

هدایت تناسبی با ضریب ناوبری متغیر بر حسب زاویه بردار سرعت نسبی با خطدید و نرخ آن

سیدحمید جلالی نائینی^{۱*} و علی عربیان آرانی^۲

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس

*تهران، کد پستی ۱۳۱۱۶-۱۴۱۱۷

shjalalinaini@modares.ac.ir

در تحقیق حاضر، عملکرد قانون هدایت تناسبی حقیقی با پروفیل‌های مختلف ضریب ناوبری متغیر بر حسب زاویه بین بردار سرعت نسبی و خطدید در حالت خطای سمت اولیه و هدف با مانور ثابت بررسی شده است. از آنجا که انتخاب پروفیل مناسب در حالت خطای سمت اولیه و مانور ثابت هدف، تقریباً عکس یکدیگر شده است، یک ضریب ناوبری متغیر تابعی از دو پارامتر زاویه مذکور و نرخ آن ارائه شده است. به این طریق فاصله خطا، بطور نمونه برای ضریب ناوبری ۴، برای دو قله نخست نمودار فاصله خطای بی‌بعد بر حسب زمان بی‌بعد کاهش می‌یابد. تحلیل حاضر با استفاده از معادلات بی‌بعد در مختصات قطبی برای دو سیستم کنترل ایده‌آل و دو جمله‌ای مرتبه ۵ بدون شتاب اشباع انجام شده است. به لحاظ کاربردی، نتایج به ازای ضرایب ناوبری ۳ تا ۵ تنظیم شده است.

واژه‌های کلیدی: هدایت تناسبی حقیقی، ضریب ناوبری متغیر، زاویه سرعت نسبی، فاصله خطا

τ زمان بی‌بعد ($\tau = t/T$)
 ω نرخ چرخش خطدید

علائم و اختصارات

M	رهگیر	a	شتاب
min, max	مقدار حداقل، حداکثر	n	مرتبه سیستم کنترل
r	مؤلفه راستای بردار موقعیت در دستگاه قطبی	N'	ضریب ناوبری مؤثر
T	هدف	r	موقعیت
σ	مؤلفه راستای عمود بر بردار موقعیت در دستگاه قطبی	t	زمان
o	مقدار اولیه	T	پارامتر بی‌بعد کننده زمان، ثابت زمانی معادل سیستم کنترل
		t_f	زمان اصابت
		v	سرعت
		v_c	سرعت نزدیک شدن رهگیر به هدف
		Z_j	متغیرهای حالت سیستم کنترل
$\bar{(\)}$	مقدار بی‌بعد	ΔV	انتگرال قدر مطلق دستور شتاب در کل زمان پرواز
$(\)$	مشتق زمانی	ξ	زاویه بین بردار سرعت نسبی و خطدید
$(\)'$	مشتق نسبت به متغیر زمان بی‌بعد	σ	زاویه خطدید

مقدمه

هدایت ناوبری تناسبی یا اختصاراً «هدایت تناسبی» و استراتژی‌های بهبودیافته آن، از متداول‌ترین روش‌های بکار رفته در رهگیرهای آشیانه‌یاب است. در زمینه این هدایت کلاسیک، تحقیقات زیادی انجام شده است تا کارایی این روش در مقابل اهداف چابک و با مانور زیاد، حفظ شود [۱-۵].

در هدایت تناسبی، شتاب مانور رهگیر متناسب با نرخ چرخش خط-دید رهگیر-هدف اعمال می‌شود. به علت سادگی، اجرا در عمل و عملکرد نسبتاً مطلوب، توجه زیادی برای بهبود آن در محققان و طراحان قوانین هدایت وجود دارد. به عبارت دیگر، بهبود در این قانون هدایت به گونه‌ای که ساختار آن را تغییر ندهد می‌تواند بسیار مورد توجه صنعت باشد. عدم تغییر ساختار سبب می‌شود تا اغلب تحلیل‌های طراحان نسبت به رفتار پارامترهای سیستم هدایت و کنترل تحت قانون هدایت تناسبی، قابل استفاده باشد. یکی از این روش‌ها، اتخاذ ضریب ناوبری متغیر است. در قانون هدایت تناسبی با افزایش ضریب ناوبری، نرخ چرخش خطدید سریع‌تر کاهش می‌یابد. هنگامی که نرخ چرخش خطدید کوچک است، افزایش ضریب ناوبری سبب تشدید اثر نویز می‌شود. ضریب ناوبری بزرگ نیز (به عنوان بهره سیستم) سبب ناپایداری سیستم هدایت و کنترل می‌شود. یک پیشنهاد در منابع این است که برای نرخ چرخش خطدید بزرگ، ضریب ناوبری بزرگ لحاظ شود و برای نرخ چرخش خطدید کوچک، ضریب ناوبری کوچک انتخاب شود. به طور نمونه در مرجع [۶]، ضریب ناوبری متغیر به صورت تابعی خطی نسبت به سینوس زاویه بردار سرعت نسبی در نظر گرفته شده و حل تحلیلی آن ارائه شده است. در صورتی که این ضریب ناوبری متغیر، تابع متغیرهای حالت (مانند نرخ چرخش خط دید) در زمان حال باشد، قانون هدایت عملاً از نوع حلقه بسته است؛ اما اگر ضریب ناوبری تابعی از زمان در نظر گرفته شود، بهره قانون هدایت عملاً از نوع حلقه باز خواهد بود و بر حسب شرایط، عملکرد متفاوتی را خواهد داشت. یک نمونه از ضرایب ناوبری متغیر با زمان پرواز در مرجع [۷] مطالعه شده است.

به نقل از مرجع [۸]، در مرجع [۹] که برای عموم در دسترس نیست، پیشنهاد شده است که برای مقابله با اهداف با مانور نوسانی، یک ترم غیرخطی به قانون هدایت تناسبی اضافه شود. ترم غیرخطی مذکور، ضریبی از توان‌های فرد نرخ چرخش خطدید انتخاب شده است. در این مرجع ادعا شده است که قانون هدایت مذکور به ازای توان سوم نرخ چرخش خطدید، در برابر اهداف با مانور سینوسی، نسبت به قانون هدایت تناسبی فاصله خطا کاهش می‌یابد. در مرجع [۱۰] نیز نمونه‌هایی از قوانین هدایت غیرخطی از جمله هدایت تناسبی به صورت چند جمله‌ای شامل ترم‌های نرخ چرخش خطدید با توان‌های مختلف (بدون شبیه‌سازی و بررسی) پیشنهاد شده است.

استراتژی‌های هدایت تناسبی با ترم‌های نرخ چرخش خطدید با توان غیرواحد، ممکن است در طبقه‌بندی هدایت تناسبی با ضریب ناوبری متغیر در نظر گرفته شود. به عبارت دیگر در صورتی که حاصل ضرب نرخ چرخش خطدید و سرعت نزدیک شدن رهگیر به هدف، از رابطه قانون هدایت فاکتور گرفته شود، عبارت باقیمانده (که تابعی متغیر شده است) به عنوان ضریب ناوبری مؤثر تعریف می‌شود.

روش دیگر انتخاب مناسب تابع لیاپانوف است. در مرجع [۱۱]، با استفاده از روش لیاپانوف یک دسته از قوانین هدایت تناسبی غیرخطی شامل ترکیب هدایت تناسبی حقیقی و ترمی از توان سوم نرخ چرخش خطدید ارائه شده است. تحلیل‌های بیشتر در مرجع [۱۲] آمده است. در مرجع [۱۳] روابط سه بعدی قانون هدایت غیرخطی مذکور استخراج شده است. به منظور تحلیل آتی این قوانین هدایت، بی‌بعدسازی معادلات حاکم در مرجع [۱۴] صورت گرفته است.

شایان ذکر است که در دسته‌ای از قوانین هدایت مبتنی بر تئوری کنترل مد لغزشی در منابع، عبارت نرخ چرخش خطدید به توان غیرواحد ظاهر می‌شود، که در صورت حذف ترم‌های فاقد نرخ چرخش خطدید، به صورت هدایت تناسبی با ضریب ناوبری متغیر قابل نمایش است.

در این مقاله، ضریب ناوبری مؤثر به صورت تابعی دو متغیره از زاویه بردار سرعت نسبی نسبت به خطدید و نرخ آن پیشنهاد شده است، که توأمان دو قله اول و دوم نمودار فاصله خطا بر حسب زمان نهایی در دو حالت هدف با مانور و بدون مانور را کاهش می‌دهد.

معادلات غیرخطی سیستم در دستگاه قطبی

بردارهای موقعیت، سرعت و شتاب نسبی بر حسب بردارهای موقعیت، سرعت و شتاب مطلق رهگیر و هدف در چارچوب اینرسی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_T - \mathbf{r}_M \quad (1)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_T - \mathbf{v}_M \quad (2)$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_T - \mathbf{a}_M \quad (3)$$

که در آن، \mathbf{r} ، \mathbf{v} و \mathbf{a} به ترتیب بردارهای موقعیت، سرعت و شتاب هدف نسبت به رهگیر است. همچنین پایین‌نویس T و M به ترتیب نمایانگر هدف و رهگیر است. معادلات بردار سرعت و شتاب نسبی در مختصات قطبی (r, σ) مطابق شکل (۱) به صورت زیر است.

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\sigma}\mathbf{e}_\sigma \quad (4)$$

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\sigma}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\sigma} + 2\dot{r}\dot{\sigma})\mathbf{e}_\sigma \quad (5)$$

که در آن، r فاصله رهگیر و هدف و $\dot{\sigma}$ نرخ چرخش خطدید است. بردارهای یکه در مختصات قطبی به صورت $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\sigma)$ است. مؤلفه‌های بردار شتاب نسبی در راستای خطدید و عمود بر آن برابر است با:

در ادامه به استخراج معادلات حالت بی بعد سیستم مذکور در مختصات قطبی پرداخته می شود. بدین منظور تغییر متغیرهای زیر بکار رفته است.

$$\hat{r} = r/AT^2, \quad \hat{v}_c = v_c/AT, \quad \hat{\omega} = T\omega \quad (18)$$

$$\hat{a} = a/A, \quad \tau = t/T, \quad \tau_f = t_f/T \quad (19)$$

در روابط (۱۸) و (۱۹)، دیمانسیون پارامترهای بی بعد ساز T و A به ترتیب مشابه دیمانسیون زمان و شتاب است. در صورت تحلیل مسئله بدون مانور هدف و تنها به ازای انحراف سمت اولیه، $A = v_{c0}/T$ و بدون انحراف سمت اولیه و تنها به ازای هدف با مانور ثابت، $A = |a_T|$ انتخاب می شود. در نتیجه، معادلات حالت بی بعد سیستم به صورت زیر تبدیل می شود.

$$\hat{r}' = -\hat{v}_c \quad (20)$$

$$\hat{v}_c' = -\hat{r}\hat{\omega}^2 \quad (21)$$

$$\hat{r}\hat{\omega}' = 2\hat{v}_c\hat{\omega} + \hat{a}_T - \hat{a}_{mc}, \quad \hat{a}_T = \text{sgn}(a_T) \quad (22)$$

$$\hat{z}'_1 = n(\hat{a}_c - \hat{z}_1) \quad (23)$$

$$\hat{z}'_j = n(\hat{z}_{j-1} - \hat{z}_j), \quad j = 2 \text{ to } (n-1) \quad (24)$$

$$\hat{a}'_{mc} = n(\hat{z}_{n-1} - \hat{a}_{mc}) \quad (25)$$

که در آن، $(\cdot)'$ نمایانگر مشتق نسبت به متغیر زمان بی بعد τ است. در حالت خاص، معادلات حالت بی بعد برای سیستم کنترل ایده‌ال به صورت زیر ساده می شود.

$$\hat{r}' = -\hat{v}_c \quad (26)$$

$$\hat{v}_c' = -\hat{r}\hat{\omega}^2 \quad (27)$$

$$\hat{r}\hat{\omega}' = 2\hat{v}_c\hat{\omega} + \hat{a}_T - N'\hat{v}_c\hat{\omega}, \quad \hat{a}_T = \text{sgn}(a_T) \quad (28)$$

پارامترهای بی بعد در روابط اخیر براساس تعریف تغییر متغیرهای روابط (۱۸) و (۱۹) با انتخاب $T = r_0/|v_{c0}|$ است، که در صورت تحلیل مسئله به ازای انحراف سمت اولیه، پارامتر A به صورت $A = v_{c0}/T$ انتخاب می شود ($AT = |v_{c0}|$, $AT^2 = r_0$). بنابراین، به منظور حل عددی مسئله، شرایط اولیه بی بعد به صورت زیر حاصل می شود.

$$[\hat{r}_0, \hat{v}_{c0}, \hat{\omega}_0] = [1, 1, \hat{\omega}_0] \quad (29)$$

در حالت سیستم کنترل ایده‌ال و هدف با مانور ثابت (بدون اعمال خطای سمت اولیه برای رهگیر) $A = |a_T|$ انتخاب می شود ($\hat{r}_0/\hat{v}_{c0} = r_0/v_{c0}T = 1$). شرایط اولیه بی بعد مسئله برای حل عددی به صورت زیر حاصل می شود.

$$[\hat{r}_0, \hat{v}_{c0}, \hat{\omega}_0] = [\hat{r}_0, \hat{r}_0, 0] \quad (30)$$

رفتار کمیت‌های اصلی هدایت برای سیستم کنترل ایده‌ال در پیوست الف آمده است.

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\sigma}^2 \quad (6)$$

$$a_\sigma = r\ddot{\sigma} + 2\dot{r}\dot{\sigma} \quad (7)$$

روابط اخیر برای حالتی که شتاب رهگیر (a_{mc}) و شتاب هدف (a_T) عمود بر خط دید باشد، به صورت زیر ساده می شود:

$$\ddot{r} - r\dot{\sigma}^2 = 0 \quad (8)$$

$$r\ddot{\sigma} + 2\dot{r}\dot{\sigma} = a_T - a_{mc} \quad (9)$$

در اینجا سیستم کنترل رهگیر با تابع تبدیل دوجمله‌ای از مرتبه n به صورت رابطه (۱۰) مدل می شود.

$$\frac{a_{mc}}{a_c}(s) = 1 / \left(1 + \frac{T}{n}s\right)^n \quad (10)$$

که در آن، s متغیر حوزه لاپلاس، T ثابت زمانی معادل سیستم کنترل و a_c دستور شتاب (عمود بر خط دید بوده) و به صورت زیر اعمال می شود.

$$a_c = -N'(\cdot)\dot{r}\dot{\sigma} \quad (11)$$

رابطه فوق در واقع قانون هدایت تناسی حقیقی (TPN) با ضریب ناوبری مؤثر (N') متغیر است.

معادلات حالت در مختصات قطبی به ازای سیستم کنترل مفروض مطابق رابطه (۱۰) به صورت زیر استخراج می شود ($n > 1$).

$$\dot{r} = -v_c \quad (12)$$

$$\dot{v}_c = -r\omega^2 \quad (13)$$

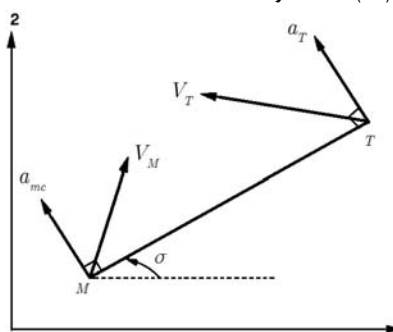
$$r\dot{\omega} = 2v_c\omega + a_T - a_{mc} \quad (14)$$

$$\dot{z}_1 = n(a_c - z_1)/T \quad (15)$$

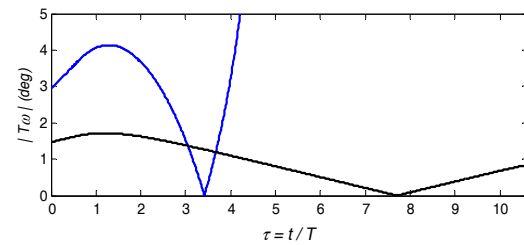
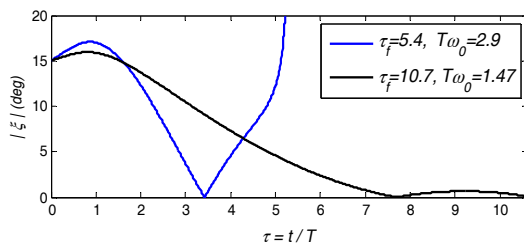
$$\dot{z}_j = n(z_{j-1} - z_j)/T, \quad j = 2 \text{ to } (n-1) \quad (16)$$

$$\dot{a}_{mc} = n(z_{n-1} - a_{mc})/T \quad (17)$$

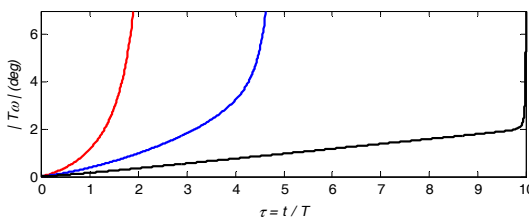
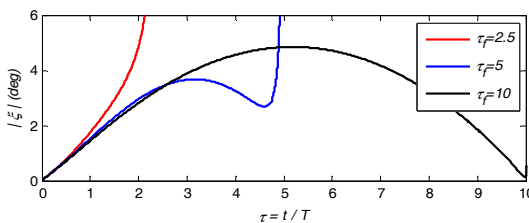
که در آن، v_c سرعت نزدیک شدن رهگیر به هدف، $\omega = \dot{\sigma}$ و متغیرهای حالت z_j خروجی‌های تجزیه تابع تبدیل سیستم کنترل به توابع تبدیل مرتبه اول است. در صورتی که سیستم کنترل از مرتبه یک باشد، دو رابطه (۱۶) و (۱۷) از روابط (۱۲) تا (۱۷) حذف شده و $\dot{z}_1 = a_{mc}$ می شود. شایان ذکر است که به ازای سیستم مرتبه دوم، فقط رابطه (۱۶) حذف خواهد شد.



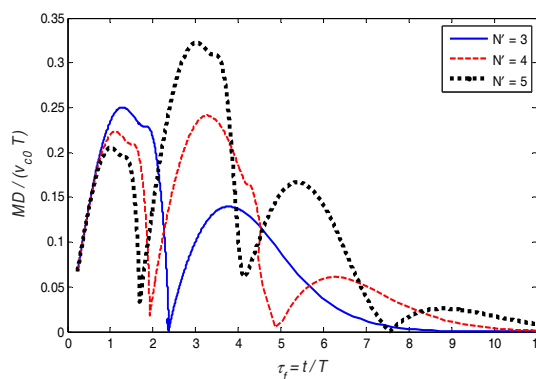
شکل ۱- هندسه درگیری رهگیر و هدف در مختصات قطبی



شکل ۲- رفتار زاویه بردار سرعت نسبت به خطدید و نرخ چرخش خطدید بی‌بعد ناشی از انحراف سمت اولیه تحت قانون هدایت تناسبی حقیقی (n = 5, N' = 3, v̂_c0 = 1)



شکل ۳- رفتار زاویه بردار سرعت نسبت به خطدید و نرخ چرخش خطدید بی‌بعد در حالت هدف با مانور ثابت تحت قانون هدایت تناسبی حقیقی (n = 5, N' = 3, a_T = 1, v̂_c0 = 41.4)



شکل ۴- فاصله خطای بی‌بعد ناشی از انحراف سمت اولیه در مختصات قطبی (n = 5, v̂_c0 = 1)

مطالعه رفتار زاویه بردار سرعت نسبی نسبت به خط دید در هدایت تناسبی

زاویه حاده بین بردار سرعت رهگیر نسبت به هدف و خطدید به صورت زیر نوشته می‌شود ($v_c > 0$).

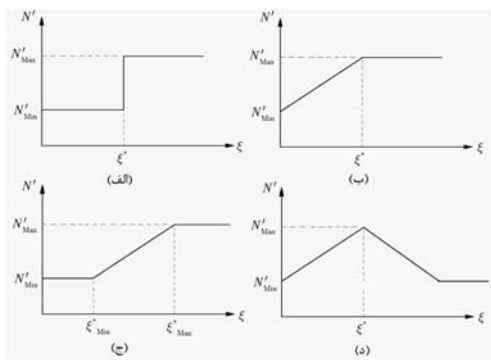
$$\xi = \tan^{-1}(r|\omega|/v_c) = \tan^{-1}(\hat{r}|\hat{\omega}|/\hat{v}_c) \quad (31)$$

برای نمونه در شکل‌های (۲) و (۳) رفتار زاویه ξ و نرخ چرخش خطدید برای هدایت تناسبی حقیقی به ازای ضریب ناوبری ۳، به ترتیب در حضور انحراف سمت اولیه و هدف با مانور ثابت برای سیستم کنترل دو جمله‌ای مرتبه ۵ به ازای سه زمان نهایی بی‌بعد ملاحظه می‌شود. شکل (۲) رفتار صعودی- نزولی مشابهی برای ξ و نرخ چرخش خطدید نشان می‌دهد؛ اما مطابق شکل (۳) هنگامی که هدف مانور دارد، رفتار صعودی- نزولی ξ و نرخ چرخش خطدید نسبت به شکل قبل به ویژه به ازای زمان‌های بی‌بعد بزرگ هماهنگ نیست.

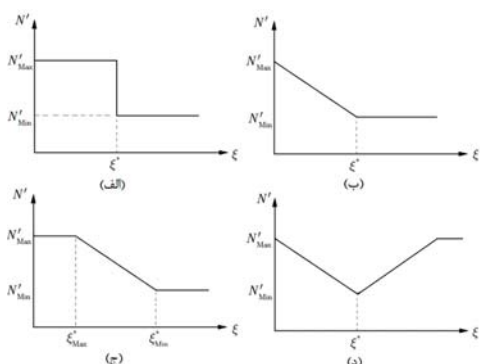
اکنون سؤال این است که تابعیت ضریب ناوبری مؤثر نسبت به ξ چگونه باشد تا عملکرد هدایت تناسبی بهبود یابد. در ادامه به بررسی پروفیل‌های مختلف ضریب ناوبری مؤثر به صورت تابعی از ξ در حضور خطای سمت اولیه و مانور ثابت هدف پرداخته می‌شود.

تحلیل فاصله خطای هدایت تناسبی با ضریب ناوبری متغیر در حالت خطای سمت اولیه

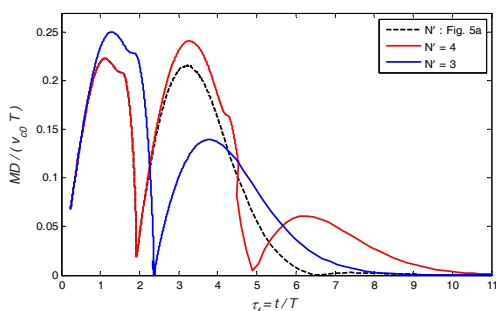
در حالت خطای سمت اولیه، با توجه به شکل (۴)، هنگامی که زمان اصابت در محدوده قله اول نمودار باشد، با افزایش ضریب ناوبری فاصله خطا کاهش می‌یابد؛ اما در زمان‌های بزرگ‌تر، این موضوع قاعده کلی نبوده و حتی برعکس است. بنابراین اگر در محدوده زمانی قله اول نمودار، ضریب ناوبری بزرگ‌تر استفاده شود نتایج بهتری حاصل خواهد شد. از طرفی با توجه به شکل (۲) ملاحظه می‌شود مقدار ξ ابتدا به دلیل تأخیر زمانی سیستم کنترل، کمی افزایش یافته و پس از آن کاهش می‌یابد. در صورتی که زمان اصابت بی‌بعد بزرگ باشد، مقدار ξ به صورت ملایم به سمت صفر می‌رود؛ اما به ازای زمان‌های اصابت کوچک، به دلیل تأخیر زمانی سیستم کنترل، در نهایت، مقدار قدر مطلق ξ افزایش می‌یابد. در ادامه برای بررسی اثر پروفیل ضریب ناوبری (متغیر با ξ) بر فاصله خطا، دو دسته پروفیل مطابق شکل‌های (۵) و (۶) در نظر گرفته می‌شود. ضریب ناوبری در دسته اول مطابق شکل (۵) به ازای ξ های کوچک، کم و در دسته دوم مطابق شکل (۶) عکس آن لحاظ می‌شود.



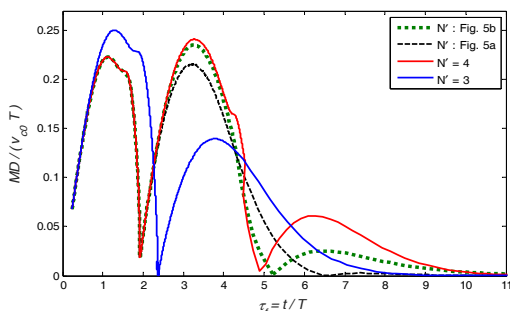
شکل ۵- دسته اول از پروفیل‌های ضریب ناوبری مؤثر متغیر



شکل ۶- دسته دوم از پروفیل‌های ضریب ناوبری مؤثر متغیر



شکل ۷- فاصله خطای بی‌بعد ناشی از انحراف سمت اولیه با ضریب ناوبری متغیر فرم الف شکل ۵ ($\xi^* = 15^\circ$)



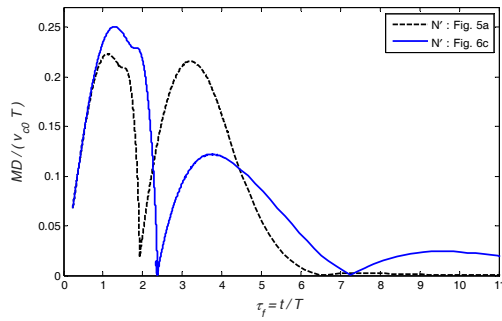
شکل ۸- فاصله خطای ناشی از انحراف سمت اولیه با ضریب ناوبری متغیر فرم ب شکل ۵ ($\xi^* = 15^\circ$)

در ادامه به تأثیر هر چهار پروفیل شکل (۵) بر فاصله خطای نهایی پرداخته می‌شود. برای این پروفیل‌ها ضریب ناوبری مؤثر بین ۳ تا ۴ محدود شده‌است. بدین منظور معادلات بی‌بعد در دستگاه قطبی مطابق بخش قبل برای رهگیر بدون شتاب اشباع با سیستم کنترل مرتبه ۵ حل عددی شده‌است.

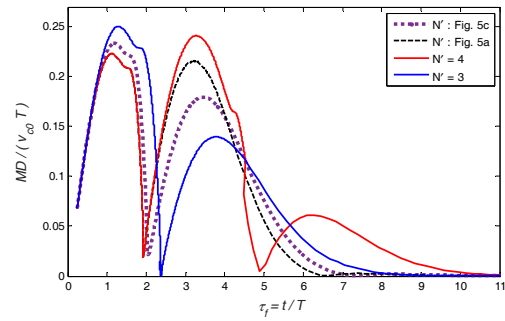
وجه مشترک سه پروفیل نخست شکل (۵) این است که به ازای مقادیر بزرگ ξ ضریب ناوبری بزرگتری انتخاب می‌شود. اکنون سؤال این است که کدام پروفیل ارجح است. با توجه به نمودارهای فاصله خطا در شکل‌های (۷) تا (۹)، در مجموع پروفیل شکل (۵-ج) انتخاب می‌شود. به ازای شرایط اولیه و مقادیر مفروض در نمودارهای فاصله خطا در شکل‌های مذکور، مقدار سوئیچ ضریب ناوبری در شکل (۵-الف) برابر $\xi^* = 15^\circ$ انتخاب شده‌است. این انتخاب سبب می‌شود که ضریب ناوبری بزرگتر در قله اول نمودارهای فاصله خطا اعمال شود. اگرچه انتخاب پروفیل شکل (۵-ج) حساسیت نسبت به مقدار سوئیچ در 15° درجه را کاهش می‌دهد، اما در تحلیل اولیه فاصله خطا در مطالعه حاضر، پروفیل شکل (۵-الف) به علت داشتن یک پارامتر کمتر انتخاب شده‌است. به‌علاوه انتخاب این دو نوع پروفیل سبب می‌شود که فاصله خطا در محدوده‌هایی حتی کمتر از فاصله خطای هدایت تناسی به ازای دو حد مذکور (ضریب ناوبری ثابت ۳ و ۴) شود. در شکل (۵-د) مقدار ضریب ناوبری به ازای زوایای بزرگ ξ نزولی انتخاب شده‌است که با ملاحظه نمودار فاصله خطا در شکل (۱۰)، مشخص می‌شود که در مجموع انتخاب مناسبی نیست.

در دسته دوم پروفیل‌ها مطابق شکل (۶)، پروفیل ضریب ناوبری برعکس دسته اول (شکل ۵) انتخاب شده‌است که نمودارهای فاصله خطا با اتخاذ این پروفیل‌ها در شکل‌های (۱۱) تا (۱۴) نشان داده شده‌است. با ملاحظه نمودارهای فاصله خطای مذکور، ضریب ناوبری متناسب با شکل (۶) نسبت به پروفیل‌های شکل (۵) باعث کاهش فاصله خطا در قله دوم نمودار فاصله خطا شده‌است اما در بقیه نواحی فاصله خطا افزایش یافته است.

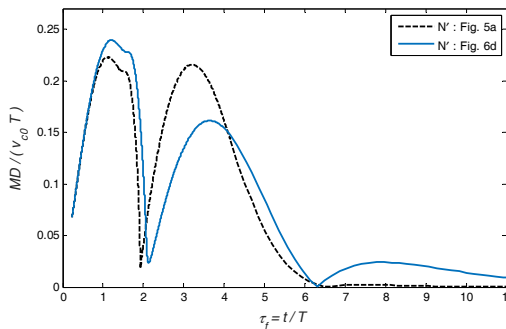
با توجه به شکل (۷)، با انتخاب ضریب ناوبری متغیر مطابق پروفیل شکل (۵-الف)، به ازای زمان‌های اصابت در محدوده قله اول و سوم نمودار، فاصله خطا نسبت به انتخاب یک ضریب ناوبری ثابت بهبود می‌یابد؛ اما با انتخاب پروفیل‌های شکل (۶) فقط در قله دوم فاصله خطا کمتر می‌شود که در حالت اخیر نیز انتخاب ضریب ناوبری ۳ فاصله خطای کمتری می‌دهد.



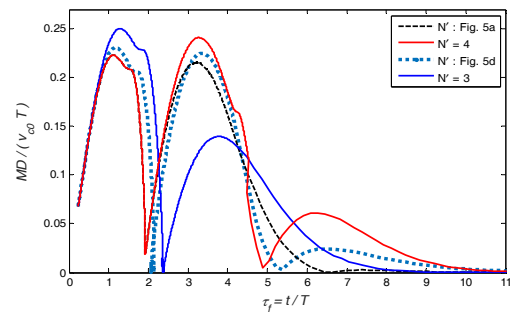
شکل ۱۳- فاصله خطای ناشی از انحراف سمت اولیه با ضریب ناوبری متغیر
فرم ج شکل ۶ ($\xi_{\min}^* = 7.5^\circ, \xi_{\max}^* = 15$)



شکل ۹- فاصله خطای ناشی از انحراف سمت اولیه با ضریب ناوبری متغیر فرم
ج شکل ۵ ($\xi_{\min}^* = 7.5^\circ, \xi_{\max}^* = 30$)



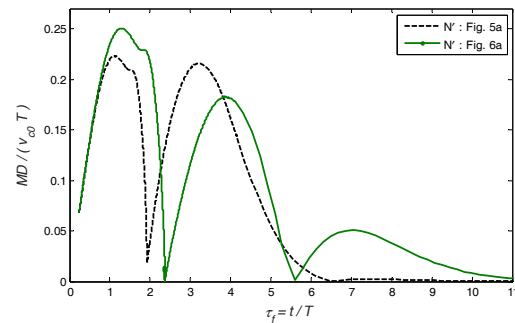
شکل ۱۴- فاصله خطای ناشی از انحراف سمت اولیه با ضریب ناوبری متغیر
فرم د شکل ۶ ($\xi^* = 15^\circ$)



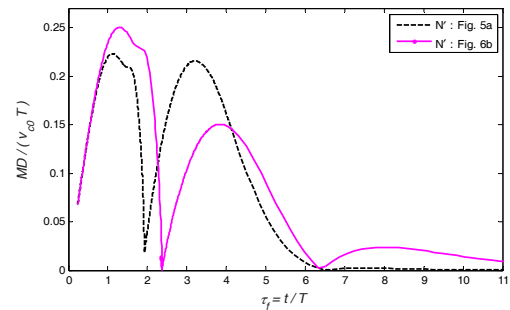
شکل ۱۰- فاصله خطای ناشی از انحراف سمت اولیه با ضریب ناوبری متغیر
فرم د شکل ۵ ($\xi^* = 15^\circ$)

تحلیل فاصله خطا با ضریب ناوبری متغیر در حضور هدف با مانور ثابت

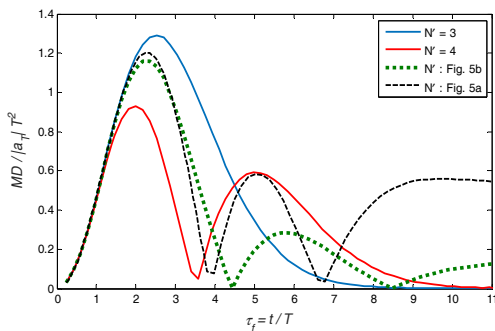
در ابتدا رفتار فاصله خطا نسبت به زمان اصابت، ناشی از مانور ثابت هدف (که عمود بر خط دید است) برای ضرایب ناوبری مؤثر ثابت در شکل (۱۵) ملاحظه می‌شود. با توجه به این شکل، هنگامی که زمان اصابت در محدوده مشترک قله‌های اول نمودار باشد ($\tau_f < 3$) با افزایش ضریب ناوبری فاصله خطای بی‌بعد کاهش می‌یابد؛ اما در زمانهای بزرگتر، این روال صادق نیست و حتی در محدوده‌هایی عکس آن است. بنابراین اگر در محدوده زمانی قله اول، ضریب ناوبری بزرگتر استفاده شود فاصله خطا کاهش می‌یابد. از طرفی، همانطور که در شکل (۳) در حالت هدف با مانور ثابت ملاحظه شد، در نمودار پروفیل ξ بر حسب زمان به ازای $\tau_f < 3$ ، نرخ زمانی ξ افزایشی است و در محدوده‌های زمانی نسبتاً بزرگ، مقدار ξ افزایش یافته و سپس کاهش می‌یابد. مقدار ξ در مثال عددی شکل (۳) برای هدف با مانور حداکثر ۵ درجه است که در مقایسه با مثال عددی حالت خطای سمت اولیه شکل (۲) که حدود ۲۰ درجه است؛ به یک چهارم تقلیل یافته است. در ادامه مشابه بخش قبل برای بررسی اثر ضریب ناوبری متغیر بر فاصله خطا، دو دسته پروفیل شکل‌های (۵) و (۶) در نظر گرفته می‌شود. برای این پروفیل‌ها ضریب ناوبری مؤثر بین ۳ تا ۴ محدود شده‌است. با حل عددی معادلات بی‌بعد در دستگاه قطبی برای رهگیر



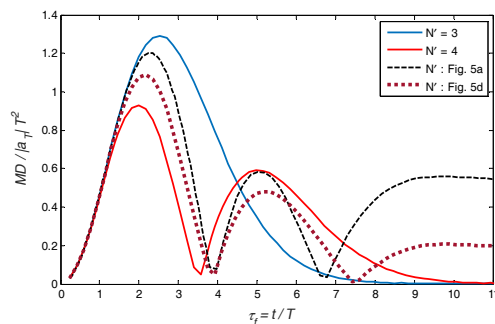
شکل ۱۱- فاصله خطای ناشی از انحراف سمت اولیه با ضریب ناوبری متغیر
فرم الف شکل ۶ ($\xi^* = 15^\circ$)



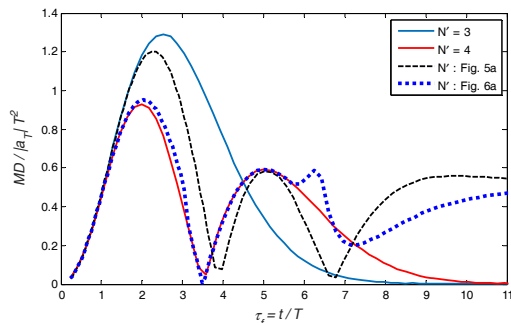
شکل ۱۲- فاصله خطای ناشی از انحراف سمت اولیه با ضریب ناوبری متغیر
فرم ب شکل ۶ ($\xi^* = 15^\circ$)



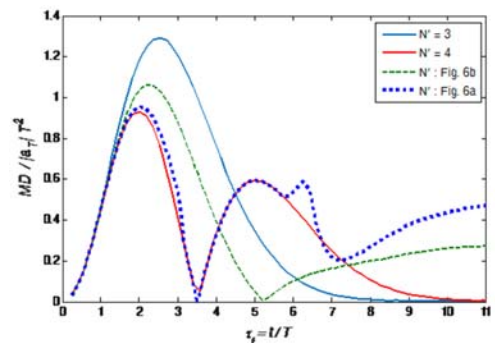
شکل ۱۷ - فاصله خطای ناشی از مانور هدف ثابت با ضریب ناوبری متغیر فرم ب
شکل ۵ ($\xi^* = 7.5^\circ$)



شکل ۱۸ - فاصله خطای ناشی از مانور هدف ثابت با ضریب ناوبری متغیر فرم د
شکل ۵ ($\xi^* = 4^\circ$)



شکل ۱۹ - فاصله خطای بی‌بعد ناشی از مانور هدف با ضریب ناوبری متغیر فرم الف
شکل ۶ ($\xi^* = 3^\circ$)



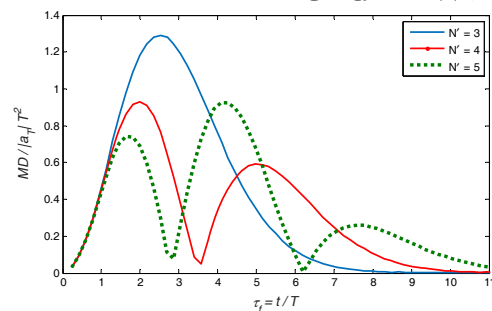
شکل ۲۰ - فاصله خطای بی‌بعد ناشی از مانور هدف با ضریب ناوبری متغیر فرم ب
شکل ۶ ($\xi^* = 3^\circ$)

بدون اشباع شتاب با سیستم کنترل مرتبه ۵ برای هدفی با مانور ثابت، نمودارهای فاصله خطا بدست می‌آید.

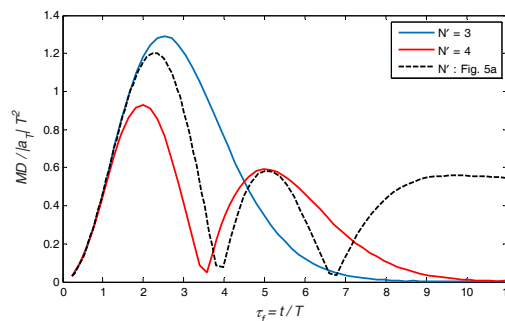
همان‌طور که ملاحظه می‌شود وجه مشترک پروفیل‌های شکل (۵) این است که به ازای مقادیر کوچک ξ ضریب ناوبری کوچک‌تر بوده اما در پروفیل‌های شکل (۶) عکس آن رخ می‌دهد. اکنون سؤال این است که در حالت هدف با مانور ثابت کدام پروفیل ارجح است.

با توجه به نمودارهای فاصله خطا به ازای شرایط اولیه و مقادیر مفروض در شکل‌های ۱۶ تا ۲۲، در مجموع پروفیل شکل ج ۶ یا ۶ ب مناسب‌تر است.

با توجه به شکل‌های ۱۶ تا ۱۸، ضریب ناوبری متغیر مطابق با فرم‌های شکل ۵ (بسته به شیب نمودار در حد فاصل ضرایب ناوبری ۳ و ۴) در حالت هدف با مانور ثابت، سبب می‌شود تا فاصله خطا در محدوده زمانی قله اول، در مقایسه با ضریب ناوبری ثابت ۳، کاهش یابد و حتی در ناحیه محدودی (بلافاصله بعد از قله اول)، انتخاب پروفیل مذکور سبب می‌شود تا فاصله خطا در مقایسه با ضریب ناوبری ثابت ۳ و ۴ نیز کمتر شود. البته به ازای زمان‌های اصابت بزرگتر، فاصله خطا بیشتر می‌شود. شکل‌های (۱۹) تا (۲۲)، نمودار فاصله خطا به ازای ضریب ناوبری متغیر مطابق با پروفیل‌های شکل (۶) را نشان می‌دهد. با مقایسه این شکل‌ها با شکل‌های نمودار فاصله خطای ضرایب ناوبری متغیر مطابق با شکل (۵) (شکل‌های ۱۶ تا ۱۸) ملاحظه می‌شود پروفیل‌های شکل (۶) نسبت به شکل (۵) در مجموع ارجح است.



شکل ۱۵ - فاصله خطای بی‌بعد ناشی از مانور ثابت هدف در مختصات قطبی
($N' = 3, \hat{a}_T = 1, \hat{v}_{c0} = 41.4$)



شکل ۱۶ - فاصله خطای ناشی از مانور هدف ثابت با ضریب ناوبری متغیر فرم الف
شکل ۵ ($\xi^* = 3^\circ$)

$$N'_p = \begin{cases} N'_{Min}, & \xi < \xi^* \\ N'_{Max}, & \xi \geq \xi^* \end{cases} \quad (33)$$

همچنین γ در رابطه (۳۲) تخمین ξ است که از عبور ξ از یک فیلتر پایین گذر مرتبه اول با ثابت زمانی T_s حاصل می‌شود.

$$\dot{\gamma} = (\xi - \gamma) / T_s \quad (34)$$

رابطه ضریب ناوبری بی‌بعد به صورت زیر نوشته می‌شود:

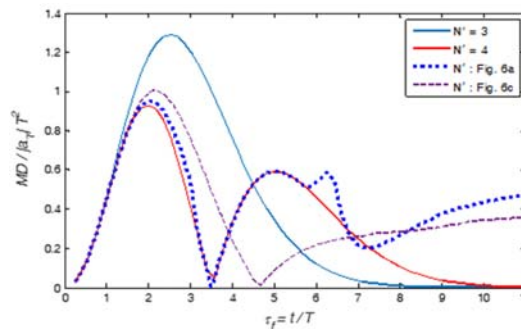
$$N' = \begin{cases} N'_p + (N'_{Max} - N'_{Min})(\dot{\gamma}' / \dot{\gamma}'_{Max})^\beta, & \dot{\gamma}' > 0 \\ N'_{Max}, & \dot{\gamma}' < 0 \end{cases} \quad (35)$$

که در آن،

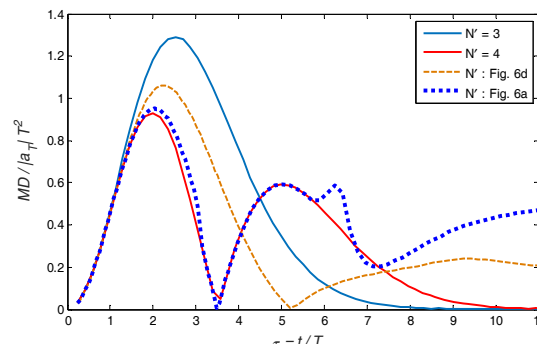
$$\dot{\gamma}' = (T / T_s)(\xi - \gamma) \quad (36)$$

اکنون به بررسی نمودارهای فاصله خطا با ضریب ناوبری متغیر با ξ و γ در دو حالت انحراف سمت اولیه و هدف با مانور ثابت برای سیستم کنترل مرتبه ۵ پرداخته می‌شود. در شکل‌های (۲۳) تا (۲۵)، نمودارهای فاصله خطا به ازای $\beta = 0.1$ در حالت هدف با مانور ثابت نشان داده شده‌است. به‌علاوه، شکل (۲۶) رفتار زاویه ξ و ضریب ناوبری متغیر را بر حسب زمان بی‌بعد نشان می‌دهد. در شکل‌های مذکور استفاده از ضریب ناوبری متغیر مطابق رابطه (۳۵)، در محدوده زمان اصابت تقریباً حدود یک تا پنج برابر ثابت زمانی، باعث کاهش فاصله خطا شده‌است. البته برای زمان‌های اصابت زیاد (بیش از پنج برابر ثابت زمانی) می‌توان از ضریب ناوبری ثابت ۳ استفاده کرد. به عبارت دیگر، در شکل (۲۷) به ازای $\tau_f = 5.3$ ، ضریب ناوبری ۳ انتخاب شده‌است. با توجه به این که منطق اصلاح تابع ضریب ناوبری متغیر، برای هدف با مانور بوده و این که در حالت انحراف سمت اولیه، عمدتاً انتظار می‌رود مقدار قدر مطلق ξ کاهش یابد، لذا عبارت نخست در رابطه (۳۵) تقریباً بی‌اثر شده و ضریب ناوبری برابر N'_p می‌شود. بطور نمونه، فاصله خطا ناشی از انحراف سمت اولیه در شکل (۲۸) به ازای ضریب ناوبری متغیر مطابق رابطه (۳۵) ترسیم شده‌است که بهبود کمی را در محدوده زمان اصابت تقریباً تا پنج برابر ثابت زمانی نشان می‌دهد. در شکل (۲۹) رفتار زاویه ξ و ضریب ناوبری متغیر بر حسب زمان بی‌بعد نشان داده شده‌است.

در نهایت در شکل (۳۰)، نمودار فاصله خطا ناشی از اعمال توأمان انحراف سمت اولیه ($HE = 7^\circ$) و مانور ثابت هدف ($10g$) تحت هدایت تناسبی با ضریب ناوبری متغیر مطابق رابطه (۳۵) ترسیم شده‌است ($n = 5, v_{c0} = 1145.7m/s$). همان‌طور که در این شکل ملاحظه می‌شود فاصله خطای حاصل از ضریب ناوبری مطابق رابطه (۳۵)، در قله اول نمودار به ازای ضریب ناوبری ۴ که کمترین مقدار را دارد منطبق شده و در قله دوم از فاصله خطای ضریب ناوبری ۴ به‌طور چشمگیری کمتر شده‌است؛ اما در محدوده فوقانی قله دوم، افزایشی نسبت به فاصله خطا به ازای ضریب ناوبری ۳ دارد، در عین حال در محدوده پایینی قله دوم، فاصله



شکل ۲۱- فاصله خطای بی‌بعد ناشی از مانور هدف با ضریب ناوبری متغیر فرم ج شکل ۶ ($\xi^*_{min} = 1^\circ, \xi^*_{max} = 4^\circ$)



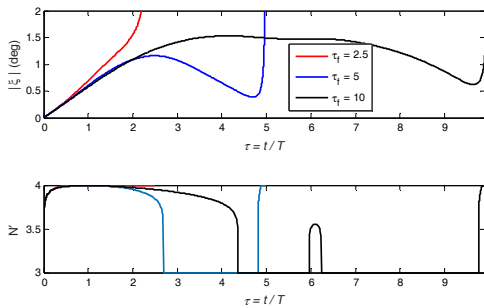
شکل ۲۲- فاصله خطای بی‌بعد ناشی از مانور هدف با ضریب ناوبری متغیر فرم د شکل ۶ ($\xi^* = 4^\circ$)

بحث و نتایج

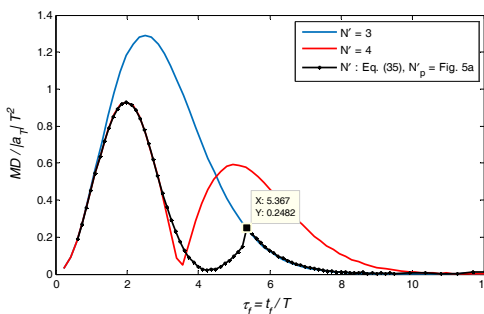
با توجه به نتایج تحلیل فاصله خطا در دو بخش قبل، پروفیل ارجح ضریب ناوبری به‌صورت تابعی از ξ از بین دو دسته پروفیل کلی مطابق شکل‌های (۵) و (۶) در دو حالت خطای سمت اولیه و هدف با مانور، تقریباً عکس یکدیگر شده‌است. به عبارت دیگر، پروفیل شکل (۵) که در حالت خطای سمت اولیه ارجح است، در حالت هدف با مانور، نتیجه مطلوبی نمی‌دهد. همچنین پروفیل شکل (۶) که در حالت هدف با مانور ثابت ارجح است، در حالت خطای سمت اولیه نتیجه مطلوبی نمی‌دهد. به‌نظر می‌رسد جمع این دو حالت به تنهایی با یک متغیر ξ در ضریب ناوبری، به آسانی میسر نباشد. برای رفع این مشکل، پیشنهاد می‌شود ضریب ناوبری تابعی از دو متغیر ξ و γ انتخاب شود؛ بطور نمونه:

$$N' = \begin{cases} N'_p + (N'_{Max} - N'_{Min})(\dot{\gamma}' / \dot{\gamma}'_{Max})^\beta, & \dot{\gamma}' > 0 \\ N'_{Max}, & \dot{\gamma}' < 0 \end{cases} \quad (37)$$

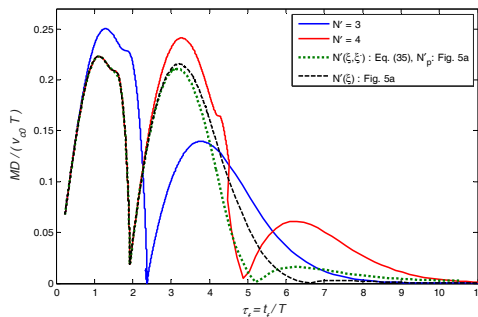
که در آن، N'_p مطابق با پروفیل ضریب ناوبری متغیر شکل ۵ بین دو مقدار حداقل و حداکثر (N'_{Min}, N'_{Max}) به صورت زیر تعریف می‌شود.



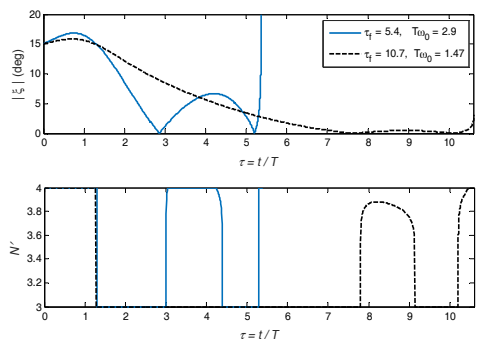
شکل ۲۶- رفتار زاویه بردار سرعت نسبی نسبت به خطدید و ضریب ناوبری متغیر مطابق رابطه (۳۵) در حالت هدف با مانور ثابت ($\xi^* = 15^\circ, \dot{\gamma}_{Max} = 0.6^\circ, T/T_s = 5, \hat{v}_{c0} = 103.5$)



شکل ۲۷- فاصله خطای بی‌بعد ناشی از مانور هدف با ضریب ناوبری متغیر رابطه (۳۵) ($\xi^* = 15^\circ, \dot{\gamma}_{Max} = 0.6^\circ, T/T_s = 5$)

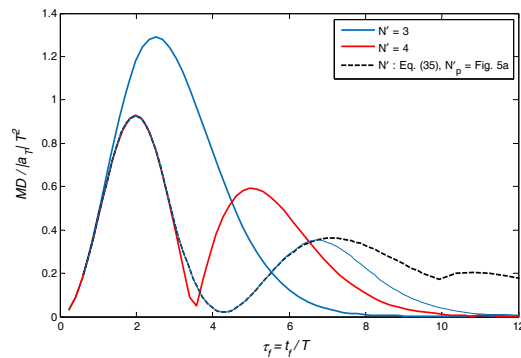


شکل ۲۸- فاصله خطا ناشی از انحراف سمت اولیه با ضریب ناوبری متغیر رابطه (۳۵) ($\xi^* = 15^\circ, \dot{\gamma}_{Max} = 1.5^\circ$)

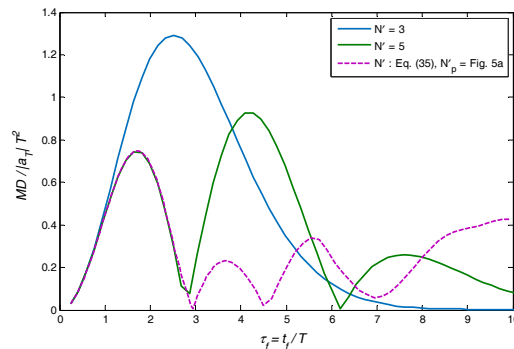


شکل ۲۹- رفتار زاویه بردار سرعت نسبی نسبت به خطدید و ضریب ناوبری متغیر مطابق رابطه (۳۵) ناشی از انحراف سمت اولیه ($\xi^* = 15^\circ, \dot{\gamma}_{Max} = 1.5^\circ, T/T_s = 5, \hat{v}_{c0} = 1$)

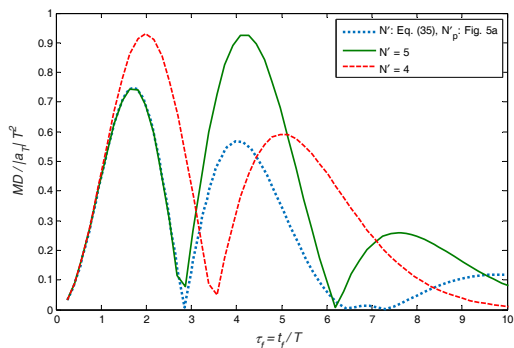
خطا کاهش یافته است. شایان ذکر است که انحراف سمت اولیه ۷ درجه به ازای مقادیر کوچک برای زمان نهایی پرواز، مقدار بزرگی است و اثر غالب دارد. به عبارت دیگر، در زمان‌های نهایی پرواز ابتدا اثر خطای سمت اولیه حذف می‌شود و سپس در چند ثانیه آخر اثر مانور هدف غالب می‌شود. در این صورت به طور کلی، فاصله خطا مطابق شکل‌های (۲۳) و (۲۴) به ازای ضریب ناوبری متغیر مذکور در دو قله اول از هر دو ضریب ناوبری ثابت (مقادیر حداقل و حداکثر) کمتر می‌شود.



شکل ۲۳- فاصله خطای بی‌بعد ناشی از هدف با مانور ثابت و ضریب ناوبری متغیر رابطه (۳۵) ($\xi^* = 15^\circ, \dot{\gamma}_{Max} = 0.6^\circ, T/T_s = 5$)



شکل ۲۴- فاصله خطای بی‌بعد ناشی از هدف با مانور ثابت و ضریب ناوبری متغیر رابطه (۳۵) ($\xi^* = 15^\circ, \dot{\gamma}_{Max} = 1.5^\circ, T/T_s = 5$)



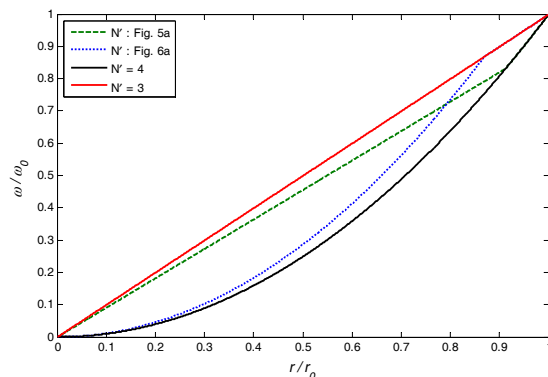
شکل ۲۵- فاصله خطای بی‌بعد ناشی از مانور هدف با ضریب ناوبری متغیر رابطه (۳۵) ($\xi^* = 15^\circ, \dot{\gamma}_{Max} = 1.5^\circ, T/T_s = 5$)

خطادید و محور طولی موشک، تقسیم می‌شود تا مقدار مؤثر در راستای عمود بر خطادید حاصل شود.

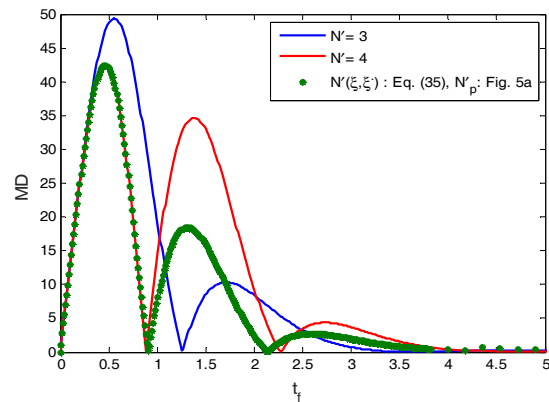
پیوست: رفتار کمیت‌های اصلی هدایت تناسبی با سیستم کنترل ایده‌ال

در این پیوست، رفتار هدایت تناسبی با ضریب ناوبری متغیر با ξ در مقایسه با ضریب ناوبری ثابت برای سیستم کنترل ایده‌ال در دو حالت با انحراف سمت اولیه و هدف با مانور ثابت و فرض $v_{c0} > 0$ مطالعه شده‌است. در شکل (۳۱) رفتار نرخ چرخش خطادید بی‌بعد نسبت به فاصله نسبی بی‌بعد در حالت هدف بدون مانور و به ازای $\hat{\omega}_0 = 0.35$ ترسیم شده‌است. لازم به ذکر است که این نمودار به ازای ضرایب ناوبری ثابت ۳ و ۴ مستقل از مقدار $\hat{\omega}_0$ بوده و به ازای ضریب ناوبری ۳، رفتاری خطی نسبت به فاصله نسبی دارد. حل تحلیلی نرخ چرخش خطادید به ازای ضریب ناوبری ثابت در مرجع [۱۰] آمده است. به ازای ضریب ناوبری متغیر با ξ مطابق با پروفیل شکل (۵ الف)، مقدار نرخ چرخش خطادید بی‌بعد ابتدا بر منحنی ضریب ناوبری ۴ منطبق است و با سوئیچ به ضریب ناوبری ۳ (به ازای $\xi = 15^\circ$) به صورت خطی کاهش می‌یابد. هنگامیکه ضریب ناوبری مطابق پروفیل شکل ۶ الف باشد، بطور مشابه مقدار نرخ چرخش خطادید بی‌بعد ابتدا بر منحنی ضریب ناوبری ۳ منطبق است و با سوئیچ به ضریب ناوبری ۴ (به ازای $\xi = 15^\circ$) به سمت صفر کاهش می‌یابد.

در شکل (۳۲) نمودار زمان اصابت بی‌بعد نسبت به نرخ چرخش خطادید اولیه بی‌بعد ناشی از انحراف سمت اولیه ترسیم شده‌است. در این شکل، دقت تخمین رابطه $t_f \approx r_0/v_{c0}$ به ازای مقادیر مختلف $\tan \xi_0 = r_0 \omega_0 / v_{c0}$ نشان داده شده‌است. با استفاده از این شکل، ضریب تصحیح رابطه مذکور قابل استخراج است.



شکل ۳۱- نمودار نرخ چرخش دید بی‌بعد به فاصله نسبی بی‌بعد ناشی از انحراف سمت اولیه در سیستم ایده‌ال ($\hat{\omega}_0 = 0.35, \xi^* = 15^\circ$)

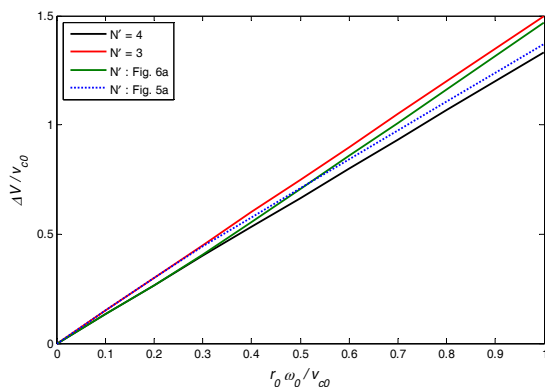


شکل ۳۰- مقایسه فاصله خطای هدایت تناسبی با ضریب ناوبری ثابت و متغیر مطابق رابطه (۳۵) ناشی از انحراف سمت اولیه و مانور هدف ($\xi^* = 15^\circ, y_{Max} = 5^\circ, T = 0.4, T_s = 0.08, HE = 7^\circ$)

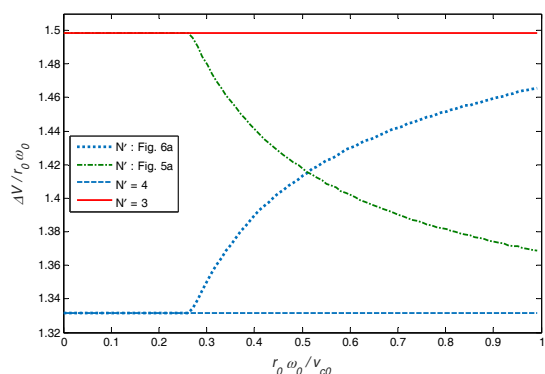
نتیجه‌گیری

در این مقاله، تحلیل فاصله خطای قانون هدایت تناسبی حقیقی به ازای هشت پروفیل مختلف ضریب ناوبری مؤثر برحسب زاویه بین بردار سرعت نسبی و راستای خطادید در حالت خطای سمت اولیه و هدف با مانور ثابت بررسی شده‌است. با توجه به تحلیل مذکور، پروفیل ضریب ناوبری مناسب در حالت خطای سمت اولیه به صورت صعودی برحسب زاویه بین بردار سرعت نسبی و خطادید بوده و در حالت هدف با مانور ثابت، پروفیل مناسب به صورت نزولی برحسب پارامتر مذکور است. بنابراین انتخاب هر یک از این پروفیل‌ها در حالت دیگر، جواب مطلوبی نخواهد داد. به منظور رفع این مشکل، رابطه‌ای برای ضریب ناوبری متغیر به صورت تابعی از زاویه بردار سرعت نسبی و نرخ زاویه مذکور ارائه شده‌است. این اصلاح باعث کاهش فاصله خطا در هر دو حالت به ازای زمان‌های نهایی نسبتاً کوچک خواهد شد. بطور نمونه برای ضریب ناوبری ۴، برای دو قله نخست نمودار فاصله خطای بی‌بعد برحسب زمان بی‌بعد کاهش می‌یابد. تحلیل فاصله خطا در مطالعه حاضر با استفاده از معادلات بی‌بعد و بدون شتاب اشباع بوده و رابطه ضریب ناوبری متغیر به لحاظ کاربردی به ازای ضرایب ناوبری ۳ تا ۵ تنظیم شده‌است. در این رابطه، در صورتی که زمان نهایی حدوداً بیش از ۵ برابر ثابت زمانی معادل سیستم کنترل باشد، ضریب ناوبری ثابت برابر ۳ اعمال شده‌است.

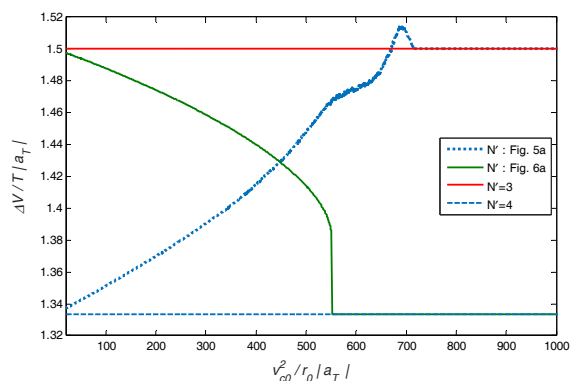
شایان ذکر است که روش‌های جبران شتاب جاذبه، شتاب محوری موشک و جبران شتاب هدف می‌تواند با قانون هدایت مذکور ترکیب شود. به عبارت دیگر، ترم جبران شتاب جاذبه، شتاب محوری موشک و شتاب هدف عمود بر خطادید، به دستور شتاب موشک اضافه گردد. در نهایت، دستور شتاب بر کسینوس زاویه بین



شکل ۳۳- انتگرال قدر مطلق دستور شتاب بی‌بعد به نرخ چرخش دید اولیه بی‌بعد ناشی از انحراف سمت اولیه در سیستم کنترل ایده‌آل ($\xi^* = 15^\circ$)



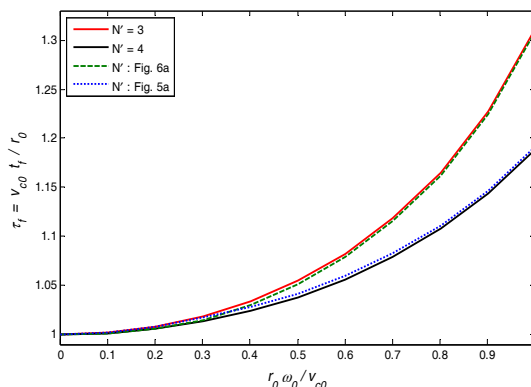
شکل ۳۴- نمایش بی‌بعد انتگرال قدر مطلق دستور شتاب برحسب $r_0\omega_0/V_{c0}$ ناشی از انحراف سمت اولیه با فرض سیستم کنترل ایده‌آل به ازای ضریب ناوبری ثابت و متغیر ($\xi^* = 15^\circ$)



شکل ۳۵- نمایش بی‌بعد انتگرال قدر مطلق دستور شتاب برحسب $v_{c0}^2/r_0|a_T|$ در حضور هدف با مانور ثابت با فرض سیستم کنترل ایده‌آل به ازای ضریب ناوبری ثابت و متغیر ($\xi^* = 0.03^\circ$)

در ادامه، معیار عملکرد انتگرال قدر مطلق دستور شتاب برای پروفیل‌های مختلف ضریب ناوبری مطالعه می‌شود. برای این منظور، دو نوع نمایش بی‌بعد انتگرال قدر مطلق دستور شتاب نسبت به پارامتر $\tan \xi_0 = r_0\omega_0/v_{c0}$ ناشی از انحراف سمت اولیه در شکل (۳۳) و (۳۴) ترسیم شده‌است. همان‌طور که در این شکل ملاحظه می‌شود به ازای ضرایب ناوبری ۳ و ۴ نمودارهای انتگرال قدر مطلق دستور شتاب نسبت به پارامتر $\tan \xi_0 = r_0\omega_0/v_{c0}$ به صورت خطی بوده و به ازای ضرایب ناوبری مطابق با پروفیل‌های شکل‌های ۵ الف و ۶ الف بین این دو خط (به ازای ضرایب ناوبری ۳ و ۴) تغییر می‌کند. شایان ذکر است که نمودارهای مذکور به ازای ضریب ناوبری ثابت با رابطه حل تحلیلی، $\Delta V = N'r_0|\omega_0|/(N' - 1)$ مطابقت دارد.

رفتار انتگرال قدر مطلق دستور شتاب بی‌بعد نسبت به فاصله نسبی بی‌بعد در حالت هدف با مانور ثابت در شکل (۳۵) ترسیم شده‌است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود مقدار انتگرال قدر مطلق دستور شتاب به ازای ضریب ناوبری ثابت به نظر مقدار ثابتی است و با افزایش ضریب ناوبری، مقدار آن کاهش می‌یابد (در این حالت حل تحلیلی دقیق وجود ندارد). همچنین با انتخاب ضریب ناوبری متغیر با ξ بسته به پروفیل انتخابی مقدار انتگرال قدر مطلق دستور شتاب با افزایش فاصله بی‌بعد $(v_{c0}^2/r_0|a_T|)$ صعودی یا نزولی می‌شود. قله مشاهده شده در نمودار به ازای پروفیل ضریب ناوبری شکل (۵ الف)، احتمالاً ناشی از خطای عددی است.



شکل ۳۶- نمودار زمان اصابت بی‌بعد به نرخ چرخش دید اولیه بی‌بعد ناشی از انحراف سمت اولیه در سیستم ایده‌آل ($\xi^* = 15^\circ$)

مراجع

- [8] Boord, W.J., Hoffman, J.B, *Air and Missile Defense Systems Engineering*, CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton, 2016.
- [9] Biggers, E.L., "Air-to-Air Missile Guidance and Control," Unpublished Technical Memorandum, 1996.
- [10] Jalali-Naini, S. H., A New Guidance Law for Homing Missiles, MS Thesis, Faculty of Engineering, University of Tehran, Aug. 1996 (in Persian)
- [11] Yanushevsky, R.T., and Boord, W.J., "New Approach to Guidance Law Design," *ALAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 28, No. 1, 2005, pp. 162-166.
- [12] Yanushevsky, R., *Modern Missile Guidance*, CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton, 2008.
- [13] Yanushevsky, R.T., "Concerning Lyapunov-based guidance," *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 29, No. 2, 2006, pp. 509-511.
- [14] Jalali-Naini, S.H., "Miss Distance Analysis of Proportional Navigation Using Normalized Equations with Radome Effect, Saturation, and Body Rate Feedback," *Journal of Aeronautical Engineering*, Vol. 14, No 1, 2012, pp. 1-11 (in Persian).
- [15] Yuan, P.-J., Chern, J.-S., "Solutions of True Proportional Navigation for Maneuvering and Nonmaneuvering Targets," *ALAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 15, No. 1, 1992, pp. 268-271.
- [1] Zarchan, P., *Tactical and Strategic Missile Guidance*, Sixth ed., Progress in Astronautics and Aeronautics, Vol. 239, AIAA, 2012.
- [2] Ben-Asher, J.Z., Yaesh, I., *Advances in Missile Guidance Theory*, Progress in Astronautics and Aeronautics, 180, American Institute of Astronautics Aeronautics, Inc., Washington, DC, 1998.
- [3] Shneydor, N.A., *Missile Guidance and Pursuit: Kinematics, Dynamics, and Control*, 1st Edition, Horwood Series in Engineering Science, 1998.
- [4] Fleeman, E.L., *Missile Design and System Engineering*, second edition, AIAA Education Series, 2012.
- [5] Balakrishnan, S.N., Tsourdos, A. and White, B.A., *Advances in Missile Guidance, Control, and Estimation*, Taylor & Francis Group, 2013.
- [6] Jalali-Naini, S.H., "Generalized Solution for Proportional Navigation Guidance," *10th Annual (International) Mechanic Engineering Conference*, ISME2002, Tehran, May 2002.
- [7] Maklouf, O., Saleh Basha, Eljibrani, A., "Performance Evaluation of Proportional Navigation Homing Guidance Law," *5th International Conference on Control Engineering & Information Technology*, Vol. 33, 2017, pp. 14-18.