Position}=\frac{1}{m}\begin{bmatrix} 0_{3\times3} \\ I_{3\times3} \end{bmatrix}_{6\times3} \tag{۴۵}$$

برای فاکتورگیری و شبه‌خطی‌سازی معادلات، وضعیت سیستم لازم است؛ معادلات بر حسب متغیر ω که مبین سرعت نسبی دو فضاپیماست، انتخاب شوند. این کار نیازمند انجام تغییراتی در فرم معادلات (۲۸) و (۲۹) است.

با فرض صفر بودن گشتاورهای اغتشاشی ($N_T, N_C=0$) با توجه به معادلهٔ (۲۹) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} &I_T\dot\omega^T=I_T D(q) I_C^{-1}[\\ &-D(q)^{-1}\left(\omega^T+\omega_f^T\right)\times I_C D(q)^{-1}\left(\omega^T+\omega_f^T\right) \\ &-D(q)^{-1}\left(\omega^T+\omega_f^T\right)h_{WC}-\dot h_{WC}] \\ &-I_T\omega_f^T\times\omega^T+[\omega_f^T\times I_T\omega_f^T] \end{aligned} \tag{۴۶}$$

با ضرب برداری ترم‌ها می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} &I_T\dot\omega^T=-I_T D(q) I_C^{-1} D(q)^{-1}\omega^T\times I_C D(q)^{-1}\omega^T \\ &-I_T D(q) I_C^{-1} D(q)^{-1}\omega^T\times I_C D(q)^{-1}\omega_f^T \\ &-I_T D(q) I_C^{-1} D(q)^{-1}\omega_f^T\times I_C D(q)^{-1}\omega^T \\ &-I_T D(q) I_C^{-1} D(q)^{-1}\omega_f^T\times I_C D(q)^{-1}\omega_f^T \\ &-I_T D(q) I_C^{-1} D(q)^{-1}\omega^T h_{WC} \\ &-I_T D(q) I_C^{-1} D(q)^{-1}\omega_f^T h_{WC}\mp I_T D(q) I_C^{-1} T_{CC} \\ &-I_T\omega_f^T\times\omega^T+\omega_f^T\times I_T\omega_f^T \end{aligned} \tag{۴۷}$$

در معادلهٔ (۴۷) درصورتی که از چرخ عکس‌العملی استفاده شود $T_{CC}=\dot h_{WC}$ و با علامت منفی در سمت راست معادله حاضر است و از قانون کنترل بهینه استخراج می‌شود. در صورتی که از چرخ عکس‌العملی استفاده نشود T_{CC} با علامت مثبت در سمت راست معادله حضور دارد و باید از قانون کنترل بهینه استخراج شود، همچنین در این حالت، ترم‌های شامل h_{WC} از معادلات حذف خواهند شد. در معادلهٔ (۴۷) به دلیل وجود ضرب‌های برداری هنوز ترم‌ها به صورت ضرایبی از ω^T و h_{WC} نیستند، به همین دلیل نیازمند تبدیل ضرب‌های برداری به ضرب‌های ماتریسی است. با توجه به تعریف (۱۹) و خاصیت راستگردی $A\times B=-B\times A$ معادلهٔ (۴۷) قابل بازنویسی است:

$$
\begin{aligned}
I_T \dot{\omega}^T = \{ & -skew\left(I_T D(q) I_C^{-1} D(q)^{-1} \omega^T\right) I_C D(q)^{-1} \\
& +skew\left(I_C D(q)^{-1} \omega_T^T\right) I_T D(q) I_C^{-1} D(q)^{-1} \\
& -skew\left(I_T D(q) I_C^{-1} D(q)^{-1} \omega_T^T\right) I_C D(q)^{-1} \\
& -skew\left(I_T \omega_T^T\right)\} \omega^T \\
& -\{skew\left(I_T D(q) I_C^{-1}\right) \omega^T \\
& +skew\left(I_T D(q) I_C^{-1} D(q)^{-1} \omega_T^T\right)\} h_{WC} \\
& +skew\left(\omega_T^T\right) I_T \omega_T^T \\
& -skew\left(I_T D(q) I_C^{-1} D(q)^{-1} \omega_T^T\right) I_C D(q)^{-1} \omega_T^T \\
& \mp I_T D(q) I_C^{-1} T_{CC}
\end{aligned} \tag{۴۸}
$$

معادلهٔ (۴۸) $\dot{\omega}^T$ را بر حسب ω^T, h_{WC}, T_{CC} به صورت شبه‌خطی و همچنین ترم‌های بایاسی بر حسب ω_T^T بیان می‌دارد.

با فرض اینکه ω_T^T، یا سرعت‌های زاویه‌ای هدف برای رهگیری صفر باشند، یا هدف در هنگام اتصال چرخش نداشته باشد و استفاده از این خاصیت که I_T در سمت چپ معادلات می‌تواند به صورت I_T^{-1} در سمت راست معادلات در داخل تابع *skew* در سمت چپ قرار گیرد معادلهٔ (۴۸) ساده خواهد شد:

$$
\begin{aligned}
\dot{\omega}^T = \{ & -skew\left(D(q) I_C^{-1} D(q)^{-1} \omega^T\right) I_C D(q)^{-1}\} \omega^T \\
& -\{skew\left(D(q) I_C^{-1} D(q)^{-1} \omega^T\right)\} h_{WC} \mp D(q) I_C^{-1} T_{CC}
\end{aligned} \tag{۴۹}
$$

با توجه به معادلهٔ (۴۹) مشخص می‌شود که حل در حالت غیرکوپل و شرایط نهایی سرعت زاویه‌ای صفر برای فضاپیما هدف مستقل از ماتریس اینرسی فضاپیما هدف است.

برای بیان سینماتیک وضعیت از رابطهٔ (۱۵) می‌توان نوشت:

$$
\dot{q} = \frac{1}{2} Q(q) \omega^C = \frac{1}{2} Q(q) \left(D(q)^{-1} \left(\omega^T + \omega_T^T \right) \right) \tag{۵۰}
$$

که با فرض غیرچرخان بودن هدف :

$$
\dot{q} = \frac{1}{2} Q(q) D(q)^{-1} \omega^T \tag{۵۱}
$$

معادلهٔ (۵۱) و (۴۹) فرم نهایی برای استخراج ماتریس‌های شبه‌خطی یا فاکتورهای SDC هستند. اما این مهم است که آیا این فرم نوشتن معادلات برای به‌دست آوردن ماتریس‌های A, B کنترل‌پذیر مناسب است یا خیر. اگر h_{WC} به عنوان حالتی برای استخراج کنترل بهینه استفاده شود، (مانند فرم (۴۹)) سیستم A کنترل‌پذیر نخواهد بود. همچنین معادلهٔ (۵۱) نیز باید بر حسب q شبه خطی شود تا سیستم کنترل‌پذیر شود، به همین دلیل معادلات (۴۹) و (۵۱) باید به نوعی اصلاح شوند و در کنار آن‌ها ضریب کنترل طوری انتخاب شود تا سیستم کنترل‌پذیر باشد. اگر حالت‌های سیستم نیز به صورت سه متغیر کواترنیون q_1, q_2, q_3 و سه سرعت زاویه‌ای $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ انتخاب شوند؛ سیستمی مناسب برای اعمال روش کنترل بهینهٔ غیرخطی تولید شده است. با اصلاح معادلهٔ (۴۹) معادلهٔ دینامیک وضعیت به صورت (۵۲) استخراج می‌شود:

$$
\begin{aligned}
\dot{\omega}^T = \{ & -skew\left(D(q) I_C^{-1} D(q)^{-1} \omega^T\right) I_C D(q)^{-1} + \\
& I_T^{-1} skew\left(h_{WC}\right) I_T D(q) I_C^{-1} D(q)^{-1}\} \omega^T \\
& \mp D(q) I_C^{-1} T_{CC}
\end{aligned} \tag{۵۲}
$$

همچنین معادلهٔ سینماتیک وضعیت (۵۱) به صورت (۵۳) اصلاح می‌شود:

$$
\dot{q} = \frac{1}{2} Q(q) D(q)^{-1} \omega^T = \frac{1}{2} Q(q) \omega^C = \frac{1}{2} \Omega^C q \tag{۵۳}
$$

که در رابطهٔ (۵۳) :

$$
\Omega^C = \begin{bmatrix} 0 & \omega_z^C & -\omega_y^C & \omega_x^C \\ -\omega_z^C & 0 & \omega_x^C & \omega_y^C \\ \omega_y^C & -\omega_x^C & 0 & \omega_z^C \\ -\omega_x^C & -\omega_y^C & \omega_z^C & 0 \end{bmatrix} \tag{۵۴}
$$

که در رابطهٔ (۵۴):

$$
\begin{aligned}
\omega_x^C &= D_{1,1}^{-1}(q) \omega_x^T + D_{1,2}^{-1}(q) \omega_y^T + D_{1,3}^{-1}(q) \omega_z^T \\
\omega_y^C &= D_{2,1}^{-1}(q) \omega_x^T + D_{2,2}^{-1}(q) \omega_y^T + D_{2,3}^{-1}(q) \omega_z^T \\
\omega_z^C &= D_{3,1}^{-1}(q) \omega_x^T + D_{3,2}^{-1}(q) \omega_y^T + D_{3,3}^{-1}(q) \omega_z^T
\end{aligned} \tag{۵۵}
$$

همچنین با تعریف ماتریس‌های (۵۶) برای سادگی:

$$
\begin{aligned}
CO_{3\times3} &= -skew\left(D(q) I_C^{-1} D(q)^{-1} \omega^T\right) I_C D(q)^{-1} \\
FO_{3\times3} &= I_T^{-1} skew\left(h_{WC}\right) I_T D(q) I_C^{-1} D(q)^{-1} \\
GO_{3\times3} &= \mp D(q) I_C^{-1}
\end{aligned} \tag{۵۶}
$$

با استفاده از (۵۳) الی (۵۶) و (۴۹) ماتریس شبه‌خطی سیستم و ماتریس کنترل برای وضعیت به صورت (۵۷) و (۵۸) استخراج شده است:

$$
A_{attitude} = \begin{bmatrix} -skew\left(\omega^C\right) & q_4 D^{-1}(q) \\ 0_{3\times3} & FO + CO \end{bmatrix}_{6\times6} \tag{۵۷}
$$

و ماتریس کنترل وضعیت به صورت:

$$
B_{attitude} = \begin{bmatrix} 0_{3\times3} \\ GO \end{bmatrix} \tag{۵۸}
$$

این انتخاب مبتنی بر این بوده است که حالت‌ها و کنترل‌های وضعیت سیستم به صورت (۵۹) انتخاب شده‌اند:

$$
\mathbf{x}(t)_{Attitude} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \omega_x^T \\ \omega_y^T \\ \omega_z^T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}(t)_{Attitude} = T_{CC} = \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix} \tag{۵۹}
$$

شایان ذکر است که برای استخراج دستگاه معادلات (۵۲) فرض شد اغتشاشات وارد به سیستم صفر هستند. در حل مسئله ترمی ثابت که مبین تمامی اغتشاشات وضعیتی باشد به سیستم معادلات اعمال می‌شود.

حل معادلهٔ ریکاتی غیرخطی با استفاده از بردارهای ویژهٔ ماتریس همیلتونین

برای حل معادلهٔ (۴۲) و استخراج کنترل بهینهٔ u و حالت‌های x روش‌های مختلفی وجود دارد. پس از تشکیل و استخراج معادلات ریکاتی وابسته به حالت یکی از روش‌های حل و استخراج، جواب تشکیل ماتریس همیلتونین است. بدین صورت ابتدا ماتریس همیلتونین تشکیل داده می‌شود و سپس از روی بردارهای ویژه متناظر با مقادیر ویژه با قسمت حقیقی منفی اظهارنظر می‌شود. ماتریس همیلتونین به فرم معادلهٔ (۲۰) تشکیل داده می‌شود:

$$HM=\begin{bmatrix} A(x) & -B(x)R^{-1}B^{T}(x) \\ -Q(x) & -A^{T}(x) \end{bmatrix} \qquad (۶۰)$$

سایز ماتریس همیلتونین HM برابر با $2n\times 2n$ است. با این خاصیت مهم که تمام مقادیر ویژهٔ آن حول محورهای موهومی و حقیقی متقارن هستند. جواب پایدارکننده تنها وقتی موجود است که HM، n مقدار ویژه در نیم‌صفحهٔ چپی داشته باشد. از روی این n مقدار ویژه، n بردار ویژهٔ متناظر استخراج می‌شود که از آنها برای استخراج p در معادلهٔ ریکاتی وابسته به حالت (۴۲) استفاده می‌شود، که مطلوب p به صورت معادله (۶۱) استخراج خواهد شد:

$$\begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} Y \\ X \end{bmatrix} \qquad (۶۱)$$

$$P=XY^{-1}$$

در صورتی‌که n مقدار ویژه در نیم‌صفحه چپی دستگاه مختصات موجود نباشد باید در انتخاب ماتریس‌های A, B و R, Q تجدید نظر کرد و پارامترسازی جدید اتخاذ کرد. در معادلهٔ (۶۱) λ_x ها مقادیر ویژهٔ ماتریس HM هستند. بدین صورت با حل سیستم معادلات دینامیکی به صورت معادلات دیفرانسیل معمولی با شرایط اولیه در هر مرحله از حل ماتریس HM تشکیل داده می‌شود و ماتریس p و نهایتاً کنترل u محاسبه می‌شود [۲۸].

قیود کنترلی وضعیت

در صورت استفاده از چرخ‌های عکس‌العملی برای کنترل وضعیت نسبی فضاپیما، به دلیل اینکه حداکثر گشتاور تولیدی توسط یک چرخ خاص محدود است، باید این محدودیت بر کنترل بهینهٔ غیرخطی اعمال شود. با تعریف قید کنترلی به صورت معادلهٔ (۶۲):

$$|u|\le u_{\max} \qquad (۶۲)$$

این قید کنترلی در هر لحظه از حل باید مورد بررسی قرار گیرد. برای ارضا (۶۲)، اول ماتریس‌های R و Q به گونه‌ای انتخاب شود که کنترل بهینه استخراج شده در محدودهٔ مجاز یا حداقل در بازهٔ $|u|\le 10u_{\max}$ قرار گیرد. درصورتی که انتخاب ماتریس‌های R و Q موجب قرارگرفتن کنترل در محدودهٔ مجاز (۶۲) باشد، کنترل با مقدار استخراج شده از روش ریکاتی وابسته به حالت به سیستم اعمال می‌شود. درصورتی که کنترل استخراج شده از روش بهینهٔ غیرخطی از کنترل مجاز بیشتر بود و در بازه $|u|\le 10u_{\max}$ قرار داشت، می‌توان آن را با کنترل حداکثر تلاش یا $u=u_{\max}$ جایگزین کرد. بدین صورت قید کنترلی مربوط به چرخ‌های عکس‌العملی ارضا می‌شود. استفاده از ماتریس‌های وزنی به فرم $R=\frac{1}{u_{\max}}I_{3\times3}, Q=\frac{1}{x_{\max}}I_{6\times6}$ مناسب است، ولی باید توجه شود که این نوع انتخاب می‌تواند باعث افزایش زمان استقرار پاسخ‌های سیستم شود. به همین دلیل با کمک این انتخاب و سعی و خطایی بر پایهٔ تحلیل جواب‌ها، می‌توان این ماتریس‌ها را انتخاب کرد.

تبیین موقعیت و سرعت در دستگاه اینرسی زمین مرکز

با توجه به شکل (۱) می‌توان جهت‌هایی که دستگاه حرکت نسبی را به صورت (۶۳) بیان کرد [۲۳]:

$$\hat{O}_r=\frac{\mathbf{r}_T}{r_T},\ \hat{O}=\hat{O}_h\times\hat{O}_r,\ \hat{O}_h=\frac{\mathbf{h}_T}{h} \qquad (۶۳)$$

با مفروض داشتن مدار حرکت فضاپیما هدف در هر لحظه، موقعیت و سرعت این فضاپیما در دستگاه اینرسی قابل استخراج است. سپس با استفاده از رابطهٔ (۶۴) مومنتوم زاویه‌ای این فضاپیما نیز استخراج می‌شود:

$$\mathbf{h}_T=\mathbf{r}_T\times\dot{\mathbf{r}}_T \qquad (۶۴)$$

با استفاده از مومنتوم زاویه‌ای و بردار موقعیت و سرعت در دستگاه اینرسی برای فضاپیمای هدف، با کمک شکل (۱) می‌توان بردار موقعیت فضاپیمای تعقیب‌کننده در دستگاه اینرسی را به صورت (۶۵) استخراج کرد:

$$\mathbf{r}_C=\mathbf{r}_T+\mathbf{s}=(r_T+z)\hat{O}_r+x\hat{O}+y\hat{O}_h \qquad (۶۵)$$

شایان ذکر است که معادلات حرکت نسبی (۳) در بخش (۲) با مشتق‌گیری از رابطهٔ (۶۵) و اعمال فرض‌های ساده ساز قابل استخراج هستند. همچنین در صورت تمایل می‌توان با استفاده از مشتق‌گیری برای فریم گردان به فرم (۶۶)، سرعت‌های فضاپیما تعقیب‌کننده را در دستگاه اینرسی به فرم (۶۷) استخراج کرد:

$$\dot{\mathbf{r}}_C=V_{rel}+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{OT} \end{bmatrix}\times\mathbf{r}_C \qquad (۶۶)$$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}}_C&=\dot{\mathbf{r}}_T+\dot{\mathbf{s}}=\left(\dot{r}_T+\dot{z}-\omega_{OT}(r_t+z)\right)\hat{O}_r\\&+\left(\dot{x}+\omega_{OT}(r_T+z)\right)\hat{O}+\dot{y}\hat{O}_h\end{aligned} \qquad (۶۷)$$

که در رابطهٔ (۶۶) V_{rel} مبین مشتق زمانی بردار $\mathbf{r}_C$ بدون درنظرگرفتن چرخش مداری فضاپیما هدف است و ترم دوم مبین چرخش محورهاست.

شبیه‌سازی و نتایج

چهارسری شبیه‌سازی صورت گرفته است، اول برای کنترل بهینهٔ غیرخطی موقعیت نسبی فضاپیما در مانور ملاقات، دوم کنترل بهینهٔ غیرخطی وضعیت نسبی فضاپیما در مانور اتصال بدون چرخ‌های عکس‌العملی و با استفاده از پیشرانش و سوم کنترل بهینهٔ غیرخطی وضعیت نسبی فضاپیما در مانور اتصال با استفاده از چرخ‌های عکس‌العملی HR0610 با حداکثر گشتاور خروجی ۵ نیوتن- متر و چهارم با استفاده از چرخ‌های عکس‌العملی HR12 با حداکثر گشتاور خروجی ۰/۲ نیوتن- متر [۲۹]. سیستم (۶۸) و (۶۹) معرف این دو مانور موقعیت و وضعیت است:

$$\dot{\mathbf{x}}_{Position} = A_{Position}\left(x,t\right)\mathbf{x}_{Position} + B_{Position}\left(x,t\right)\mathbf{u}_{Position} \qquad (۶۸)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_{Attitude} = A_{Attitude}\left(x,t\right)\mathbf{x}_{Attitude} + B_{Attitude}\left(x,t\right)\mathbf{u}_{Attitude} \qquad (۶۹)$$

این شبیه‌سازی‌ها برای حالت کلی فضاپیما هدف در مدار بیضوی صورت گرفته است که برای هر دو مانور تابع هزینه به فرم (۳۰) انتخاب شده است. پس از نوشتن شروط لازم برای بهینگی، معادلهٔ ریکاتی وابسته به حالت با ماتریس‌های A, B متغیر با زمان و حالت حاصل می‌شود که با استفاده از مقادیر ویژهٔ ماتریس همیلتونین کنترل مورد نیاز استخراج می‌شود.

برای شبیه‌سازی‌های مسئلهٔ ملاقات و اتصال بین دو فضاپیما که کنترل فعال روی فضاپیمای رهگیر قرار دارد، جرم فضاپیمای رهگیر ۱۰۰۰ کیلوگرم درنظر گرفته شده است و فرض شده است که فضاپیما هدف در مدار بیضوی با ارتفاع اوج و حضیض ۱۰۰۰۰ و ۵۰۰ کیلومتر قرار دارد و فضاپیمای رهگیر برای ملاقات از مدارات دورتر به سمت هدف مانور می‌دهد. ماهواره تحت گشتاورهای اغتشاشی محدود قرار می‌گیرد و عملکرد کنترل در صورت اعمال این گشتاورهای نیز بررسی می‌شود. تمام شبیه سازی‌های موقعیت و وضعیت تحت نیرو و گشتاور اغتشاشی 10^{-4}و عدم قطعیت‌های حالت و پارامتری 0.1 قراردارد.شرایط اولیه، سرعت‌هاوفواصلنسبی برای هر دو حالت به صورت جدول ۱ و شرایط اولیه وضعیت‌های نسبی در جدول ۲ نشان داده شده است، زمان شبیه سازی‌های موقعیت۳۰۰۰۰ ثانیه است. همچنین دقت حل عددی 10^{-5} است:

جدول ۱- شرایط اولیه موقعیت نسبی فضاپیمای رهگیر نسبت به هدف

x_0(km)	y_0(km)	z_0(km)	$\dot{x}_0$(km/s)	$\dot{y}_0$(km/s)	$\dot{z}_0$(km/s)
۹۶۰	-۵۹۰	۳۲۹۰	۰	-۰/۵۵	۰

جدول ۲- شرایط اولیه وضعیت نسبی فضاپیمای رهگیر نسبت به هدف

q_1	q_2	q_3	q_4	$\omega_x(deg/s)$	$\omega_y(deg/s)$	$\omega_z(deg/s)$
۰	۰	۰	۱	-0.3	0.5	0.1

همچنین برای تابع هزینه ماتریس‌های وزنی R,Q برای موقعیت به صورت رابطهٔ (۷۰) بیان شده است که $I_{3\times3}, I_{6\times6}$ ماتریس‌های یکه مربعی مرتبهٔ ۳ و مرتبهٔ ۶ هستند:

$$Q = \begin{bmatrix} .01I_{3\times3} & 0_{3\times3} \\ 0_{3\times3} & .001I_{3\times3} \end{bmatrix} \qquad (۷۰)$$
$$R = 10^4 I_{3\times3}$$

همچنین ماتریس‌های وزنی R,Q برای کنترل وضعیت بدون چرخ عکس‌العملی و در صورت وجود چرخ HR0610 به صورت معادلهٔ (۷۱) انتخاب شده‌اند:

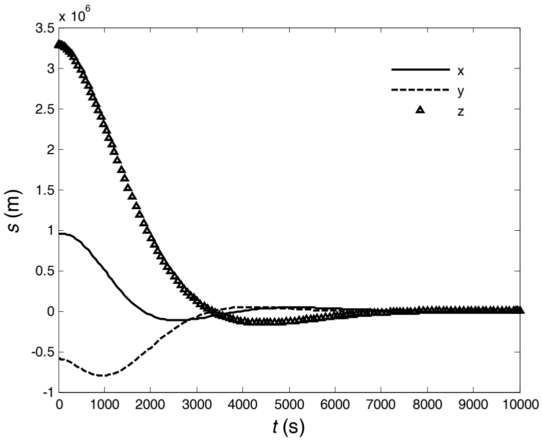
$$Q = 1000 \times I_{6\times6} \qquad (۷۱)$$
$$R = 0.1 \times I_{3\times3}$$

ماتریس‌های وزنی برای حالتی که از چرخ عس‌العملی کوچک‌تر، یعنی HR12 استفاده می‌شود به صورت (۷۲) است:

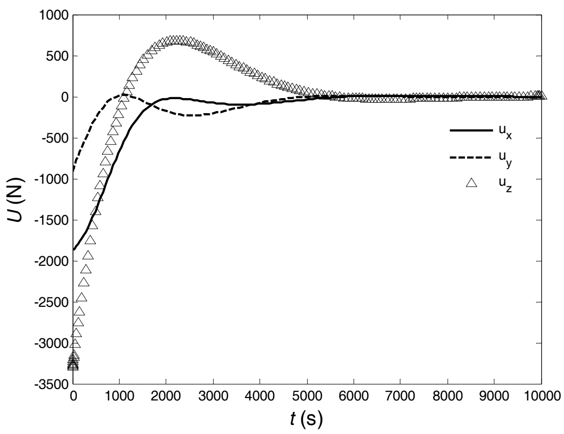
$$Q = 100 \times I_{6\times6} \qquad (۷۲)$$
$$R = 0.1 \times I_{3\times3}$$

با توجه به اطلاعات مذکور شبیه‌سازی‌ها صورت گرفته است. این انتخاب R,Q به گونه‌ای بوده است که مسئلهٔ تنظیم‌کنندهٔ مربعی غیرخطی جواب‌های پایدارکننده داشته باشد و ماتریس همیلتونین n مقدار ویژهٔ سمت چپ محورهای حقیقی داشته باشد. افزایش R زمان لازم را زیاد می‌کند و تلاش کنترلی را کم می‌کند. از طرف دیگر افزایش Q تلاش کنترلی را زیاد کرده و زمان لازم برای ملاقات و اتصال یا صفر شدن حالت‌ها را کم می‌کند. شکل (۲) موقعیت نسبی فضاپیمای رهگیر نسبت به هدف را نمایش می‌دهد، همانگونه که ذکر شده است زمان شبیه‌سازی ۳۰۰۰۰ ثانیه بوده است، و ملاقات یا صفرشدن سرعت نسبی و موقعیت نسبی در ۲۰۲۳۵ ثانیه اتفاق می‌افتد. برای نمایش بهتر تغییرات زیاد در ابتدای حرکت شکل (۲)، (۳) و (۵) کمیت‌ها را تا ۱۰۰۰۰ ثانیه نمایش می‌دهند. شکل (۳) کنترل‌های بهینهٔ غیرخطی اعمال‌شده توسط پیشرانش‌ها را برای فرایند ملاقات نمایش می‌دهد که نوسانی هستند. در شکل (۴) مسیر حرکت نسبی فضاپیمای رهگیر نسبت به هدف نمایش داده شده است. در انتهای حرکت چند دور به صورت اسپیرال زده می‌شود تا فاصله به یک متری برسد. شکل (۵) سرعت‌های نسبی را تا همگرا شدن به سمت صفر نمایش می‌دهد. سرعت‌ها، کنترل و موقعیت در شکل (۲)، (۳) و (۵) پایدار و هموار هستند. نهایتاً شکل (۶) مسیر حرکت فضاپیمای رهگیر و هدف را در دستگاه اینرسی نمایش می‌دهد. رهگیر بعد از ۱/۷۹ دوره تناوب فضاپیمای هدف به آن می‌رسد و ملاقات صورت می-

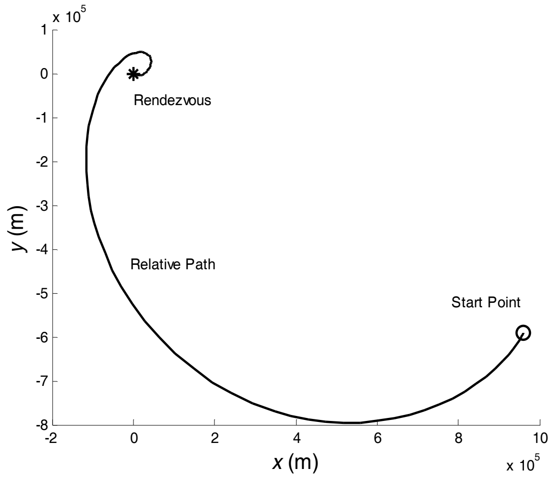
پذیرد. تلاش کنترلی در شکل (۳) ۳۷۱۶ کیلوژول و حداکثر کنترل اعمال شده به سیستم ۳۲۹۰ نیوتن است.



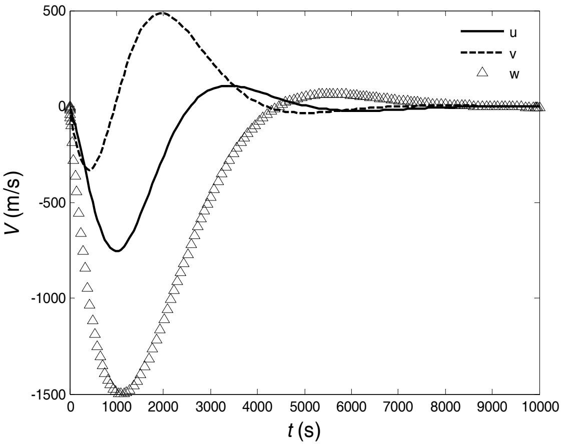
شکل ۲- فواصل نسبی فضاپیمای تعقیب‌کننده نسبت به هدف



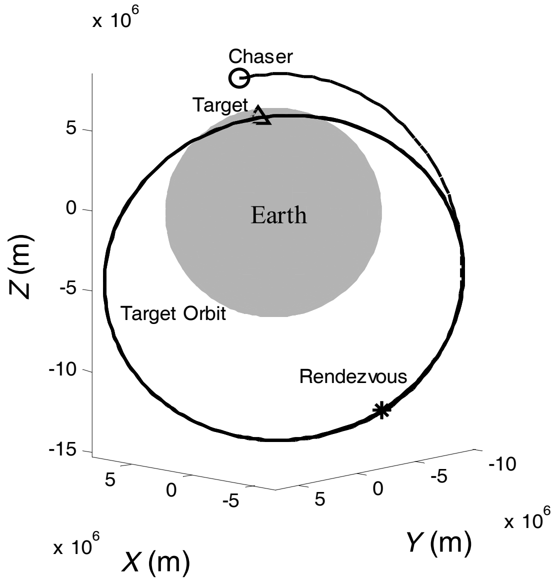
شکل ۳- نیروی کنترلی بهینهٔ اعمال شده



شکل ۴- مسیر حرکت نسبی فضاپیمای تعقیب‌کننده نسبت به هدف

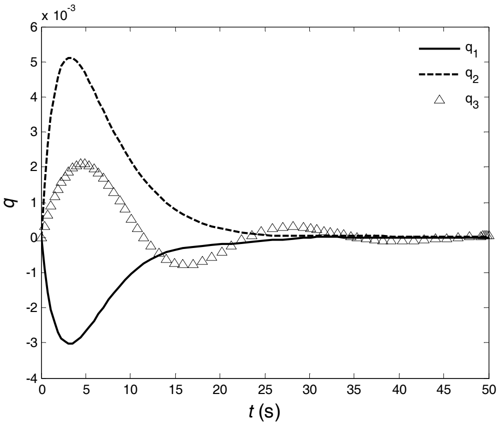


شکل ۵- سرعت نسبی فضاپیمای تعقیب‌کننده نسبت به هدف

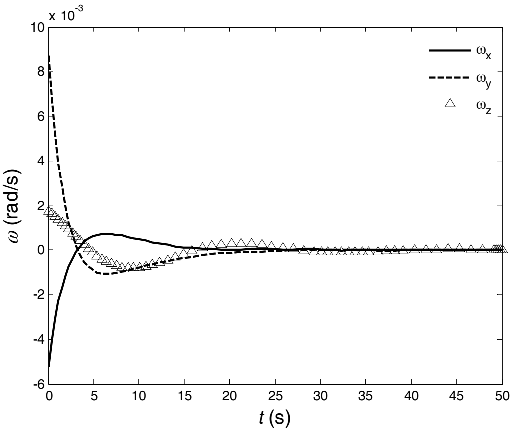


شکل ۶- مسیر حرکت دو فضاپیما در دستگاه اینرسی

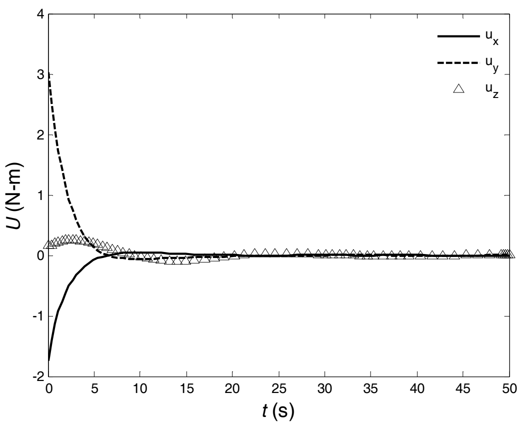
با انجام شبیه‌سازی‌های مربوط به فضاپیمای رهگیر بدون چرخ عکس‌العملی و با استفاده از پیشرانش نتایج به صورت شکل‌های (۷)، (۸) و (۹) استخراج شده است. شکل (۷) کواترنیون‌های نسبی اول، دوم و سوم فضاپیمای رهگیر نسبت به هدف را نمایش می‌دهد. با توجه به شرایط اولیهٔ کواترنیون‌های نسبی اول، دوم و سوم صفر انتخاب شده بود. شکل (۸) سرعت‌های زاویه‌ای نسبی را نمایش می‌دهد که به صورت پایدار و هموار به صفر رسیده‌اند. زمان استقرار برای فرایند اتصال برای این فضاپیما ۴۵ ثانیه است. نهایتاً شکل (۹) کنترل‌های بهینهٔ غیرخطی را نمایش می‌دهد که حداکثری برابر ۲/۸ نیوتن- متر و تلاش کنترلی ۷/۴۱۷ ژول دارد.



شکل ۷- کواترنیون‌های نسبی در حالت بدون استفاده از چرخ عکس‌العملی



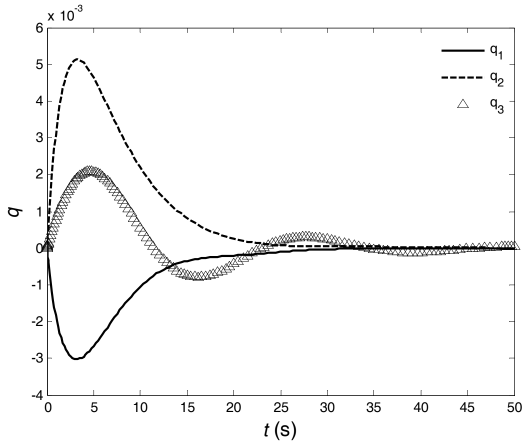
شکل ۸- سرعت زاویه‌ای نسبی در حالت بدون استفاده از چرخ عکس‌العملی



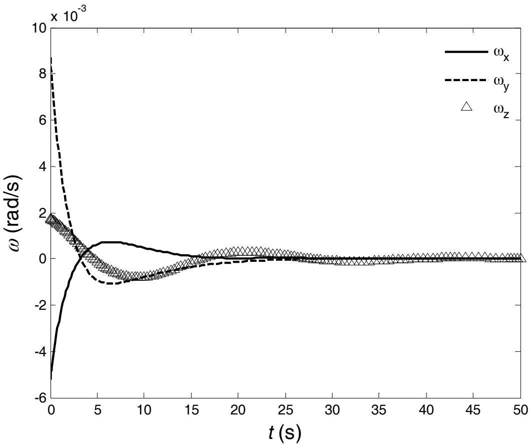
شکل ۹- کنترل بهینه غیرخطی در حالت بدون استفاده چرخ عکس‌العملی

در صورت استفاده از چرخ قوی HR0610 نتایج به صورت شکل‌های (۱۰) تا (۱۳) استخراج می‌شوند. شکل (۱۰) کواترنیون‌های نسبی را نمایش می‌دهد و شکل (۱۱) سرعت‌های زاویه‌ای نسبی را، نمای کلی شکل (۱۰) و (۱۱) مانند شکل (۷) و (۸) است، ولی در حقیقت این دو مجموعه با هم تفاوت دارند و تفاوت به دلیل وجود ترمی ضربی شامل مومنتوم چرخ و سرعت زاویه‌ای نسبی در معادلهٔ دینامیک است.

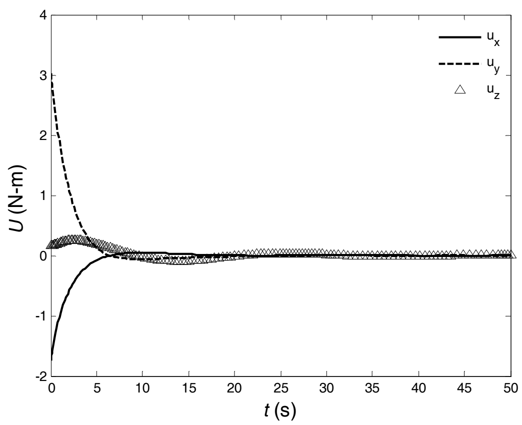
شکل (۱۲) کنترل بهینهٔ حاصل از چرخ‌ها را نمایش می‌دهد. در این حالت تلاش کنترلی لازم ۷/۳۳۴ نیوتن- متر است. کمتر بودن تلاش کنترلی در این حالت به دلیل وجود ترم دمپینگ حاصل از چرخ در دینامیک سیستم است. نهایتاً شکل (۱۳) مومنتوم زاویه‌ای چرخ‌ها را نمایش می‌دهد. در شکل (۱۳) مشاهده می‌شود چرخ‌ها پس از انجام مانور با سرعت زاویه‌ای ثابت می‌چرخند تا فضاپیمای رهگیر در وضعیت مطلوب حفظ شود.



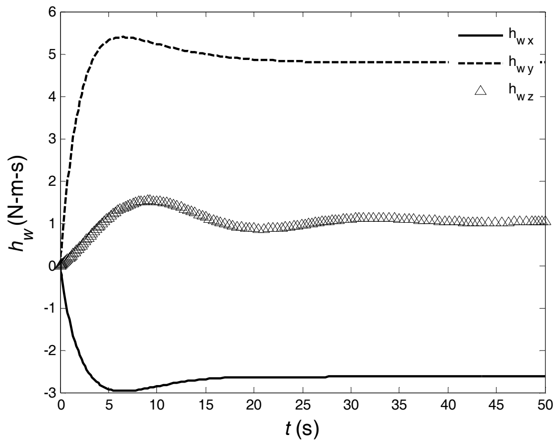
شکل ۱۰- کواترنیون‌های نسبی با استفاده از چرخ‌های عکس‌العملی HR0610



شکل ۱۱- سرعت زاویه‌ای نسبی با استفاده از چرخ‌های عکس‌العملی HR0610

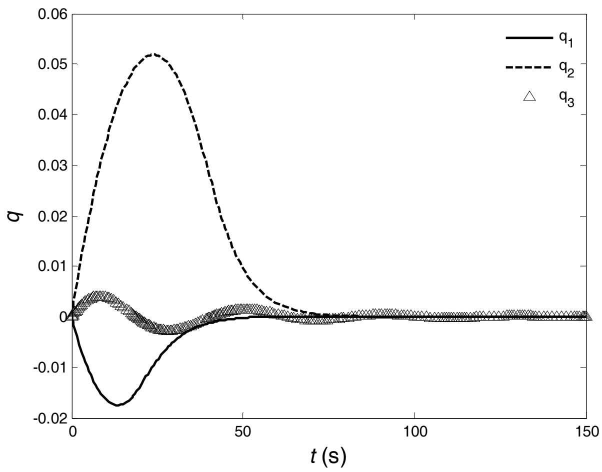


شکل ۱۲- گشتاور کنترلی حاصل از چرخ‌های عکس‌العملی HR0610

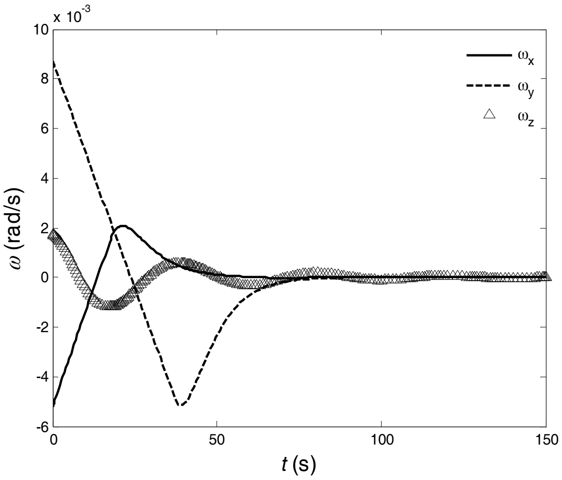


شکل ۱۳- مومنتوم زاویه‌ای مورد نیاز چرخ‌های HR0610

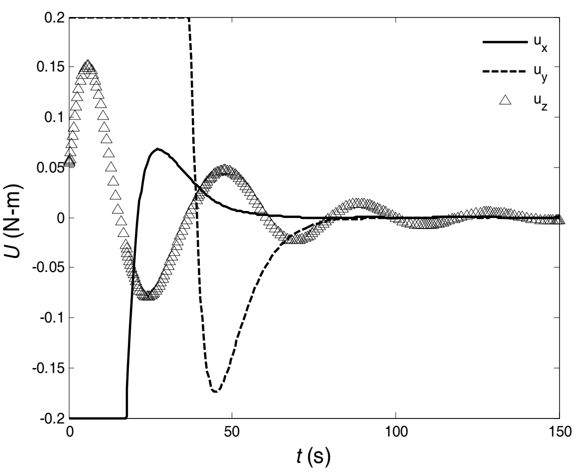
در صورت استفاده از چرخ‌های عکس‌العملی HR12 نتایج به صورت شکل‌های (۱۴) تا (۱۷) استخراج می‌شوند. شکل (۱۴) نمایش‌دهندهٔ کواترنیون‌های نسبی است، پرشی که در q_2 دیده می‌شود به دلیل بالاتر بودن سرعت زاویه‌ای اولیه متناظر با آن است. شکل (۱۵) سرعت زاویه‌های نسبی را نمایش می‌دهد. شکل (۱۶) کنترل بهینهٔ مقید را نمایش می‌دهد. در ابتدا، کنترل حول محور بدنی x و y مقدار ثابت حداکثر است؛ به همین دلیل سرعت‌های زاویه‌ای برای این دو محور در شکل (۱۵) به صورت خطی تغییر می‌کنند. شکل (۱۷) که مومنتوم چرخ‌ها را نمایش می‌دهد نیز در ابتدای حرکت به دلیل ثابت بودن کنترل به صورت خطی تغییر می‌کند. وقتی کنترل وارد مقادیر مجاز رابطه (۶۲) می‌شود، عیناً به سیستم اعمال می‌شود. برای این حالت تلاش کنترلی ۱۲/۲۳۷۷ ژول استخراج می‌شود. با توجه به کمتر بودن حالت اولیه مربوط به ω_z نسبت به سرعت زاویه‌ای در دو محور دیگر، مقدار کنترل برای این محور از ابتدا در محدودهٔ مجاز قرار می‌گیرد.



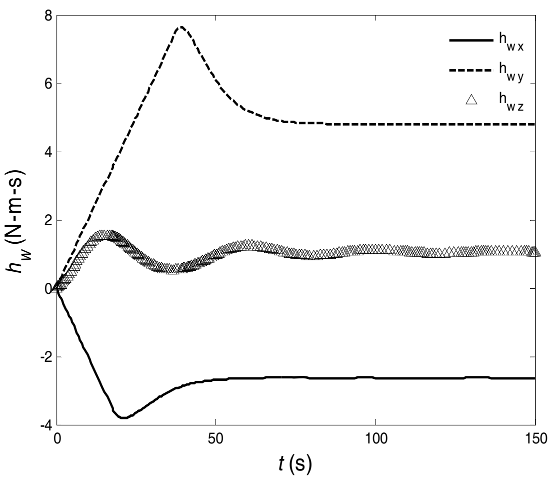
شکل ۱۴- کواترنیون‌های نسبی با استفاده از چرخ‌های عکس‌العملی HR12



شکل ۱۵- سرعت زاویه‌ای نسبی با استفاده از چرخ‌های عکس‌العملی HR12



شکل ۱۶- گشتاور کنترلی بهینه با استفاده از چرخ‌های عکس‌العملی HR12



شکل ۱۷- مومنتوم زاویه‌ای چرخ‌های عکس‌العملی HR12

نتیجه‌گیری

مشاهده شد که با کنترل غیرخطی مطرح شده می‌توان سیستم را در زمانی مناسب و به صورت هموار، به شرایط پایدار نهایی رساند. معادلات وضعیت و موقعیت غیرخطی نسبی استخراج شد تا به دلیل نیاز به امنیت بالابرای مانور، مدل دقیقی از سیستم ارائه کنند. با توجه به شبیه‌سازی‌های عددی استفاده از چرخ‌های‌عکس‌العملی ضعیف برای ماهوارهٔ انتخابی مناسب نبودند و چرخ‌های قوی عملکرد کنترلی مشابه به پیشرانش‌ها داشتند. روش تحلیلی بردارهای ویژهٔ ماتریس همیلتونین برای اولین بار در این مسئله برای حل معادلهٔ ریکاتی وابسته به حالت و استخراج کنترل بهینهٔ مانور ملاقات و اتصال به کار گرفته شد. این روش به عدم قطعیت‌های محدود حالت و پارامتری سیستم مقاوم بود. همچنین در مقابل نیروها و گشتاورهای اغتشاشی محدود وارد به سیستم عملکرد مناسبی از خود نشان داد.

مراجع

[1] Aldrin, B., Line-of-Sight Guidance Techniques for Manned Orbital Rendezvous, (PhD Thesis), Massachusetts Institute of Technology, 1963.

[2] Luo, Y., Zhang, J. and Tang, G., "Survey of Orbital Dynamics and Control of Space Rendezvous," *Chinese Journal of Aeronautics*, Vol. 27, Issue 1, 2014, pp. 1-11.

[3] Louis S.B. and Jonathan P.H., "Safe Trajectories for Autonomous Rendezvous of Spacecraf," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 31, No. 5, 2008, pp. 1478-1489.

[4] Michael, J., Chudej, K. and Pannek, J., "Modelling and Optimal Control of a Docking Maneuver with an Uncontrolled Satellite," *arXiv preprint*, 2012, pp. 1203.6782.

[5] Phillips, J.M., Kavraki, L.E. and Bedrossian, N., *Spacecraft Rendezvous and Docking with Real-Time, Randomized Optimization*, AIAA Guidance, Navigation, and Control, 2003.

[6] Lu, W., Geng, Y.H., Chen, X.Q. and Zhang, F., "Relative Position and Attitude Coupled Control for Autonomous Docking with a Tumbling Target," *International Journal of Control and Automation*, Vol. 4, No. 4, 2011, pp. 1-22.

[7] Gu, D. and Liu, Y., "Robust Parametric Control of Spacecraft Rendezvous," *Hindawi Publishing Corporation, Mathematical Problems in Engineering*, 2014.

[8] Andrade, C., Ramirez-Mendoza, R., Giacoman-Zarzar, M., Morales, R., Fejzic, A., Saenz-Otero, A., and Miller, D.W., "Robust Control Applied Towards Rendezvous and Docking," *Control Conference (ECC), European*, At Budapest, Hungary, 2009.

[9] Andrade, C., Robust Control Applied to Consistent Rendezvous and Docking, (Bs Thesis), Massachusetts Institute of Technology, 2008.

[10] Ortega, G. and Giron-Sierra, J. M., "Genetic Algorithms for Fuzzy Control of Automatic Docking with a Space Station," *Evolutionary Computation, IEEE International Conference*, Vol. 1, 1995, pp. 157.

[11] Tournes, C., Shtessel, Y. and Foreman, D., "Automatic Space Rendezvous and Docking using Second Order Sliding Mode Control," *In Intech Open Access Publisher*, 2011.

[12] Xin, M. and Pan, H., "Indirect Robust Control of Spacecraft Via Theta-D Optimal Control Solution," *AIAA Journal*, Vol. 4, No. 35, 2010, pp. 20-22.

[13] Crispin, Y. and Seo, D., "Rendezvous Between Two Active Spacecraft with Continuous Low Thrust," *Advances in Spacecraft Technologies, Dr Jason Hall (Ed.), InTech*, 2011, pp.585.

[14] Xiangyu, G., Kok, L.T. and Guangren, D., "An Optimal Control Approach to Robust Control of Nonlinear Spacecraft Rendezvous System with Theta-D Technique," *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, Vol. 9, No. 5, 2013, pp. 200-210.

[15] Xiangyu, G., Wei, Y. and Hao, L., "An Optimal Control Approach to Robust Control of Spacecraft Rendezvous System on Elliptical Orbit," *Control Conference (CCC)*, Chinese, IEEE, Vol. 31, 2012, pp. 2321- 2325.

[16] Murtazin, R., "Rendezvous Missions: From ISS to Lunar Space Station," *Acta Astronautica*, Vol. 101, 2014, pp. 151–156.

[17] Bevilacqua, R., Romano, M. and Yakimenko, O., "Online Generation of Quasi-Optimal Spacecraft Rendezvous Trajectories," *Elsevier*, Vol. 64, No. 2, 2009, pp. 345-358.

[18] Harris, M.W. and Acikmese, B., "Minimum Time Rendezvous of Multiple Spacecraft Using Differential Drag," *Aiaa Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 37, No. 2, 2014, pp.365-373.

[19] Vallet, C. and et. al., "Model Predictive Control Application to Spacecraft Rendezvous in Mars Sample Return Scenario," *Progress in Flight Dynamics, Guidance, Navigation, Control, Fault Detection, and Avionics. EDP Sciences*, Vol. 6, 2013, pp. 137-158.

[20] Lee, D. and Pernicka, H., "Optimal Control for Proximity Operations and Docking," *International Journal of Aeronautical and Space Sciences*, Vol. 11, No. 3, 2010, pp. 206-220.

[21] Mauro, M. and Zamaro, M., "Application of SDRE Technique to Orbital and Attitude Control of Spacecraft Formation Flying," *Acta Astronautica*, Vol. 94, No. 1, 2014, pp. 409-420.