

# طراحی قانون هدایت سه بعدی مقاوم در برابر مانورهای هدف با رویکرد پایداری سازی جزئی گسسته زمان

محمدحسین شفیعی<sup>۱\*</sup> و نگین وزیرپور<sup>۲</sup>

۱ و ۲ - دانشکده مهندسی برق و الکترونیک، دانشگاه صنعتی شیراز

\*شیراز، کد پستی ۷۱۵۵۷۱۳۸۷۶

shafiei@sutech.ac.ir

در این مقاله، با استفاده از رویکرد پایداری سازی جزئی گسسته زمان، یک قانون هدایت مقاوم در برابر مانورهای هدف، به صورت سه بعدی طراحی می شود. در پایداری سازی جزئی، سیستم به دو زیرسیستم تقسیم می شود که تنها در زیرسیستم اول دستیابی به پایداری مجانبی مطلوب است. از طرف دیگر با وجود پیشرفت های گسترده در پیاده سازی دیجیتال کنترل کننده ها، تاکنون طراحی قانون هدایت با رویکرد پایداری سازی جزئی گسسته زمان انجام نشده است. کنترل کننده پیشنهادی در این مقاله، به رغم محدودیت های گسسته سازی و توابع لیاپانوف گسسته زمان متغیرهای حالت سیستم را به خوبی پایدار می سازد. همچنین با توجه به اینکه تابع لیاپانوف بر مبنای فیزیک مسئله هدایت (صفر شدن نرخ چرخش خط دید) انتخاب شده است، نشان داده می شود که امکان پایداری سازی مجانبی با فرض مانورهای بالای هدف وجود ندارد. بنابراین به محدود کردن نرخ چرخش خط دید به یک مقدار قابل تنظیم، به نحوی که برخورد موشک به هدف در زمان کوتاه تضمین شود، اکتفا می شود. نتایج شبیه سازی ها عملکرد مطلوب قانون هدایت پیشنهادی را نشان می دهد.

واژه های کلیدی: پایداری سازی جزئی، قانون هدایت مقاوم، کنترل کننده دیجیتال، لیاپانوف گسسته زمان

زوایای یاو و پیچ در مختصات خط دید  $\Phi, \theta$   
 تفاضل تابع لیاپانوف در لحظات  $k$  و  $k + 1$   $\Delta V$

## مقدمه

در سال های اخیر روش های کنترل غیرخطی مقاوم مورد استقبال فراوانی قرار گرفته است [۱-۳]. یکی از زمینه های پرکاربرد کنترل کننده های غیرخطی، در طراحی قانون هدایت است. به عنوان نمونه، روش هایی همچون کنترل بر مبنای تابع لیاپانوف، کنترل مد لغزشی و... برای طراحی قانون هدایت توسعه یافته است [۴-۶]. همچنین طراحی قانون هدایت با استفاده از قضایای لیاپانوف و با به کارگیری روش هایی چون کنترل مد لغزشی مرتبه اول [۷-۱۱]، و روش  $H_\infty$  غیرخطی [۱۲ و ۱۳] و... انجام شده است. نتیجه این رویکردهای طراحی، پایداری مجانبی یا نمایی همه متغیرهای حالت سیستم است [۱۴]. اما رویکرد پایداری سازی جزئی [۱۵] با قوانین هدایت مقاومی که تاکنون طراحی شده است، تفاوت اساسی دارد. در این رویکرد برخلاف روش های مرسوم در کنترل که به دنبال همگرا

## علائم و اختصارات

ISS	پایداری ورودی به حالت
LOS	دستگاه خط دید ناظر (بین موشک و هدف)
$r$	فاصله نسبی بین موشک و هدف
$R^n$	مجموعه بردارهای $n$ بعدی حقیقی
$sgn(\cdot)$	تابع علامت
$T$	زمان نمونه برداری
$V(x(k))$	تابع لیاپانوف گسسته-زمان
$V_r, V_\theta, V_\Phi$	مؤلفه های سرعت نزدیک شدن موشک به هدف
$w(\cdot)$	ورودی اغتشاشی ناشی از مانور هدف
$w_r, w_\theta, w_\Phi$	مؤلفه های سیگنال $w$ در دستگاه خط دید
$Z_+$	مجموعه اعداد صحیح نامنفی
$\ \cdot\ $	نرم یک سیگنال

۱. دانشیار (نویسنده مخاطب)  
 ۲. دانشجوی کارشناسی ارشد

بخش تعاریف پایداری جزئی در حوزه گسسته‌زمان بیان می‌شود. سیستم گسسته‌زمان (۱) را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= f_1(x_1(k), x_2(k)), \quad x_1(0) = x_{10}, \quad k \in \mathbb{Z}_+ \\ x_2(k+1) &= f_2(x_1(k), x_2(k)), \quad x_2(0) = x_{20}, \quad k \in \mathbb{Z}_+ \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن  $x \in R^n$  بردار متغیرهای حالت سیستم و بردارهای  $x_1 \in D \subseteq R^{n_1}$  (یک مجموعه باز شامل مبدا) و  $x_2 \in R^{n_2}$  به نحوی تعریف می‌شوند که  $x = (x_1^T, x_2^T)^T$  و  $n_1 + n_2 = n$ . همچنین تابع  $f_1: D \times R^{n_2} \rightarrow R^{n_1}$ ، به ازای هر  $x_2 \in R^{n_2}$  پیوسته و نسبت به  $x_1$  به صورت محلی لیب شیتز فرض می‌شود و داریم  $f_1(0, x_2) = 0$ . همچنین تابع  $f_2: D \times R^{n_2} \rightarrow R^{n_2}$  به ازای هر  $x_1 \in D$  پیوسته و نسبت به  $x_2$  به صورت محلی لیب شیتز است.

**تعریف ۱:** سیستم دینامیکی (۱)، نسبت به وجود داشته باشد به طوری که اگر  $\|x_{10}\| < \delta$  باشد، آنگاه رابطه  $\|x_1(k)\| < \varepsilon$ ، به ازای هر  $k \in \mathbb{Z}_+$  برقرار باشد.

**تعریف ۲:** سیستم دینامیکی (۱)، نسبت به  $x_1$  و به ازای هر  $x_{20} \in R^{n_2}$  پایدار مجانبی است اگر نسبت به  $x_1$  پایدار لیاپانوفی بوده و داشته باشیم  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_1(k) = 0$ .

**قضیه ۱:** سیستم دینامیکی غیرخطی (۱) را در نظر بگیرید. اگر تابع پیوسته  $V: D \times R^{n_2} \rightarrow R$  و توابع کلاس  $K$   $\alpha(\cdot), \gamma(\cdot)$  وجود داشته باشند به نحوی که:

$$V(0, x_2) = 0 \quad x_2 \in R^{n_2} \quad (2)$$

$$\alpha(\|x_1\|) \leq V(x_1, x_2) \quad (x_1, x_2) \in D \times R^{n_2} \quad (3)$$

$$\Delta V(x_1, x_2) \leq -\gamma(\|x_1\|) \quad (x_1, x_2) \in D \times R^{n_2} \quad (4)$$

آنگاه سیستم (۱) نسبت به  $x_1$  پایدار مجانبی است.

**اثبات:** به مرجع [۱۵] مراجعه شود.

در روابط قبل، کنترل‌کننده و اغتشاشات در معادلات سیستم در نظر گرفته نشده بود. جهت تکمیل بحث، سیستم (۱) را به صورت زیر کامل می‌نماییم:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= f_1(x_1(k), x_2(k)) + G(k).u(k) + w_1(k) \\ x_2(k+1) &= f_2(x_1(k), x_2(k)) + G(k).u(k) + w_2(k) \\ \forall x_1(0) &= x_{10}, \quad x_2(0) = x_{20}, \quad k \in \mathbb{Z}_+ \end{aligned} \quad (5)$$

پایداری جزئی به معنی طراحی سیگنال ورودی به نحوی است که سیستم حلقه بسته در حضور اغتشاشات خارجی پایدار جزئی

ساختن مجانبی تمامی متغیرهای حالت سیستم به مبدا هستند، پایداری بخشی از متغیرهای حالت مدنظر است، در صورتی که امکان ناپایداری سایر متغیرهای حالت وجود دارد [۱۶-۱۵]. در میان روش‌های مرسوم در طراحی قانون هدایت، خانواده هدایت تناسبی (PN) معروف‌تر و پرکاربردتر است. در روش PN، نرخ چرخش خط دید اندازه‌گیری شده و یک شتاب جانبی متناسب با آن به موشک اعمال می‌شود [۱۹-۱۷]. در این روش دو محدودیت عمده وجود دارد؛ اول آنکه در طراحی، هدف دارای حرکت یکنواخت و بدون مانور در نظر گرفته می‌شود. محدودیت دیگر، خطی بودن رابطه قانون هدایت PN با وجود غیرخطی بودن معادلات درگیری موشک و هدف است.

از طرف دیگر، مقالات هدایت خصوصاً با رویکرد پایداری جزئی عمدتاً در حوزه پیوسته-زمان هستند؛ درحالی که امروزه پیاده‌سازی قانون هدایت معمولاً توسط پردازنده‌های دیجیتال و طبیعتاً به صورت گسسته-زمان انجام می‌شود. تبدیل یک قانون هدایت طراحی شده در حوزه پیوسته به شکل گسسته-زمان، ممکن است کارایی و یا حتی پایداری سیستم را دچار مخاطره کند. در نتیجه به منظور تضمین بهتر پایداری و کارایی کنترل‌کننده پیاده‌سازی شده، لزوم توسعه رویکرد پایداری جزئی به صورت گسسته-زمان غیرقابل انکار است.

در این مقاله، یک قانون هدایت غیرخطی، با هدف پایداری جزئی و در فضای گسسته-زمان طراحی می‌شود. طراحی قانون کنترلی و انتخاب تابع لیاپانوف در حالت گسسته-زمان، به مراتب مشکل‌تر و پیچیده‌تر از حالت پیوسته-زمان است. در روش پیشنهادی جهت طراحی قانون هدایت، متغیرهای حالت سیستم به دو گروه تقسیم می‌شود که پایداری مجانبی تنها برای گروه اول مطلوب است. بنابراین در این مقاله قانون کنترلی مقاوم پیشنهادی به گونه‌ای طراحی می‌شود که زیرسیستم اول را پایدار نماید. تابع لیاپانوف در این مقاله بر مبنای فیزیک مسئله هدایت (صفر شدن نرخ چرخش خط دید) انتخاب می‌شود. همچنین در این مقاله نشان داده می‌شود که با فرض مانورهای بالای هدف، امکان پایداری مجانبی سیستم هدایت وجود ندارد. بنابراین به محدود نمودن نرخ چرخش خط دید به یک مقدار قابل تنظیم، به نحوی که برخورد موشک به هدف در زمان کوتاه تضمین شود، اکتفا می‌شود. نتایج حاصل از شبیه‌سازی‌ها، عملکرد مناسب قانون هدایت مقاوم گسسته‌زمان را نشان می‌دهد.

## آنالیز پایداری جزئی در حالت گسسته زمان

مفهوم پایداری جزئی را می‌توان به صورت پایداری نسبت به برخی از متغیرهای حالت دینامیک سیستم در نظر گرفت. این رویکرد در بسیاری از کاربردهای مهندسی به کار گرفته می‌شود [۱۵]. در این

که در آن  $r$  فاصله نسبی بین موشک و هدف و  $\theta, \Phi$  به ترتیب زوایای یاو و پیچ در مختصات خط دید هستند. همچنین متغیرهای  $[V_r, V_\theta, V_\Phi] = [\dot{r}, r\dot{\theta} \cos \Phi, r\dot{\Phi}]$  نیز به عنوان متغیر حالت تعریف می‌شوند. در نهایت،  $x = [V_\theta, V_\Phi, \theta, \Phi, r, V_r]$  بردار متغیرهای حالت سیستم و بردارهای شتاب موشک و هدف به صورت  $w = (w_r, w_\theta, w_\Phi)^T$ ،  $u = (u_r, u_\theta, u_\Phi)^T$  به ترتیب همان بردار ورودی‌ها و بردار اغتشاشات هستند. در اینجا با توجه به سه بعدی (شش درجه آزادی) بودن مسئله هدایت، با شش متغیر حالت مواجه هستیم.

معمولاً در مسئله هدایت فرض می‌شود که در لحظه شروع داریم:  $V_{r0} < 0, r_0 > 0$ . به این معنی که در ابتدای مسئله موشک در پشت هدف و در حال نزدیک شدن به آن است.

$x_1$  پایدار لیاپانوفی است، اگر برای هر  $\varepsilon > 0$  و  $x_{20} \in R^{n_2}$ ، یک مقدار  $\delta = \delta(\varepsilon, x_{20}) > 0$  فرض ۱: در این مقاله فرض می‌شود که شتاب طولی موشک در مقایسه با هدف به اندازه کافی بزرگ باشد. بدین ترتیب در صورت عملکرد صحیح قانون هدایت (صفر نمودن نرخ چرخش خط دید)، موشک همواره در حال نزدیک شدن به هدف خواهد بود؛ به عبارت دیگر  $V_r$  در زمان پرواز موشک منفی می‌ماند. این فرض با جنبه‌های عملی تطابق دارد؛ زیرا در صورت قابل توجه بودن شتاب طولی هدف در مقایسه با موشک، هدف به راحتی می‌تواند با سرعت گرفتن از چنگ موشک بگریزد.

**فرض ۲:** در مقالات مربوط به طراحی هدایت، شتاب طولی موشک از پارامترهای مهم و تاثیرگذار است. در این مقاله موشک دارای سوخت تک مرحله‌ای (بوست) است. بنابراین، موشک دارای یک شتاب طولی ثابت  $40 m/s^2$  به مدت دو ثانیه فرض شده است. پس از آن، موشک با سرعت اولیه‌ای که در این دو ثانیه پیدا کرده است، به تعقیب هدف ادامه می‌دهد.

### گسسته‌سازی معادلات مسئله هدایت

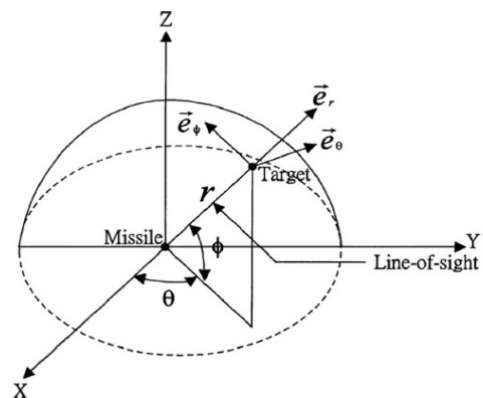
با توجه به گسسته- زمان بودن رویکرد طراحی در این مقاله، باید معادلات سیستم هدایت به شکل گسسته- زمان درآید. بدین منظور ابتدا معادلات سیستم (۶)، توسط تقریب اول مرتبه اول گسسته‌سازی می‌شود. معادلات سیستم قانون هدایت گسسته- زمان به صورت رابطه (۷) است:

گردد. در این مقاله، با استفاده از قوانین پایداری جزئی مبتنی بر قضیه لیاپانوف، قانون هدایت مقاوم گسسته- زمان طراحی می‌شود.

## بیان معادلات قانون هدایت در حوزه گسسته زمان

### روابط حاکم بر مسئله قانون هدایت

در این بخش، فیزیک مسئله هدایت و روابط حاکم بر آن توضیح داده می‌شود. موشک و هدف در مسئله هدایت معمولاً به صورت نقطه‌ای در نظر گرفته شده و معادلات سینماتیک حرکت نسبی بین موشک و هدف در مختصات خط دید ناظر (LOS) نوشته می‌شود. همچنین مرکز مختصات خط دید، مرکز جرم موشک فرض می‌شود. شکل (۱) نمایانگر موشک و هدف در مختصات LOS است. چنان که در این شکل مشاهده می‌شود، مسئله هدایت در این مقاله در فضای سه بعدی در نظر گرفته شده است.



شکل ۱- موشک و هدف در مختصات LOS [۱۱]

معادلات حاکم بر قانون هدایت پیوسته‌زمان در فضای سه بعدی به صورت زیر است [۱۱]:

$$\begin{aligned} \dot{V}_\theta &= -\frac{V_r V_\theta}{r} + \frac{V_\theta V_\Phi \tan \Phi}{r} - u_\theta + w_\theta \\ \dot{V}_\Phi &= \frac{V_r V_\Phi}{r} - \frac{V_\theta^2 \tan \Phi}{r} - u_\Phi + w_\Phi \\ \dot{\theta} &= \frac{V_\theta}{r \cos \Phi} \\ \dot{\Phi} &= \frac{V_\Phi}{r} \\ \dot{r} &= V_r \\ \dot{V}_r &= \frac{V_\theta^2 + V_\Phi^2}{r} - u_r + w_r \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{cases} u_{\theta} = -\frac{V_r(k)V_{\theta}(k)}{r(k)} + \frac{V_{\theta}(k)V_{\Phi}(k)\tan(\Phi(k))}{r(k)} \\ \quad + V_{\theta}(k) \\ u_{\Phi} = -\frac{V_r(k)V_{\Phi}(k)}{r(k)} + \frac{V_{\theta}^2(k)\tan(\Phi(k))}{r(k)} \\ \quad + V_{\Phi}(k) \end{cases} \quad (9)$$

انتخاب و در رابطه (۸) جایگذاری شود، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \Delta V &= (T^2 - 2T)(V_{\theta}^2(k) + V_{\Phi}^2(k)) \\ &\leq -\beta (\|V_{\theta}^2(k)\| + \|V_{\Phi}^2(k)\|) \end{aligned} \quad (10)$$

که در آن  $\beta$  یک عدد مثبت است که با توجه به زمان نمونه برداری تعیین می‌شود و باید داشته باشیم  $T < 2$ . در عمل باتوجه به انتخاب مقادیر کوچک برای زمان نمونه‌برداری، این شرط محقق می‌شود. بنابراین طبق قوانین پایداری مبتنی بر لیاپانوف، شرط (۴) نیز برقرار شده است.

### طراحی قانون هدایت مقاوم گسسته‌زمان با ایده باز طراحی لیاپانوف

اگر هدف دارای مانور فرض شود، به عبارت دیگر  $w \neq 0$  باشد، آنگاه عبارت  $\Delta V$  به شکل زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \Delta V &= \left[ T \left( -\frac{V_r(k)V_{\theta}(k)}{r(k)} + \frac{V_{\theta}(k)V_{\Phi}(k)\tan(\Phi(k))}{r(k)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - u_{\theta}(k) + w_{\theta}(k) + V_{\theta}(k) \right)^2 - V_{\theta}^2(k) \right. \\ &\quad \left. + \left[ T \left( -\frac{V_r(k)V_{\Phi}(k)}{r(k)} + \frac{V_{\theta}^2(k)\tan(\Phi(k))}{r(k)} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - u_{\Phi}(k) + w_{\Phi}(k) + V_{\Phi}(k) \right)^2 - V_{\Phi}^2(k) \right] \end{aligned} \quad (11)$$

بنابراین در این حالت قانون‌های کنترلی باید به صورت زیر اصلاح شوند:

$$\begin{cases} u_{\theta new} = -\frac{V_r(k)V_{\theta}(k)}{r(k)} + \frac{V_{\theta}(k)V_{\Phi}(k)\tan(\Phi(k))}{r(k)} \\ \quad + V_{\theta}(k) + v_1(k) = u_{\theta}(k) + v_1(k) \\ u_{\Phi new} = -\frac{V_r(k)V_{\Phi}(k)}{r(k)} + \frac{V_{\theta}^2(k)\tan(\Phi(k))}{r(k)} \\ \quad + V_{\Phi}(k) + v_2(k) = u_{\Phi}(k) + v_2(k) \end{cases} \quad (12)$$

با جایگذاری رابطه (۱۲) در رابطه (۱۱) عبارت  $\Delta V$  به شکل ذیل در می‌آید:

$$\begin{aligned} V_{\theta}(k+1) &= T \left( -\frac{V_r(k)V_{\theta}(k)}{r(k)} + \frac{V_{\theta}(k)V_{\Phi}(k)\tan(\Phi(k))}{r(k)} \right. \\ &\quad \left. - u_{\theta}(k) + w_{\theta}(k) + V_{\theta}(k) \right) \\ V_{\Phi}(k+1) &= T \left( -\frac{V_r(k)V_{\Phi}(k)}{r(k)} + \frac{V_{\theta}^2(k)\tan(\Phi(k))}{r(k)} \right. \\ &\quad \left. - u_{\Phi}(k) + w_{\Phi}(k) + V_{\Phi}(k) \right) \\ \theta(k+1) &= T \left( \frac{V_{\theta}(k)}{r(k)\cos(\Phi(k))} \right) + \theta(k) \\ \Phi(k+1) &= T \left( \frac{V_{\Phi}(k)}{r(k)} \right) + \Phi(k) \\ V_r(k+1) &= T \left( \frac{V_{\theta}^2(k) + V_{\Phi}^2(k)}{r(k)} - u_r(k) + w_r(k) \right) \\ &\quad + V_r(k) \\ r(k+1) &= T(V_r(k)) + r(k) \end{aligned} \quad (13)$$

که در آن  $T$  زمان نمونه برداری است.

## طراحی قانون هدایت

### طراحی قانون هدایت گسسته-زمان در حالت نامی

معمولاً در مسائل هدایت سعی می‌شود که نرخ چرخش خط دید صفر شده یا حتی الامکان کوچک نگه داشته شود. بنابراین تابع لیاپانوف گسسته-زمان متناظر با معادلات (۱۳) به صورت  $V(x_1) = V_{\theta}^2(k) + V_{\Phi}^2(k)$  انتخاب می‌شود. بر اساس مفهوم پایداری جزئی، تابع لیاپانوف شامل همه متغیرهای حالت نیست [۱۵]؛ بلکه تنها متغیرهای حالت  $x_1$  (متغیرهایی که رفتار پایداری مجانبی برای آنها مطلوب است شامل  $V_{\theta}, V_{\Phi}$ ) در تابع لیاپانوف وجود دارند و سایر متغیرهای حالت به عنوان گروه  $x_2$  در این تابع نظر گرفته نمی‌شوند. این مسئله باعث می‌شود که برخی متغیرها در عبارت  $\Delta V$  ظاهر نشوند.

به راحتی می‌توان نشان داد که تابع لیاپانوف انتخابی شرایط (۲) و (۳) در قضیه (۱) را برآورده می‌کند. برای بررسی شرط (۴)، باید عبارت  $\Delta V$  محاسبه شود. در حالت  $w = 0$  (عدم حضور اغتشاش)، داریم:

$$\begin{aligned} \Delta V &= \left[ T \left( \frac{V_r(k)V_{\theta}(k)}{r(k)} + \frac{V_{\theta}(k)V_{\Phi}(k)\tan(\Phi(k))}{r(k)} - u_{\theta}(k) + V_{\theta}(k) \right) \right]^2 \\ &\quad + \left[ T \left( \frac{V_r(k)V_{\Phi}(k)}{r(k)} + \frac{V_{\theta}^2(k)\tan(\Phi(k))}{r(k)} - u_{\Phi}(k) + V_{\Phi}(k) \right) \right]^2 \\ &\quad - V_{\theta}^2(k) - V_{\Phi}^2(k) \end{aligned} \quad (14)$$

اکنون اگر قانون‌های کنترلی به صورت رابطه (۹):

ضرایب این دو معادله عبارتند از:

$$a = (T^2 - 2T) < 0$$

$$b = (2TK(T-1) + 2T\eta(T+1))$$

$$c = (T^2\eta^2 + T^2K^2 + 2T^2\eta K)$$

در این معادله،  $a < 0$  و  $\Delta' = 4T^3\eta(\eta+K) + T^2(\eta-K)^2 > 0$

است. از طرفی با توجه به علامت  $\frac{c}{a}$ ، حاصل ضرب دو ریشه معادله‌ها

منفی است. بنابراین، معادله‌ها دارای ریشه‌های مختلف‌العلامه و حقیقی هستند. با توجه به این که معادلات برحسب قدر مطلق  $V_\theta(k)$  و  $V_\Phi(k)$  مقادیر  $V_\theta(k)$  است، تنها ریشه مثبت، قابل قبول خواهد بود. بنابراین، اگر  $\Delta V$  مقادیر  $|V_\theta(k)|$  و  $|V_\Phi(k)|$  بزرگتر از ریشه مثبت شوند، منفی شده و در نتیجه سیستم حلقه بسته به نحوی عمل می‌کند که این مقادیر به باندی که توسط این ریشه ایجاد می‌شود، بازگردانده شوند. حال اگر  $K$  به نحوی انتخاب شود که این ریشه مثبت حتی‌الامکان کوچک شود، مولفه‌های سرعت چرخش خط دید ( $V_\theta(k)$  و  $V_\Phi(k)$ ) به مقدار کوچکی همگرا می‌شوند.

ریشه‌های معادله‌های درجه ۲ با ضرایب ذکر شده مشابه است. بنابراین بررسی یکی از آن دو کفایت می‌کند. به عنوان نمونه ریشه‌های معادله  $|V_\theta(k)|$  به صورت زیر است:

$$|V_\theta(k)| = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a} \quad (16)$$

$$= -\frac{[T(\eta+K) + (\eta-K)]}{(T-2)} \pm \frac{\sqrt{(\eta-K)^2 + 4T\eta(\eta+K)}}{(T-2)}$$

با توجه به علامت ضریب  $a$ ، اگر مقدار  $|V_\theta(k)|$  بزرگتر از ریشه مثبت معادله درجه دوم (ریشه بزرگتر) باشد، آنگاه عبارت  $\Delta V$  منفی می‌شود.

حال باید  $K$  به گونه‌ای تعیین شود که ریشه مثبت در (۱۶) به حداقل ممکن برسد تا  $|V_\theta(k)|$  به باند کوچک‌تری محدود شود. برای یافتن مقدار  $K$  که ریشه مثبت را حداقل می‌نماید باید از آن نسبت به  $K$  مشتق گرفته و مساوی صفر قرار داده شود؛ یعنی:

$$\frac{\partial}{\partial K} \left( \frac{[\eta(T+1) + K(T-1)]}{(2-T)} + \frac{\sqrt{(\eta-K)^2 + 4T\eta(\eta+K)}}{(2-T)} \right) = 0 \quad (17)$$

پس از مشتق‌گیری و ساده‌سازی، رابطه درجه دومی برحسب  $K$  به شکل زیر بدست می‌آید:

$$(T^2 - 2T)K^2 + (4T\eta + 4T^3\eta - 10T^2\eta)K + (4T^3\eta^2 - 11T^2\eta^2 + 2T\eta^2) = 0 \quad (18)$$

در نهایت با توجه به مثبت فرض شدن بهره  $K$ ، مقدار قابل قبول از

$$\Delta V = (T^2 - 2T)V_\theta^2(k) + [T^2(v_1(k))^2 - 2T^2w_\theta v_1(k) - 2T^2w_\theta(k)V_\theta(k) + 2Tw_\theta(k)V_\theta(k) + T^2(w_\theta(k))^2 + 2T^2V_\theta(k)v_1(k) - 2TV_\theta(k)v_1(k)] + (T^2 - 2T)V_\Phi^2(k) + [T^2(v_2(k))^2 - 2T^2w_\Phi v_2(k) - 2T^2w_\Phi(k)V_\Phi(k) + 2Tw_\Phi(k)V_\Phi(k) + T^2(w_\Phi(k))^2 + 2T^2V_\Phi(k)v_2(k) - 2TV_\Phi(k)v_2(k)] \quad (13)$$

در این رابطه مقدار لحظه‌ای عبارات  $w_\theta, w_\Phi, w_r$  نامعلوم‌اند و تنها حد بالایی آنها مشخص فرض می‌شود. بنابراین با فرض  $\|w_\theta\| < \eta, \|w_\Phi\| < \eta$  و انتخاب  $v_1 = K \cdot \text{sgn}(V_\theta)$  و  $v_2 = K \cdot \text{sgn}(V_\Phi)$  که در آن  $K > 0$  است، خواهیم داشت:

$$\Delta V \leq (T^2 - 2T)V_\theta^2(k) + [T^2(k)^2 + 2T^2\eta|K| + 2T\eta|V_\theta(k)|(T+1) + T^2\eta^2 + 2TK(T-1)|V_\theta(k)|] + (T^2 - 2T)V_\Phi^2(k) + [T^2(k)^2 + 2T^2\eta|K| + 2T\eta|V_\Phi(k)|(T+1) + T^2\eta^2 + 2TK(T-1)|V_\Phi(k)|] \quad (14)$$

ابتدا بررسی می‌نماییم که آیا امکان دارد شرایطی ایجاد شود که  $\Delta V$  همواره و به ازای مقادیر  $V_\theta(k), V_\Phi(k) \neq 0$  منفی معین باشد. در این صورت سیستم حلقه بسته پایدار مجانبی خواهد بود. اما دیده می‌شود که اگر  $V_\theta(k)$  و  $V_\Phi(k)$  به صفر همگرا شوند، رابطه (۱۳) به شکل زیر ساده می‌شود:

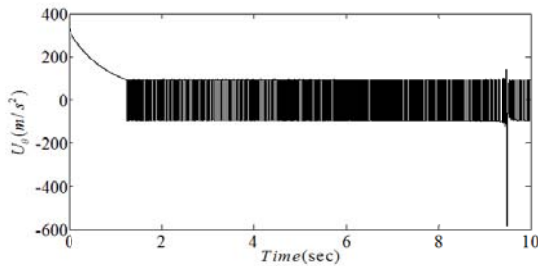
$$\Delta V = T^2(v_1 - w_\theta)^2 + T^2(v_2 - w_\Phi)^2 \quad (15)$$

مشاهده می‌شود که این معادله همواره غیرمنفی است و بنابراین امکان پایدارسازی مجانبی متغیرهای  $V_\theta(k)$  و  $V_\Phi(k)$  وجود ندارد. در نتیجه به جای پایداری مجانبی، سعی می‌شود که این متغیرها حتی‌الامکان به باند کوچکی همگرا شوند. بدین منظور باید نشان دهیم که اگر مقادیر متغیرهای  $V_\theta(k)$  و  $V_\Phi(k)$  از باند مشخصی خارج شوند،  $\Delta V$  منفی خواهد شد و بنابراین این متغیرها به درون آن باند بازگردانده می‌شوند.

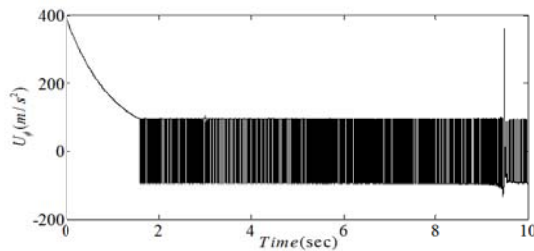
**نکته ۱:** رابطه (۱۵) به مفهوم ناپایداری سیستم نیست؛ زیرا در عبارت  $\Delta V$  جملات مثبت و منفی وجود دارند و این رابطه با صفر کردن جملات منفی به دست آمده است. در صورت افزایش نرخ چرخش خط دید، جملات منفی غالب شده و نهایتاً (چنان که در بخش شبیه‌سازی دیده می‌شود) مقدار نرخ چرخش خط دید به باند کوچکی محدود می‌شود.

اکنون اگر به معادله  $\Delta V$  بدست آمده (رابطه (۱۴)) دقت کنیم، دو معادله درجه دوم برحسب  $|V_\theta(k)|$  و  $|V_\Phi(k)|$  مشاهده می‌شود.

در این حالت متغیرهای حالت زیرسیستم پایدار به جای آن که صورت مجانبی به صفر همگرا شوند، به محدوده‌ای با دامنه  $1/65$  همگرا می‌شوند که در برابر مقادیر اولیه آنها بسیار کوچک است. این باند پاسخ به دلیل تابع لیاپانوف انتخابی و محدودیت‌هایی است که در گسسته‌سازی پیش آمده است. بنابراین، پایداری مربوط به حالت‌های زیرسیستم پایدار در حضور اغتشاش یک پایداری ISS است. این در حالی است که سایر متغیرهای حالت سیستم شامل سرعت نزدیک‌شوندگی و فاصله نسبی لزومی به پایداری نداشته‌اند. در این شبیه‌سازی با وجود صفر نشدن متغیرهای حالت، برخورد موشک و هدف در مدت زمان محدود تضمین شده است. در شکل (۳) سیگنال‌های کنترلی در حضور اغتشاش نیز نشان داده شده‌اند.



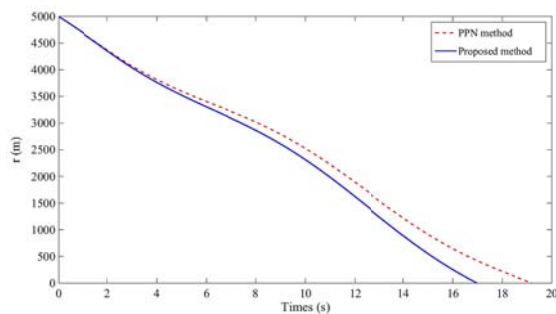
(a)



(b)

شکل ۳- سیگنال‌های کنترلی حاصل در حضور اغتشاش

به منظور مقایسه عملکرد قانون هدایت پیشنهادی، قانون هدایت استاندارد تناسبی خالص (PPN) برای موشک فرض شده در این مقاله شبیه‌سازی شد. شکل (۴) فاصله نسبی موشک نسبت به هدف را برای روش پیشنهادی و روش PPN مقایسه می‌نماید.



شکل ۴- فاصله نسبی موشک و هدف در روش پیشنهادی و روش PPN

رابطه زیر بدست می‌آید:

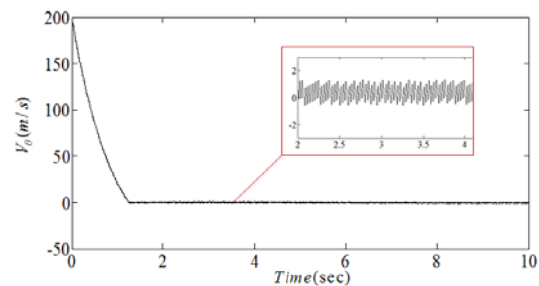
$$K = \frac{\eta(2+2T^2-5T)}{(2-T)} + \frac{\eta\sqrt{16-48T+52T^2-24T^3+4T^4}}{(2-T)} \quad (19)$$

اکنون می‌توان مقدار  $K$  را در رابطه (۱۶) قرار داده و ریشه مثبت را پیدا نمود. اگر این مقدار را  $\alpha$  بنامیم، آنگاه با توجه به مطالب گفته شده به ازای  $|V_\theta(k)| > \alpha$  مقدار  $\Delta V$  منفی است و بنابراین تابع لیاپانوف کاهش یافته تا  $V_\theta(k)$  را به بازه  $[-\alpha, +\alpha]$  محدود نماید.

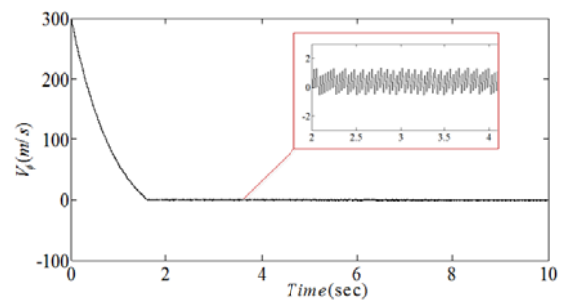
### نتایج شبیه‌سازی و تحلیل آن

در این بخش به منظور بررسی عملکرد قانون هدایت پیشنهادی، این قانون برای یک سناریوی هدایت موشک شبیه‌سازی می‌شود. در این شبیه‌سازی‌ها تمامی حالت‌های سیستم با فرض اغتشاشات  $\Phi_0, \theta_0 = \pi/3, r_0 = 5 \text{ km}$  و مقادیر اولیه  $\omega_r, \theta, \Phi = 40 \sin(0.5t)$ ،  $V_{\Phi 0} = 300 \text{ m/s}$ ،  $V_{\theta 0} = 200 \text{ m/s}$ ،  $V_{r0} = -300 \text{ m/s}$  و زمان نمونه‌برداری  $T = 0.01$  به دست آمده است. لازم به ذکر است محدودیت اصلی در این روش زمان نمونه‌برداری است که باید کوچکتر از ۲ باشد.

در شکل (۲) همگرایی متغیرهای  $x_1$  (متغیرهای مربوط به نرخ چرخش خط دید) به صفر در حضور اغتشاش نشان داده می‌شود.



(a)



(b)

شکل ۲- حالت‌های زیرسیستم پایدار در حضور اغتشاش

- [6] Shafiei, M.H. and Binazadeh, T., *Application of Partial Sliding Mode in Guidance Problem*. *ISA transactions*, Vol. 52, No. 2, 2013, pp. 192-197.
- [7] Chen, B.S., Chen YY, Lin CL. "Nonlinear fuzzy  $H_\infty$  guidance law with saturation of actuators against maneuvering targets," *IEEE Transactions on Control System Technology*, Vol. 10, No. 6, 2002, pp.769-79.
- [8] Shafiei, M.H and Binazadeh, T., "Partial stabilization-based guidance," *ISA Transactions*, Vol. 51, 2012, pp. 141-145.
- [9] Vorotnikov VI., *Partial stability and control*, Boston: Birkhauser, 1998.
- [10] Hu, W, Wang, J., Li, X., "An Approach of Partial Control Design for System Control and Synchronization," *Chaos, Solitons & Fractals*, Vol. 39, No. 3, 2009, pp. 1410-7.
- [11] Vorotnikov VI. "Partial Stability and Control: The State of the Art and Development Prospects," *Automatic Remote Control*, Vol. 66, No. 4, 2005, pp. 511-516.
- [12] Lechevin, N., Rabbath, CA., "Lyapunov-based Nonlinear Missile Guidance," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 27, No. 6, 2004, pp. 1096-102.
- [13] Ryoo CK, Kim YH, Tahk MJ, Choi K. "A Missile guidance law based on Sontag's formula to intercept maneuvering targets," *International Journal of Control, Automation, and Systems*, Vol. 5, No. 4, 2007, pp. 397-409.
- [14] Shieh, CS. "Nonlinear Rule-based Controller for Missile Terminal Guidance," *IEE Proceedings Control Theory Application*, Vol. 150, No. 1, 2004, pp. 45-8.
- [15] Chellaboina, V.S. and Haddad, W.M., "A Unification Between Partial Stability and Stability Theory for Time-Varying Systems," *IEEE Control Systems Magazine*, Vol. 22, No. 6, 2002, pp. 66-75.
- [16] Binazadeh, T. and Yazdanpanah, M.J. "Robust Partial Control Design for Nonlinear Control Systems: A Guidance Application," *Proc. IMechE Part I: J. Systems and Control Engineering*, 2011.
- [17] Nobari, J.H., "A Novel View to Engagement Geometry Based on Proportional Navigation," *Technical Report*, Khaje Nasir University, 2002.
- [18] Ghose, D., "On the Generalization of True Proportional Navigation," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 30, No. 2, 1994, pp. 545-555.
- [19] Yang, C.D., Yeho, F. B. and Hsiao, F. B., "Generalized Guidance Law for Homing Missiles," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. AES25, No. 2, 1989, pp. 197-212.

چنانکه دیده می‌شود، زمان برخورد در روش پیشنهادی حدود دو ثانیه کمتر از روش PPN است. بدیهی است هرچه زمان برخورد طولانی‌تر باشد، هدف فرصت بیشتری خواهد داشت تا با مانورهای ناگهانی، قفل ردیابی موشک را بشکند.

## نتیجه‌گیری

در این مقاله روش پایدارسازی جزئی گسسته زمان برای طراحی قانون هدایت سه بعدی مقاوم گسسته‌زمان مورد استفاده قرار گرفت. پیش از این، طراحی قانون هدایت مقاوم با استفاده از پایدارسازی جزئی در حالت پیوسته‌زمان بررسی شده بود. اما با توجه به پیشرفت‌های اخیر تکنولوژی، پیاده‌سازی کنترل‌کننده‌های پیچیده دیجیتال، امکان پیاده‌سازی قانون هدایت گسسته‌زمان میسر شده است. بدین منظور ابتدا معادلات سیستم با استفاده از تقریب اویلر گسسته‌سازی شده و سپس با انتخاب لیاپانوف مناسب (با توجه به فیزیک مسئله) و طبق قوانین پایدارسازی جزئی گسسته‌زمان، یک قانون هدایت گسسته‌زمان غیرخطی مقاوم طراحی گردید. شبیه‌سازی‌ها عملکرد مناسب این قانون هدایت را نشان دادند.

## مراجع

- [1] Zarei, F. and Shafiei, M.H., "On Event-Triggered Tracking for Non-linear SISO Systems Via Sliding Mode Control". *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, Vol. 37, Issue 1, 2020, pp. 105-119, 2018.
- [2] Keshavarz, M. and Shafiei, M.H., "Design of a Novel Framework to Control Nonlinear Affine Systems Based on Fast Terminal Sliding-Mode Controller". *Journal of Electrical and Computer Engineering Innovations*, Vol. 5, No. 2, pp. 101-108, 2017.
- [3] Adloo, H. and Shafiei, M.H., "A Robust Adaptive Event-Triggered Control Scheme for Dynamic Output-Feedback Systems". *Information Sciences*, Vol. 477, 2019, pp.65-79.
- [4] Shafiei, M.H. and Binazadeh, T. "Partial Stabilization-based Guidance", *ISA transactions*, Vol. 51, No. 1, 2012, pp. 141-145.
- [5] Moon, J., Kim, K. and Kim, Y. "Design of Missile Law via Variable Structure Control," *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 24, No. 4, 2001, pp. 659-64.