معرفت فلسفی سال نهم، شماره اول، پاییز ۱۳۹۰، ۳۹ـ۷۱

آزمون اعتبار برای منطق ربط KR

اسداللّه فلاحی*

چکیده

در منطق سینوی، «شرطی متّصل لزومی» مهم‌ترین قسم از اقسام شرطی به شمار می‌آید. نزدیک‌ترین ادات شرطی به شرطی لزومی، در منطق جدید، «استلزام ربطی» است. بخشی از منطق جدید که به «استلزام ربطی» می‌پردازد، «منطق ربط» نام دارد. میان منطق‌دانان ربط، نزاعی هست که آیا پذیرش یک تناقض، مستلزم هر گزارهٔ دلخواهی است؟ به دیگر سخن، آیا یک گزارهٔ متناقض با هر گزارهٔ دلخواهی مرتبط است؟ پاسخ مثبت به این سؤال، به منطقی به نام KR و پاسخ منفی به آن به منطقی به نام R می‌انجامد. منطق KR، نسبت به منطق R، سمانتیک ساده‌تر و شهودی‌تری دارد. با این حال، تعیین اعتبار و عدم اعتبار استدلال‌ها در نظام‌ها و سمانتیک‌های گوناگون منطق ربط (حتی در KR) کاری دشوار است که در ادبیات منطق ربط، کمتر به آن پرداخته شده است. در این مقاله، با الهام از یک روش ارزش‌دهی به نام «آزمون اعتبار» که هیوز و کرسول در منطق موجّهات معرفی کرده‌اند، یک «آزمون اعتبار» برای منطق KR طرّاحی کرده و کاربرد آن را در چند مثال نشان داده‌ایم.

کلیدواژه‌ها: شرطی لزومی، منطق ربط، R، KR، آزمون اعتبار.

* استادیار مؤسسهٔ پژوهشی حکمت و فلسفهٔ ایران. **دریافت:** ۹۰/۱/۲۹ ـ **پذیرش:** ۹۰/۷/۱۴.

falahiy@yahoo.com

مقدّمه

در منطق‌های قدیم و جدید، ادات شرطی به گونه‌های مختلف تقسیم شده‌اند. برای نمونه، در منطق سینوی، شرطی متّصل به دو نوع «لزومی» و «اتّفاقی» تقسیم می‌گردد؛ متّصل اتّفاقی نیز خود به به دو قسم «اتّفاقی خاص» و «اتّفاقی عام» تفسیر می‌شود.[۱] این در حالی است که در منطق جدید، اقسام زیر برای ادات شرطی شناسایی شده است: «استلزام مادّی»، «استلزام اکید»، «استلزام ربطی»، «استلزام استنتاجی»، «استلزام شهودی»، «شرطی خلاف واقع»، و... .[۲]

تطبیق اقسام شرطی در منطق سینوی با اقسام شرطی در منطق جدید کار چندان ساده‌ای نیست و به آگاهی دقیق از ویژگی‌های هریک از اقسام شرطی در هریک از این دو منطق نیازمند است.[۳] از میان شرطی‌های منطق سینوی، بی‌گمان، «متّصل لزومی» اهمیت بیشتری دارد. متّصل لزومی، غیر از استلزام مادّی، با شرطی‌های دیگر در منطق جدید قابل تطبیق است؛ از این‌رو، با شناخت دقیق هریک از این شرطی‌ها، امکان مقایسه و تطبیق آنها با متّصل لزومی فراهم می‌آید. در این مقاله، از میان شرطی‌های گوناگونی که در منطق جدید معرفی شده است، تنها به «استلزام ربطی» و دو تفسیر مهم از آن می‌پردازیم.

مجموعهٔ نظام‌های منطقی که تفسیرهای گوناگون از «استلزام ربطی» را صورت‌بندی می‌کنند، با عنوان کلّی «منطق ربط»[۴] یا «منطق ربطی»[۵] شناخته می‌شوند.[۶] این نظام‌ها بسیارند و مهم‌ترین آنها منطق ربط R است که سایر نظام‌ها در ارتباط با آن و در سایهٔ آن شناخته می‌شوند. نام این نظام‌ها در منطق ربط فرعی بودن آنها را نسبت به منطق R به خوبی نشان می‌دهد: CR، KR، RM، RM_3، PWR، R^+، $R^\square$، R_{fde}، $R\rightarrow$ و... .[۷]

در این مقاله، تنها به نظام KR می‌پردازیم و با بیان تفاوت اصلی آن با منطق ربط R، روشی برای تعیین اعتبار و عدم اعتبار استدلال‌ها در KR طرّاحی می‌کنیم.

آزمون اعتبار

روش‌های تعیین اعتبار و عدم اعتبار را «آزمون اعتبار» یا «اعتبارسنجی»[(۸)] می‌نامند. برای منطق گزاره‌ها و منطق محمول‌ها، روش‌های گوناگونی به منظور اعتبارسنجی طرّاحی شده است که شناخته‌شده‌ترین آنها عبارت‌اند از:[(۹)] استفاده از جدول‌های ارزش،[(۱۰)] روش‌های نموداری،[(۱۱)] صورت نرمال،[(۱۲)] و ارزش‌دهی.[(۱۳)]

از میان روش‌های گوناگون برای «آزمون اعتبار»، روش ارزش‌دهی سریع‌ترین و ساده‌ترین روش است. *لطف‌اللّه نبوی* صورت بسیار ساده‌ای از این روش را برای منطق جمله‌های کلاسیک در کتاب ***مبانی منطق جدید*** آورده است.[(۱۴)] *جی. ای.* هیوز و *ماکس کرسوِل* روش ارزش‌دهی را با کام‌یابی به منطق موجّهات گسترش داده و آن را معرفی کرده‌اند.[(۱۵)] نگارنده نیز در پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد خود، معرفی این روش را به فارسی برگردانده است.[(۱۶)]

از آنجا که تا زمان نگارش این مقاله نتوانستیم روش ارزش‌دهی را در ادبیات منطق ربط بیابیم، تلاش کرده‌ایم تا روش هیوز و *کرسول* را به منطق ربط گسترش دهیم. این کار اصولاً باید در مورد منطق ربط R انجام گیرد؛ امّا گسترش روش ارزش‌دهی به این منطق پیچیدگی‌هایی دارد که پرداختن به آن را دشوار می‌سازد. این در حالی است که تعمیم روش هیوز و *کرسول* به منطق ربط KR (که در مقدّمه معرفی کردیم) بسیار آسان‌تر است. به همین سبب، در این مقاله، فقط از طرّاحی روش ارزش‌دهی برای منطق KR سخن می‌گوییم و گسترش آن به منطق R را در مقالهٔ دیگری بررسی می‌کنیم. در ادامه، نخست، معرفی کوتاهی از نظام اصل موضوعی برای منطق ربط KR و سمانتیک آن به دست می‌دهیم؛ سپس، به آزمون اعتباری که برای آن طرّاحی کرده‌ایم، می‌پردازیم.

منطق ربط KR

منطق KR از افزودن اصل موضوع «از تناقض»، $(A\wedge{\sim}A)\rightarrow B$ یا شکل قاعده‌ای آن به

منطق R به دست می‌آید:

$$\frac{A \wedge \sim A}{B} \quad \text{(EFQ) از تناقض}$$

دربارهٔ اصل‌موضوع و قاعدهٔ «از تناقض» سخن خواهیم گفت؛ امّا پیش از آن، باید منطق R را معرفی کنیم. نبوی در کتاب ***مبانی منطق فلسفی*** نظام اصل موضوعی و دستگاه استنتاج طبیعی برای منطق R را به تفصیل معرفی کرده است.(۱۷) ما در اینجا، برای اختصار، تنها نظام اصل موضوعی منطق R را معرفی می‌کنیم:

قواعد منطق R

MP	$\vdash A \to B, \vdash A \Rightarrow \vdash B$	قاعدهٔ وضع مقدّم
Ad	$\vdash A, \vdash B \Rightarrow \vdash A \wedge B$	قاعدهٔ پیوند

اصول موضوعهٔ منطق R:

I	$A \to A$	همانی
C*	$A \to ((A \to B) \to B)$	اظهار
B′	$(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$	تعدّی (پسوند)
W	$(A \to (A \to B)) \to (A \to B)$	انقباض
∧E	$(A \wedge B) \to A$ $(A \wedge B) \to B$	حذف عاطف
∧I	$[(A \to B) \wedge (A \to C)] \to [A \to (B \wedge C)]$	معرفی عاطف
∨E	$[(A \to C) \wedge (B \to C)] \to [(A \vee B) \to C]$	حذف فاصل
∨I	$A \to (A \vee B)$ $B \to (A \vee B)$	معرفی فاصل
Dis	$(A \wedge (B \vee C)) \to ((A \wedge B) \vee C)$	پخش ضعیف
DNE	$\sim\sim A \to A$	حذف نقض مضاعف
DNI	$A \to \sim\sim A$	معرفی نقض مضاعف
CON	$(A \to B) \to (\sim B \to \sim A)$	عکس نقیض

چنان‌که گفتیم، افزودن اصل موضوع «از تناقض» (EFQ) به منطق R ما را به منطق KR می‌رساند:

EFQ	$(A\wedge{\sim}A)\rightarrow B$ از تناقض

اصل یا قاعدهٔ «از تناقض» می‌گوید: از هر تناقض، می‌توان گزارهٔ دلخواه را نتیجه گرفت. این ادّعا با شهودهای ما سازگار نیست؛ از این‌رو، منطق‌دانانِ ربط از پذیرش آن سر باز زده‌اند. امّا انکار این اصل سبب شده است که در منطق ربط R، یک اصل و قاعدهٔ بسیار شهودی به نام «قیاس انفصالی» از دست برود:

اصل «قیاس انفصالی» $[(A\vee B)\wedge{\sim}A]\rightarrow B$

قاعدهٔ «قیاس انفصالی»

$$\frac{A\vee B \qquad {\sim}A}{B}$$

همین مسئله موجب شده است که مخالفان منطق ربط انتقادات بسیاری را به منطق R وارد سازند.(۱۸) منطق‌دانان ربط پاسخ‌های بسیاری به این ایرادها داده‌اند.(۱۹) یکی از این پاسخ‌ها می‌تواند این باشد که اصل یا قاعدهٔ «قیاس انفصالی» را به منطق R بیفزاییم. افزودن این قاعده سبب می‌شود اصل یا قاعدهٔ «از تناقض» اثبات شود و منطق KR به دست آید. بنابراین، منطق KR می‌تواند پاسخی باشد به انتقادات سهمگینی که به نامعتبر بودن قیاس انفصالی در منطق R وارد شده است. دربارهٔ نقاط قوّت و ضعف این پاسخ می‌توان سخن گفت؛ امّا در این مقاله، ترجیح می‌دهیم تنها به یکی از نقاط قوّت آن اشاره کنیم: منطق KR، سمانتیک ساده‌تر و شهودی‌تری نسبت به منطق R دارد و آزمون اعتبار ما برای آن آسان‌تر از آزمون اعتبار منطق R است.

سمانتیک منطق KR

سمانتیک منطق ربط صورت‌بندی‌های گوناگون دارد که در اینجا، صورت‌بندی گریم پریست و ریچارد *سیلوان* را ارائه می‌کنیم که ساده‌ترین صورت‌بندی از سمانتیک منطق ربط است. در این صورت‌بندی، که در سال ۱۹۹۲ به دست داده شده،(۲۰) «ساختار»

سه‌تایی مرتّب $<W, g, R>$، و «مدل» چهارتایی مرتّب $<W, g, R, V>$ است:

$F = <W,g,R>$

$M = <W,g,R,V>$

F ساختاری است که از W، g و R ساخته می‌شود: W مجموعهٔ جهان‌های ممکن (نرمال و غیرنرمال) است، g «تنها جهان نرمال» می‌باشد و R یک رابطهٔ دسترس‌پذیریِ «سه‌موضعی» روی جهان‌هاست. M نیز مدل یا الگوست که از افزودن تابع ارزش‌دهی V به ساختار، به دست می‌آید.

در این سمانتیک، شرایط صدق ادات‌های «ناقض»، «عاطف»، و «فاصل»، و سورهای کلّی و جزئی به صورت کلاسیک باقی می‌ماند؛ امّا شرط صدق «استلزام ربطی» به صورت زیر تغییر می‌کند:

شرایط صدق شرطی در سمانتیک منطق KR

در جهان نرمال g :	$\forall x (\vDash_x A \supset \vDash_x B)$ اتا	$\vDash_g (A \rightarrow B)$
در جهان غیرنرمال w :	$\forall x \forall y [Rwxy \supset (\vDash_x A \supset \vDash_y B)]$ اتا	$\vDash_W (A \rightarrow B)$

چنان‌که دیده می‌شود، شرط صدق «استلزام ربطی» در جهان نرمال g، دقیقاً شبیه شرط صدق «استلزام اکید» در جهان‌های سمانتیک منطق S5 است.(۲۱)

سمانتیک KR، شرایط ساختار بسیار شبیه شرایط ساختار در سمانتیک S5 است:

شرایط ساختار در سمانتیک منطق KR

شرط g:	این‌همانی $Rgab = (a=b)$	
شرط R:	انعکاس $Raaa$	بازتابی
	تقارن $Rabc=Rbac=Racb$	جابه‌جایی
	تعدّی $R(ab)cd=Ra(bc)d$	شرکت‌پذیری

برای درک مفهوم شرط «تعدّی»، به دو تعریف نخست از سه تعریف زیر نیاز داریم:

$R(ab)cd =_{\text{تع}} \exists x(Rabx \,\&\, Rxcd)$

$Ra(bc)d =_{\text{تع}} \exists x(Rbcx \,\&\, Raxd)$

$Rab(cd) =_{\text{تع}} \exists x(Rcdx \,\&\, Rabx)$

تعریف سوم در ادبیات منطق ربط نیامده است و عملاً هم موردنیاز نخواهد بود؛ امّا سنجش آن با دو تعریف نخست، برای درک آن دو تعریف، سودمند است. با دو تعریف نخست، شرط تعدّی به صورت زیر درمی‌آید:

$\exists x(Rabx \,\&\, Rxcd) = \exists x(Rbcx \,\&\, Raxd)$ تعدّی

چنان‌که دیده می‌شود، شرط «تعدّی» برای رابطهٔ سه‌موضعی نسبت به رابطهٔ دوموضعی بسیار پیچیده‌تر است. نام‌های «جابه‌جایی» و «شرکت‌پذیری» برای دو شرط «تقارن» و «تعدّی» کاملاً مفهوم هستند؛ امّا نام «تعدّی» مبهم به نظر می‌رسد.[۲۲]

مفهوم رابطهٔ دسترسی

اکنون که با شرایط رابطهٔ دسترسی و شرط صدق ادات شرطی آشنا شدیم، می‌توانیم مفهوم فلسفی رابطهٔ دسترسی و عبارت‌هایی مانند Rabc و R(ab)cd را بهتر شرح دهیم.

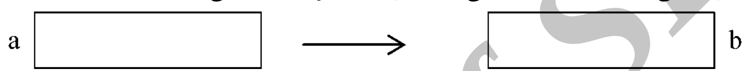
مفهوم رابطهٔ دسترسی سه‌موضعی

عبارت Rabc می‌گوید: جهان a، از طریق جهان b، به جهان c دسترسی دارد؛ ساده‌تر اینکه: a، از طریق b، c را می‌بیند.[۲۳] این عبارت، از دیدگاه فلسفی، به این معناست که جهان a به کمک جهان b، به صورت ربطی، جهان c را نتیجه می‌دهد.

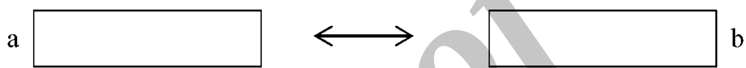
امّا نتیجه‌گیری میان جمله‌ها و گزاره‌ها معنا می‌دهد و نه میان جهان‌ها؛ اینکه جهانی، جهان دیگری را نتیجه بدهد به چه معناست؟ پاسخ این است که مقصود از استنتاج میان جهان‌ها، استنتاج میان گزاره‌های شرطی و مقدّم آنها در آن جهان‌هاست. با این بیان، معنای اینکه جهان a به کمک b جهان c را نتیجه می‌دهد دقیقاً این است که اگر گزارهٔ

شرطی P→Q در جهان a و گزارهٔ P در جهان b صادق باشد، Q در جهان c صادق است. (این مفهوم را می‌توان به صورت ساده‌تر چنین کوتاه کرد: وضع مقدّم جهان a بر جهان b، جهان c را نتیجه می‌دهد.)

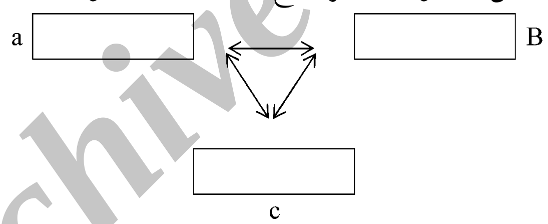
یکی از دشواری‌ها در فهم رابطهٔ دسترس‌پذیری R، نشان دادن تصویری و نموداری آن است. چگونه می‌توان رابطهٔ Rabc را نشان داد؟ در سمانتیک منطق‌های وجهی، رابطهٔ دوموضعی Rab را به سادگی، با نمودار زیر، نشان می‌دهند:



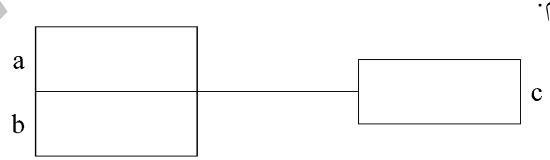
در سمانتیک منطق S5، این رابطه را به صورت دوسویه نیز می‌توان نشان داد:



رابطهٔ سه‌موضعی Rabc در منطق KR، به دلیل اینکه سه‌موضعی و متقارن است، باید به صورت مثلثی و با فلش دوسویه در هر ضلع آن نشان داده شود:



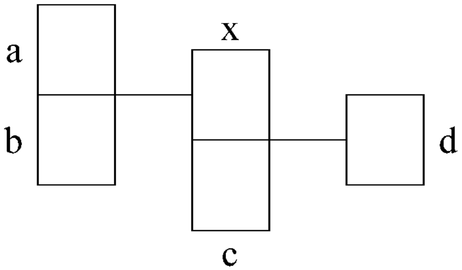
امّا از آنجا که ترسیم نمودار بالا کم‌وبیش دشوار است، نمودار نامتقارن ولی ساده‌تر زیر را برمی‌گزینیم:



مفهوم رابطهٔ دسترسی چهارموضعی

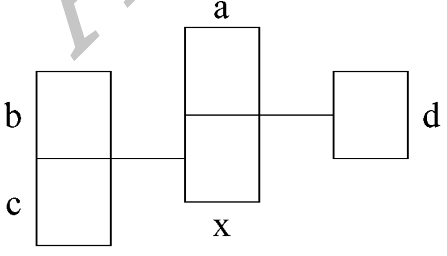
مفهوم عبارت R(ab)cd اندکی پیچیده‌تر است. این عبارت می‌گوید: جهان a، از طریق جهان b، به جهان xای دسترسی دارد که آن جهان x، از طریق جهان c، به جهان d

دسترسی دارد. نمودار این رابطهٔ چهارموضعی به صورت نزولی زیر است:



این نمودار را چنین می‌خوانیم: a، از طریق b، xای را نتیجه می‌دهد که آن x، از طریق c، d را نتیجه می‌دهد. معنای این نمودار آن است که اگر گزاره‌های شرطی P→Q و P، به ترتیب، در دو جهان a و b صادق باشند، Q در جهان x صادق است. حال اگر خود Q یک گزارهٔ شرطی مانند R→S باشد، این گزارهٔ شرطی در جهان x صادق است؛ حال اگر R در c صادق باشد، S در d صادق خواهد بود. بنابراین، عبارت R(ab)cd بدین معناست که اگر گزاره‌های شرطی P→(R→S)، P و R، به ترتیب، در سه جهان a، b و c صادق باشند، S در جهان d صادق است. (این مفهوم را می‌توان به صورت ساده‌تر چنین کوتاه کرد: وضع مقدّم جهان a بر دو جهان b و c، جهان d را نتیجه می‌دهد.)

مفهوم عبارت Ra(bc)d از این هم پیچیده‌تر است. این عبارت، بنا به تعریف، می‌گوید: جهان b، از طریق جهان c، به جهان xای دسترسی دارد که جهان a از طریق آن جهان x، به جهان d دسترسی دارد. نمودار این رابطهٔ چهارموضعی به صورت صعودی زیر است:



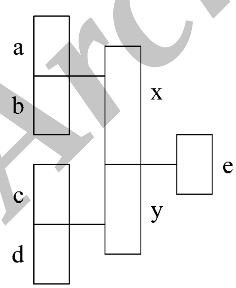
این نمودار را چنین می‌خوانیم: b، از طریق c، xای را نتیجه می‌دهد که a از طریق آن x، d را نتیجه می‌دهد. معنای این نمودار آن است که اگر گزاره‌های شرطی P→Q و P، به ترتیب، در دو جهان b و c صادق باشند، Q در جهان x صادق است. حال اگر یک گزارهٔ شرطی مانند Q→R در جهان a صادق باشد، با وضع مقدّم بر Q در x، نتیجه می‌دهد که R در d صادق است. بنابراین، عبارت Ra(bc)d بدین معناست که اگر دو گزارهٔ شرطی P→Q، Q→R و گزارهٔ P، به ترتیب، در سه جهان b، a و c صادق باشند، R در جهان d صادق است. (این مفهوم را می‌توان به صورت ساده‌تر چنین کوتاه کرد: قیاس شرطی جهان b بر جهان a، جهانی را نتیجه می‌دهد که وضع مقدّم آن بر جهان c، جهان d را نتیجه می‌دهد.)

اکنون که مفهوم Rهای چهارموضعی را شرح دادیم و نمودارهای آنها را ترسیم کردیم، می‌توانیم Rهای با موضع‌های بیشتر را به دلخواه تعریف کنیم. برای نمونه، دو تعریف از انواع R پنج‌موضعی را در زیر می‌آوریم:

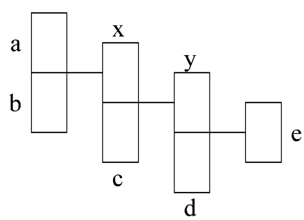
$$R(ab)(cd)e =_{\text{تع}} \exists x[Rabx \;\&\; Rx(cd)e] =_{\text{تع}} \exists x\exists y(Rabx \;\&\; Rcdy \;\&\; Rxye)$$

$$R((ab)c)de =_{\text{تع}} \exists x[Rabx \;\&\; R(xc)de] =_{\text{تع}} \exists x\exists y(Rabx \;\&\; Ryde \;\&\; Rxcy)$$

نمودار اینها به صورت زیر است:



R(ab)(cd)e



R((ab)c)de

در این دو نمودار، جهان‌های x و y را «جهان‌های وسط»، و جهان‌های a، b، c، d و e را «جهان‌های طرف» می‌نامیم. با ادامهٔ این روش، می‌توان رابطهٔ دسترسی n رموضعی را

تعریف کرد:

$$Ra_1a_2...a_n =_{\text{تع}} \exists x[Ra_1a_2x \,\&\, Ra_2a_3...\, a_n] =_{\text{تع}} R(...\,((a_1a_2)a_3)...\,)a_n\, a_{n-1}$$

تعریف اعتبار

«صدق» و «اعتبار» دو مفهوم سمانتیکی‌اند که گاه به جای یکدیگر به کار می‌روند؛ امّا بسیاری از منطق‌دانان این دو مفهوم را از هم جدا می‌کنند و صدق را تنها در جهان‌های ممکن، و اعتبار را تنها در مدل‌ها و ساختارها به کار می‌برند. صدق در جهان‌های ممکن برای جمله‌نشانه‌ها و جمله‌های مرکّب متفاوت است: صدق جمله‌نشانه‌ها از طریق تابع ارزش‌دهی تعیین می‌شود و در یک معنا قراردادی است؛ امّا صدق فرمول‌های مرکّب بر اساس شرایط صدق ادات‌های تعیین می‌شود و قراردادی نیست. اعتبار نیز در مدل و ساختار متفاوت است: اعتبار در مدل چندین معنا دارد؛ امّا اعتبار در ساختار تنها دارای یک معناست. اعتبار در ساختار همواره به معنای اعتبار در همهٔ مدل‌های آن است؛ امّا اعتبار در مدل به چه معناست؟

«اعتبار در مدل» در سمانتیک KR برای فرمول‌های شرطی و غیرشرطی، و قاعده‌های یک، دو، سه و چندمقدّمه‌ای متفاوت است:

«اعتبار در مدل» در سمانتیک منطق KR

اعتبار فرمول غیرشرطی:	$\vDash A$	$=_{\text{تع}} \vDash_g A$
اعتبار فرمول شرطی:	$\vDash (A \rightarrow B)$	$=_{\text{تع}} \forall x\, (\vDash_x A \supset \vDash_x B)$
اعتبار قاعدهٔ تک‌مقدمه‌ای:	$A \vDash B$	$=_{\text{تع}} \forall x\, (\vDash_x A \supset \vDash_x B)$
اعتبار قاعدهٔ دومقدّمه‌ای:	$A , B \vDash C$	$=_{\text{تع}} \forall x \forall y \forall z[(Rxyz \& \vDash_x A \& \vDash_y B) \supset \vDash_z C]$
اعتبار قاعدهٔ سه‌مقدّمه‌ای:	$A , B , C \vDash D$	$=_{\text{تع}} \forall x \forall y \forall z \forall w[(R(xy)zw \& \vDash_x A \& \vDash_y B \& \vDash_z C) \supset \vDash_w D]$

اعتبار قاعده‌های چهارمقدّمه‌ای و بالاتر را نیز می‌توان نوشت؛ امّا به کمک تعریف R n موضعی ارائهٔ تعریفی کلّی از آن امکان‌پذیر است. البته از آنجا که ما در عمل با قاعده‌های

چهارمقدّمه‌ای و بالاتر سروکار نخواهیم داشت، از تعریف آن خودداری می‌کنیم. نکته‌ای که توجه به آن ضرورت دارد این است که ادات‌های شرطی در تعریف اعتبار همگی «استلزام مادی» هستند و قوانین منطق کلاسیک برای آنها جاری است. توجه به این نکته در کار با این سمانتیک راهگشا خواهد بود.

آزمون اعتبار

در این بخش، برای اعتبارسنجی فرمول‌ها و صورت‌برهان‌ها در سمانتیک منطق KR، روشی را ارائه می‌کنیم که برگرفته از هیوز و *کرسول* است.[۲۴] بنیان این روش بر برهان خلف استوار است؛ به این معنا که ما همواره عدم اعتبار فرمول یا صورت‌برهان مورد نظر را فرض می‌گیریم و تلاش می‌کنیم به تناقض برسیم. اگر در رسیدن به تناقض کامیاب بودیم، نادرستی فرض را نشان داده و اعتبار را نتیجه می‌گیریم؛ امّا اگر نتوانیم به تناقض برسیم، تلاش می‌کنیم یک مدل نقض برای فرمول یا صورت‌برهان مورد آزمون بیابیم. اگر چنین مدلی را یافتیم، عدم اعتبار را نتیجه می‌گیریم؛ امّا اگر چنین مدلی یافت نشد، دیگر نمی‌توان اعتبار یا عدم اعتبار را نتیجه گرفت.

آزمون اعتبار در منطق کلاسیک جمله‌ها

آزمون اعتبار در منطق کلاسیک به این صورت است که برای برهان خلف، به ادات اصلی مقدّمه‌ها ارزش ´1` و به ادات اصلی نتیجه‌ها ارزش ´0` می‌دهیم و به کمک شرایط صدق، تلاش می‌کنیم تا ارزش ادات فرعی و جمله‌نشانه‌ها را به دست آوریم. (برای آزمون فرمول‌ها، به ادات اصلی آنها ارزش ´0` می‌دهیم.) در اینجا، مثالی ذکر می‌کنیم که نبوی در کتاب خود شرح داده است؛[۲۵] برآنیم تا اعتبار صورت‌برهان زیر را در منطق کلاسیک بسنجیم:

$$\boxed{P \supset Q \;\;,\;\; R \supset S \;\;,\;\; P \vee S \;\vdash\; Q \vee R}$$

در آغاز، مقدّمه‌ها را صادق فرض می‌کنیم و نتیجه را کاذب می‌گیریم:

$$\begin{array}{ccccccc} P\supset Q & , & R\supset S & , & P\vee S & \vdash & Q\vee R \\ 1 & & 1 & & 1 & & 0 \end{array}$$

بنا به جدول ارزش فاصل، کذب نتیجه مستلزم کذب طرفین آن (Q و R) است. بنابراین، ارزش ´0` را برای همهٔ موارد Q و R وارد می‌کنیم:

$$\begin{array}{ccccccc} P\supset Q & , & R\supset S & , & P\vee S & \vdash & Q\vee R \\ 1\ 0 & & 0\ 1 & & 1 & & 0\ 0\ 0 \end{array}$$

امّا صدق ترکیب شرطی (مادّی) در مقدّمهٔ نخست و کذب تالی آن، بنا بـه جـدول ارزش استلزام مادّی، مستلزم کذب مقدّم آن (P) است. بنابراین، ارزش ´0` را برای همهٔ موارد P وارد می‌کنیم:

$$\begin{array}{ccccccc} P\supset Q & , & R\supset S & , & P\vee S & \vdash & Q\vee R \\ 0\ 1\ 0 & & 0\ 1 & & 0\ 1 & & 0\ 0\ 0 \end{array}$$

امّا صدق ترکیب فصلی در مقدّمهٔ سوم و کذب مقدّم آن، بنا به جدول ارزش فاصل، مستلزم صدق تالی آن (S) است. بنابراین، ارزش ´1` را برای همهٔ موارد S وارد می‌کنیم:

$$\begin{array}{ccccccc} P\supset Q & , & R\supset S & , & P\vee S & \vdash & Q\vee R \\ 0\ 1\ 0 & & 0\ 1\ 1 & & 0\ 1\ 1 & & 0\ 0\ 0 \end{array}$$

می‌بینیم که با این ارزش‌گذاری‌ها، همهٔ ادات‌ها و جمله‌نشانه‌ها ارزش‌دهی شـدند؛ بدون اینکه تناقضی پدید آید. این امر نشان می‌دهد که فرض نخستین، یعنی فرض صدق مقدّمه‌ها و کذب نتیجه، مستلزم هیچ تناقضی نیست و ممکن است مـقدّمه‌ها صـادق و نتیجه کاذب باشند؛ بنابراین، صورت‌برهان بالا نامعتبر است. در صورت عـدم اعـتبار، می‌توان مثال نقض یا مدل نقض ارائه کرد. برای این کار، ارزش جمله‌نشانه‌ها را از آزمون به پایان رسیده گردهم آورده و جداگانه می‌نویسیم:

P	Q	R	S
0	0	0	1

ایـن مـدل نـقض، سـطری از جـدول ارزش را نشـان مـی‌دهد کـه در آن، مـقدّمه‌های صورت‌برهان بالا صادق‌اند و نتیجهٔ آن کاذب است.

اکنون، برای صورت‌برهان معتبر در منطق کلاسیک، مثالی می‌آوریم و آن را می‌آزماییم:

$$\boxed{P\supset Q \quad , \quad R\supset S \quad , \quad P\vee R \ \vdash \ Q\vee S}$$

در آغاز، مقدّمه‌ها را صادق فرض می‌کنیم و نتیجه را کاذب می‌گیریم:

$$\begin{array}{lllll} P \supset Q, & R \supset S, & P \vee R & \vdash & Q \vee S \\ \;\;1 & \;\;1 & \;\;1 & & \;\;0 \end{array}$$

بنابه جدول ارزش فاصل، کذب نتیجه مستلزم کذب طرفین آن (Q و S) است. بنابراین، ارزش `0´ را برای این دو متغیّر وارد می‌کنیم:

$$\begin{array}{lllll} P \supset Q, & R \supset S, & P \vee R & \vdash & Q \vee S \\ \;\;1\;0 & \;\;1\;0 & \;\;1 & & 0\,0\,0 \end{array}$$

امّا صدق ترکیب شرطی (مادّی) در دو مقدّمهٔ نخست و کذب تالی آنها، بنا به جدول ارزش استلزام مادّی، مستلزم کذب مقدّم آنها (P و R) است. بنابراین، ارزش `0´ را برای P و R وارد می‌کنیم:

$$\begin{array}{lllll} P \supset Q, & R \supset S, & P \vee R & \vdash & Q \vee S \\ 0\,1\,0 & 0\,1\,0 & \underline{0\,1\,0} & & 0\,0\,0 \end{array}$$

امّا صدق ترکیب فصلی در مقدّمهٔ سوم و کذب مقدّم و تالی آن، بنا به جدول ارزش فاصل، ممکن نیست و این تناقض است. این تناقض را به این صورت می‌توان آشکارتر ساخت که بگوییم کذب مقدّم و تالی ترکیب فصلی در مقدّمهٔ سوم مستلزم کذب آن ترکیب فصلی است:

$$\begin{array}{lllll} P \supset Q, & R \supset S, & P \vee R & \vdash & Q \vee S \\ 0\,1\,0 & 0\,1\,0 & 0\,\underline{01}\,0 & & 0\,0\,0 \end{array}$$

می‌بینیم که با این ارزش‌گذاری‌ها، به تناقض می‌رسیم. این امر نشان می‌دهد که فرض نخستین، یعنی فرض صدق مقدّمه‌ها و کذب نتیجه، باطل است؛ ممکن نیست مقدّمه‌ها صادق باشند و نتیجه کاذب باشد. بنابراین، صورت‌برهان بالا معتبر است.[۲۶]

قاعده‌های آزمون برای KR

قاعده‌های آزمون اعتبار را برای منطق کلاسیک، به کوتاهی، بیان کردیم. همهٔ این قاعده‌ها برای منطق KR نیز برقرارند، مگر در مورد قاعده‌های دو یا چندمقدّمه‌ای. از آنجا که شرطی ربطی و قاعده‌های دو یا چندمقدّمه‌ای در منطق KR شرایط صدق و

تعریف اعتبار دیگری دارند، آزمون اعتبار برای این دو منطق از ایـن دو جـهت مـتمایز می‌شود. شرایط صدق ادات شرطی ربطی و تعریف اعتبار برای قاعده‌های دومقدّمه‌ای را قبلاً آوردیم؛ بنابراین، تنها لازم است قاعده‌های آزمون بـرای شـرطی ربـطی را بـیان کنیم. امّا اینک، برای یادآوری، همه را تکرار می‌کنیم:

شرایط صدق شرطی در سمانتیک منطق KR

در جهان نرمال g :	$\vDash_g (A \to B)$	اتا	$\forall x (\vDash_x A \supset \vDash_x B)$
در جهان غیرنرمال w :	$\vDash_W (A \to B)$	اتا	$\forall x \forall y [Rwxy \supset (\vDash_x A \supset \vDash_y B)]$

بنا به شرایط صدق ادات شرطی، می‌توان شرایط کذب آن را نیز به دست آورد:

«شرایط کذب» شرطی

کذب در جهان نرمال g :	$\nvDash_g (A \to B)$	اتا	$\exists x (\vDash_x A \,\&\, \nvDash_x B)$
کذب در جهان غیرنرمال w :	$\nvDash_W (A \to B)$	اتا	$\exists x \exists y (Rwxy \,\&\, \vDash_x A \,\&\, \nvDash_y B)$

«اعتبار در مدل» در سمانتیک منطق KR

اعتبار فرمول غیرشرطی:	$\vDash A$	=تع	$\vDash_g A$
اعتبار فرمول شرطی:	$\vDash (A \to B)$	=تع	$\forall x (\vDash_x A \supset \vDash_x B)$
اعتبار قاعدهٔ تک‌مقدمه‌ای:	$A \vDash B$	=تع	$\forall x (\vDash_x A \supset \vDash_x B)$
اعتبار قاعدهٔ دومقدمه‌ای:	$A , B \vDash C$	=تع	$\forall x \forall y \forall z [(Rxyz \& \vDash_x A \& \vDash_y B) \supset \vDash_z C]$

چنان‌که دیده می‌شود، اعتبار برای فرمول‌های شـرطی و قـاعده‌های تک‌مـقدّمه‌ای یکسان است.

از «شرایط صدق و کذب» شرطی ربطی، می‌توان قاعده‌هایی برای «آزمون اعتبار» شرطی به دست آورد.

«آزمون اعتبار» برای ادات شرطی ربطی

$A \rightarrow B$ در جهان نرمال g :
۱. اگر کاذب باشد: أ. یک و فقط یک جهان جدید می‌سازیم و ب. در آن جهان، به A ارزش '1' و به B ارزش '0' می‌دهیم؛ ۲. اما اگر صادق باشد: أ. جهان جدید نمی‌سازیم؛ بلکه ب. در هر جهانی که A ارزش '1' دارد به B نیز ارزش '1' می‌دهیم؛ و ج. در هر جهانی که B ارزش '0' دارد به A نیز ارزش '0' می‌دهیم.
$A \rightarrow B$ در جهان غیرنرمال w :
۳. اگر کاذب باشد: أ. دو و فقط دو جهان جدید مانند x و y می‌سازیم؛ ب. رابطهٔ Rwxy را برقرار می‌سازیم؛ ج. به A در x ارزش '1' و به B در y ارزش '0' می‌دهیم؛ ۴. اما اگر صادق باشد: أ. جهان جدید نمی‌سازیم؛ بلکه در هر دو جهانی مانند x و y که رابطهٔ Rwxy برقرار است: ب. اگر A در x ارزش '1' داشته باشد به B در y نیز ارزش '1' می‌دهیم؛ ج. اگر B در y ارزش '0' داشته باشد به A در x نیز ارزش '0' می‌دهیم.

آزمون اعتبار برای چند فرمول و قاعده

اکنون بایسته است آزمونی را که طرّاحی کرده‌ایم، در چند مثال، به کار بگیریم تا توانمندی‌های آن آشکار گردد:

۱) فرمول M3

در آغاز، فرمول M_3 را از قضایای کلاسیک در نظر بگیرید:

M_3 $P \vee (P \to Q)$

از آنجا که ادات اصلی این فرمول شرطی ربطی نیست، برای سنجش اعتبار آن، باید آن را در جهان نرمال g کاذب بگیریم:

g | $P \vee (P \to Q)$
O

بنا به جدول ارزش فاصل، داریم:

g | $P \vee (P \to Q)$
O O O

بنا به قاعدهٔ آزمون، کذب شرطی در جهان نرمال g یک جهان جدید تولید می‌کند که مقدّم شرطی در آن صادق، و تالی شرطی در آن کاذب است:

x | P Q
1 O

آشکار است که دو جهان g و x نمی‌توانند یکی باشند؛ زیرا P در x صادق، و در g کاذب است. از اینجا معلوم می‌شود که اگر تنها یک جهان داشتیم، کذب فرمول M_3 ما را به تناقض می‌رسانْد؛ امّا چون دو جهان داریم، به تناقض نمی‌رسیم. نرسیدن به تناقض نشان می‌دهد که فرمول M_3 در منطق KR نامعتبر است؛ امّا برای عدم اعتبار باید یک مدل نقض ارائه کنیم. در هر مدل، همهٔ جمله‌نشانه‌ها باید در همهٔ جهان‌ها ارزش گرفته باشند؛ امّا ارزش Q در جهان g هنوز به دست نیامده است. از آنجا که ارزش Q در جهان g تأثیری بر ارزش فرمول در g و در x نمی‌گذارد، می‌توانیم به Q ارزش صدق یا ارزش کذب بدهیم. بر این اساس، دو مدل نقض ارائه می‌کنیم:

$M = \langle W, g, R, V \rangle$
$W = \{g,x\}$
$R = \{ggg, xxx, gxx, xgx, xxg\}$

V	P	Q
g	0	0
x	1	0

$M = \langle W, g, R, V \rangle$
$W = \{g,x\}$
$R = \{ggg, xxx, gxx, xgx, xxg\}$

V	P	Q
g	0	1
x	1	0

از آنجا که ارزش سایر جمله‌نشانه‌ها (مانند S، R و...) در این دو مدلْ تأثیری ندارد، می‌توانیم همهٔ آنها را در هر دو جهان صادق بگیریم یا همه را در هر دو جهان کاذب بگیریم یا برخی را صادق و برخی را کاذب بگیریم. این امر نشان می‌دهد که برای فرمول M_3، نه دو مدل نقض، بلکه بی‌نهایت مدل نقض داریم! در حقیقت، دو مدل بالا، مدل‌های ناقصی هستند که به بی‌نهایت روش می‌توانند تکمیل شوند. ما از نوشتن مدل‌های نقض به صورت کامل همواره پرهیز می‌کنیم.

۲) پارادوکس انفصال

اکنون به پارادوکس انفصال از قضایای کلاسیک می‌پردازیم:

پارادوکس انفصال $(P\rightarrow Q)\vee(Q\rightarrow P)$

برای سنجش اعتبار این فرمول، باید آن را در جهان نرمال g کاذب بگیریم (زیرا ادات اصلی آن شرطی ربطی نیست):

$$g\ \boxed{\begin{array}{c}(P\rightarrow Q)\vee(P\rightarrow Q)\\ O\end{array}}$$

بنا به جدول ارزش فاصل، داریم:

$$g\ \boxed{\begin{array}{ccc}(P\rightarrow Q) & \vee & (Q\rightarrow P)\\ O & O & O\end{array}}$$

بنا به قاعدهٔ آزمون، کذب شرطی در جهان نرمال g جهان تازه‌ای تولید می‌کند که

مقدّم شرطی در آن صادق، و تالی شرطی در آن کاذب است. امّا در اینجا، دو شرطی کاذب داریم؛ بنابراین، دو جهان تازه ساخته می‌شود:

x
P	Q
0	1

y
P	Q
1	0

آشکار است که دو جهان x و y نمی‌توانند یکی باشند؛ زیرا ارزش P و Q در آنها متعارض است. از اینجا معلوم می‌شود که اگر تنها یک جهان داشتیم، کذب پارادوکس انفصال ما را به تناقض می‌رسانْد؛ امّا چون دست‌کم دو جهان متمایز داریم، به تناقض نمی‌رسیم. برای عدم اعتبار پارادوکس انفصال باید یک مدل نقض ارائه کنیم. این مدل می‌تواند سه جهان g، x و y را داشته باشد که ارزش P و Q در جهان g دلخواه است. از این‌رو، چهار مدل نقض برای پارادوکس انفصال به دست می‌آید.

از آنجا که رابطهٔ دسترس‌پذیری در مدل سه‌جهانی عضوهای بسیاری دارد و نوشتن آن طولانی می‌شود، مناسب است که ببینیم آیا می‌توان مدل بالا را دوجهانی ساخت؟ از آنجا که ارزش‌های موجود در جهان g تعارضی با ارزش‌های موجود در جهان‌های x و y ندارد، به نظر می‌رسد بتوان یکی از آن دو را با g این‌همان گرفت. ما جهان g را با y این‌همان می‌گیریم و به مدل زیر می‌رسیم:

$M = \langle W, g, R, V \rangle$
$W = \{g,x\}$
$R = \{ggg, xxx, gxx, xgx, xxg\}$

V	P	Q
g	0	1
x	1	0

۳) قاعدهٔ استلزام

اکنون به قاعدهٔ استلزام از قاعده‌های یک‌مقدّمه‌ای می‌پردازیم:

$\therefore P \rightarrow Q$

________ استلزام

$\therefore {\sim}P \vee Q$

ابتدا، جهت بالا به پایین را بررسی می‌کنیم. برای سنجش اعتبار قاعده‌های

یک‌مقدّمه‌ای، باید مقدّمه را در یک جهان صادق، و نتیجه را در همان جهان کاذب بگیریم:

x	$P \to Q$	$\sim P \vee Q$
	1	0

بنا به جدول ارزش فاصل و ناقض، داریم:

x	$P \to Q$	$\sim P \vee Q$
	1 1 0	01 0 0

امّا بنا به شرط انعکاس Rxxx را داریم؛ و چون شرطی $P \to Q$ در x (موضع نخست R) و مقدّم آن در x (موضع دوم R) صادق هستند، بنا به «شرط صدق» شرطی در جهان‌های غیرنرمال، Q باید در x (موضع سوم R) صادق باشد:

x	$P \to Q$	$\sim P \vee Q$
	1 1 **10**	01 0 0

این تناقض نشان می‌دهد که جهت بالا به پایین قاعدهٔ استلزام معتبر است (زیرا فرض عدم اعتبار آن ما را به تناقض رساند.) توجه شود که ما می‌توانستیم رابطهٔ Rxxx را به صورت زیر نیز نشان دهیم:

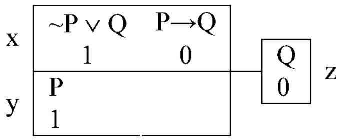
x	$P \to Q$	$\sim P \vee Q$		
	1	01 0 0	P Q	x
x	PQ		1 **10**	
	10			

در این نمودار، چون شرطی و مقدّم آن در دو جهان سمت چپ صادق هستند، ناگزیر تالی در جهان سوم (در اینجا، یعنی جهان سمت راست که همان x است) صادق خواهد بود و این مسئله ما را به تناقض می‌رساند. با اینکه ترسیم چنین نموداری چندان دشوار نیست، ترجیح می‌دهیم از نمودار ساده‌تر پیشین استفاده کنیم.

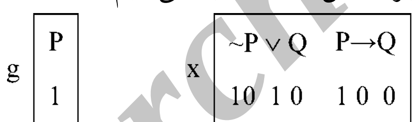
امّا برای سنجش اعتبار جهت پایین به بالای قاعدهٔ «استلزام»، باید مقدّمه را در یک جهان صادق، و نتیجه را در همان جهان کاذب بگیریم:

x	$\sim P \vee Q$	$P \to Q$
	1	0

بنا به قاعدهٔ «آزمون اعتبار»، کذب شرطی در یک جهان غیرنرمالْ دو جهان جدید مانند y و z پدید می‌آورد که اوّلاً، Rxyz برقرار است؛ ثانیاً، مقدّم آن شرطی در y صادق، و تالی آن در z کاذب است:



آشکار است که سه جهان x، y، و z نمی‌توانند یکی باشند؛ زیرا در این صورت، ترکیب فصلی دارای دو ارزش متناقض می‌شود. از اینجا معلوم می‌شود که اگر تنها یک جهان داشتیم، نمی‌توانستیم عدم اعتبار قاعدهٔ استلزام (از جهت پایین به بالا) را نشان دهیم. با متمایزگرفتن سه جهان بالا، می‌توانیم یک مدل نقض چهارجهانی (سه جهان موجود در نمودار به همراه جهان نرمال g) برای این قاعده ارائه کنیم؛ امّا بهتر است مدل نقض کوچک‌تری بسازیم. برای ارائهٔ مدل نقض دوجهانی، باید یکی از x، y، و z را g بگیریم. هرکدام از این سه را که g بگیریم، دو جهان دیگر یکی می‌شوند. ما در اینجا، y را g می‌گیریم و z را در x ادغام، و ارزش فرمول‌ها را بر اساس آن محاسبه می‌کنیم:



چون ارزش Q در g نامتعیّن است و هر ارزشی برای آن در نظر بگیریم ایرادی پیش نمی‌آید، ارزش Q را در آن صادق می‌گیریم و به مدل نقض زیر می‌رسیم:

$M = \langle W, g, R, V\rangle$
$W = \{g,x\}$
$R = \{ggg, xxx, gxx, xgx, xxg\}$

V	P	Q
g	1	1
x	0	0

۴) عکس نقیض

اکنون به قاعدهٔ «عکس نقیض» از قاعده‌های یک‌مقدّمه‌ای می‌پردازیم:

$\therefore P \rightarrow Q$

عکس نقیض ________

$\therefore \sim Q \rightarrow \sim P$

برای سنجش اعتبار این قاعده، باید مقدّمه را در یک جهان صـادق، و نـتیجه را در همان جهان کاذب بگیریم:

x	$P \rightarrow Q$	$\sim Q \rightarrow \sim P$
	1	0

بنا به قاعدهٔ «آزمون اعتبار»، کذب شرطی در یک جهان غیرنرمالْ دو جهان جـدید مانند y و z پدید می‌آورد که اوّلاً، Rxyz برقرار است؛ ثانیاً، مقدّم آن شرطی در y صادق، و تالی آن در z کاذب است:

x	$P \rightarrow Q$ 1	$\sim Q \rightarrow \sim P$ 0
y	$\sim Q$ 1	

z	$\sim P$ 0

اکنون، بنا به جدول ارزش ناقض، ارزش Q در y و ارزش P در z به دست می‌آید:

x	$P \rightarrow Q$ 1	$\sim Q \rightarrow \sim P$ 0
y	$\sim Q$ 1 0	

z	$\sim P$ 01

می‌بینیم که یک شرطی $(P \rightarrow Q)$ در x صادق، و مـقدّم آن (P) در z صـادق است و داریم: Rxyz. بنابراین، تالی (Q) در y صادق می‌شود و به تناقض می‌رسیم:

x	$P \rightarrow Q$ 1	$\sim Q \rightarrow \sim P$ 0
y	$\sim Q$ 1 **<u>10</u>**	

z	$\sim P$ 01

این موضوع نشان می‌دهد که قاعدهٔ عکس نقیض در KR معتبر است. توجه شود که در اینجا، از شرط تقارن استفاده کرده، و از Rxyz به Rxzy رسیده‌ایم؛ همچنین، با وضع مقدّم شرطی در x با مقدّم آن در z به صدق تالی در y رسیده‌ایم. ما همواره از شرط تقارن

به صورت غیرصریح استفاده می‌کنیم؛ از این‌رو، در ادامه، دیگر به موارد کاربرد آن اشاره نخواهیم کرد.

۵) پخش شرطی

یکی دیگر از قاعده‌های یک‌مقدّمه‌ای از دستهٔ سوم، قاعدهٔ پخش شرطی است که یکی از صورت‌های چهارگانهٔ آن را در اینجا مورد آزمون قرار می‌دهیم:

$\therefore P \rightarrow (Q \vee R)$ پخش شرطی

$\therefore (P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R)$ (روی فاصل در تالی)

ابتدا به جهتِ «بالا به پایینِ» این قاعده می‌پردازیم. برای سنجش اعتبار این جهت، باید مقدّمه را در یک جهان صادق، و نتیجه را در همان جهان کاذب بگیریم:

x	$P \rightarrow (Q \vee R)$	$(P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R)$
	1	0

بنا به جدول ارزش فاصل، داریم:

x	$P \rightarrow (Q \vee R)$	$(P \rightarrow Q)$	$\vee$	$(P \rightarrow R)$
	1	0	0	0

بنا به قاعدهٔ «آزمون اعتبار»، کذب شرطی $P \rightarrow Q$ در یک جهان غیرنرمالْ دو جهان جدید مانند y و z پدید می‌آورد که اوّلاً، Rxyz برقرار است؛ ثانیاً، مقدّم آن شرطی در y صادق، و تالی آن در z کاذب است:

x	$P \rightarrow (Q \vee R)$	$(P \rightarrow Q)$	$\vee$	$(P \rightarrow R)$	Q	z
	1	0	0	0	0	
y		P				
		1				

امّا $P \rightarrow R$ نیز در x کاذب است و این، دو جهان جدید مانند v و w را پدید می‌آورد:

x	$P \rightarrow (Q \vee R)$	$(P \rightarrow Q)$	$\vee$	$(P \rightarrow R)$	R	w
	1	0	0	0	0	
v		P				
		1				

از صدق شرطی P→(Q∨R) در x، و صدق P در y و v، نتیجه می‌شود که Q∨R در z و w صادق است:

$$\boxed{\begin{array}{ccc} Q & \vee & R \\ 0 & 1 & \end{array}}\ z \qquad \boxed{\begin{array}{ccc} Q & \vee & R \\ & 1 & 0 \end{array}}\ w$$

از ارزش‌های به دست آمده در z و w، می‌توان نتیجه گرفت که R و Q، به ترتیب، در z و w صادق هستند:

$$\boxed{\begin{array}{ccc} Q & \vee & R \\ 0 & 1 & 1 \end{array}}\ z \qquad \boxed{\begin{array}{ccc} Q & \vee & R \\ 1 & 1 & 0 \end{array}}\ w$$

ارزش‌های متعارض در z و w نشان می‌دهد که این دو جهان نمی‌توانند یکی باشند.

می‌بینیم که به تناقض نرسیده‌ایم؛ امّا همهٔ ادات و جمله‌نشانه‌ها ارزش نگرفته‌اند. اگر همهٔ جمله‌نشانه‌های بدون ارزش را صادق در نظر بگیریم، تنها ادات بدون ارزش، یعنی ادات فاصل در مقدّمه نیز ارزش می‌گیرد و همچنان به تناقض نمی‌رسیم. آیا می‌توانیم بگوییم اکنون استدلال نامعتبر است و یک مدل شش‌جهانی (پنج جهان نمودار به همراه جهان g) برای آن ارائه کرده‌ایم؟ خیر، زیرا ارائهٔ مدلْ مشروط به این است که رابطهٔ دسترس‌پذیری را میان همهٔ این شش‌جهان، بر اساس شرایط ساختار، محاسبه کرده باشیم؛ امّا میان شش جهان 3^6 رابطهٔ دسترسی قابل تصوّر است، و ما محاسبه نکرده‌ایم که کدام‌یک از اینها در مدل شش‌جهانی ما برقرار است و کدام‌یک برقرار نیست. بنابراین، گریزی نیست از اینکه مدل بالا را به مدلی کوچک‌تر و عملاً قابل محاسبه فروبکاهیم.

اگر x، v، و w را با g این‌همان بگیریم، y و z نیز این‌همان می‌شوند و شش جهان گفته‌شده به دو جهان g و x فرومی‌کاهند:

M = <W, g, R, V>
W = {g,x}
R = {ggg, xxx, gxx, xgx, xxg}

V	P	Q	R
g	1	1	0
x	1	0	1

اکنون، جهت پایین به بالای قاعدهٔ «پخش شرطی» را که در منطق KR معتبر است بررسی می‌کنیم. در یک جهان، مقدّمه را صادق، و نتیجه را کاذب می‌گیریم:

x	$(P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R)$ 1	$P \rightarrow (Q \vee R)$ 0

بنا به قاعدهٔ آزمون و شرط کذب شرطی و فاصل، داریم:

x	$(P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R)$ 1	$P \rightarrow (Q \vee R)$ 0	$Q \vee R$ 0 0 0	z
y	P 1			

در اینجا به تناقضی نرسیده‌ایم. آیا می‌توانیم بگوییم استدلال نامعتبر است؟ خیر؛ زیرا تنها وقتی می‌توانیم بگوییم استدلال نامعتبر است که همهٔ ادات‌ها و جمله‌نشانه‌ها در نمودار ارزش معیّنی گرفته باشند. ادات‌های شرطی مقدّمه (یعنی $P \rightarrow Q$ و $P \rightarrow R$) در جهان x هیچ ارزشی نگرفته‌اند؛ بنابراین، نمی‌توانیم بگوییم استدلال نامعتبر است. امّا ارزش این دو ادات شرطی در x چیست؟ صدق ترکیب فصلی میان این دو ادات، نشان می‌دهد که دست‌کم، یکی از آن دو صادق است؛ امّا کدام؟

ما در اینجا، دو راه داریم: راه اوّل آن است که این نمودار را یک بار با فرض صدق $P \rightarrow Q$، و یک بار با فرض صدق $P \rightarrow R$ پیش ببریم. اگر هر دو فرضْ ما را بـه تـناقض برساند، استدلال معتبر است؛ امّا اگر دست‌کم یکی از دو فرضْ ما را به تناقض نرساند، و همهٔ ادات‌ها و جمله‌نشانه‌ها ارزش‌دهی شوند، آنگاه استدلال نـامعتبر است. ایـن روش بسیار طولانی است و تا حد ممکن باید از آن پرهیز کرد (در برخی مثال‌ها، از این راه گریزی نیست.) راه دوم این است که از قاعدهٔ رفع تالی استفاده شود. ما این راه را پی می‌گیریم:

از آنجا که رابطهٔ Rxyz را داریم، اگر $P \rightarrow Q$ در x، و P در y صادق باشد، باید Q در z صادق باشد؛ امّا Q در z صادق نیست. پس، $P \rightarrow Q$ در x صادق نیست. با همین استدلال، می‌توان نشان داد که $P \rightarrow R$ نیز در x صادق‌نیست. در این‌صورت، در x، به تناقض می‌رسیم:

x	$(P \to Q) \vee (P \to R)$	$P \to (Q \vee R)$
	0 **10** 0	0
y	P	
	1	

$Q \vee R$	z
0 0 0	

بنابراین، قاعدهٔ «پخش شرطی» در جهت «پایین به بالا» معتبر است.

۶) قاعدهٔ جایگشت

اکنون، به مثال‌های دشوارتر می‌پردازیم. قاعدهٔ جایگشت از قاعده‌های یک‌مقدّمه‌ای است:

$\therefore P \to (Q \to R)$

جایگشت __________

$\therefore Q \to (P \to R)$

این قاعده سورهای تودرتو دارد که اثبات اعتبار آنها، دست‌کم به دو رابطهٔ دسترسی نیازمند است. برای اثبات قاعدهٔ جایگشت، مقدّمه‌ونتیجهٔ‌آن‌رادریک‌جهان کاذب می‌گیریم:

x	$P \to (Q \to R)$	$Q \to (P \to R)$
	1	0

چون $Q \to (P \to R)$ در x کاذب است، پس دو جهان y و z وجود دارند که Rxyz برقرار است؛ Q در y صادق، و $P \to R$ در z کاذب است:

x	$P \to (Q \to R$	$Q \to (P \to R)$
	1	0
y		Q
		1

$P \to R$	z
0	

امّا به دلیل آنکه $P \to R$ در z کاذب است، دو جهان t و u وجود دارند که Rztu برقرار است و P در t صادق، و R در u کاذب است:

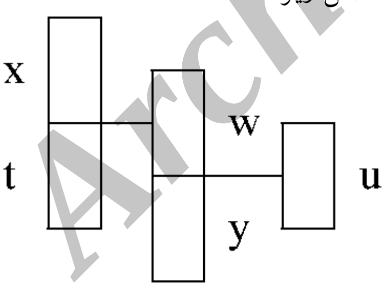
x	$P \to (Q \to R)$	$Q \to (P \to R)$
	1	0
y		Q
		1

$P \to R$	z
0	
P	t
1	

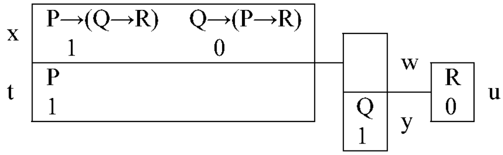
R	u
0	

دوباره با وضعیتی روبه‌رو شده‌ایم که نه به تناقض رسیده‌ایم و نه همهٔ ادات‌ها در همهٔ جهان‌ها ارزش‌دهی شده‌اند. البته $P\rightarrow(Q\rightarrow R)$ در x صادق می‌باشد و مقدّم آن P در t صادق است؛ امّا میان x و t، رابطهٔ دسترس‌پذیری مشاهده نمی‌شود تا از آن نتیجه‌ای را به دست آوریم. شاید به نظر برسد که می‌توان با ارزش‌دهی به جمله‌نشانه‌ها در جهان‌هایی که ارزش ندارند کار را به پایان رساند و با نیافتن تناقض، حکم به عدم اعتبار قاعدهٔ جایگشت صادر کرد؛ امّا چنین حکمی بسیار شتاب‌زده است، چون تعداد جهان‌ها بسیار است و ما شرایط ساختار را که شامل انعکاس، تقارن، و تعدّی است، در میان این جهان‌ها، بررسی نکرده‌ایم. این احتمال هست که با بررسی این شرایط، تناقضی یافت شود. اتّفاقاً، چنین است؛ بررسی شرایط ساختار ما را به تناقض می‌رساند. ما در ادامه، مراحل کار را نشان می‌دهیم:

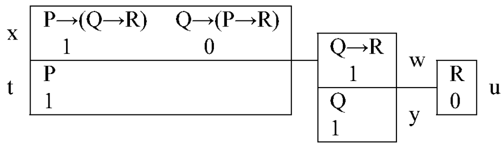
در نمودار بالا، دو رابطهٔ دسترسی (Rxyz و Rztu) مشاهده می‌شوند. این دو رابطه را به صورت ساده‌تر: R(xy)tu می‌توان نوشت. بنا به شرایط جابه‌جایی و شرکت‌پذیری (یا تقارن و تعدّی)، می‌توان به رابطهٔ R(xt)yu رسید.[۲۷] امّا این رابطه، بنا به تعریف، برابر است با $\exists w(Rxtw \;\&\; Rwyu)$ نمودار این تعریف به شکل زیر است:



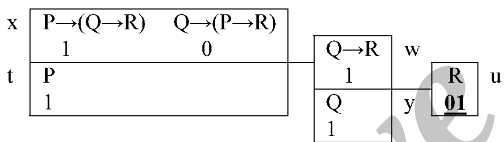
اکنون فرمول‌های ارزش‌دهی شده درنمودارپیشین رابه جهان‌های نمودارجدیدمنتقل می‌کنیم:



از آنجا که رابطهٔ Rxtw را داریم، و P→(Q→R) در x صادق می‌باشد و P در t صادق است، بنابراین Q→R در w صادق است:



از آنجا که رابطهٔ Rwyu را داریم، و Q→R در w صادق می‌باشد و Q در y صادق است، بنابراین R در u صادق خواهد شد:



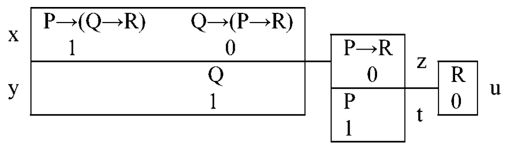
همان‌طور که می‌بینیم، در جهان u، به تناقض می‌رسیم؛ بنابراین، جایگشت در منطق KR معتبر است. پیچیدگی این مثال در آن است که در نگاه نخست، تناقضی در نمودارهای نخستین دیده نمی‌شود و باید از رابطهٔ R(xy)tu، به رابطهٔ R(xt)yu رسید.

در اینجا، دو نکتهٔ بسیار باریک هست که اگر به آنها توجه شود، این رابطه‌ها آسان‌تر یافته و اثبات می‌شوند:

۱) انتقال میان این دو رابطه، جزء شرایط ساختار نیست؛ باید امکان این انتقال اثبات شود (اثبات اینکه چنین انتقالی امکان‌پذیر است، با نام‌هایی چون «انتقال» و «تعدّی»، دشوار می‌نماید؛ امّا با نام‌هایی چون «جابه‌جایی» و «شرکت‌پذیری»، بسیار آسان‌تر است.)

۲) از کجا باید می‌دانستیم که لازم است، از رابطهٔ نخست، به رابطهٔ دوم رسید؟ میان جهان‌های x، y، t، و u، می‌توان رابطه‌های بسیاری تصوّر کرد؛ از کجا باید می‌دانستیم که

این رابطهٔ خاص (و نه دیگر رابطه‌ها) برایمان سودمند است؟ در پاسخ به این پرسش بسیار مهم، باید به نمودار پیش از تغییر نگریست:



رابطهٔ R(xt)yu از این نمودار خوانده می‌شود و شرطی تودرتوی $P\to(Q\to R)$ در x صادق است؛ دو مقدّم آن (P و Q)، به ترتیب، در y و t صادق هستند و تالی آن (R) در u کاذب است. پیشتر، وقتی مفهوم رابطهٔ چهارموضعی را بیان می‌کردیم، گفتیم که رابطهٔ چهارموضعی مانند R(xt)yu به این معناست که اگر یک شرطی تودرتو در جهان اوّل آن صادق باشد و دو مقدّم آن در دو جهان بعدی صادق باشند، آنگاه تالی تالی آن شرطی در جهان چهارم صادق خواهد بود. در نمودار بالا، می‌بینیم که شرطی تودرتوی $P\to(Q\to R)$ در x صادق است و دو مقدّم آن (P و Q)، به ترتیب، در y و t (و نه در t و y) صادق هستند. اکنون، اگر رابطهٔ چهارموضعی R(xt)yu را داشته باشیم، باید نتیجه بگیریم که R در u صادق است. این امر نشان می‌دهد که اگر بتوانیم رابطهٔ R(xt)yu را اثبات کنیم، می‌توانیم به تناقض برسیم. با این شگرد، در بسیاری از موارد، می‌توان حدس زد که چه رابطه‌هایی می‌تواند ما را به تناقض برساند.

نتیجه‌گیری

آزمونی که در این مقاله برای اعتبارسنجی در منطق KR ارائه کردیم، با اصلاحاتی، برگرفته از آزمون اعتباری است که هیوز و *کرسوِل* در سال ۱۹۹۶ به دست داده بودند. مقایسه‌ای میان این دو «آزمون اعتبار» نشان می‌دهد که به رغم همهٔ تلاش‌هایی که با هدف ساده‌سازی آزمون اعتبار برای منطق KR انجام داده‌ایم، این آزمون بسیار دشوارتر

از آزمون مشابه برای منطق موجّهات است. از آنجا که سمانتیک منطق ربط R (منطقی که استنتاج گزاره‌های دلخواه از تناقض را ممنوع می‌داند) پیچیده‌تر از سمانتیک منطق KR است، می‌توان نشان داد که منطق ربط R آزمون اعتبار دشوارتری دارد.

از اینجا، می‌توان پی برد که اگر شرطی لزومی از منطق سینوی را بخواهیم با «استلزام ربطی» به جای «استلزام اکید» تحلیل کنیم، با نظام‌های بسیار پیچیده و دشواری روبه‌رو می‌شویم که تعیین اعتبار و عدم اعتبار استدلال‌ها در این نظام‌ها به مراتب پیچیده‌تر و دشوارتر است. از آنجا که «استلزام اکید» گزینهٔ مناسبی برای تحلیل «شرطی لزومی» نیست و پارادوکس‌های بسیاری در تحلیل «شرطی لزومی» می‌آفریند، نتیجه می‌گیریم که یک نظام کامل و بی‌عیب و نقص برای «شرطی لزومی» نظامی بسیار پیچیده و دشوار است و این هزینه‌ای است که باید برای استفاده از توانمندی‌های فوق‌العادهٔ شرطی لزومی پرداخت.

پی‌نوشت‌ها

۱ـ دربارهٔ شرطی‌های لزومی و اتّفاقی و تحلیل آنها در منطق جدید، می‌توان به مقالات زیر مراجعه کرد: اسداللّه فلاحی، «شرطی لزومی در منطق جدید»، ***تأمّلات فلسفی***، ش ۱، ص ۷ـ۴۶؛ همو، «شرطی اتّفاقی در منطق جدید»، ***پژوهش‌های فلسفی***، ش ۲۱۴، ص ۱۰۵ـ۱۳۳.

۲ـ بحث فلسفی از انواع شرطی در منطق جدید در بیشتر آثار فلسفه منطق آمده است؛ برای نمونه، ر.ک: سوزان هاک، ***فلسفهٔ منطق***، ترجمهٔ سید محمّدعلی حجتی.

۳ـ برای نمونه، بحث‌های دشوار ارائه‌شده، ر.ک: اسداللّه فلاحی، «سلب لزوم و لزوم سلب در شرطی سالبه کلیه»، ***معرفت‌فلسفی***، ش۲۵، ص۲۳۳ـ۲۶۰؛ همو، «لزومی حقیقی و لزومی لفظی»، ***فلسفه‌وکلام‌اسلامی***، ص۱۰۷ـ۱۲۹.

4. Relevance Logic.

5. Relevant Logic

۶ـ برای آشنایی با منطق ربط، ر.ک: استیون رید، ***فلسفهٔ منطق ربط***، ترجمهٔ اسداللّه فلاحی؛ لطف‌اللّه نبوی، ***مبانی منطق فلسفی***.

۷ـ این منطق‌ها را می‌توان در آثار زیر یافت: استیون رید، همان؛ اسداللّه فلاحی، ***نقض بولی و نقض دمورگان در منطق ربط و منطق کلاسیک***؛

A. R., Anderson & N, Belnap, ***Entailment: the Logic of Relevance and Necessity***, v. 1; A. R., Anderson & N, Belnap & M. Dunn, ***Entailment: the Logic of Relevance and Necessity***. v. II.

8. Testing for validity.

۹ـ روش جدول ارزش ویژهٔ منطق گزاره‌هاست و برای دیگر منطق‌ها کاربرد ندارد. روش نموداری برای منطق گزاره‌ها در بسیاری از کتاب‌های آموزشی بیان شده است؛ برای کاربرد این روش در منطق محمول‌ها، می‌توان به (ریچارد جفری، ***قلمرو و مرزهای منطق صوری***، ترجمهٔ پرویز پیر، ص ۱۳۱ـ۱۳۶) مراجعه کرد. گریَم پریست روش نموداری را به منطق‌های ربط توسعه داده است:

Graham Priest, ***A Introduction to Non-Classocal Logic***, p. 184-192.

تعریف صورت نرمال در برخی آثار ترجمه‌شده به فارسی آمده است (هربرت. بی. اندرتون، ***آشنایی با منطق ریاضی***، ترجمهٔ غلامرضا برادران خسروشاهی و محمد رجبی طرخورانی، ص۵۷ و ۱۶۶ـ۱۶۸)؛ امّا آزمون اعتبار به روش صورت‌برهان را نگارنده تنها در اثری از هیوز و ماکس کرسوِل، آن هم برای منطق موجّهات دیده است:

Hughes & Cresswell, ***A New Introduction to Modal Logic***, p. 103-105.

10. Truth-Table Method.

11. Tableaux Method.

12. Normal Form Method.

13. Valuation Method.

۱۴ـ لطف‌اللّه نبوی، ***مبانی منطق جدید***، ص ۶۱ـ۶۲.

15. Hughes and Cresswell, Op.Cit, p. 72-92.

۱۶ـ اسداللّه فلاحی، ***منطق موجّه***، ص ۸۶ـ۱۰۸.

۱۷ـ لطف‌اللّه نبوی، ***مبانی منطق فلسفی***، ص ۱۴۸ و ۱۵۲ـ۱۵۳.

۱۸ـ استیون رید، همان، ص ۳۵۵ـ۳۵۷ و ۳۸۰ـ۳۸۱.
۱۹ـ همان، ص ۱۱۱ـ۱۱۵، ۳۵۸ـ۳۷۶ و ۳۸۱ـ۴۰۰.
20. Graham Priest & Richard Sylvan, "Simplified Semantics for Basic Relevant Logics", ***Jornal of Philosophical Logic***, v. 21, p. 217-232.
۲۱ـ شرط صدق «استلزام ربطی» در جهان‌های غیرنرمال نیز، نسبتاً شبیه شرط صدق «استلزام اکید» در جهان‌های منطق S4 است؛ تنها تفاوت آن است که به جای اینکه مقدّم و تالی شرطی در یک جهان مشترک (در دسترس w) بررسی شوند، در دو جهان جداگانهٔ x و y (در دسترس w) بررسی می‌شوند.
۲۲ـ برای درک دلیل نام‌گذاری شرط «تعدّی» می‌گوییم: اگر جهت چپ به راست تعریف «تعدّی» را بنویسیم و با قواعد منطق محمول‌ها هم‌ارزهای آن را به دست آوریم، بهتر می‌توانیم مفهوم «تعدّی» را در آن درک کنیم:

تعدّی	$R(ab)cd = Ra(bc)d$
تعدّی	$\exists x(Rabx \ \&\ Rxcd) \supset \exists x(Rbcx \ \&\ Raxd)$
تغییر متغیّر	$\exists y(Raby \ \&\ Rycd) \supset \exists x(Rbcw \ \&\ Rawd)$
خروج سور (از مقدّم شرطی)	$\forall y[(Raby \ \&\ Rycd) \supset \exists w(Rbcw \ \&\ Rawd]$
معرفی سور	$\forall x\forall y\forall z[(Raxy \ \&\ Ryzd) \supset \exists w(Rxzw \ \&\ Rawd]$

می‌بینیم که با کمی آسان‌گیری، می‌توان گفت که فرمول اخیر می‌گوید: اگر جهان x به جهان y، و جهان y به جهان z دسترسی داشته باشد، جهان x به جهان z دسترسی دارد و این همان تعدّی است که در سمانتیک منطق‌های وجهی با آن آشنا شدیم. (همچنین، با آسان‌گیری بیشتر، می‌توان گفت که فرمول اخیر می‌گوید: اگر a به y، و y به d دسترسی داشته باشد، a به d دسترسی دارد.)
۲۳ـ رابطهٔ «دسترسی» و «دیدن» میان جهان‌ها استعاره‌ای زیباست: انسان از طریق تلویزیون و امواج رادیویی، به دیگر نقاط جهان دسترسی می‌یابد و از طریق دوربین و تلسکوپ، دوردست‌ها و ستاره‌ها را می‌بیند. امّا این استعارهٔ زیبا، چنان‌که کریپکی هشدار داده است، می‌تواند بسیار گمراه‌کننده باشد. رابطهٔ «دسترسی» و «دیدن»، دقیقاً به همان معنایی که در متن می‌گوییم، باید فهمیده شود.
24. Hughes and Cresswell, Op.Cit, p. 72-93.
۲۵ـ لطف‌اللّه نبوی، ***مبانی منطق جدید***، ص ۶۱.
۲۶ـ برای شرح بیشتر این روش، وگشودن گره‌هایی که گاه در یافتن ارزش برخی فرمول‌ها (مانند ترکیب شرطی صادق، ترکیب فصلی صادق، ترکیب عطفی کاذب و نیز دوشرطی) به وجود می‌آید، ر.ک: اسداللّه فلاحی، ***منطق موجّه***، ص ۹۴ـ۹۹؛ Hughes & Cresswell, Op.Cit, p. 80-85.
۲۷ـ برای رسیدن به رابطهٔ R(xt)yu، می‌توان برهان زیر را آورد:

مقدّمه	1 $Rxyz \ \&\ Rztu$
م∃ (۱)	2 $\exists z(Rxyz \ \&\ Rztu)$
تعریف R (۲)	3 $R(xy)tu$
تعدّی (۳)	4 $Rx(yt)u$
تقارن (۴)	5 $Rx(ty)u$
تعدّی (۵)	6 $R(xt)yu$

منابع

- اندرتون، هربرت بی.، ***آشنایی با منطق ریاضی***، ترجمهٔ غلامرضا برادران خسروشاهی و محمّد رجبی طرخورانی، تهران، نشر دانشگاهی، ۱۳۶۶.
- جفری، ریچارد، ***قلمرو و مرزهای منطق صوری***، ترجمهٔ پرویز پیر، تهران، علمی و فرهنگی، ۱۳۶۶.
- رید، استیون، ***فلسفهٔ منطق ربط***، ترجمهٔ اسداللّه فلاحی، قم، دانشگاه مفید، ۱۳۸۵.
- فلاحی، اسداللّه، «شرطی لزومی در منطق جدید»، ***تأملات فلسفی***، ش ۱، بهار ۱۳۸۸، ص ۷ـ۴۶.
- ـــــ ، «سلب لزوم و لزوم سلب در شرطی سالبه کلیه»، ***معرفت فلسفی***، ش ۲۵، پاییز ۱۳۸۸، ص ۲۳۳ـ۲۶۰.
- ـــــ ، «شرطی اتفاقی در منطق جدید»، ***پژوهش‌های فلسفی***، ش ۲۱۴، پاییز و زمستان ۱۳۸۸، ص ۱۰۵ـ۱۳۳.
- ـــــ ، «لزومی حقیقی و لزومی لفظی»، ***فلسفه وکلام اسلامی*** (مقالات و بررسیها)، دفتر ۱، پاییز و زمستان ۱۳۸۸، ص ۱۰۷ـ۱۲۹.
- ـــــ ، ***نقض بولی و نقض دمورگان در منطق ربط و منطق کلاسیک***، رسالهٔ دکتری، تهران، دانشگاه تربیت مدرس، ۱۳۸۶.
- ـــــ ، ***منطق موجّه***، پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد، قم، دانشگاه مفید، ۱۳۸۰.
- نبوی، لطف‌اللّه، ***مبانی منطق جدید***، تهران، سمت، ۱۳۷۷.
- ـــــ ، ***منطق ربط***، تهران، دانشگاه تربیت مدرس، ۱۳۸۹.
- هاک، سوزان، ***فلسفه منطق***، ترجمهٔ سید محمّدعلی حجتی، قم، کتاب طه، ۱۳۸۲.

- Anderson, A. R., & N. Belnap & M. Dunn, ***Entailment: the Logic of Relevance and Necessity***, Princeton, Princeton University Press, 1975, v. I.
- Anderson, A. R., & N. Belnap, ***Entailment: the Logic of Relevance and Necessity***, Princeton, Princeton University Press, 1992, v. II.
- Hughes, E. G. & M. Cresswell, ***A New Introduction to Modal Logic***, London, Routledge, 1975.
- Priest, Graham, & Sylvan, Richard, "Simplified Semantics for Basic Relevant Logics", ***Jurnal of Philosophical Logic***, v. 21, 1992, p. 217-232.
- ——— , ***Introduction to Non-Classical Logic***, Cambridge, Cambridge University Press, 2001.
- Read, Stephen, ***Relevant Logic***, Oxford, Basil Blackwell, 1988.