

# طراحی کنترل وضعیت ماهواره به روش کنترل بهینه بدون مدل

فرید تاجی هروی<sup>۱</sup> و علیرضا باصحبت نوینزاده<sup>۲\*</sup>

۱- گروه مهندسی هوافضا، دانشکده مهندسی مکانیک و هوافضا، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات

۲- دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی

\*تهران، کدپستی: ۱۶۵۶۹-۸۳۹۱۱

novinzadeh@kntu.ac.ir

هدف از ارائه این مقاله اثبات و تشریح روش کنترل بهینه بدون مدل است. این تئوری از اصول روش برنامه‌ریزی دینامیکی استخراج شده است. روش کنترل بهینه بدون مدل برای سیستم‌های گسسته در زمان، تولید شده است. در طراحی کنترلر نیازی به مدل سیستم نیست، و تنها از داده‌های ورودی و خروجی برای طراحی کنترلر استفاده شده است. برای ارزش‌سنجی روش کنترلی بدون مدل دو عمل صورت گرفته است. اولین عمل طراحی این روش کنترلی برای کنترل وضعیت ماهواره بوده است. هدف از انجام آن تولید روش کنترل بهینه بدون مدل برای مدلی فضایی و سنجش کارایی آن برای سیستم ماهواره است. دومین عمل صورت گرفته برای ارزش‌سنجی، طراحی کنترلر تنظیم‌کننده خطی درجه دوم (LQR) برای سیستم گسسته در زمان ماهواره است. علت طراحی این کنترلر مقایسه‌ی آن با روش کنترلی بدون مدل خواهد بود. در نهایت با انجام این دو عمل، به این نتیجه رسیده شده است که روش کنترل بهینه بدون مدل قابل قبول و ارزشمند است.

واژه‌های کلیدی: برنامه‌ریزی دینامیکی، روش کنترل تنظیم‌کننده خطی درجه دوم، کنترل بدون مدل، کنترل وضعیت ماهواره

		علائم و اختصارات	
H	ماتریس تابع یادگیر Q		بردار حالت سیستم
n	تعداد اعضای بردار حالت		بردار کنترلی
m	تعداد اعضای بردار کنترلی	$x_k$	ماتریس وزنی (حداقل مسیر طی شده)
	مجموع تعداد اعضای بردار	$u_k$	ماتریس وزنی (حداقل تلاش کنترلی)
q	کنترلی و بردار حالت	Q	تابع هدف تعریف شده برای سیستم
	بردار ستونی که اعضای آن از	R	ماتریس حالت سیستم
z	بردار حالت و بردار کنترلی سیستم	$V(x_k)$	ماتریس کنترلی سیستم
	تشکیل شده	A	گین کنترلی
$\bar{z}$	بردار کرونگر تولید شده از بردار z	B	معادله‌ی ریکاتی
	برداری که از ماتریس H تابع	K	تابع یادگیر Q
$h_{i+1}$	یادگیر Q استخراج شده است.	P	
	ماتریس استخراج شده بردار	$Q(x_k, u_k)$	
Z	کرونگر حول مجموعه $\Omega$		
	ماتریس بردار هدف استخراج		
Y	شده حول مجموعه $\Omega$		

۱. دانشجو کارشناسی ارشد

۲. دانشیار (نویسنده مخاطب)

چالش‌های بزرگی در مطالعه و استفاده از این روش کنترلی روبه‌رو شده، چرا که بسیاری از مشکلات در توسعه نظری تئوری کنترلی و همچنین نیازمندی‌های عملی در ایجاد کنترل سیستم‌های موجود به‌وجود آمده است. تئوری کنترل مدرن براساس فرض معلوم بودن مدل ریاضی یا مدل نامی آن بنا نهاده شده است [۱]. آنچه که مشخص است در عمل ایجاد مدلی از سیستم بسیار دشوار و گاهی غیرممکن است. حتی اگر مدل به درستی طراحی شود، دقت آن با شک و تردید همراه خواهد بود [۲]. بنابراین اشکال در مدل‌سازی، استحکام ضعیف مدل و فقدان ایمنی سبب وجود یک شکاف عظیم بین تجزیه تحلیل نظری و عملکرد عملی آن در کنترل مدرن شده است. همان‌طور که بیان شد هنگام طراحی کنترلر به روش تئوری کنترل مدرن برای سیستمی پیچیده یا مدل ریاضی دارای عدم قطعیت‌هایی است و یا اینکه به دلیل پیچیدگی مدل و غیر خطی بودن تهیه کنترلر بسیار سخت و هزینه‌گرا خواهد داشت. پس در انجام این مقاله به راه‌حل جدیدی فکر شده است که بتوان بدون داشتن مدلی از سیستم به طراحی کنترلر پرداخت که به آن روش بدون مدل<sup>۳</sup> گفته می‌شود. روش بدون مدل یک روش کنترلی داده محور است که تنها به اندازه‌گیری داده‌های ورودی و خروجی (I/O) گرفته شده از سیستم کنترلی بستگی دارد. این داده‌های اندازه‌گیری شده در طراحی کنترلر و تحلیل سیستم حلقه بسته تاثیر گذار است و هیچ نیازی به مدل دینامیکی نخواهد داشت.

تاکنون روش‌های بدون مدل مختلفی ارائه شده‌اند، که در ادامه به شرح مختصری از آن‌ها پرداخته شده است. اولین روش بررسی شده، روش تخمین تضادفی اختلالات به صورت همزمان بر پایه‌ی کنترل داده محور<sup>۴</sup> (SPSA) که بر پایه‌ی تخمین کنترلر بنا نهاده شده است برای اولین بار توسط اسپال<sup>۵</sup> در سال ۱۹۹۲ بیان شد [۳]. این روش به جای اینکه از مدل ریاضی سیستم غیر خطی گسسته شده در زمان برای طراحی کنترلر استفاده کند، تنها از اندازه‌گیری داده‌های حلقه بسته برای تنظیم پارامترهای کنترلر استفاده می‌کند. دومین روش ارائه شده، روش کنترل تطبیقی بدون مدل<sup>۶</sup> MFAC برای اولین بار توسط ژونگشن هو<sup>۷</sup> در سال ۱۹۹۴ براساس سیستم‌های غیرخطی گسسته در زمان بیان شد [۴-۶] در این روش داده‌های اندازه‌گیری شده از ورودی و خروجی سیستم به جای مدل‌سازی دینامیک غیر خطی، یک مدل دینامیکی در نقاط عملیاتی پویا از سیستم حلقه بسته ساخته خواهد شد که این عملیات

[I]	ماتریس اینرسی ماهواره
I	ماتریس واحد
$\bar{q}$	بردار کوانترنیون
0 <sub>3</sub>	ماتریس صفر ۳×۳
M	گشتاور ماهواره
h	حرکت زاویه‌ای ماهواره
[D]	ماتریس اندازه حرکت چرخ عکس‌العمل
T	گشتاور چرخ عکس‌العمل
t <sub>f</sub>	زمان نهایی
t <sub>0</sub>	زمان ابتدایی
Δt	فاصله زمانی تقسیم شده بین زمان نهایی و ابتدایی
ω	بردار سرعت زاویه‌ای ماهواره
Ω	محدوده تعریف شده در روش حداقل مربعات
β	زاویه قرارگیری چرخ عکس‌العمل نسبت به راستای محور ماهواره
“T”	دستگاه اینرسی
“B”	دستگاه بدنی
Pesudo-Partial Derivative (PPD)	مشتمق شبه جزئی
Linear-Quadratic Regulator (LQR)	کنترلر تنظیم کننده خطی درجه دوم
Approximate Dynamic Programming (ADP)	برنامه‌ریزی دینامیکی تقریبی
Heuristic Dynamic Programming (HDP)	برنامه‌ریزی دینامیکی اکتشافی
Dual Heuristic Dynamic Programming (DHDP)	برنامه‌ریزی دینامیکی اکتشافی دوگانه
Action Dependent Heuristic Dynamic Prgramming (ADHDP)	عملگر وابسته به برنامه‌ریزی دینامیکی اکتشافی
Action Dependent Dual Heuristic Dynamic Prgramming (ADDHDP)	عملگر وابسته به برنامه‌ریزی دینامیکی اکتشافی دوگانه
globalized-ADP (GDHP) or ADGDHP	طرح پیشرفته جدید برنامه‌ریزی دینامیکی

## مقدمه

در طول نیم قرن گذشته تئوری کنترل مدرن تا حد زیادی توسعه یافته و شاخه‌هایی نیز از آن به وجود آمده‌اند، برای مثال به تئوری سیستم خطی، کنترل بهینه، شناسایی سیستم، کنترل مد لغزشی، کنترل آماری و ... اشاره کرد. در همین حال تعداد قابل توجهی از برنامه‌های کاربردی تحت تئوری کنترل مدرن در زمینه‌های مختلف از قبیل فرآیندهای صنعتی، هوافضا، حمل و نقل شهری و بسیاری دیگر منتج شده است. با این حال، اکنون با

3. Model-Free  
4. Simultaneous Perturbation Stochastic Approximation based DDC  
5. J. C. Spall  
6. Model-Free Adaptive Control  
7. Zhongsheng Hou

Q برای مسئله کنترل بهینه خطی درجه دوم گسسته در زمان، در حالی که مرتبط با بازی مجموع- صفر<sup>۱۹</sup> بوده است، و همچنین کشف نويز به منظور به دست آوردن نتیجه همگرایی معادله ریکاتی پرداخته شده است. مرجع [۱۳] توسط هاگن و کرایز<sup>۲۰</sup> در سال ۱۹۹۸ منتشر شد، این مرجع در مورد رابطه روش تکرار سیاست یادگیری Q و کنترل تطبیقی بر پایه مدل با شناسایی سیستم است. در مرجع [۱۴] برنامه ریزی دینامیکی تقریبی به چهار بخش اصلی تقسیم شده است، که عبارتند از:

۱. برنامه ریزی دینامیکی اکتشافی (HDP)

۲. برنامه ریزی دینامیکی اکتشافی دوگانه (DHDP)

۳. عملگر وابسته به برنامه ریزی دینامیکی اکتشافی، همچنین به یادگیری Q شناخته می شود [۱۵] (ADHDP)

۴. عملگر وابسته به برنامه ریزی دینامیکی اکتشافی دوگانه (ADDHDP)

در مرجع [۱۶] طرح پیشرفته جدید برنامه ریزی دینامیکی که به globalized-ADP (GDHP) یا ADGDHP شناخته شده است، معرفی شد. در مرجع [۱۷] که توسط لنديلیس<sup>۲۱</sup> در سال ۱۹۹۷ ارائه شده است، به بیان تکنیک های HDP، DHDP، ADDHDP و ADHDP روی مسئله های کنترل بهینه خطی درجه دوم گسسته با زمان پرداخته شده است. وضعیت فعلی کار بر روی برنامه ریزی دینامیکی تقریبی در مرجع [۱۸] بیان شده است.

یکی از زیر سیستم های ماهواره ها کنترل وضعیت است که وظیفه نشانه روی به یک هدف مشخص را داراست. لغت کنترل وضعیت به معنای جهت دهی ماهواره به یک جهت مشخص و از پیش تعیین شده است [۱۹]. کنترل وضعیت به دقت زیاد برای پایدارسازی و همچنین قیمت، وزن، قابلیت اطمینان، حرکت مداری و مدت عمر نیاز دارد. تاکنون روش های پایدارسازی و کنترل وضعیت گوناگونی در طی این سال ها بسط و گسترش یافته اند. برای مثال می توان به مراجع [۲۰، ۲۱] که برای کنترل وضعیت ماهواره طراحی شده و در فصلنامه علوم و فناوری فضایی چاپ شده اند اشاره کرد. در این مقاله، روش کنترل بهینه بدون مدل برای کنترل وضعیت سیستم ماهواره طراحی شده است.

در این مقاله ابتدا، روش کنترلی LQR شرح داده می شود از آنجا که روش کنترل بهینه بدون مدل از روش LQR استخراج شده است، در نتیجه بهترین روش برای ارزش سنجی روش بدون مدل است. پس از تشریح روش کنترلی LQR، روش کنترل بدون مدل تشریح و اثبات شده است. پس از آن اقدام به مدل سازی ماهواره

با استفاده از تکنیک جدید دینامیک خطی ساز که به مفهوم کلی مشتق شبه جزئی، ایجاد خواهد شد. این مدل خطی سازی سیستم دینامیکی به روش PPD را می توان با استفاده از داده های اندازه گیری شده تخمین زد. در نهایت به تشریح روش کنترل بهینه بدون مدل پرداخته شده است. این روش توسط خانم آسما آل تمیمی<sup>۸</sup> و آقای لیوایز<sup>۹</sup> در سال ۲۰۰۷ ارائه شد [۷]. این روش یک الگوریتم طراحی کنترل LQR بدون مدل برای سیستم های زمان گسسته خطی نامعلوم با استفاده از یادگیری Q<sup>۱۰</sup> توسعه داده شده است.

در این مقاله با استفاده از روش یادگیری Q که یک روش یادگیری پشتیبانی شده بر پایه تحلیل گر است، برای سیستم های ناشناخته خطی مستقل از زمان، الگوریتم کنترل بهینه بدون مدل طراحی شده است. در طراحی کنترل به روش کنترل بهینه بدون مدل با توجه به عدم وجود مدل دینامیکی برای سیستم، هیچ اطلاعاتی درباره ماتریس فضای حالت این سیستم وجود ندارد اما می توان به حالت های تغییر پذیر این سیستم ها دست پیدا کرده و این تغییرات را در مساله موجود اعمال نمود. در این مقاله، راهبرد بهینه سیستم های خطی درجه دوم مربوط به مسئله کنترل بهینه بدون دانستن ماتریس های دینامیکی سیستم حل شده است؛ که برای حل این مسئله بدون داشتن ماتریس های دینامیکی از تئوری یادگیر Q استفاده شده است. در ادامه به شرح جزئیات مراجعی اشاره خواهد شد که سبب شکل گیری روش شده اند.

برنامه ریزی دینامیکی تقریبی رویکردی است که برای حل مسائل کنترل بهینه به کار می رود. برنامه ریزی دینامیکی تقریبی توسط رابز<sup>۱۱</sup> در سال [۸] ۱۹۹۱، و بارتو<sup>۱۲</sup>، ساتون<sup>۱۳</sup> و اندرسون<sup>۱۴</sup> در سال [۹] ۱۹۸۳ و برتسکاس<sup>۱۵</sup> و تسی تسیکلیس<sup>۱۶</sup> و در سال ۱۹۹۶ [۱۰]، برای حل مسئله کنترل بهینه پیش رو در زمان<sup>۱۷</sup> معرفی شد. تعدادی از مقاله هایی که از طرح برنامه ریزی دینامیکی تقریبی استفاده کرده اند معرفی خواهد شد. مرجع [۱۱] که توسط هاوارد در سال ۱۹۶۰ ارائه شد، به بیان تکرار فضای حالت در چهارچوب تئوری تصمیم گیری پرداخته شده است. در مرجع [۱۲] که در سال ۱۹۹۴ توسط برادک<sup>۱۸</sup> منتشر شد به اجرای سیاست تکرار یادگیری

8. Asma Al-Tamimi

9. F.L.Lewis

10. Q-learning

11. Wrobs

12. Barto

13. Sutton

14. Anderson

15. Bertsekas

16. Tsitsiklis

17. Forward-in-time

18. Bradtke

19. zero-sum game

20. Hagen and Krose

21. Landelius

$$x_k^T P x_k = \min_u (x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k + x_{k+1}^T P x_{k+1}) \quad (۸)$$

حال برای به دست آوردن اندازه کمینه کنترلی یعنی  $u_k$  از معادله (۸) بر حسب کنترل مشتق گرفته و مساوی صفر قرار داده می شود، در نتیجه اندازه کمینه کنترلی مطابق معادله (۹) به دست خواهد آمد:

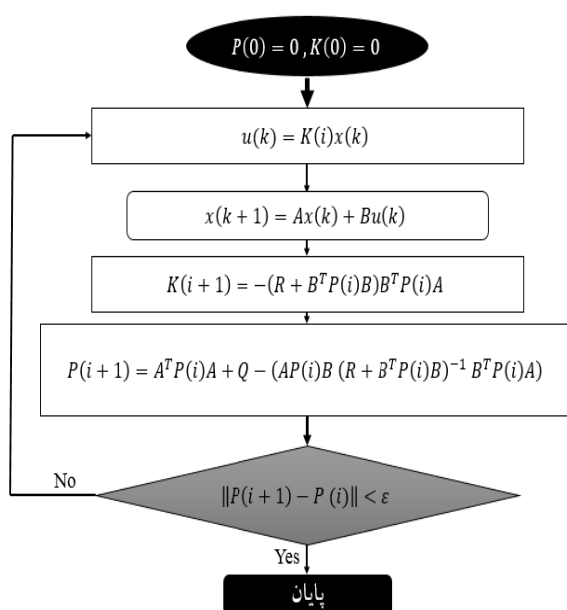
$$\frac{\partial V_k}{\partial u_k} = 0 \quad (۹)$$

$$\rightarrow u_k^* = -(R + B^T P(i) B)^{-1} B^T P(i) A$$

توجه شود برای تعیین قانون کنترلی، باید شرط عنوان شده در معادله (۶) رضایت بخش شود. در مرحله نهایی به تعیین معادله ریکاتی پرداخته خواهد شد. برای تعیین معادله ریکاتی کافی است قانون کنترلی به دست آمده در تابع هزینه جایگذاری شود. به این معنا که معادله (۹) در رابطه (۸) جایگذاری شود. پس از ساده سازی معادله ریکاتی به صورت آنچه در رابطه (۱۰) عنوان شده به دست خواهد آمد.

$$P(i+1) = A^T P(i) A + Q - A^T P(i) B (I + B^T P(i) B)^{-1} B^T P(i) A \quad (۱۰)$$

در نتیجه با تعیین قانون کنترلی و معادله ریکاتی، الگوریتم کنترلی LQR به دست خواهد آمد. شکل (۱) که بیان کننده الگوریتم کنترلی LQR است، برای درک بهتر این الگوریتم ارائه شده است. در بخش بعدی به بیان تئوری کنترلی بدون مدل اقدام شده است. علت اصلی بیان تئوری کنترلی LQR، تئوری کنترل بهینه بدون مدل است که از بدنه کنترلی تنظیم کننده خطی درجه دوم منتج شده است. به همین دلیل است روش LQR با روش کنترل بهینه بدون مدل ارزش سنجی شده است.



شکل ۱- الگوریتم کنترلی LQR

شده است. در نهایت شبیه سازی ماهواره و نتیجه گیری از روش کنترلی بدون مدل برای ماهواره پرداخته شده است.

## تشریح کنترلی تنظیم کننده خطی درجه دوم (LQR)

در اولین قدم برای تعیین قانون کنترلی باید معادله سیستم شناخته شود. پس معادله سیستم گسسته در زمان به صورت معادله (۱) تعریف خواهد شد. در استخراج معادلات این روش از مرجع [۲۲] استفاده شده است.

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \quad (۱)$$

به طوری که در معادله فوق  $x_k \in R^n$  بیان گر حالت های سیستم است، و  $u_k \in R^m$  بیان گر قانون کنترلی است. توجه شود در معادله (۱)، اندیس  $k$  بیانگر گام زمانی است.  $i = k$  تعریف شده زیرا شمارشگر  $i$  برابر با هر قدم زمانی یعنی  $k$  تعریف شده است. برای ایجاد ثبات در هر دنباله ای که دارای قانون  $u_k$  هستند، می توان تابع هزینه مطابق با معادله (۲) بیان کرد.

$$V(x_k) = \sum_{i=k}^{\infty} x_i^T Q x_i + u_i^T R u_i$$

$$V(x_k) = x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k + \sum_{i=k+1}^{\infty} x_i^T Q x_i + u_i^T R u_i \quad (۲)$$

در نتیجه می توان تابع هزینه بیان شده در معادله (۲) را به فرم ساده شده زیر نوشت:

$$V(x) = r(x_k, u_k, w_k) + V(x_{k+1}) \quad (۳)$$

هدف پیدا کردن کنترل بهینه  $u^*$  در نتیجه برای این عمل تابع هزینه (۲) توسط  $u_k$  کمینه خواهد شد. در نتیجه تابع هزینه به فرم معادله (۴) به دست خواهد آمد.

$$V^*(x_k) = \min_u \sum_{i=k}^{\infty} x_i^T Q x_i + u_i^T R u_i \quad (۴)$$

تابع هزینه بهینه معادله درجه دوم حالت های سیستم به صورت معادله (۵) شناخته شده است.

$$V^*(x_k) = x_k^T P x_k \quad (۵)$$

به طوری که  $P \geq 0$  است. با فرض این که معادله ی بیان شده قابل قبول و حل پذیر باشد، باید شرطی که در معادله ی (۶) بیان شده، امکان پذیر و رضایت بخش شود [۱۰].

$$I \quad (۶)$$

با پذیرش اصل بهینگی بلمن، معادله (۷) به دست خواهد آمد

$$V^*(x_k) = \min_u (x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k + x_{k+1}^T P x_{k+1}) \quad (۷)$$

در نتیجه با جایگذاری معادله ی (۵) در (۷)، رابطه زیر به دست خواهد آمد.

تغییر نام داده است. در معادله فوق  $H$  بیانگر ماتریسی است که اجزای تشکیل دهنده آن به صورت زیر تعریف شده است.

$$H = \begin{bmatrix} H_{xx} & H_{xu} \\ H_{ux} & H_{uu} \end{bmatrix} \quad (۱۲)$$

با فرض معلوم بودن ماتریس  $H$ ، می‌توان با کمینه کردن تابع یادگیر  $Q$ ، سیاست کنترل بهینه را به دست آورد. برای کمینه سازی تابع یادگیر  $Q$  کافی است از این تابع نسبت به  $u_k$  مشتق گرفته و مساوی صفر قرار داده شود.

$$\frac{\partial Q}{\partial u_k} = 0 \quad (۱۳)$$

$$\rightarrow u_k^* = -(H_{uu})^{-1}(H_{ux})x_k$$

باید دقت شود در صورتی قانون کنترلی قابل پذیرش خواهد بود، که معادله (۱۴) رضایت بخش شود.

$$H_{uu} > 0 \quad (۱۴)$$

در نتیجه قانون کنترلی بیان شده در معادله (۱۳) در صورتی قابل پذیرش است که معادله (۱۴) رضایت بخش شود. قانون کنترل بهینه به دست آمده در معادله (۱۳) را می‌توان به صورت خلاصه شده زیر عنوان کرد:

$$u_k^* = k_i x_k \quad (۱۵)$$

• به طوری که در معادله فوق،  $k_i$  بیانگر گین کنترلی که برابر  $k_i = -(H_{uu})^{-1}(H_{ux})$  است.

حال می‌توان همچون روش کنترلی LQR، معادله ریکاتی را با جایگذاری قانون کنترل بهینه در تابع  $Q$  به دست آورد. در نتیجه با جایگذاری معادله (۱۵) در معادله (۱۱)، معادله ریکاتی مطابق معادله (۱۶) به دست خواهد آمد.

$$P = [I \quad K^T] H \begin{bmatrix} I \\ K \end{bmatrix} \quad (۱۶)$$

با ملاحظه به قانون کنترلی و معادلات ریکاتی که به ترتیب در معادلات (۱۳) و (۱۶) نشان داده شده است، متوجه شده که قانون کنترلی و معادله ریکاتی هیچکدام وابسته به ماتریس‌های سیستم نیستند و برای تعیین آن‌ها فقط به ماتریس  $H$  نیاز است. اما مسأله اساسی تعیین ماتریس  $H$  است. در ادامه به شرح چگونگی تعیین ماتریس  $H$  پرداخته شده است.

### استخراج ماتریس $H$

در روش تابع  $Q$ ، اندازه اولیه در نظر گرفته شده باید به صورت  $Q_0(x, u) > 0$  باشد و لزوماً احتیاج به بهینه بودن اندازه اولیه نیست، سپس با حل معادله (۱۷) و در نظر گرفتن  $i = 0$ ، اندازه  $Q_1(x, u)$  تعیین خواهد شد.

## تئوری کنترلی بدون مدل

در این بخش، روش کنترل بدون مدل برای حل مسئله سیستم درجه دوم گسسته شده در زمان استفاده شده است. این نکته را باید توجه داشت که تمام اطلاعات اندازه‌گیری شده از فضای حالت سیستم برای حل مسأله مورد نیاز است. مسأله توسط اصل برنامه‌ریزی دینامیکی<sup>۲۲</sup> حل شده است، به طوری که نتایج از رفتار تابع در زمان گذشته بدست خواهد آمد. تشریح روش کنترلی بدون مدل به چهار زیر بخش تقسیم شده است، در بخش اول به بیان تئوری یادگیر  $Q$  و نحوه استخراج قانون کنترلی و معادله ریکاتی در این تئوری اشاره شده است، و در بخش دوم به نحوه استخراج تابع یادگیر  $Q$  بدون دخالت ماتریس‌های سیستم پرداخته شده است. در بخش سوم با جمع‌بندی این دو بخش می‌توان ادعا کرد تئوری بدون مدل به اثبات رسیده است. در بخش نهایی اقدام به اثبات همگرایی روش بدون مدل شده است.

### تابع یادگیر $Q$

در این بخش، الگوریتم تابع  $Q$  برای حل مسئله خطی مرتبه دوم متغیر با زمان که به صورت تابع هزینه تعریف شده در معادله (۳) عنوان شده، استفاده شده است. الگوریتم تابع  $Q$  به طور اورجینال برای حل مسئله کنترل بهینه استفاده شده است [۱۵، ۱۴]. از این الگوریتم در گذشته برای حل مسئله خطی مرتبه دوم گسسته در زمان، در تئوری کنترل بهینه استفاده شده است [۱۷]. در رویکرد تابع  $Q$ ، از ساختار پارامتری در تقریب آن، برای رسیدن به یک قانون کنترلی مطلوب استفاده شده است. سپس از اصل هم‌ارزی برای پیشرفت قانون کنترلی استفاده شده است.

در صورتی تابع  $Q$  برای بازی مجموع- صفر مورد پذیرش است، که در قالب مسئله تصمیم‌گیری مارکو<sup>۲۳</sup> بیان شود. در این بخش، به حل مسئله  $V^*(x_k)$  توسط تابع  $Q$  پرداخته شده است. از این رو تابع بهینه  $Q$  یعنی  $Q^*$ ، مساوی معادله (۳) قرار داده شده است. در نتیجه معادله (۱۱) به دست آمده است.

$$Q^*(x_k, u_k) = r(x_k, u_k, w_k) + V^*(x_{k+1})$$

$$[x_k^T \quad u_k^T] H [x_k^T \quad u_k^T]^T = r(x_k, u_k, w_k) + V^*(x_{k+1}) \quad (۱۱)$$

در معادله (۱۱)  $[x_k^T \quad u_k^T] H [x_k^T \quad u_k^T]^T$  به  $V_{i+1}(x_k, u_k)$  به  $Q_{i+1}(x_k, u_k)$  تغییر نام پیدا کرده، علت این تغییر به این دلیل است که سمت چپ معادله بیان‌کننده روش یادگیر  $Q$  است و برای تشابه نامی،  $V$  به  $Q$

22. Dynamic programming

23. Markov Decision

$$h_{i+1}^T \bar{z}(x_k) = d(z_k(x_k), H_i) \quad (23)$$

می‌توان پارامتر بردار  $h_{i+1}$  را با کمینه‌کردن خطا بین ارزش تابع هدف (۲۰) و (۲۲) توسط روش حداقل مربعات حول  $\Omega$  به‌دست آورد.

$$h_{i+1} = \arg \min_{h_{i+1}} \left\{ \int_{\Omega} |h_{i+1}^T \bar{z}(x_k) - d(\bar{z}_k(x_k), h_i)|^2 dx_k \right\} \quad (24)$$

با حل مسئله حداقل مربعات، بردار  $h_{i+1}$  مطابق معادله (۲۵) به‌دست خواهد آمد.

$$h_{i+1} = \left( \int_{\Omega} \bar{z}(x_k) \bar{z}(x_k)^T dz \right)^{-1} \times \int_{\Omega} \bar{z}(x_k) d(\bar{z}_k(x_k), H_i) dx \quad (25)$$

با توجه به اینکه  $u_i$  بهینه وابسته به  $x_k$  است، انتگرال  $\left( \int_{\Omega} \bar{z}(x_k) \bar{z}(x_k)^T dz \right)^{-1}$  هرگز معکوس‌پذیر نخواهد بود. برای غلبه بر این مشکل به کنترل ورودی نویزی اضافه خواهد شد.

$$u_i^*(x(k)) = k_i x_k + n_k \quad (26)$$

به طوری که در معادله (۲۶) تابع نویز  $n_k$  به‌صورت تابع آماری  $n_k(0, \sigma)$  تعریف شده است. در این تابع آماری تعریف شده ارزش میانگین برابر صفر و واریانس نویز برابر  $\sigma^2$  است. توجه شود تابع آماری با توزیع احتمالی گوسی است. با توجه به مرجع [۷] میزان انتخابی کواریانس کاملاً تقریبی است. نویز اضافه شده تنها برای تحریک سیستم است، تا ماتریس فوق معکوس‌پذیر شود. در نتیجه بردار  $z(x_k)$  به صورت زیر تبدیل خواهد شد.

$$z(x_k) = \begin{bmatrix} x_k \\ \hat{u}_{ei}(x_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k \\ k_i x_k + n_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k \\ k_i x_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ n_k \end{bmatrix} \quad (27)$$

معادله (۲۳) در چندین نقطه  $p1, p2, p3, \dots \in \Omega$  ارزیابی خواهد شد، که در نتیجه آن بردار  $h_{i+1}$  مطابق معادله (۲۸) به‌دست می‌آید.

$$h_{i+1} = (ZZ^T)^{-1}ZY \quad (28)$$

در معادله (۲۸) دو بردار  $Z$  و  $Y$  توسط معادلات زیر به‌دست می‌آیند.

$$Z = [\bar{z}(p1) \quad \bar{z}(p2) \dots \bar{z}(pN)] \quad (29)$$

$$Y = [d(z(p1), h_i) \dots d(z(pN), h_i)]^T$$

برای اینکه الگوریتم به راه‌حل بهینه همگرا شود، نویز اضافه شده به کنترل کافی نیست، در نتیجه معادله (۲۲) به فرم معادله اصلاح شده (۳۰) تغییر خواهد کرد.

$$Q_{i+1}(x_k, u_k) = \left\{ x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k + \min_{u_{k+1}} Q_i(x_{k+1}, u_{k+1}) \right\} \quad (17)$$

می‌توان معادله (۱۷) را به صورت زیر نشان داد:

$$Q_{i+1}(x_k, u_k) = \left\{ x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k + V_i(Ax_k + Bu_k) \right\} \quad (18)$$

در بخش تابع یادگیر  $Q$ ، توضیحات تکمیلی در مورد تابع یادگیر  $Q$  و نحوه استخراج قانون کنترلی و معادله ریگاتی از نشان داده شده است، و جایگذاری آن در معادله (۱۸)، معادله (۱۹) به صورت زیر به‌دست خواهد آمد:

$$\begin{bmatrix} x_k^T & u_k^T \end{bmatrix} H_{i+1} \begin{bmatrix} x_k^T & u_k^T \end{bmatrix}^T = \left\{ x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k + V_i(Ax_k + Bu_k) \right\} \quad (19)$$

برای استخراج ماتریس  $H_{i+1}$  در معادله (۱۸)، تعریف زیر صورت گرفته است:

$$z^T H_{i+1} z = h_{i+1}^T \bar{z} \quad (20)$$

- در معادله (۱۹)، عملگر  $z = [x_k^T \quad u_k^T]^T$  برابر  $z$  خواهد بود. و  $z$  زیر مجموعه  $z \in R^{n+m=q}$  است.
- برداری است که توسط عملگر کرونگر [۲۳] به صورت آنچه در معادله (۲۱) نشان داده شده، تولید خواهد شد.

$$\bar{z} = (Z_1^T, \dots, Z_1^T Z_q, Z_2^T, Z_2^T Z_3, \dots, Z_{q-1}^T Z_q, Z_q^T) \quad (21)$$

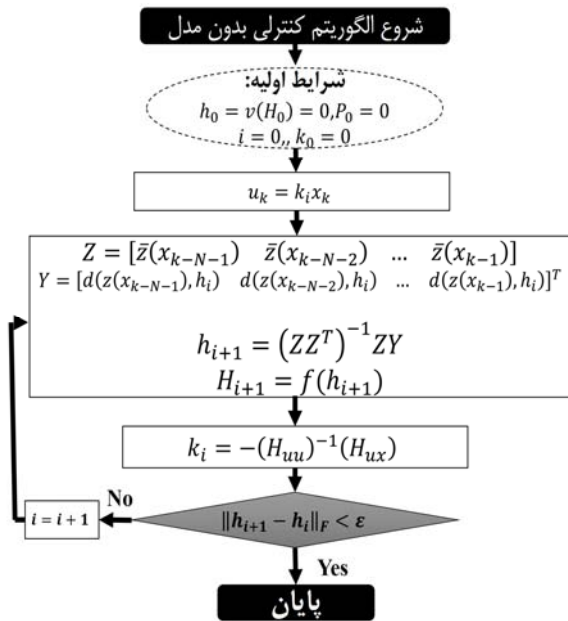
- در معادله (۲۰)، بردار  $h = v(H)$  مطابق تابع  $h = v(H)$  تعیین خواهد شد. اما  $v(\cdot)$  عملگری است که ماتریس مربع  $q \times q$  را به بردار ستونی  $1 \times \frac{q(q+1)}{2}$  تبدیل خواهد کرد. در نتیجه  $h$  برداری ستونی است که تعداد اعضای آن برابر  $1 \times \frac{q(q+1)}{2}$  خواهد بود. به طوری که این بردار ستونی مساوی با ماتریس مربع  $H$  با اعضای  $q \times q$  است. اما المان‌های قطری به صورت مجموع  $H_{ij} + H_{ji}$  با المان برداری برابر گرفته خواهد شد [۲۳].
- ساختار پارامتری (۲۰) فرم دقیق حلقه بسته نشان داده شده در معادله (۱۹) است.

در ادامه برای حل  $Q_{i+1}$ ، سمت راست معادله (۱۹) را می‌توان به فرم معادله (۲۲) نشان داد.

$$d(z_k(x_k), H_i) = \left\{ x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k + V_i(Ax_k + Bu_k) \right\} \quad (22)$$

حال دو معادله (۲۰) و (۲۲) را مساوی هم قرار داده، تا بتوان توسط روش حداقل مربعات بردار  $h_{i+1}$  پیدا کرد.

روش  $H_\infty$  کنترل استفاده کرد. از آنجا که روش بدون مدل از روش کنترلی LQR استخراج شده است، در نتیجه این روش پاسخ مناسبی به اثر اختلالات نخواهد داشت.



شکل ۲- الگوریتم کنترل بدون مدل

### اثبات همگرایی روش کنترلی بدون مدل

برای اثبات همگرایی روش کنترلی بدون مدل اقدامات زیر صورت گرفته است. همان‌طور که بیان شد، بردار  $h_{i+1}$  از ماتریس  $H_{i+1}$  استخراج شده است. یعنی می‌توان بردار  $h_{i+1}$  را به صورت معادله (۳۲) تعریف کرد.

$$h_{i+1} = v \begin{pmatrix} H_{xx} & H_{xu} \\ H_{ux} & H_{uu} \end{pmatrix} \quad (32)$$

با جایگذاری معادله (۳۲) در معادله (۲۳)، رابطه‌ی (۳۳) بدست می‌آید.

$$d(z_k(x_k), H_i) = \bar{z}(x_k) \times v \begin{pmatrix} H_{xx} & H_{xu} \\ H_{ux} & H_{uu} \end{pmatrix} \quad (33)$$

در صورت ارزیابی معادله (۳۳) در در چندین نقطه  $p_1, p_2, p_3, \dots \in \Omega$  می‌توان معادله (۳۳) را به صورت زیر تبدیل کرد:

$$Y = Z \times v \begin{pmatrix} H_{xx} & H_{xu} \\ H_{ux} & H_{uu} \end{pmatrix} \quad (34)$$

به‌طوری که بردارهای  $Y$  و  $Z$  در معادله (۲۹) تعریف شده‌اند. در مرحله انتهایی بردار  $Y$  در معادله (۲۸) جایگذاری شده است. در نتیجه این جایگذاری، رابطه (۳۵) بدست خواهد آمد.

$$h_{i+1} = (ZZ^T)^{-1}(ZZ^T) \times v \begin{pmatrix} H_{xx} & H_{xu} \\ H_{ux} & H_{uu} \end{pmatrix} \quad (35)$$

$$d(z_k(x_k), H_i) = x_k^T Q x_k + u_{ei}^T(x_k) R u_{ei}(x_k) + Q_i(x_{k+1}, u_i(x_{k+1})) \quad (30)$$

در این حالت معکوس‌پذیری ماتریس در معادله (۲۹) تضمین شده خواهد بود. در بخش بعدی اقدام به جمع‌بندی و بیان الگوریتم تئوری کنترل بدون مدل شده است.

### الگوریتم کنترلی بدون مدل

در این بخش الگوریتم کنترلی بدون مدل با جمع‌بندی دو زیر بخش یادگیری  $Q$  و استخراج ماتریس  $H$  به‌دست آورده شده است. ادامه به تشریح الگوریتم کنترلی بدون مدل اقدام شده است.

در صورتی می‌توان مسئله حداقل مربعات بیان شده در معادله (۸۲) را در زمان واقعی حل کرد که اطلاعات کافی از  $d(z_k, h_i)$  در معادله (۲۹) تولید شود. که این نیاز به در اختیار داشتن حالت سیستم یعنی  $x_k$  و  $x_{k+1}$  در زمان واقعی خواهد بود، همچنین اطلاعات دیگری که برای حل مسئله در زمان واقعی نیاز خواهد بود دانستن تابع  $Q_i$  و  $r(z_k) = x_k^T Q x_k + u_{ei}^T(x_k) R u_{ei}(x_k)$  است. برای تعیین آن‌ها می‌توان از شبیه‌سازی، یا ابزار زمان واقعی برای مشاهده حالت سیستم به صورت آنلاین استفاده کرد. بنابراین الگوریتم تابع  $Q$  نیازی به مدل سیستم برای به‌روزرسانی<sup>۲۴</sup> نخواهد داشت. که این نشان از اهمیت و کاربردی بودن روش بدون مدل است.

برای اینکه وضعیت مسئله حداقل مربعات رضایت بخش شود؛ نیاز به تولید تعداد نقاط کافی خواهد بود که این تعداد نقاط باید حداقل برابر  $N \geq \frac{q(q+1)}{2}$  باشد، در جایی که  $q = n + m$  است. هنگام حل آنلاین مسئله حداقل مربعات، باید ماتریس‌های  $Y$  و  $Z$  در زمان واقعی تعیین شوند. ملاحظه شود در تعیین ماتریس  $H$ ، از اصول روش تخمین سیگنال به روش فیلتر وینر<sup>۲۵</sup> استفاده شده است [۲۴، ۲۵].

$$Z = [\bar{z}(x_{k-N-1}) \quad \bar{z}(x_{k-N-2}) \quad \dots \quad \bar{z}(x_{k-1})] \\ Y = [d(z(x_{k-N-1}), h_i) \quad \dots \quad d(z(x_{k-1}), h_i)]^T \quad (31)$$

در نتیجه الگوریتم آنلاین بدون مدلی که در این فصل ارائه شد را می‌توان در شکل (۲) ملاحظه کرد. به طوری که الگوریتم کنترلی بدون مدل برای تابع هدف ارائه شده در معادله (۲) اثبات شده است. با ملاحظه دقیق به الگوریتم کنترل بدون مدل که در شکل (۲) ارائه شده است، به این نتیجه رسیده خواهد شد که در به‌روزرسانی عملگر شبکه هیچ نیازی به مدل سیستم یعنی ماتریس‌های  $A$  و  $B$  نخواهد بود. در نتیجه روش کنترلی بدون مدل اثبات شده است. در بخش بعدی به اثبات همگرایی تابع یادگیر  $Q$  اقدام شده است. علت عدم اثرگذاری گشتاور اختلالی روش حل مسئله است. برای اینکه بتوان اثر اختلالات را بررسی کرد باید از

24. update  
25. Weiner

$$\omega^{\times} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (40)$$

همان طور که عنوان شد،  $M$  بیانگر گشتاور اعمالی به ماهواره است. از این رو می توان این گشتاور را به صورت معادله (۴۱) نمایش داد.

$$M = u_{\tau} \quad (41)$$

به طوری که  $u_{\tau}$  بیانگر گشتاور اعمالی کنترلر به ماهواره برای قرارگیری در جهت مطلوب است. در نتیجه با جایگذاری معادله (۴۱) در (۳۹)، معادله گشتاور ماهواره به صورت معادله (۴۲) به دست خواهد آمد.

$$[I]\dot{\omega} + \omega^{\times}[I]\omega = u_{\tau} \quad (42)$$

در نتیجه توسط معادله (۴۲) می توان سرعت زاویه ای ماهواره حول سه محور را به دست آورد. همان طور که ملاحظه می شود، ماهواره دارای رفتاری غیرخطی است. در ادامه افزوده خواهد شد، که معادلات بیان شده در دستگاه بدنی بوده اند و برای انتقال آن ها به دستگاه اینرسی، ابتدا باید آن ها را به دستگاه مداری انتقال داده و سپس به دستگاه اینرسی انتقال داده شود. در ادامه به شرح انتقال دستگاه توسط روش کواتر نیون پرداخته خواهد شد.

در صورت معلوم بودن بردار سرعت زاویه ای  $\omega$  نسبت به دستگاه مرجع، معادلات دیفرانسیل کواتر نیون برای انتقال معادلات ۶ درجه آزادی ماهواره به دستگاه مختصات مداری مطابق زیر تعیین خواهد شد [۱۹، ۲۷، ۲۸].

$$\dot{Q} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -q^T \\ T(Q) \end{bmatrix} \omega \quad (43)$$

در معادله فوق بردار  $\dot{Q} = [q_0 \ q] \in R \times R^3$  بیانگر بردار انتقال کواتر نیون است، به صورتی که از این بردار برای انتقال سرعت زاویه ای از دستگاه بدنی به دستگاه مختصات مداری استفاده می شود. در رابطه (۴۳) بردار  $\vec{q} = [q_1 \ q_2 \ q_3]$  است، و  $T(Q)$  مطابق معادله (۴۴) به دست می آید.

$$T(Q) = q^{\times} + q_0 I \quad (44)$$

به طوری که  $I \in R^{3 \times 3}$  ماتریس واحد  $3 \times 3$  است، و ماتریس  $q^{\times}$  به صورت معادله (۴۵) تعریف می شود.

$$q^{\times} = \begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (45)$$

بردار انتقال کواتر نیون  $Q$  در صورتی رضایت بخش است که رابطه زیر برقرار باشد.

$$Q^T Q = q^T q + q_0^2 = 1 \quad (46)$$

با توجه به آنچه تاکنون بیان شد، می توان معادله سیستم ماهواره را استخراج کرد. فرض شود که معادله سیستم ماهواره به صورت معادله (۴۷) در نظر گرفته شده باشد [۲۹].

با توجه به اینکه ضرب معکوس یک ماتریس با خود آن ماتریس برابر ماتریس واحد خواهد شد در نتیجه رابطه  $(ZZ^T)^{-1}(ZZ^T) = I$  برابر ماتریس واحد خواهد شد. پس می توان رابطه (۳۵) به صورت ساده شده زیر نوشت.

$$h_{i+1} = v \begin{bmatrix} H_{xx} & H_{xu} \\ H_{ux} & H_{uu} \end{bmatrix} \quad (46)$$

با توجه به تعریف صورت گرفته در معادله (۳۲)، می توان رابطه (۳۶) را به صورت معادله (۳۷) بازنویسی کرد.

$$h_{i+1} = \dot{h}_{i+1} \quad (37)$$

رابطه ی (۳۷) اثبات کننده همگرایی روش کنترلی بدون مدل است.

## مدل سازی ماهواره

در این مقاله، روش کنترل بهینه بدون مدل برای سیستم ماهواره طراحی شده است. همان طور که توضیح داده شد، روش کنترلی بدون مدل نیازی به مدل سیستم ندارد، اما برای استخراج داده های مورد نیاز باید مدلی از سیستم طراحی یا مدلی آزمایشگاهی تهیه شود. با توجه به هزینه های آزمایشگاهی، مدل سازی صورت گرفته است. با توجه به معادله سیستم (۱)، کنترلر برای سیستم های خطی و گسسته در زمان طراحی شده است. در نتیجه برای طراحی سیستمی با ویژگی های مورد نظر، مدل سازی ماهواره به سه زیر بخش تقسیم شده است. در بخش اول سیستم غیرخطی ماهواره استخراج شده است، در بخش دوم اقدام به خطی سازی معادله سیستم و در نهایت اقدام به گسسته سازی سیستم شده است. در ادامه به شرح جزئیات این سه بخش پرداخته شده است.

## استخراج مدل غیرخطی ماهواره

با توجه به اینکه گشتاور اعمالی حول مرکز جرم یک جسم برابر با نرخ تغییر زمانی اندازه حرکت زاویه ای اش است، معادله گشتاور اعمالی به ماهواره مطابق معادله (۳۸) تعریف خواهد شد:

$$M = \dot{h}_I = \dot{h}_B + \omega \times h \quad (38)$$

به طوری که در معادله فوق،  $h$  بیانگر گشتاور حرکت زاویه ای ماهواره،  $\omega$  بردار سرعت زاویه ای ماهواره و  $M$  گشتاور اعمالی به ماهواره است. معادله (۳۸) همان معادله معروف گشتاور اوپلر است. در این معادله زیر نویس "I" نمایانگر مشتق در دستگاه اینرسی است، و زیر نویس "B" بیانگر مشتق در دستگاه بدنی است. حال با توجه به تعریف حرکت زاویه ای، معادله دینامیکی ماهواره مطابق معادله (۳۹) تعیین خواهد شد [۲۶].

$$[I]\dot{\omega} + \omega^{\times}[I]\omega = M \quad (39)$$

در معادله (۳۹)، ماتریس  $\omega^{\times}$  مطابق معادله (۴۰) تعریف خواهد شد [۲۲]. همچنین ماتریس  $[I]$  بیانگر ماتریس اینرسی ماهواره است.



$$\frac{\partial g_2}{\partial \omega} = \frac{1}{2} \left[ \frac{-q^T}{T(Q)} \right] \rightarrow \left. \frac{\partial g_2}{\partial \omega} \right|_{\omega, q=0} = \frac{1}{2} I_3 \quad (56)$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial q} = \frac{1}{2} \omega \rightarrow \left. \frac{\partial g_2}{\partial q} \right|_{\omega, q=0} = 0 \quad (57)$$

• در نتیجه معادله خطی بردار کواترنيون به صورت زیر تعیین خواهد شد. توجه شود  $I_3$  ماتریس واحد  $3 \times 3$  است.

$$\dot{q} = \frac{1}{2} I_3 \quad (58)$$

با جمع‌بندی دو مرحله خطی‌سازی می‌توان معادله سیستم خطی ماهواره را به دست آورد. بر این اساس ماتریس‌های  $A$  و  $B$  به صورت معادله (۵۹) تعیین خواهد شد.

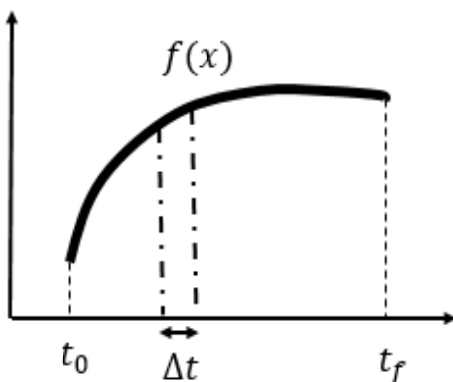
$$A = \begin{bmatrix} 0_3 & \frac{1}{2} I_3 \\ 0_3 & 0_3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0_3 \\ [I]^{-1} \end{bmatrix} \quad (59)$$

نتیجه‌گیری می‌شود که معادله خطی ماهواره تعیین شده است. در ادامه گسسته‌سازی سیستم ماهواره شرح داده خواهد شد. توجه شود علت اساسی خطی‌سازی مدل ساختار کلی کنترلر است. یعنی الگوریتم کنترلر از ساختار روش کنترلی LQR استخراج شده است. درست است که کنترلر تنها به داده‌های اندازه‌گیری شده سیستم نیاز دارد اما در ذات ساختاری وابسته به روش کنترلی LQR است. پس با توجه به اینکه روش کنترلی LQR تنها برای سیستم‌های خطی پاسخگو است، روش کنترل بهینه بدون مدل نیز تنها برای سیستم‌های خطی پاسخگو است.

### گسسته‌سازی معادله سیستم ماهواره

همان‌طور که در شکل (۳) نشان داده شده است، اگر فرض شود تابع  $f(x)$  که در فاصله زمانی  $t_0$  تا  $t_f$  تعریف شده باشد و این تابع به  $k$  قسمت تقسیم شود، در نتیجه فاصله زمانی  $\Delta t$  مطابق زیر تعیین خواهد شد (در معادله زیر  $t_0 = 0$  در نظر گرفته شده است) [۲۲].

$$\Delta t = \frac{t_f - t_0}{k} = \frac{t}{k} \quad (60)$$



شکل ۳- تعریف تابع

$$\dot{x} = f(x) + Bu(x) \quad (47)$$

در معادله (۴۷)،  $x$  و  $u(x)$  به ترتیب بیانگر فضای حالت سیستم و تابع کنترلی سیستم است. در ماهواره مدل شده، این توابع به صورت معادلات (۴۸) و (۴۹) تعیین خواهند شد.

$$x = \begin{bmatrix} Q \end{bmatrix} \quad (48)$$

$$u = \begin{bmatrix} u_\tau \end{bmatrix} \quad (49)$$

در نهایت ماتریس‌های مدل سیستم، یعنی  $f(x)$  و  $B$  به صورت معادلات (۵۰) و (۵۱) به دست آمده‌اند [۲۹].

$$f(x) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} q^T \omega \\ \frac{1}{2} T(Q) \omega \\ -[I]^{-1} \omega \times [I] \omega \end{bmatrix} \quad (50)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0_3 & 0_3 \\ 0_3 & [I]^{-1} \end{bmatrix} \quad (51)$$

در معادله (۵۱)، علامت  $0_3$  بیانگر ماتریس صفر  $3 \times 3$  است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، تمام اجزای سیستم غیرخطی ماهواره تعیین شده است. در ادامه اقدام به خطی‌سازی معادله سیستم ماهواره خواهد شد.

### خطی‌سازی معادله سیستم ماهواره

برای خطی‌سازی معادله سیستم ماهواره از دستور اول سری تیلور استفاده شده است، که برای این کار از معادله سیستم حول نقطه صفر مشتق گرفته شده است. مشتق‌گیری حول نقطه صفر به دو مرحله زیر صورت پذیرفته است. خطی‌سازی ماهواره توسط روش تیلور در مرجع [۳۰] ارائه شده است.

• در مرحله اول اقدام به خطی‌سازی بردار سرعت زاویه‌ای بدنی شده است. فرض شود که معادله خطی سرعت زاویه‌ای در دستگاه بدنی به صورت معادله (۵۲) بیان شود.

$$\begin{aligned} [I] \dot{\omega} + \omega \times [I] \omega &= u_\tau \\ \rightarrow \dot{\omega} &= g_1(\omega) + [I]^{-1} u_\tau \end{aligned} \quad (52)$$

• برای خطی‌سازی از رابطه (۵۲) نسبت به  $\omega$  مشتق گرفته، در حالی که سرعت زاویه‌ای مساوی صفر است،  $\dot{\omega}$  مطابق معادله (۵۳) تعیین خواهد شد.

$$\frac{\partial g_1}{\partial \omega} = [I]^{-1} 2[I] \omega \rightarrow \left. \frac{\partial g_1}{\partial \omega} \right|_{\omega=0} = 0 \quad (53)$$

از معادلات (۵۲) و (۵۳) می‌توان نتیجه گرفت:

$$\dot{\omega} = [I]^{-1} u_\tau \quad (54)$$

• در مرحله نهایی اقدام به خطی‌سازی بردار کواترنيون شده است. این بردار بیان‌کننده سرعت زاویه‌ای ماهواره در دستگاه مداری خواهد بود. پس بردار کواترنيون مطابق زیر تعریف شده است.

$$\dot{q} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -q^T \\ T(Q) \end{bmatrix} \omega \rightarrow \dot{q} = g_2(q, \omega) \quad (55)$$

مشتق‌گیری از بردار کواترنيون به صورت زیر خواهد بود:

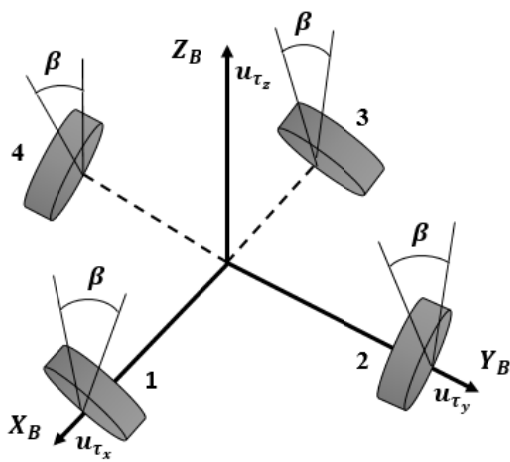
قرارگیری چرخ‌ها ارائه شده است. توجه شود نحوه چپش چرخ‌ها مطابق با مرجع [۱۹] است.

معادله (۶۳) بیانگر گشتاور کنترلی است که باید توسط چرخ برای کنترل ماهواره تولید شود.

$$\begin{bmatrix} \hat{u}_{\tau_x} \\ \hat{u}_{\tau_y} \\ \hat{u}_{\tau_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{\tau_x}/\cos(\beta) \\ u_{\tau_y}/\cos(\beta) \\ u_{\tau_z}/\sin(\beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} \quad (63)$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \hat{u}_{\tau_x} \\ \hat{u}_{\tau_y} \\ \hat{u}_{\tau_z} \end{bmatrix} = [D] \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = [D]T$$

به طوری که در معادله (۶۳) زاویه  $\beta$ ، بیان‌کننده انحراف چرخ نسبت به صفحه بدنی  $X_B - Y_B$  است. توجه شود بردار کنترلی  $u_\tau$  توسط روش کنترلی بدون مدل تولید خواهد شد. برای به دست آوردن بردار گشتاور کنترلی چرخ، باید بردار کنترلی  $\hat{u}_\tau$  در معکوس ماتریس  $[D]^{-1}$  ضرب شود. اما ماتریس  $[D]$  به دلیل اینکه مربع نیست، معکوس پذیر نخواهد بود. از این رو برای معکوس کردن ماتریس  $[D]$  از مرجع [۳۲] استفاده شده است. در نتیجه معکوس ماتریس  $[D]$  مطابق معادله (۶۴) به دست خواهد آمد.



شکل ۴- جانمایی چهار چرخ عکس‌العمل در سیستم کنترل وضعیت ماهوار

$$D^\dagger = D^T(DD^T)^{-1} \quad (64)$$

با استفاده از معادله (۶۴)، معکوس ماتریس  $[D]$  مطابق معادله (۶۵) تعیین خواهد شد.

$$[D]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0.25 \\ 0 & 0.5 & 0.25 \\ -0.5 & 0 & 0.25 \\ 0 & -0.5 & 0.25 \end{bmatrix} \quad (65)$$

در نتیجه با معلوم بودن معکوس ماتریس  $D$ ، می‌توان بردار گشتاور کنترلی چرخ را به صورت زیر بدست آورد.

با توجه به تعریف مشتق و معادله سیستم ماهواره، می‌توان معادله سیستم را به روش پیش‌رو به فرم معادله (۶۱) گسسته کرد [۳۱].

$$\frac{x(k+1)-x(k)}{\Delta t} = Ax + Bu \quad (61)$$

$$\rightarrow x(k+1) = (1 + A\Delta t)x(k) + B\Delta tu(k)$$

در این مقاله فاصله زمانی برابر  $\Delta t = 0.01$  در نظر گرفته شده است، در نتیجه ماتریس‌های  $A$  و  $B$  سیستم گسسته شده ماهواره مطابق معادله (۶۲) تعیین خواهد شد.

$$A \quad (62)$$

با جمع‌بندی سه زیر بخش استخراج مدل غیرخطی ماهواره، خطی‌سازی معادله سیستم ماهواره و گسسته‌سازی معادله سیستم ماهواره می‌توان نتیجه گرفت که معادله سیستم به حالت دلخواه بیان شده در معادله (۱) به دست آمده است. با تعیین معادله سیستم می‌توان کنترل بهینه بدون مدل را برای ماهواره طراحی کرد. در ادامه به تشریح عملگر کنترلی استفاده شده برای کنترل ماهواره پرداخته شده است، و پس از آن اقدام به طراحی کنترلر بدون مدل برای ماهواره شده است.

## مدل‌سازی عملگر کنترلی چهار چرخ عکس‌العمل

در این مقاله، از چهار چرخ عکس‌العمل به عنوان عملگر کنترلی استفاده شده است. علت استفاده از چهار چرخ عکس‌العمل مزیت آن نسبت به سه چرخ عکس‌العمل است. ماهواره‌ای که دارای سه چرخ عکس‌العمل است، این سه چرخ در راستای سه محور بدنی ماهواره نصب می‌شوند. به طوری که در صورت چرخش ماهواره حول سه محور، این چرخ‌ها در جهت عکس برای کنترل ماهواره خواهند چرخید. اگرچه، اگر یکی از چرخ‌ها آسیب ببیند در آن هنگام وضعیت ماهواره به صورت مطلوب قابل کنترل نیست. برای جلوگیری از این واقعه چرخ چهارمی استفاده می‌شود، به طوری که این چرخ چهارم در راستای هیچ یک از محورهای بدنی ماهواره جانمایی نمی‌شود. به سبب این جانمایی چرخ چهارم می‌تواند در راستای سه محور گشتاور کنترلی ایجاد کند. در این مقاله، چهار چرخ عکس‌العمل در صفحه  $X_B - Y_B$  ماهواره جانمایی شده‌اند. به این صورت که چهار چرخ عکس‌العمل با صفحه  $X_B - Y_B$  به اندازه زاویه  $\beta$  انحراف دارند. در نتیجه هر چهار چرخ می‌توانند در جهت  $Z_B$  گشتاور و اندازه حرکت ایجاد کنند. گشتاور ایجاد شده توسط چرخ‌ها  $T_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) نامیده شده است. گشتاور تولیدشده در امتداد هر یک از محورهای بدنی  $\hat{u}_{\tau_x}$ ،  $\hat{u}_{\tau_y}$ ،  $\hat{u}_{\tau_z}$  است [۱۹]. شکل (۴) برای درک بهتر نحوه

- برای تعیین ماتریس  $H_{i+1}$  در تابع یادگیر  $Q$ ، معادله (۱۹) تعریف شد. به طوری که بردار کرانکر ماتریس  $Z_k$  است، در اینجا بردار کرانکر ماتریسی  $۴۵ \times ۱$  است.
- بردار  $h_{i+1}$  توسط معادله (۲۴) بدست می آید. اما در این رابطه، برای تعیین انتگرال  $\int_{\Omega} \bar{z}(x_k) \bar{z}(x_k)^T dz$ ، تابع  $(k)$  و  $d(\bar{z}_k(x_k), H_i)$  باید حداقل  $۴۵$  نقطه تولید شود. یعنی در صورتی انتگرال‌های معادله (۲۴) تعیین خواهد شد که دو ماتریس معادله (۶۹)، حداقل دارای  $۴۵$  عضو باشند.

$$Z = [\bar{z}(p1)\bar{z}(p2)\bar{z}(p3) \dots \bar{z}(p45)] \quad (۶۹)$$

$$Y = [d(\bar{z}_k(p1), h_i) \dots d(\bar{z}_k(p45), h_i)]^T$$

- با تعیین ماتریس‌های  $Z$  و  $Y$ ، و جایگذاری آن در معادله (۲۷)، بردار  $h_{i+1}$  تعیین خواهد شد. با تعریف ارائه شده در معادله (۳۲)، ماتریس  $H_{i+1}$  از بردار  $h_{i+1}$  استخراج خواهد شد. توجه شود  $H_{i+1}$  ماتریسی  $۹ \times ۹$  است.
- با داشتن ماتریس  $H_{i+1}$  می‌توان گین کنترلی مرحله‌ی بعد را تعیین کرد. این گین کنترلی توسط رابطه (۶۹) تعیین خواهد شد:

$$\begin{aligned} k1_{i+1} &= \\ & -(H_{i+177})^{-1} \times \\ & [H_{i+171} H_{i+172} H_{i+173} H_{i+174} H_{i+175} H_{i+176}] \\ k1_{i+1} &= \\ & -(H_{i+188})^{-1} \times \\ & [H_{i+181} H_{i+182} H_{i+183} H_{i+184} H_{i+185} H_{i+186}] \\ k1_{i+1} &= \\ & -(H_{i+199})^{-1} \times \\ & [H_{i+191} H_{i+192} H_{i+193} H_{i+194} H_{i+195} H_{i+196}] \\ k_{i+1} &= [k1_{i+1} k2_{i+1} k3_{i+1}]^T \end{aligned} \quad (۷۰)$$

- ملاحظه می‌شود گین کنترلی ماتریسی  $۳ \times ۶$  است، که با ضرب در بردار حالت‌های سیستم، بردار کنترلی  $۳ \times ۱$  خواهد شد. از گین کنترلی این نتیجه استخراج می‌شود که کنترلر بر هر شش حالت سیستم تأثیر کنترلی خود را می‌گذارد.
- با توجه به معلوم‌بودن گین کنترلی، معادله ریگاتی از معادله (۱۵) استخراج خواهد شد. توجه شود  $I$  ماتریس واحد  $۶ \times ۶$  است.

با جمع‌بندی نکات بیان شده الگوریتم کنترل بهینه بدون مدل برای سیستم ماهواره به‌دست خواهد آمد. این الگوریتم مطابق شکل (۵) ارائه شده است.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0.25 \\ 0 & 0.5 & 0.25 \\ -0.5 & 0 & 0.25 \\ 0 & -0.5 & 0.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_{\tau_x} \\ \hat{u}_{\tau_y} \\ \hat{u}_{\tau_z} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0.25 \\ 0 & 0.5 & 0.25 \\ -0.5 & 0 & 0.25 \\ 0 & -0.5 & 0.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{\tau_x}/\cos(\beta) \\ u_{\tau_y}/\cos(\beta) \\ u_{\tau_z}/\sin(\beta) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (۶۶)$$

با دقت به معادله (۶۶) متوجه شده برای تعیین بردار گشتاور چرخ عکس‌العمل  $T$  باید بردار کنترلی  $u_{\tau}$  مشخص باشد. در این مقاله از روش کنترل بهینه بدون مدل برای تعیین بردار کنترلی  $u_{\tau}$  استفاده شده است. در ادامه به شرح چگونگی تعیین بردار کنترلی  $u_{\tau}$  توسط روش بدون مدل پرداخته شده است. می‌توان با معلوم بودن گشتاور هر چرخ سرعت زاویه آن را مطابق با معادله (۶۷) به‌دست آورد.

$$T_i = I_{w_i} \omega_{w_i} \quad i = 1, \dots, 4 \quad (۶۷)$$

در معادله (۶۷) اندیس  $i$  شماره چرخ عکس‌العمل و اندیس  $w$  بیانگر چرخ عکس‌العمل است، یعنی  $I_w$  نشان دهنده ممان اینرسی چرخ است. در صورتی عملکرد یک عکس‌العمل رضایت بخش خواهد بود که تحت هر شرایطی سرعت زاویه‌ای آن از اشباع دور باشد. در نتیجه باید، پس از هر مانور وضعیتی سرعت زاویه‌ای هر چرخ حداقل شود. فرض شود اگر سرعت زاویه‌ای چرخ در ابتدای مانور وضعیت صفر باشد در صورتی که هیچ اندازه حرکت یا گشتاوری به حالت اشباع نرسند و اصطحاکاکی وجود نداشته باشد سرعت زاویه‌ای در انتهای مانور باید صفر شود.

## طراحی کنترلر بدون مدل برای سیستم ماهواره

در طراحی کنترلر بدون مدل برای ماهواره مدل‌سازی شده باید به نکاتی توجه شود. با در نظرگیری این نکات، می‌توان الگوریتم کنترلی طراحی شده برای ماهواره را استخراج کرد. این نکات به ترتیب زیر بیان شده‌اند:

- با توجه به اینکه سیستم دارای  $۶$  حالت است، و کنترلر برداری  $۳ \times ۱$  است، می‌توان نتیجه گرفت  $Z_k$  برداری  $۹ \times ۱$  خواهد شد.
- همان‌طور که عنوان شد ماتریس حاصل، از ضرب بردار  $Z$  در ترانهاده خود هرگز معکوس‌پذیر نیست. به همین دلیل نویزی با تابع  $n = (0, 10^{-3})$  به بردار کنترلی اضافه شده است. در نتیجه بردار  $Z_k$  برابر معادله (۶۸) خواهد شد.

$$Z_k = \begin{bmatrix} x_k \\ u_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ n \end{bmatrix} \quad (۶۸)$$

به دو نکته دیگر در شبیه‌سازی توجه شود. اندازه اولیه ماتریس ریکاتی P و گین کنترلی K در لحظه اولیه برابر صفر در نظر گرفته شده است. و دومین نکته ماتریس‌های وزنی Q و R برابر ماتریس واحد I در نظر گرفته شده است. توجه شود زاویه نصب چرخ‌ها نسبت به محورهای مختصات ماهواره مطابق با معادله (۷۵) فرض شده است.

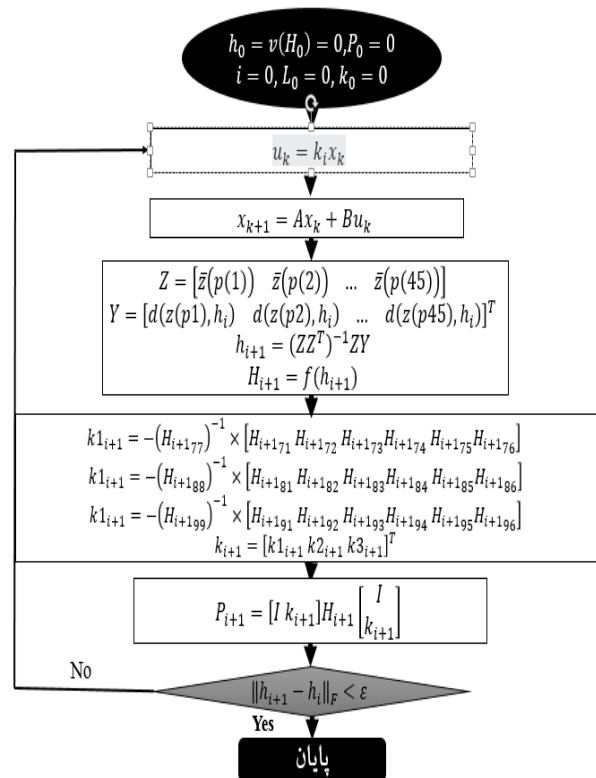
$$\beta = 20^\circ \quad (75)$$

در ادامه نتایج حاصل از دو روش کنترلی ارائه شده است. توجه شود شبیه‌سازی در محیط متلب توسط کامپیوتری با cpu دو هسته صورت گرفته است. در شبیه‌سازی گام تکرار به صورت بی‌نهایت تعریف شده است. توجه شود الگوریتم قابلیت اجرا در زمان حقیقی را دارد.

### نتایج بحث

در این بخش نتایج حاصل از کنترل وضعیت ماهواره به دو روش کنترلی LQR و بدون مدل بررسی شده است. توجه شود از آنجا که مدل طراحی شده ماهواره حول صفر خطی‌سازی شده است، پس باید بردار سرعت زاویه‌ای و بردار کواترینون از اندازه اولیه فرض شده به سمت صفر میل کنند. اما تحلیل نتایج به سه بخش تقسیم شده است. این سه بخش عبارتند از نتایج حاصل از بردار سرعت زاویه‌ای، نتایج به دست آمده از بردار کواترینون و در بخش انتهایی نتایج به دست آمده از چرخ عکس‌العمل‌ها ارائه شده است.

در بخش ابتدایی نتایج حاصل از کنترل سرعت زاویه‌ای ماهواره به دو روش کنترلی LQR و بدون مدل بررسی شده است. نتایج حاصل از سرعت زاویه‌ای حول سه محور به دست آمده است، به طوری که این نتایج به ترتیب در شکل (۶)، شکل (۷) و شکل (۸) نشان داده شده است. همان‌طور که عنوان شد طراحی روش کنترلی LQR برای ارزش‌سنجی روش کنترلی بدون مدل طراحی شده است. ماکزیمم فراجش در روش کنترلی بدون مدل کمی بیشتر از روش کنترلی LQR است، اما روش کنترلی بدون مدل زودتر به پایداری رسیده است. با دقت در نمودارهای ارائه شده روش کنترلی بدون مدل تفاوت چندانی با روش کنترلی LQR ندارد، که این نشان از ارزشمند بودن روش کنترلی بدون مدل و اثبات تئوری کنترل بدون مدل در کنترل سرعت زاویه‌ای ماهواره است. در شبیه‌سازی صورت گرفته برای هر u در حدود  $10^5$  بار تکرار صورت گرفته است. به طوری که سرعت زاویه‌ای حول سه محور در حدود  $3 \times 10^4$  الی  $4 \times 10^4$  تکرار به همگرایی می‌رسد.



شکل ۵- طراحی الگوریتم کنترل بدون مدل برای کنترل وضعیت ماهواره

### شبیه‌سازی

در این بخش اقدام به شبیه‌سازی ماهواره شده است. انجام این عمل برای فهمیدن کارایی روش بدون مدل صورت گرفته است. همان‌طور که تشریح شد، طراحی کنترلی برای ماهواره به دو روش تنظیم‌کننده خطی درجه دوم و روش بدون مدل صورت گرفته است. علت طراحی کنترلی LQR مقایسه با روش بدون مدل و شناسایی کارایی روش بدون مدل است. در این مقاله از مدل ماهواره‌ای که در مرجع [۲۹] ارائه شده، برای شبیه‌سازی استفاده شده است. به طوری که پارامترهای ماهواره به صورت معادله‌ی (۷۰) عنوان شده است.

$$[I] = \begin{bmatrix} 1000 & 0 & 0 \\ 0 & 1000 & 0 \\ 0 & 0 & 800 \end{bmatrix} kgm^2 \quad (71)$$

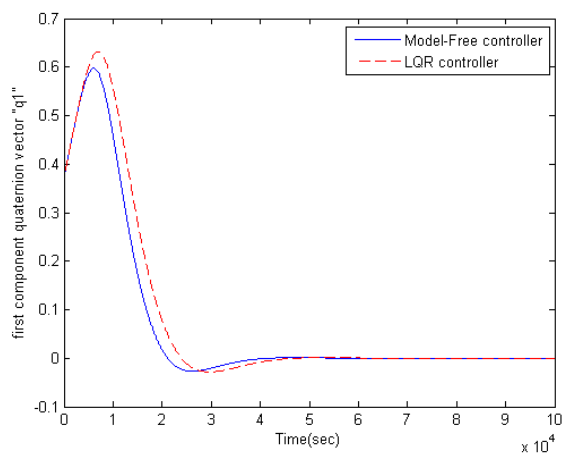
$$m = 1000 kg$$

شرایط اولیه بردار سرعت زاویه‌ای و بردار کواترینون به ترتیب در معادلات (۷۲) و (۷۳) عنوان شده است.

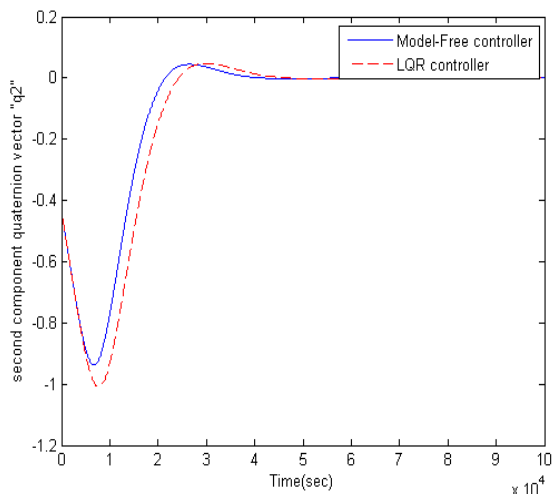
$$\omega(0) = [0.01 \quad -0.02 \quad 0.01] \frac{rad}{s} \quad (72)$$

$$Q(0) = [0.4783 \quad 0.3722 \quad -0.4329 \quad 0.6645] \quad (74)$$

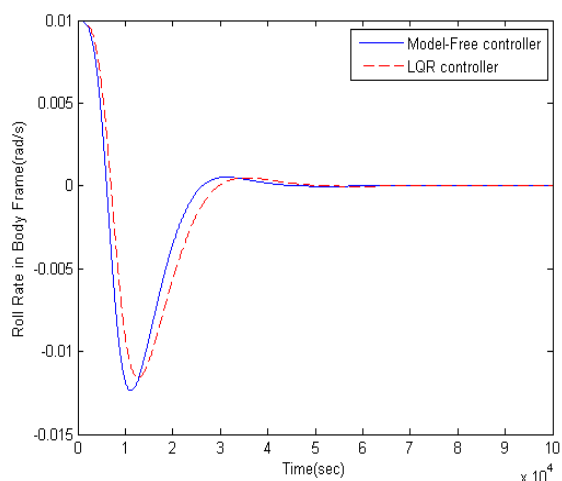
حاصل از عضوهای بردار کواترنیون به ترتیب در شکل (۹)، شکل (۱۰) و شکل (۱۱) نشان داده شده است. شکل (۹) نشان‌دهنده عضو اول بردار کواترنیون، شکل (۱۰) نشان‌دهنده عضو دوم و شکل (۱۱) بیانگر عضو سوم بردار کواترنیون است. هدف از طراحی کنترلر رسیدن اعضای بردار کواترنیون از اندازه اولیه فرض شده به مرکز مختصات یعنی صفر است. با دقت در نمودارهای ارائه شده متوجه شده برخلاف نمودارهای ترسیم شده در کنترل سرعت زاویه‌ای، ماکزیمم فراجاهش در روش کنترلی بدون مدل کمی کمتر از روش کنترلی LQR است. همچنین روش کنترلی بدون مدل زودتر به پایداری می‌رسد. با مقایسه دو روش کنترلی بدون مدل و روش کنترلی LQR در نمودارهای ترسیم شده برای کنترل اعضای بردار کواترنیون ماهواره متوجه شده روش کنترلی بدون مدل ارزشمند و قابل قبول است.



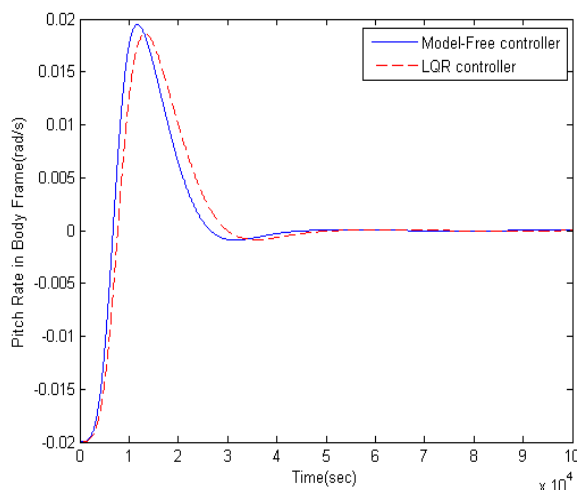
شکل ۹- تفاوت دو روش کنترلی LQR و بدون مدل در کنترل ترم اول بردار کواترنیون



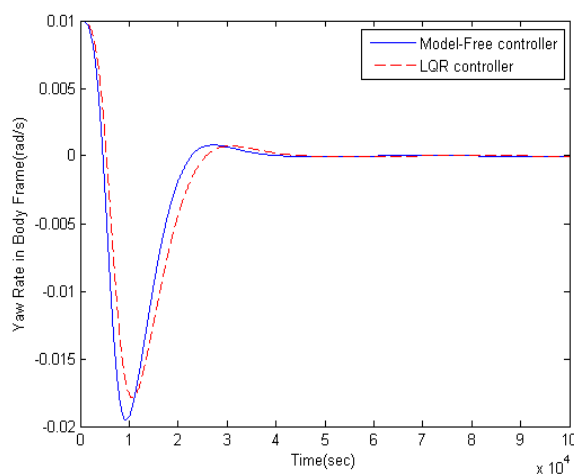
شکل ۱۰- تفاوت دو روش کنترلی LQR و بدون مدل در کنترل ترم دوم بردار کواترنیون



شکل ۶- تفاوت بین کنترلر LQR و بدون مدل در سرعت زاویه‌ای حول محور X

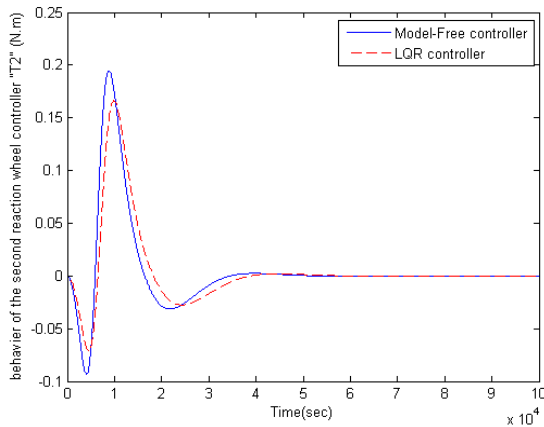


شکل ۷- تفاوت بین کنترلر LQR و بدون مدل در سرعت زاویه‌ای حول محور Y

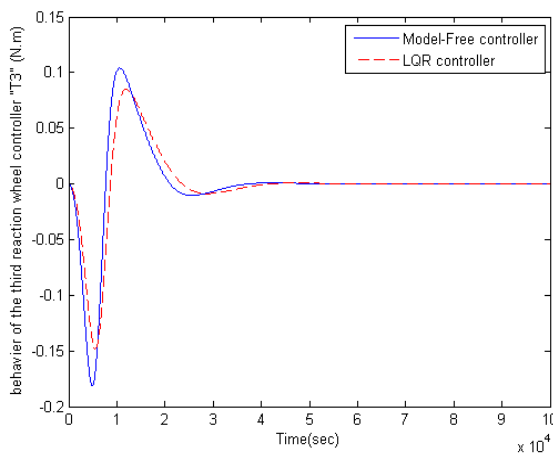


شکل ۸- تفاوت بین کنترلر LQR و بدون مدل در سرعت زاویه‌ای حول محور Z

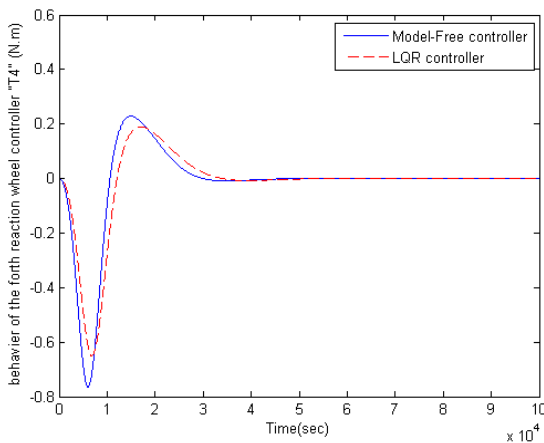
در بخش بعدی نتایج حاصل از کنترل بردار کواترنیون ماهواره به دو روش کنترلی LQR و بدون مدل بررسی شده است. نتایج



شکل ۱۳- گشتاور کنترلی دومین چرخ عکس‌العمل

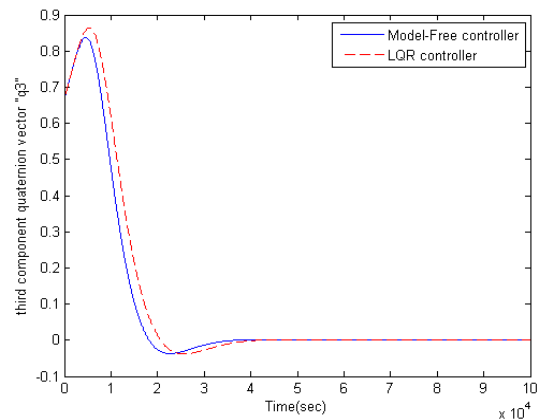


شکل ۱۴- گشتاور کنترلی سومین چرخ عکس‌العمل



شکل ۱۵- گشتاور کنترلی چهارمین چرخ عکس‌العمل

با بررسی نتایج چهار چرخ و مقایسه دو روش کنترلی به دو نتیجه عمده رسیده می‌شود. نتیجه اول نوسان‌های ایجاد شده در روش کنترلی بدون مدل نسبت به روش LQR دارای قله‌های

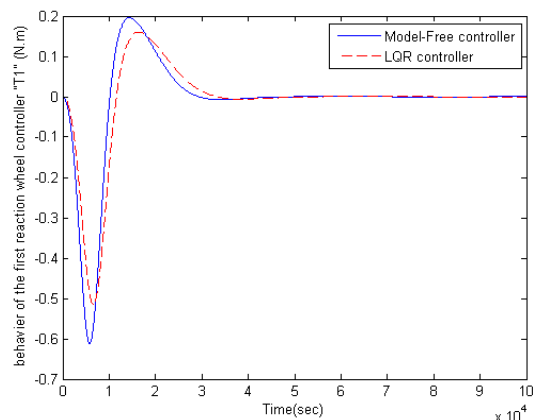


شکل ۱۱- تفاوت دو روش کنترلی LQR و بدون مدل در کنترل ترم سوم بردار کواترنیون

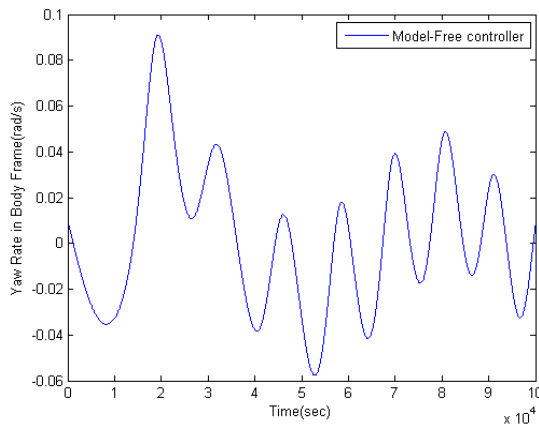
در بخش پایانی به بررسی نتایج چرخ عکس‌العمل پرداخته شده است. برای این مسئله چند نکته باید از بخش مدل‌سازی ماهواره یادآوری کرد، این نکات به ترتیب زیر بیان شده‌اند:

- در این مقاله از چهار عملگر چرخ عکس‌العمل برای پایدارسازی ماهواره استفاده شده است.
- گشتاور پیچشی کنترلی چهار چرخ مطابق معادله (۶۶) به دست آمده است.
- با دقت در معادله (۶۶) متوجه شده گشتاور پیچشی کنترلی عملگرها وابسته به بردار کنترلی ایجاد شده توسط کنترلر طراحی شده است.
- در بخش طراحی کنترلی عنوان شد که کنترلر اعمالی در حالت اولیه برابر صفر است.

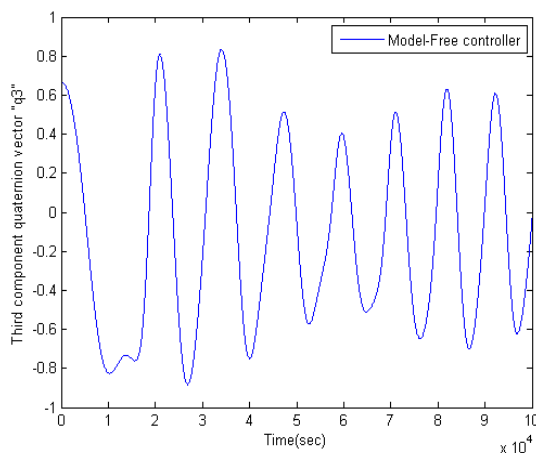
پس از پذیرش نکات بیان شده، نتایج حاصل از دو روش کنترلی برای چهار چرخ عکس‌العمل به ترتیب در شکل (۱۲)، (۱۳)، (۱۴) و (۱۵) نشان داده شده است. نمودارها بیان‌کننده گشتاور کنترلی چرخ عکس‌العمل‌هاست. در ادامه به بحث در مورد پاسخ تولید شده توسط دو روش کنترلی LQR و بدون مدل پرداخته خواهد شد.



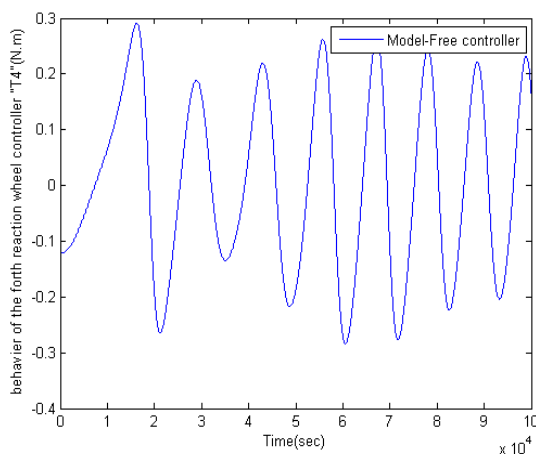
شکل ۱۲- گشتاور کنترلی اولین چرخ عکس‌العمل



شکل ۱۶- پاسخ سرعت زاویه‌ای حول محور Z برای سیستم غیرخطی



شکل ۱۷- پاسخ ترم سوم بردار کواترنیون برای سیستم غیرخطی



شکل ۱۸- پاسخ چرخ عکس‌العمل چهارم برای سیستم غیرخطی

بلندتر و تغییر جهتی با شیب تندتر است. نتیجه دوم روش کنترلی بدون مدل کمی سریع‌تر نسبت به روش کنترلی LQR به پایداری می‌رسد. با جمع‌بندی این دو نتیجه می‌توان ادعا کرد که روش کنترلی بدون مدل از ارزش کنترلی برخوردار است. با توجه به اینکه در مرجع [۲۸] اطلاعاتی از ممان چرخ داده نشده، در نتیجه تصمیم بر این گرفته شد پاسخ خروجی براساس گشتاور باشد. همان‌طور که در انتهای بخش «مدل‌سازی عملگر کنترلی چهار چرخ عکس‌العمل» عنوان شد، سرعت زاویه‌ای چرخ به حالت اشباع نرسد. فرض شود ممان اینرسی چرخ برابر  $I_w = 0.1$  باشد. با توجه به خروجی شکل (۱۵) متوجه شده بیشینه گشتاور چرخ چهارم در حدود  $\max(T_4) = 0.8 N.m$  است. در نتیجه سرعت زاویه‌ای چرخ چهارم در حالت بیشینه برابر  $\max(\omega_4) = \frac{\max(T_4)}{I_w} = 8 \left(\frac{rad}{s}\right)$  خواهد شد. پس سرعت زاویه‌ای چرخ باید بیش از  $8 \frac{rad}{s} > \omega_{اشباع}$  باشد، در غیر این صورت چرخ به سرعت زاویه‌ای اشباع خود خواهد رسید و عملگر کنترلی از کار می‌افتد.

یکی از سؤالات اصلی به‌وجود آمده در شرح روش کنترلی بدون مدل، عدم پاسخ‌گویی این روش به سیستم غیرخطی است، در صورتی که این روش تنها وابسته به داده‌های اندازه‌گیری شده از سیستم است. علت این مسئله را می‌توان در ذات این روش جستجو کرد. همان‌طور که در ارائه و اثبات روش بدون مدل عنوان شد، روش کنترلی بدون مدل همچون روش کنترلی خطی درجه دوم از اصول برنامه‌ریزی دینامیکی استخراج شده است، به طوری که تابع هزینه تعریف شده در دو روش یکسان است. با توجه به اینکه روش کنترلی LQR تنها برای سیستم‌های خطی پاسخگو است، در نتیجه روش کنترلی بدون مدل نیز برای سیستم‌های غیر خطی پاسخگو نیست. برای اثبات آنچه گفته شد، روش بدون مدل برای سیستم غیر خطی ماهواره طراحی شد. سه پاسخ از این طراحی به صورت اتفاقی انتخاب شده است. این سه پاسخ که در شکل‌های (۱۶)، (۱۷) و (۱۸) نشان داده شده است، هرکدام به ترتیب نشان‌دهنده سرعت زاویه‌ای حول محور z، ترم سوم بردار کواترنیون و پاسخ چرخ عکس‌العمل چهارم است.

- [2] Karray, F., Gueaieb, W. and Al-Shahram, S., "The Hierarchical Expert Tuning of PID Controllers using Tools of Soft Computing," *IEEE Transactions on Systems Man, and Cybernetics- Part B*, Vol. 32, 2002, pp. 77-90.
- [3] Spall, J.C., "Multivariate Stochastic Approximation Using a Simultaneous Perturbation," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 45, 1992, p.p. 1839-1853.
- [4] Hou, Z., "The Parameter Identification, Adaptive Control and Model Free Learning Adaptive Control for Nonlinear Systems," China: (Thesis PhD), Northeastern University Shenyang, 1994.
- [5] Hou, Z. "Nonparametric Models and Its Adaptive Control Theory," *Science Press*, Beijing, 1999.
- [6] Hou, Z. and Jin, S.T. "A Novel Data-Driven Control Approach for a Class of Discretetime-Time Nonlinear Systems," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 19, 2011, pp. 1549-1558.
- [7] Al Tamimi, A., Murad Abu Kh., Lewis, F., "Discrete-Time Control Algorithms and Adaptive Intelligent Systems Designs," Texas-Arlington: University of Texas, 20 Werbos, P., "A menu of Designs for Reinforcement Learning Over Time," *In Neural Networks for Control*, 1991, p. 67-95.
- [8] Barto, A.G., Sutton, R.S. and Anderson, C.W., "Neuronlike Elements that Can Solve Difficult Learning Control Problem," *IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics*, Vols. SMC-13, 1983, pp. 835-846.
- [9] Bertsekas, D.P. and Tsitsiklis, J.N., *Neuro-Dynamic Programming*, Athena Scientific, 1996.
- [10] Howard, R., *Dynamic Programming and Markov Processes*, Cambridge: Technology Press of Massachusetts Institute of Technology, 1960.
- [11] Bradtke, S., Ydestie, B. and Barto, A., "Adaptive Linear Quadratic Control using Policy Iteration," *Proceedings of the American Control Conference*, 1994.
- [12] Hagen, S. and Krose, B., "Linear Quadratic Regulation using Reinforcement Learning," in *Belgian\_Dutch Conference on Mechanical Learning*, 1998.
- [13] Werbos, P., *Approximate Dynamic Programming for Real-time Control and Neural Modeling*, New York: Handbook of Intelligent Control: Van Nostrand Reinhold, 1992.
- [14] Watkins, C., *Learning from Delayed Rewards*, (Thesis Ph.D) Cambridge University, 1989.
- [15] Prokhorov, D. and Wunsch, D., "Adaptive Critic Designs," *IEEE Transactions on Neural Networks*, Vol. 8, 1997, pp. 997-1007.
- [16] Landelius, T., *Reinforcement learning and distributed local model synthesis*, Sweden: Ph.D. dissertation, Linkoping University, 1997.
- [17] Si, J., Barto, A., Powel, W. and Wunsch, D., *Handbook of Learning and Approximate Dynamic Programming*, New Jersey: Wiley, 2004.
- [18] Sidi, M.J., *Spacecraft Dynamics and Control*, Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

با بررسی نتایج غیرخطی به دست آمده، متوجه شده هیچ کدام از پاسخ‌های ارائه شده همگرا به صفر نشده‌اند و سیستم همواره در حال نوسان است. در نتیجه مهر تأییدی بر ادعای عدم پاسخگویی روش بدون مدل برای سیستم‌های غیرخطی است.

## نتیجه گیری

هدف از ارائه این مقاله اثبات روش کنترل بهینه بدون مدل بوده است. نتیجه به دست آمده از این روش را می‌توان حول سه محور اصلی بیان کرد. این سه محور به شرح زیر بیان شده است.

- در طراحی روش کنترل بهینه بدون مدل تنها نیاز به حالت‌های سیستم است. پس این روش کنترلی هیچ نیازی به مدل سیستم نخواهد داشت، و تنها به اطلاعات اندازه‌گیری شده از حالت‌های سیستم نیاز است. در نتیجه این روش کنترلی روی هر سیستمی قابل اجرا خواهد بود در حالی که سیستم ناشناخته است.
- روش کنترل بهینه بدون مدل برای سیستم گسسته در زمان طراحی شده است، تنها نیاز به اطلاعات اندازه‌گیری شده حالت‌های سیستم در زمان حال دارد، همچنین با داشتن بردار کنترلی و بردار حالت فعلی، حدسی از بردار حالت بعدی به دست خواهد آمد. برای قرارگیری تخمین زده شده در محدوده مناسب فیدبکی از حالت گرفته خواهد شد. این فیدبک در تابع هزینه سیستم تعریف می‌شود. در نتیجه می‌توان ادعا کرد، روش کنترلی بدون مدل در زیرشاخه آنلاین از لحاظ اندازه‌گیری داده قرار می‌گیرد.
- محور سوم بهینه بودن آن است. همان‌طور که اشاره شد در طراحی کنترلر دو ماتریس وزنی  $Q$  و  $R$  در تابع هزینه وجود داشت. در کنترل بهینه عنوان شده است که ماتریس وزنی  $Q$  بیانگر حداقل مسیر طی شده و ماتریس وزنی  $R$  بیانگر حداقل تلاش کنترلی است. در نتیجه با توجه روش‌هایی که تا به امروز شناخته شده است، می‌توان آن‌ها را در بهینه‌ترین حالت ممکن تنظیم کرد.
- با جمع‌بندی سه محور عنوان شده، به این نتیجه رسیده خواهد شد، توسط روش کنترل بدون مدل، می‌توان به صورت آنلاین هر نوع سیستمی را کنترل کرد. این در حالی است که کنترلر بهینه هست.

## مراجع

- [1] Kalman, R. E., "A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems," *Transactions*, Vol. 82, 1960, pp. 34-45.



- [26]Wertz, J., *Spacecraft Attitude Determination and Control*, Reidel, Dordrecht, Netherlands: Astrophysics and space science library, 1978.
- [27]Wie, B., *Space Vehicle Dynamics and Control*, Reston, VA: AIAA Education Series, 1998.
- [28]Pukdeboon, C. and Kumam, P., "Robust Optimal Sliding Mode Control for Spacecraft Position and Attitude Maneuvers," *Aerosp Sci Technol*, Vol. 43, 2015, pp. 329-342.
- [29]Yang, Y., "Analytic LQR Design for Spacecraft Control System Based on Quaternion Model," *Aerospace Engineering*, Vol. 25, No. 3, 2011, pp. 448-453.
- [30]Kazantzis, N. and Kravaris, C., "Time-Discretization of Nonlinear Control Systems Via Taylor," *Computers and Chemical Engineering*, Vol. 23, 1999, pp. 763-784.
- [31]Qinglei, H., Bo, L. and Zhang, Y., "Robust Attitude Control Design for Spacecraft under Assigned Velocity and Control Constraints," *ISA Transactions*, Vol. 52, 2013, pp. 480-493.
- [19]Navabi, M., Tavana, M. and Mirzaie, H., "Attitude Control of Spacecraft by State Dependent Riccati Equation and Power Series Expansion of Riccati Methods," *Journal of Space Science & Technology*, Vol. 7, No. 4, 2015, pp. 39-49.
- [20]Rokn Abadi, S., Mir shams, S. and Nikkhah, A., "Spacecraft Optimal Attitude Control by means of Reaction Wheels," *Journal of Space Science & Technology, (JSST)*, Vol. 2, No. 15, winter 2010, pp. 40-50.
- [21]Kirk, D.E., *Optimal Control Theory*, New York: Mineola, 2004.
- [22]Brewer, J., "Kronecker Products and Matrix Calculus in System Theory," *IEEE Trans. on Circuit and System*, Vol. 25, No. 9, 1978, pp. 772 - 781.
- [23]Kamen, E.W. and Su, J.K., *Introduction to Optimal Estimation*, Springer, 1999.
- [24]Stengel, R.F., *Optimal Control and Estimation*, Princeton: Dover Publications, 1986.
- [25]Terui, F., "Position and Attitude Control of a Spacecraft by Sliding Mode Control," *Proceeding of American Control Conference*, 1998.

Archive of SID