معرفت فلسفی سال یازدهم، شماره دوم، زمستان ۱۳۹۲، ۱۴۰-۱۲۹

تأملی بر استقرای ریاضی

لطف‌اللّه نبوی*
علی بیگدلی**

چکیده

یکی از اصول مهمی که در اثبات برخی از قضایای اساسی منطق جدید و بسیاری از قضایای ریاضیات از آن بهره می‌گیرند اصل استقرای ریاضی است. پرسش این است که آیا این اصل بدیهی است؟ به‌ظاهر شهودهای عرفی، بداهت آن را تأیید نمی‌کنند. لذا وضوح برهان قضایای مبتنی بر اصل فوق نیز کانون تردید است و توجیه برهان چنین قضایایی، مشروط به اذعان بر درستی اصل استقرای ریاضی خواهد بود. گمان می‌کنیم اصل فوق با تکیه بر مفاهیم و اصول اولیهٔ مجموعهٔ اعداد طبیعی اثبات‌پذیر است و بدین‌ترتیب با اثبات آن، دغدغهٔ احتمالی تشکیک در استحکام منطقی اصل استقرای ریاضی و قضایای مبتنی بر آن در منطق جدید مرتفع خواهد شد.

کلیدواژه‌ها: اعداد طبیعی، مجموعه، استقرای ریاضی.

---

* دانشیار دانشگاه تربیت مدرس. nabavi_l@modares.ac.ir
** دانشجوی کارشناسی ارشد فلسفه دانشگاه تربیت مدرس. yamohil@yahoo.com

دریافت: ۹۱/۳/۱۱ **پذیرش:** ۹۲/۱۱/۱۳

مقدّمه

اصل استقرای ریاضی (Mathematical Induction) را *پئانو* در نظریهٔ اعداد به‌منزلهٔ اصل موضوع پنجم به‌کار برده است (مصاحب، ۱۳۸۵، ص ۴۹۱). بدون استفاده از اصل مزبور، بسیاری از قضایای منطق جدید مانند فراقضایای سازگاری» (Consistency Metatheorem)، تمامیت (Completeness) و غیره بی‌پاسخ می‌ماند. ازآنجاکه این اصل مبتنی بر مفهوم بی‌نهایت است، به‌ظاهر شهودهای عرفی بداهت آن را تأیید نمی‌کنند. لذا وضوح برهان (Proof) قضایای مبتنی بر اصل فوق نیز کانون تردید است و توجیه (Justification) برهان چنین قضایایی، مشروط به اذعان بر درستی اصل استقرای ریاضی خواهد بود. به‌عبارت دیگر، حرف نهایی دربارهٔ برهان این‌گونه قضایا آن است که بگوییم: اگر استقرای ریاضی درست باشد، آنگاه توجیه برهان قضیهٔ مبتنی بر آن نیز تمام و کامل است. اکنون پرسش این است که آیا می‌توان این اصل را با تکیه بر برخی مفاهیمی که بداهتشان مورد تأیید شهودهای عرفی است (مانند ترتیب در اعداد طبیعی) اثبات کرد؟ در این مقاله می‌کوشیم اصل استقرای ریاضی را با تکیه بر اصل خوش‌ترتیبی (Well-Ordering) اعداد طبیعی (Natural Number) اثبات کنیم و نشان دهیم که اصل استقرای ریاضی از قوت و استحکام منطقی کافی برخوردار است و تردید احتمالی دربارهٔ بهره‌گیری و استفاده از آن در قضایا و فرمول‌های گوناگون واجد شرایط استقرا، بی‌وجه خواهد بود.

بحث را دربارهٔ استقرای ریاضی به‌گونه‌ای پیش خواهیم برد که موارد ذیل مدنظر باشند:

۱. از رهزنی احتمالی شهود (Intuition) عرفی جلوگیری شود؛

۲. در عین حال، شهودهای عرفی نیز مطالب و قضایای مورد بحث را تأیید کنند؛

۳. طرح بحث به زبان مجموعه‌ها (Set) آسان‌تر و دقیق‌تر است. ازاین‌رو به مفاهیم و تعاریف نظریهٔ مجموعه‌ها به‌صورت اجمالی اشاره می‌شود.

۴. بدون توجه به مفاهیم نظریهٔ مجموعه‌ها نیز برهانی دیگر برای اثبات استقرای ریاضی ارائه خواهد شد.

مجموعه و اصطلاحات آن

اگرچه فرض بر این است که خواننده با زبان مجموعه‌ها آشنایی دارد، برای وضوح بیشتر و بی‌ابهام بودن مطالب پیش‌رو به کمترین اطلاعات لازم در این باب اشاره می‌کنیم.

در اصطلاح ریاضی، هر گروه از اشیای دوبه‌دو متمایز و مشخص را مجموعه و هریک از آن اشیا را عضو (Member) یا عنصر (Element) این مجموعه می‌نامند. مقصود از مشخص بودن گروهی از اشیا آن است که به‌ازای هر شیء، آن شیء درواقع عضو آن گروه است یا عضو آن گروه نیست. هر مجموعه با اعضای خود مشخص می‌شود و اموری مانند ترتیب اعضا و غیره خارج از مفهوم مجموعه است. اگر شمار اعضای مجموعه محدود و شمارش‌پذیر باشد، مجموعه متناهی و در غیر این صورت، مجموعه نامتناهی خواهد بود.

به‌طور معمول مجموعه‌های دلخواه را با حروف بزرگ الفبای لاتینی و اعضای دلخواه مجموعه‌ها را با حروف کوچک همان مجموعه‌ها نشان می‌دهند، و برای برخی مجموعه‌ها نام‌های ویژه‌ای به‌کار می‌برند. ازجملهٔ آنها، N برای مجموعهٔ اعداد طبیعی و Z برای مجموعهٔ اعداد صحیح است. از روش‌های دیگر نام‌گذاری مجموعه‌ها، نام‌گذاری به‌وسیلهٔ درج اسامی اعضای مجموعه درون ابرو یا آکولاد است. برای مثال {۹، ۵، ۲، ۱} و $N=$ {۱، ۲، ۳، ...} که هر دو نمایانگر مجموعه‌اند؛ با این تفاوت که اولی متناهی و دیگری نامتناهی می‌باشد.

عضویت a در مجموعهٔ A را به‌صورت $a \in A$ و نقیض آن را به شکل $a \notin A$ می‌نویسیم و به‌ترتیب چنین می‌خوانیم: «a عضو A است» و «a عضو A نیست».

تساوی دو مجموعهٔ A و B به این معناست که هر دو مجموعه اعضای یکسانی داشته باشند. به‌عبارت دیگر $A=B$ هرگاه A و B اسامی یک مجموعه باشند. برای نمونه اگر

$A=\{1,a,b,c\}$ و $B=\{a,1,c,b\}$، آنگاه $A=B$

اگر هر عضو مجموعهٔ A عضو مجموعهٔ B باشد، گوییم A جزء B یا زیرمجموعهٔ (Subset) B است و اگر در این حال، B عضوی غیرمتعلق به A داشته باشد، A را زیرمجموعهٔ حقیقی یا سرهٔ B می‌گویند. گزاره‌نمای «A جزء B یا زیرمجموعهٔ B است» را به‌صورت $A \subseteq B$ و گزاره‌نمای «A

زیـرمجموعهٔ حـقیقی B است» را بـه‌صورت $A \subset B$ مـی‌نویسند. مـثلاً اگـر $A = \{1,a,b,c\}$ و $B = \{a,1,c,b,d\}$ در این صورت $A \subset B$

مفهوم عادی «مجموعه» متضمن این است که بیش از یک عضو داشته باشد. از این لحـاظ «مجموعهٔ اعداد زوج اول»، «مجموعهٔ اعداد طبیعی منفی»، «مجموعهٔ پادشاهان فرانسه در قـرن بیستم» بی‌معنا خواهد بود؛ زیرا به جز ۲ عدد اول زوجی وجود ندارد. همهٔ اعداد طبیعی مثبت‌اند و نیز فرانسه در قرن بیستم پادشاه نداشته است. برای تعمیم، به‌خاطر بامعنا بودن مفاهیمی چون مثال‌های مزبور، مجموعهٔ دارای یک عضو و مجموعه خالی را به‌منزلهٔ مـجموعه مـی‌پذیریم، و بدین‌ترتیب مفهوم عرفی مجموعه را توسعه می‌دهیم.

تلقی مجموعهٔ عمومی به‌منزلهٔ مجموعهٔ جمیع اشیا، متضمن مشکلات جدی است، کـه در جای خود، در نظریهٔ مجموعه‌ها، کانون بحث قرار می‌گیرد. در هر نظریهٔ علمی، اشیای اولیهٔ مورد بحث، به‌منزلهٔ مجموعهٔ عمومی یا عالم سخن آن نظریه لحاظ می‌شود. در این بحث هـم بـرای دوری جستن از مشکلات (مانند مشکل پارادوکس راسل)، اعداد طبیعی را به‌منزلهٔ عالم سـخن در نظر می‌گیریم و در ضمن چهار عمل اصلی جمع، تفریق، ضرب و تـقسیم بـین دو عـدد را واضح پنداشته، موارد زیر را به همراه علامت > موسوم به نسبت کوچک‌تری، که برای مقایسهٔ دو عدد از مجموعهٔ اعداد طبیعی N است، به‌منزلهٔ اصول موضوعه به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم.

۱. > متعدی است؛ یعنی به ازای اعداد طبیعی، a، b و c اگر $a<b$ و $b<c$ آن‌گاه $a<c$.

۲. > تابع اصل تثلیث (قوی) است.

اصل اخیر مقایسه‌پذیر بودن هر دو عدد را می‌رساند؛ به این معنا که برای هر عدد a و b فقط یکی از روابط زیر درست است: $a < b$ یا $b < a$ یا $a = b$.

اگر a یک عدد باشد آن‌گاه $a^n=aaa...a$ یعنی عدد a به تعداد n بار در خودش ضرب شده است و $1 \leq b$ بدین‌معناست که $a < b$ یا $a = b$.

۳. اگر $a < b$، آن‌گاه $a + c \leq b + c$.

یعنی به دو طرف نسبت کوچک‌تری می‌توان عددی دلخواه مانند c را افزود.

۴. اگر $a < b$ و $0 < c$ آن‌گاه $ac < bc$.

به‌عبارت‌دیگر در دو طرف نسبت کوچک‌تری، عدد مثبت دلخواه مانند c را می‌توان ضرب کرد.

۵. هر مجموعهٔ غیرخالی از اعداد طبیعی، عضو ابتدا دارد.

این اصل موسوم به اصل خوش‌ترتیبی است و بیانگر آن است که کوچک‌ترین عضو در هر زیرمجموعه از اعداد طبیعی موجود است.

اعداد طبیعی

مجموعهٔ اعداد طبیعی بنیادی‌ترین مجموعه‌های اعداد و بسیاری از مفاهیم اساسی ریاضی ـ از قبیل مفاهیم شمردن، مجموعه‌های متناهی و نامتناهی ـ ناشی از آن است. برای آماده کردن ذهن، قبلاً اعداد طبیعی را چنان‌که با آنها مأنوس هستیم بررسی می‌کنیم و بعضی خواصی را که از این بررسی سطحی می‌توان استنباط کرد، یادآور می‌شویم.

اعداد طبیعی بدان‌گونه که آنها را می‌شناسیم عبارت‌اند از اعداد:

۱، (۱+۱)، (۱+۱+۱)، (۱+۱+۱+۱)،...

که مجموعهٔ آنها مجموعهٔ اعداد طبیعی خوانده می‌شوند. چنان‌که از طرح فوق مشهود است، مجموعهٔ یادشده دارای این دو خاصیت است: اولاً «یکدار» است؛ یعنی ۱ بدان تعلق دارد و ثانیاً «موروثی» است؛ بدین‌معنا که همواره اگر x بدان تعلق داشته باشد، $x+1$ نیز بدان تعلق دارد. این طرح و شرح چنین می‌نمایاند که اگر عدد یک و مفهوم جمع را بدانیم، آن‌گاه می‌توانیم مجموعهٔ اعداد طبیعی را بسازیم؛ به این صورت که نام‌های دیگر ۱+۱، ۱+۱+۱، ۱+۱+۱+۱ و غیره را به‌ترتیب ۴،۳،۲ و... می‌گذاریم. توضیح واضحات نخواهد بود اگر توجه مضاعف به این مطلب کنیم که هم مفهوم واحد و هم مفهوم جمع را ارتکازاً درمی‌یابیم و نیازی به واسطه قرار دادن مفاهیم دیگر برای دریافت مفهوم آنها نداریم؛ لذا با توجه به این توضیح و تحلیل، شایسته و بایسته است که مجموعهٔ اعداد طبیعی را به‌صورت $N = \{۱، ۲، ۳، ...\}$ تعریف کنیم.

از ساختمان اعداد طبیعی به شرح مذکور معلوم است که اگر n یک عدد طبیعی باشد، بین n و

n+۱ عددی طبیعی وجود ندارد. بدین مناسبت $n+1$ را تالی بلافصل n می‌نامند. همچنین معلوم است که هر عدد طبیعی غیر از ۱، تالی بلافصل یک عدد طبیعی است و نیز می‌توان گفت فاصلهٔ هر دو عدد طبیعی متوالی یک واحد است.

همان‌گونه که پیش‌تر بیان شد به شکل شهودی می‌توان گفت مجموعه‌ای متناهی است که تعداد اعضای آن را بتوان شمرد، و در غیر این صورت نامتناهی است؛ اما این تعریف را می‌توان به‌گونه‌ای دقیق‌تر، با تکیه بر مفهوم تناظر یک‌به‌یک میان اعضای دو مجموعه تعریف کرد.

تعریف: مجموعهٔ X نامتناهی است اگر زیرمجموعه‌ای سره مانند Y داشته باشد؛ به‌گونه‌ای‌که تناظری یک‌به‌یک میان X و Y وجود داشته باشد. نیز مجموعه متناهی است اگر نامتناهی نباشد (لین، ۱۳۶۸، ص ۱۱۷). به‌عبارت دیگر، مجموعهٔ X نامتناهی است، اگر و تنها اگر یک تابع یک‌به‌یک $f: X \rightarrow Y$ به قسمی که $f(X)$ زیرمجموعهٔ سره X باشد.

واضح است که $E=\{2,4,6,8,...\}$ زیرمجموعهٔ اعداد طبیعی N است، تابع $f(x) = 2x$ از N به E یک‌به‌یک است. به‌صورت روشن‌تر تناظر یک‌به‌یک E و N بدین‌معناست که متناظر با هر عضو E، فقط یک عضو از N موجود است و برعکس متناظر با هر عضو N، فقط یک عضو از E وجود دارد. برای مثال عدد ۵۵ از مجموعهٔ N، با توجه به ضابطهٔ تابع فوق، با عدد ۱۱۰ (دو برابر ۵۵) از مجموعهٔ E و عدد ۶۸ از مجموعهٔ E، با عدد ۳۴ (نصف ۶۸) از N متناظرند. با همین قیاس معلوم می‌شود که اعضای دو مجموعهٔ E و N تناظر یک‌به‌یک دارند. لذا بنا به تعریف فوق چون اعضای E و N تناظر یک‌به‌یک دارند $E \subset N$ است، پس N نامتناهی است.

تعریف استقرای ریاضی

استقرای ریاضی برای اثبات این امر به کار می‌رود که هر جمله از یک دنباله (tail) نامحدود، از امری معین تبعیت می‌کند. این کار در دو مرحله انجام می‌شود:

ـ اثبات اینکه عبارت اول در دنبالهٔ نامحدود مذکور از آن تبعیت می‌کند؛

ـ اثبات اینکه چنانچه جمله‌ای در دنبالهٔ نامحدود نیز از آن پیروی کند، جملهٔ بعدی نیز از آن

تبعیت خواهد کرد.

تعریف ساده و عمومی از استقرای ریاضی عبارت است از: اثبات اینکه یک جمله برای تمام اعداد طبیعی صادق باشد و شامل دو مرحله است:

ـ مرحلهٔ اصلی نشان دادن اینکه جمله به ازای $n = 1$ صادق است؛

ـ مرحلهٔ استقرایی نشان دادن اینکه اگر جمله به ازای $n = m$ صادق باشد، به ازای $n = m+1$ نیز صادق خواهد بود.

در استقرای ریاضی، جمله‌ای که پس از کلمهٔ «اگر» آمده است (جمله به ازای $n = m$ صادق باشد) اصطلاحاً «فرض استقرا» یا «گام استقرا» نامیده می‌شود، و نیز مرحلهٔ اصلی (جمله به ازای $n=1$ صادق است) را «گام بنیادین استقرا» یا «فرض ابتدای استقرا» می‌خوانند.

بدین‌ترتیب نخست فرض می‌شود که «گام بنیادین استقرا» و «فرض استقرا» صادق است (جمله به ازای $n=m$ صادق است) و سپس از این مقدمات برای اثبات صدق جمله بـه ازای $n=m+1$ استفاده می‌شود. البته گاه از استقرای ریاضی با دو قید ضعیف و قوی نیز یاد می‌شود که دلیل این قیود به‌ترتیب به خاطر کمی و زیادی تعداد مقدمات یا فرضیات استقراست و ربطی به استحکام آن ندارد. اگر مجموعه‌ای از اشیا در اختیار داشته باشیم و بتوانیم آن اشیا را متناظر بـا اعداد طبیعی مرتب کنیم، سپس بخواهیم برای همهٔ این مجموعهٔ شمارش‌پذیر صفت معینی مانند φ را اثبات کنیم، به دو صورت زیر از روش استقرای ریاضی بهره می‌گیریم:

۱. **استقرای ضعیف**: استقرای ضعیف دارای سه مرحله به شرح زیر است:

الف) گام بنیادین استقرا: در این مرحله اثبات می‌کنیم که عنصر شمارهٔ صفر (حد صفر) دارای صفت φ است (φ_0)؛

ب) گام استقرا: در این مرحله اثبات می‌کنیم: $\varphi_n \Rightarrow \varphi_{n+1}$. برای اثبات حکم مذکور کافی است φ_n را فرض کرده (فرض استقرای)، با استفاده از φ_0 و φ_n، φ_{n+1} را اثبات می‌کنیم؛

ج) نتیجهٔ استقرا: در این مرحله با اثبات φ_0 و $\varphi_n \Rightarrow \varphi_{n+1}$ مـی‌توان نـتیجه گـرفت کـه هـمهٔ مجموعهٔ اعداد طبیعی و در نتیجه همهٔ عناصر مورد اشارهٔ آنها ویژگی φ را دارند.

بنابراین استقرای ریاضی ضعیف از دو مقدمه و یک نتیجه تشکیل شده است:

گام بنیادی: φ_0

گام استقرا: $\varphi_n \Rightarrow \varphi_{n+1}$

نتیجهٔ استقرا: $\therefore \varphi_0 \& \varphi_1 \& \varphi_2 \& \ldots \& \varphi_n \& \ldots$

۲. **استقرای ریاضی قوی**: استقرای ریاضی قوی دارای سه مرحله بدین شرح است:

الف) گام بنیادی: در این مرحله اثبات می‌کنیم که عنصر شمارهٔ صفر (حد صفر) دارای صفت φ است (φ_0)؛

ب) گام استقرا: در این مرحله اثبات می‌کنیم که اگر همهٔ اعداد طبیعی پیش از $n+1$ صفت φ را داشته باشند (فرض استقرای)، عدد $n+1$ نیز این صفت را خواهد داشت؛ یعنی $\varphi_0 \& \varphi_1 \& \varphi_2 \& \ldots \& \varphi_n \Rightarrow \varphi_{n+1}$ ؛

ج) نتیجهٔ استقرا: در این مرحله می‌توان نتیجه گرفت که همهٔ اعداد طبیعی دارای صفت φ هستند (نبوی، ۱۳۷۷، ص ۶۴).

مثال: ثابت می‌کنیم به ازای هر عدد طبیعی n، $2 \leq 2^n$.

برهان: فرض کنید $f(n)$ بیانگر تابع گزاره‌ای «به ازای هر عدد طبیعی n $2 \leq 2^n$» باشد، $f(1)$ برقرار است؛ زیرا $2 \leq 2^1$ یعنی یا $2 < 2$ یا $2 = 2$ که به‌وضوح درست است. حال فرض می‌کنیم $f(n)$ برقرار باشد (فرض استقرا). به دو طرف $2 \leq 2^2$ عدد 2 را ضرب می‌کنیم. لذا $4 \leq 2^{n+1}$. با توجه به اصل متعدی بودن نسبت کوچک‌تری و اینکه $2 \leq 4$ داریم: $2 \leq 2^{n+1}$ و این یعنی $f(n+1)$ و لذا بنا به اصل استقرای ریاضی، حکم برای هر عدد طبیعی n برقرار است.

همان‌گونه که گفته شد از اصل استقرا برای اثبات احکامی دربارهٔ اعداد طبیعی استفاده می‌شود. حال روش اثبات را به‌وسیلهٔ این اصل بیان می‌کنیم:

اگر $P(n)$ حکمی دربارهٔ اعداد طبیعی باشد، به‌گونه‌ای‌که:

الف) $P(1)$ درست باشد (این مرحله را فرض ابتدای استقرا یا گام بنیادی استقرا می‌نامند)؛

ب) به ازای هر عدد طبیعی k از درستی $P(k)$، درستی $P(k+1)$ نتیجه شود. در این صورت می‌توان نتیجه گرفت که $P(n)$ به ازای هر عدد طبیعی N درست است. به دیگر سخن:

$\forall P\ [P(1) \wedge \forall k\ (P(k) \Rightarrow P(k+1)] \Rightarrow \forall n \in N, P(n)]$ که در آن p نشان‌دهندهٔ گزاره‌نما، $\forall$ نشان‌دهندهٔ سور عمومی به‌معنای «به ازای هر»، $\wedge$ به‌معنای «و» N مـجموعهٔ اعـداد طبیعی و k,n هر دو اعداد طبیعی‌اند.

قضیهٔ ۱:

I. $I \in N$. یعنی I عدد طبیعی است.

II. همواره اگر $n \in N$ آن‌گاه $n+I \in N$.

برهان: I نتیجهٔ تعریف N و برای اثبات II فرض کنیم برای nای خاص، $n \in N$ و $n+1 \notin N$ و و این بدان معناست که با افزودن یک واحد به یک عدد طبیعی خاص، عددی طبیعی به‌دست نیامد که به‌وضوح با تعریف مجموعهٔ اعداد طبیعی در تناقض باشد؛ لذا N $n+1$ $\in$.

قضیه ۲ (اصل استقرای ریاضی): اگر خاصیت f، تابع شرایط دوگانهٔ زیر باشد، جمیع اعداد طبیعی واجد این خاصیت خواهند بود:

I. ۱ خاصیت f دارد؛

II. به‌ازای هر عدد طبیعی n اگر n خاصیت f داشته باشد $n+1$ نیز خاصیت f دارد.

برهان: فرض کنیم A مجموعهٔ جمیع اعداد طبیعی واجد خاصیت f باشد که $A \neq N$ (فرض خلف). حال مجموعه $T = N - A$ (اعضای N به غیر از اعضای A) را در نظر می‌گیریم. به دلیل اینکه $A \neq N$ پس T تهی نیست؛ و نیز با تـوجه بـه T تـعریف داریـم: $T \subseteq N$ و لذا طـبق اصـل خوش‌ترتیبی عضو ابتدایی چون t_o دارد. با عنایت به تعریف T و A داریم: $1 \notin A$. بنابراین t_o از عدد یک بیشتر است. لذا $t_o - 1 \in N$. واضح است که $t_o -1 <- t_o$ پس $t_o - 1 \notin T$ (چون کوچک‌ترین عضو T بود)؛ و این یعنی $t_o - 1 \in A$ و طبق II $t_o - 1 + 1 = t_o \in A$ پس $t_o \notin T$ و این متناقض با تعریف t_o به‌منزلهٔ عضو ابتدا برای T است. پس فرض خلف $(A \neq N)$ باطل و حکم $A=N$ ثابت است.

چنان‌که می‌دانیم، گزاره‌نمای p_n به‌معنای «n خاصیت P دارد» است؛ و لذا قضیهٔ ۲ را می‌توان

چنین بیان کرد:

قضیهٔ ۳ (اصل استقرای ریاضی): اگر خاصیت P تابع شرایط دوگانهٔ ذیل باشد، جمیع اعداد طبیعی خاصیت p دارند:

I. p_1

II. به‌ازای هر n اگر p_n آن‌گاه p_{n+1}

در ارائهٔ برهان برای قضیهٔ استقرای ریاضی، به صورتی که گذشت، به اعداد طبیعی و نظریهٔ مجموعه‌ها متوسل شدیم. به زبان نزدیک به عرف و بدون توسل به مفاهیم فوق، به‌صورت ساده‌تر نیز می‌توان بر قضیهٔ استقرای ریاضی به قرار زیر ارائهٔ برهان کرد؛ به‌گونه‌ای‌که هم با شهود و دریافت اولیهٔ عرفی سازگاری داشته باشد و هم فهم برهان آن آسان‌تر از فهم برهان قضیهٔ قبل باشد.

برهان: فرض کنید n عدد طبیعی باشد که خاصیت p دارد (این مطلب را به شکل p_n نشان می‌دهیم). طبق فرض، دو مقدمه زیر را داریم:

الف) p_1 (یعنی ۱ خاصیت p دارد)؛

ب) به‌ازای هر عدد طبیعی n اگر p_n آن‌گاه p_{n+1}

ادعا می‌کنیم همهٔ اعداد طبیعی خاصیت p دارند (یعنی $\forall n$، p_n)؛ در غیر این صورت نقیض آن برای بعضی اعداد طبیعی $\sim p_n$، که فرض خلف است، برقرار خواهد بود (۱) (برای اشارهٔ آسان، اسم جملهٔ اخیر را (۱) در نظر می‌گیریم). از میان این اعداد طبیعی، کوچک‌ترین آن را برمی‌گزینیم و آن را k می‌نامیم. چون $\sim p_k$ برقرار است (۲)، با نظر به تعریف k آشکار است که p_{k-1} و درنتیجه با توجه به فرض ب، p_k برقرار است و این مطلب با (۲) و درنتیجه با (۱) در تناقض است. پس نشان دادیم که $\sim p_n$، برای بعضی اعداد طبیعی مانند k برقرار نیست. لذا فرض خلف، یعنی $\sim p_n$ باطل و حکم یعنی $\forall n$، p_n برقرار است.

نتیجه‌گیری و ارزیابی

همان‌گونه که ملاحظه شد، استقرای ریاضی قضیه‌ای است که نتیجهٔ آن با پذیرش دو مقدمه

ضروری است؛ یعنی پذیرفتن مقدمات و رد نتیجه به تناقض می‌انجامد. بنابراین استقرای ریاضی نوعی قیاس منطقی است و بر خلاف استقرای متداول در دانش‌های تجربی، صدق نتیجهٔ آن قطعی است. اعتبار استقرای ریاضی بر ترتیب عددهای طبیعی استوار است. ازاین‌رو هرجا اشیایی داشته باشیم که بتوان آنها را به شکلی متناظر با اعداد طبیعی مرتب و شماره‌گذاری کرد، آن‌گاه می‌توانیم استقرای ریاضی را برای آنها به کار ببریم. برای مثال، در منطق گزاره‌ها می‌توان فراقضیهٔ بهنجاری (صحت) را با استفاده از استقرای ریاضی بر روی تعداد سطور برهان، که عددی طبیعی است، اثبات کرد. این فراقضیه بیان می‌کرد هر استدلال درست، استدلالی معتبر است.

گاه پیش می‌آید که شخص می‌پندارد محاسباتی را که در حالات خاص انجام داده است، می‌تواند تحت قاعده‌ای کلی درآورد، و چه‌بسا این قاعده را «حدس» می‌زند. چنین حدسی، اگر صحتش با دلیل ثابت نشود، اعتمادپذیر نیست، و نباید آن را به‌منزلهٔ یک قضیه عرضه کرد. برای نمونه، در سه جمله‌ای n^2-n+41 اگر به‌جای n اعداد ۱، ۲، و... و ۹ قرار دهید، ملاحظه خواهید کرد که اعداد حاصل، جملگی عدد اول‌اند؛ یعنی به غیر از عدد یک و خود بر عدد طبیعی دیگری بخش‌پذیر نیستند. از اینجا ممکن است به ذهن برسد که حاصل مقادیر سه‌جمله‌ای مزبور، به‌ازای اعداد ۱۰، ۱۱، ...، ۳۰ و ۳۱ به‌جای n باز هم اعدادِ اول‌اند و این نتیجه مؤید حدس ماست. حال اگر محاسبه را ادامه دهیم، به ازای $n=41$ عدد $41^2-41+41$ حاصل می‌شود که بالبداهه اول نیست. این «دلیل» گمراه‌کننده و ناپذیرفتنی، و حاکی از تمیز نگذاشتن میان حدس و حکم ثابت‌شده است.

اما محدودیت استقرای ریاضی در این است که تنها برای مسائلی به کار می‌رود که با اعداد طبیعی سروکار دارند. لذا این روش اساساً یک روش تحقیق است، و نیز تنها در اثبات قضایایی که درستی آنها را حدس زده‌ایم، به کار می‌رود. برای مثال در اثبات قضیهٔ «اگر n عددی طبیعی باشد، آن‌گاه $p1+3+5+7+\ldots+(2n-1)=n^2$» از استقرای ریاضی بهره می‌گیریم؛ ولی استقرای ریاضی دربارهٔ اینکه این قضیه چگونه و از چه مقدمه یا مقدماتی حاصل شد و نیز درستی آن چگونه حدس زده شد، هیچ کمکی به ما نمی‌کند. به‌عبارت دیگر، استقرای ریاضی توانایی آشکار کردن نادرستی فرمول یا قضیه‌ای را ندارد، بلکه نخست باید درستی فرمول یا قضیه‌ای را حدس بزنیم و سپس با بهره‌گیری از استقرای ریاضی صدق حدسی را استحکام بخشیم.

منابع

لین، شووینگ تی، ۱۳۶۸، ***نظریهٔ مجموعه‌ها و کاربردهای آن***، چ دوازدهم، تهران، مرکز نشر دانشگاهی.
مصاحب، غلامحسین، ۱۳۶۸، ***آنالیز ریاضی***، چ پنجم، تهران، فرانکلین.
نبوی، لطف‌اللّه، ۱۳۷۷، ***مبانی منطق جدید***، تهران، سمت.

سایر منابع

افضلی، جمعه‌خان، ۱۳۸۶، «روش استقرائی از دیدگاه تطبیقی»، ***معرفت فلسفی***، ش ۱۹، ص ۱۱۷-۱۴۴.
ایان، استیوارت و دیوید، تال، ۱۳۶۵، ***مبانی ریاضیات***، تهران، مرکز نشر دانشگاهی.
بت داود، جمس، ۱۳۸۱، ***مبانی ریاضیات***، چ دوازدهم، تهران، دانشگاه پیام نور.
بهزاد، مهدی و همکاران، ۱۳۷۵، ***ریاضیات گسسته***، چ پانزدهم، تهران، شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران.
بیگدلی، علی، ۱۳۸۹، ***استقرا ریاضی و احتمال استقرایی ـ منطقی***، پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد فلسفه، تهران، دانشگاه تربیت مدرس.
پولیا، جورج، ۱۳۶۹، **چگونه *مسئله را حل کنیم***، چ دوم، تهران، کیهان.
موحد، ضیاء، ۱۳۶۸، ***درآمدی به منطق جدید***، تهران، سازمان انتشارات و آموزش انقلاب اسلامی.