Journal of Water and Soil
Vol. 28, No. 1, Mar.-Apr. 2014, p. 61-71

نشریه آب و خاک (علوم و صنایع کشاورزی)
جلد ۲۸، شماره ۱، فروردین - اردیبهشت ۱۳۹۳، ص. ۷۱-۶۱

کاربرد روش چند شبکه ای برای حل دستگاه معادلات خطی در تحلیل هیدرولیکی شبکه لوله‌ها

ناصر موسویان[1*] - محمدرضا جعفرزاده[2]

تاریخ دریافت:۱۳۹۱/۱۱/۲۴
تاریخ پذیرش:۱۳۹۲/۱۱/۲۷

چکیده

الگوریتم های گرادیان از معروف ترین روش های تحلیل شبکه لوله ها به شمار می‌روند. حل دستگاه معادله خطی، بیشترین هزینه محاسباتی را در روش های گرادیان داراست بخصوص برای شبکه های بسیار بزرگ که بیش از هزاران متغیر داشته باشند. ماتریس ژاکوبین در روش گرادیان بصورت یک ماتریس مربعی نواری است که درایه های آن تابع میزان جریان و مقاومت لوله می‌باشند و قابل حل بوسیله روش چند شبکه‌ای است. هم اکنون در نرم افزارهای WATERGEMS وEPANET از روش چولسکی اسپارس به همراه مرتب سازی گره‌ها برای حل این دستگاه معادلات خطی استفاده می‌گردد. در این مقاله به کاربرد روش های چند شبکه ای پیش شرط ساز AMG-CG[3] و AGMG [4] در حل معادلات خطی شده شبکه لوله ها پرداخته و با سریع ترین روش های تکراری و مستقیم حل دستگاه معادلات خطی مقایسه می‌گردند. نتایج نشان می‌دهد که در تحلیل شبکه های آبرسانی حلقه ای، روش های چند شبکه ایAGMG و AMG-CG بهتر از بقیه بوده و در شبکه های حلقه ای بسیار بزرگ روش AGMG بهترین روش حل دستگاه معادلات خطی در تحلیل هیدرولیکی شبکه لوله ها است.

واژه‌های کلیدی: شبکه لوله، تحلیل هیدرولیکی، روش چند شبکه ای

مقدمه

تحلیل هیدرولیکی شبکه های بزرگ آبرسانی از مسائل مهمی است که از چندین دهه قبل تاکنون محققان زیادی را به خود مشغول کرده است. معادلات حاکم بر این سیستم‌ها شامل بر معادلات پیوستگی جرم در هر گره و افت انرژی در هر لوله می‌باشد. این معادلات بر اساس مجهولات به چهار دسته معادلات دبی، Q، معادلات هد، H، معادلات ΔQ و معادلات Q-H تقسیم بندی می‌شوند. در حالت اول سیستم معادلات پیوستگی جریان در گره ها و افت انرژی در حلقه ها بر حسب معادلات Q نوشته می‌شوند. در حالت دوم معادلات پیوستگی در گره ها بر حسب هد H، فرمول بندی می‌شوند. در حالت سوم معادلات افت انرژی در هر حلقه بسته بر حسب دبی اصلاح شده یعنی ΔQ نوشته می‌شود. در حالت چهارم معادلات پیوستگی جریان در هر گره برحسب Q و معادلات افت انرژی در هر لوله برحسب H و Q نوشته می‌شود.

نخستین بار هاردی کراس روشی را بر مبنای معادلات دبی Q در لوله ها ارائه کرد (۱)، اما همگرایی این روش با بزرگ شدن شبکه بسیار کند بود و در برخی موارد مدل واگرا می‌شد بعلاوه سرعت همگرایی به مقدار حدس اولیه دبی در لوله ها بستگی پیدا می‌کرد (۲). بعدها هاردی کراس روش دیگری بر مبنای معادلات انرژی در گره ها ارائه کرد اما این روش نیز به حدس اولیه بسیار حساس بود. راهکار مارتین وپیترز (۳) بر حسب معادلات هد H و استفاده از الگوریتم نیوتن-رافسون تا حدودی مشخصه های همگرایی را بهبود بخشید ولیکن ایرادات کلی روش نیوتن-رافسون از قبیل وابستگی روند همگرایی به حدس اولیه، دشوار بودن محاسبه ماتریس ژاکوبین در شبکه های بزرگ و پیچیده، اصلاح ماتریس مذکور در هر تکرار و زمانبری عملیات معکوس سازی ماتریس ژاکوبین همچنان برقرار بود. شامیر و هوارد (۴) نشان دادند که از این روش می توان برای شبکه‌های با پمپ و شیر نیز استفاده نمود.

روش وود (۵) به نام تئوری خطی که برای معادلات دبی Q بکار برده شد نیز در مقایسه با روش نیوتن-رافسون همگرایی کندتری داشت. کولینز و جانسون (۶) روش المان محدود را برای تحلیل شبکه‌های آبرسانی ارائه کردند که روشی خطی بر حسب معادلات H می‌باشد. در این روش با انتخاب حدس اولیه برای دبی، ماتریس

۱- دانش آموخته دکتری، گروه عمران، دانشگاه تربت حیدریه
(* - نویسنده مسئول: Email: naser.moosavian@yahoo.com)
۲- استاد گروه عمران، دانشکده مهندسی دانشگاه فردوسی مشهد

3- Algebraic Multi-Grid pre-conditioned Conjugate Gradient
4- Aggregation based algebraic Multi-Grid

ضرایب تخمین زده می‌شود و با حل دستگاه معادلات خطی حاصله، مقادیر H در هر گره به دست می‌آید. در مرحله بعد دبی لوله ها با توجه به هدهای گرهی محاسبه شده و ماتریس ضرایب بوسیله ترکیبی از دبی محاسبه شده در این مرحله و دبی موجود در تکرار قبلی بروزرسانی می‌گرددو این عملیات تا رسیدن به همگرایی مطلوب ادامه می‌یابد.

تودینی و پیلاتی (۷) روش گرادیان سراسری (GGA[1]) را برای تحلیل هیدرولیکی شبکه لوله ها بکار بردند. قبلا پاول (۸) این الگوریتم را با استفاده از مضارب لاگرانژ برای مسائل بهینه سازی با قیود تساوی ارائه کرده بود. این روش برای معادلات ترکیبی Q-H فرمول بندی می‌شود و بطور مستقیم مقادیر اصلاح شده مجهولات را در هر تکرار محاسبه می‌کند. در این روش معادلات افت انرژی در حلقه ها به صورت تابع هدف و معادلات پیوستگی به صورت قید، در یک مسئله بهینه سازی تعریف می‌شود. این مسئله بهینه سازی با استفاده از روش مضارب لاگرانژ، بدون قید می‌شود. با مشتق گیری از تابع هدف حاصله، معادلات کلی شبکه آبرسانی بر اساس Q-H بدست می‌آیند که با به کار بردن روش نیوتن- رافسون حل می‌شوند (۹). این روش سرعت همگرایی را بطور قابل ملاحظه ای افزایش می‌دهد بعلاوه تا حدودی نیز از حدس اولیه مستقل می‌باشد و اگر نقطه آغازی به اندازه کافی به جواب نهایی نزدیک باشد با مرتبه حداقل دو همگرا می‌گردد (۱۰)، درحال حاضر از این الگوریتم در تحلیل شبکه های آبرسانی بخصوص در نرم افزارهای تجارتی Epanet و WaterGems استفاده می‌شود.

از الگوریتم‌های چندشبکه‌ای در حل عددی معادلات دیفرانسیل جزئی با روش‌های تفاضل محدود و المان محدود استفاده می‌شود. معادلات بیضی لاپلاس و پواسونبا روش‌های چندشبکه‌ای سازگاری خوبی دارند. بطور کلی روش های چند شبکه ای در حل دستگاه معادلات خطی در صورتی که ماتریس ضرایب استیلجس[2] باشد، عملکرد بسیار خوبی دارند. ماتریس استیلجس یک ماتریس معین مثبت متقارن است که درایه های غیرقطری آن منفی و درایه های قطری آن مثبت هستند. نخستین بار وبستر (۱۱) از یک روش چندشبکه‌ای برای تحلیلجریان در لوله‌ها استفاده کرد، اما در این تحلیل فرض بر این بود که جریان لایه‌ای است و بنابراین معادلات افت هد خطی بودند. مهدیزاده و جعفرزاده (۱۲) از الگوریتم چند شبکه‌ای برای تسریع نرخ همگرایی روش نیوتن-رافسون در معادلات H استفاده کردند. ایراد این روش وابستگی به حدس اولیه و روند همگرایی کندتر نسبت به روش تودینی بود. زچین و همکاران (۱۳) در سال ۲۰۱۲ نشان دادند روش چند شبکه ای جبری با پیش شرط ساز گرادیان مزدوج (AMG-CG) در حل دستگاه معادلات خطی حاصل از روش گرادیان سراسری، ارائه شده توسط تودینی، در شبکه های بزرگ آبرسانی بهتر از روش چولسکی اسپارس به همراه مرتب سازی گرهی عمل می کند. آنها پیشنهاد دادند برای حل دستگاه معادلات خطی الگوریتم گرادیان سراسری در شبکه های بزرگ بهتر است از روش AMG-CG استفاده نمود.

مواد و روش‌ها

در تحقیق حاضر به معرفی الگوریتم گرادیان سراسری و الگوریتم گرادیان برحسب فشارگرهی پرداخته می شود. ضرایب ماتریس ژاکوبین در الگوریتم گرادیان سراسری در هر تکرار بروزرسانی می‌شود ولی در الگوریتم گرادیان بر حسب فشار گرهی ضرایب ماتریس ژاکوبین ثابت باقی می‌مانند. در ادامه نشان داده می‌شود که ماتریس ژاکوبین در هر دو الگوریتم مذکوراستیلجس است و می توان برای حل دستگاه معادله خطی خیلی بزرگ، از الگوریتم های چند شبکه ای AMG-CG و AGMGاستفاده نمود. برای مقایسه از شش روش سریع حل دستگاه معادله خطی استفاده می‌شود که این روش ها عبارتند از:

روش مجذور گرادیان مزدوج به همراه فاکتورگیری ناقص اسپارس LU[3](CGS+LUINC)

روش حداقل باقیمانده به همراه فاکتورگیری ناقص اسپارس LU[4](GMRES+LUINC)

روش گرادیان مزدوج تثبیت شده به همراه فاکتورگیری ناقص اسپارس LU[5](BICGSTAB+LUINC)

روش شبه باقیمانده حداقل به همراه فاکتورگیری ناقص اسپارس LU[6](QMR+LUINC)

روش مستقیم چولسکی (CHOLESKY)

روش پیش شرط ساز گرادیان مزدوج به همراه فاکتورگیری چولسکی[7] (PCG+Cholesky)

نتایج نشان می‌دهد روش AGMG سبب افزایش سرعت همگرایی الگوریتم های گرادیان در شبکه های بزرگ آبرسانی می‌گردد. همچنین روش AGMG در کلیه شبکه های مورد بررسی

1- Global Gradient Algorithm
2- Stieltjes

3- Conjugate Gradients Squared Method +Sparse Incomplete LU Factorization
4- Generalized Minimum Residual Method+Sparse Incomplete LU Factorization
5- Biconjugate Gradients Method+Sparse Incomplete LU Factorization
6- Quasi-Minimal Residual Method+Sparse Incomplete LU Factorization
7- Preconditioned Conjugate Gradients Method +Cholesky

سریعتر از روش AMG-CG به جواب می‌رسد و می‌توان این روش را به عنوان بهترین روش حل دستگاه معادلات خطی در تحلیل هیدرولیکی شبکه های بزرگ آبرسانی معرفی نمود.

معادلات شبکه های توزیع آب

شبکه های توزیع آب شامل لوله ها، مخازن، پمپ ها و شیرها می‌باشند. در یک شبکه توزیع آب مجهولات عبارت از دبی و افت هد در لوله ها و مقادیر فشار در گره ها می‌باشد. در صورتیکه فرض شود شبکه مورد نظر دارای M لوله و N گره باشد، تعداد M+N-1 مجهول وجود دارد، بنابراین به همین تعداد معادله احتیاج داریم. معادلات موجود در شبکه های توزیع آب شامل معادلات پیوستگی و انرژی می‌باشند. بر اساس معادله پیوستگی جمع جبری جریان های ورودی و خروجی به یک گره j صفر می‌شود.

$$\sum_k Q_k = q_j \qquad (۱)$$

q_j میزان برداشت ازگره و Q_k دبی لوله های متصل به گره است. افت فشار آب در لوله k ام h_k بوسیله رابطه زیر تعیین می‌گردد:

$$h_k = H_i - H_j = R_k . Q_k^{\,m} \qquad (۲)$$

که در آن H_i, H_j هد گرهی در ابتدا و انتهای لوله می‌باشند در این معادله R_k ضریب مقاومت لوله k ام، Q_k دبی لوله و m بسته به معادله مقاومت جریان یک عدد ثابت است. برای مثال در صورت استفاده از معادله هیزن ویلیامز مقادیر R_k و m در سیستم آحاد SI مطابق رابطه زیر تعریف می‌شوند:

$$R_k = \frac{10.67 L_k}{C_k^{1.852} D_k^{4.87}}, \qquad m = 1.852 \qquad (۳)$$

C ضریب هیزن ویلیامز (وابسته به جنس لوله)، D قطر لوله و L طول لوله می‌باشد.

فرمول بندی ریاضی معادلات

تودینی و پیلاتی (۷) بر اساس رابطه حداقل سازی کولینز (۱۴) یک رابطه کلی برای تشریح معادلات حاکم بر شبکه لوله ها ارائه کردند که مطابق زیر است:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_{11}\mathbf{Q} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{H} = -\mathbf{A}_{10}\mathbf{H}_0 \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{Q} = -\mathbf{q} \end{cases} \qquad (۴)$$

در معادله فوق $\mathbf{Q}^T=[Q_1,Q_2,\dots,Q_{np}]$ بردار [1,np] شامل دبی‌های مجهول در لوله ها، $\mathbf{H}^T=[H_1,H_2,\dots,H_{nn}]$ بردار [1,nn] شامل فشارهای مجهول در گره ها، $\mathbf{H}_0^T=[H_{01},H_{02},\dots,H_{0nt}]$ بردار [1,nt] شامل فشارهای معلوم در گره ها، $\mathbf{q}^T=[q_1,q_2,\dots,q_{nn}]$ بردار [1,nn] شامل تقاضاهای گرهی، np برابر تعداد لوله ها، nn برابر تعداد گره ها با فشار مجهول و nt برابر تعداد گره ها با فشار معلوم می‌باشد. ماتریس $\mathbf{A}_{11}$ مطابق زیر تعریف می گردد:

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} R_1|Q_1|^{m-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2|Q_2|^{m-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{np}|Q_{np}|^{m-1} \end{bmatrix} \qquad (۵)$$

دو نکته مهم را می توان از ماتریس فوق استنباط نمود : ۱- با توجه به اینکه دبی لوله ها در رابطه فوق داخل قدر مطلق قرار دارند، کلیه درایه های ماتریس فوق مثبت خواهند بود. ۲- ماتریس $\mathbf{A}_{11}$ قطری است.

ماتریس $\mathbf{A}_{12}$ نیز مطابق زیر تعریف می‌گردد:

$$\mathbf{A}_{12}(i,j) = \begin{cases} +1 & \text{اگر جریان لوله j از گره i خارج شود} \\ 0 & \text{اگر لوله j به گره i متصل نباشد} \\ -1 & \text{اگر جریان لوله j وارد گره i شود} \end{cases} \qquad (۶)$$

و ماتریس $\mathbf{A}_{12} = \mathbf{A}_{21}^T$ است. ماتریس $\mathbf{A}_{10}$ دقیقا مشابه ماتریس $\mathbf{A}_{12}$ تعریف می‌شود با این تفاوت که ماتریس $\mathbf{A}_{12}$ برای گره های با هد نامعلوم است ولی ماتریس $\mathbf{A}_{10}$ برای گره های دارای هد معلوم (مانند مخزن) تعریف می‌شود.

الگوریتم گرادیان سراسری

یکی از روش های مشهور حل معادلات شبکه لوله ها، روش گرادیان سراسری GGA است که بر اساس روش نیوتن فرمول بندی می‌گردد. در تحلیل هیدرولیکی با روش GGA روند حل به دو فرایند تکراری تقسیم می‌گردد. گام اول (گام داخلی) شامل محاسبه متغیرهای بروز شده می‌باشد که با حل دستگاه معادلات خطی تشکیل شده از ماتریس ژاکوبین بدست می‌آید. گام دوم (گام خارجی) شامل بروزرسانی مقادیر متغیرهای مسئله می‌باشد. گام داخلی معمولا بیشترین هزینه محاسباتی را در روش GGA دارد. برای تعیین الگوریتم گرادیان سراسری، معادلات اساسی حاکم بر جریان در شبکه لوله ها (معادله ۴) را در نظر بگیرید. با مشتق گیری از عبارت فوق رابطه به شکل زیر در خواهد آمد.

$$\begin{cases} \mathbf{D}_{11}\mathbf{dQ} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{dH} = \mathbf{dE} \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{dQ} = \mathbf{dq} \end{cases} \qquad (۷)$$

در معادله فوق $\mathbf{D}_{11}$ یک ماتریس قطری است و که درایه های آن مطابق رابطه زیر بدست می‌آیند:

$$\mathbf{D}_{11}=\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} R_1|Q_1|^{m-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2|Q_2|^{m-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{np}|Q_{np}|^{m-1} \end{bmatrix} \quad (۸)$$

در صورتی که از روش نیوتن برای حل سیستم معادلات ۴ استفاده شود، داریم:

(۹)

$$\mathbf{dQ}=\mathbf{Q}^{t}-\mathbf{Q}^{t+1}$$

$$\mathbf{dH}=\mathbf{H}^{t}-\mathbf{H}^{t+1}$$

$$\mathbf{dE}=\mathbf{A}_{11}\mathbf{Q}^{t}+\mathbf{A}_{12}\mathbf{H}^{t}+\mathbf{A}_{10}\mathbf{H}_{0}$$

$$\mathbf{dq}=\mathbf{A}_{21}\mathbf{Q}^{t}+\mathbf{A}_{12}\mathbf{H}^{t}+\mathbf{q}$$

باجایگذاری روابط فوق، الگوریتم گرادیان سراسری مطابق زیر بدست می‌آید (۱۳).

$$\mathbf{H}^{t+1}=\left[\mathbf{A}_{21}\mathbf{D}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\right]^{-1}\left[\mathbf{A}_{21}\mathbf{Q}^{t}+\mathbf{q}-\mathbf{A}_{21}\mathbf{D}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{11}\mathbf{Q}^{t}-\mathbf{A}_{21}\mathbf{D}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{10}\mathbf{H}_{0}\right] \quad (\text{۱۰-الف})$$

$$\mathbf{Q}^{t+1}=\mathbf{Q}^{t}-\mathbf{D}_{11}^{-1}\left(\mathbf{A}_{11}\mathbf{Q}^{t}+\mathbf{A}_{12}\mathbf{H}^{t+1}+\mathbf{A}_{10}\mathbf{H}_{0}\right) \quad (\text{۱۰-ب})$$

برای محاسبه $\mathbf{H}^{t+1}$ باید دستگاه معادله خطی در معادله (۱۰-الف) حل گرددکه در آن $\mathbf{V}=[\mathbf{A}_{21}\mathbf{D}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}]$ یک ماتریس متقارن با ابعاد [nn, nn] است که خواص آن در ادامه مورد بررسی قرار می گیرد.

الگوریتم گرادیان بر حسب فشارهای گرهی

این الگوریتم توسط تودینی ارائه شد (۱۵) و تفاوت آن با الگوریتم گرادیان سراسری در بروزرسانی ماتریس ژاکوبین است. ضرایب ماتریس ژاکوبین در الگوریتم گرادیان سراسری در هر تکرار بروزرسانی می‌شوند ولی در این الگوریتم ضرایب ماتریس ژاکوبین ثابت باقی می‌مانند. البته این امر سبب می شود تعداد تکرار الگوریتم جهت رسیدن به همگرایی مطلوب افزایش یابد ولی حجم محاسبات در هر تکرار نسبت به الگوریتم گرادیان سراسری کمتر است. برای تعیین الگوریتم گرادیان بر حسب فشارهای گرهی، معادلات اساسی حاکم بر جریان در شبکه لوله ها را بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{cases}\mathbf{A}_{11}\mathbf{Q}+\mathbf{A}_{12}\mathbf{H}=-\mathbf{A}_{10}\mathbf{H}_{0}\\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{Q}=-\mathbf{q}\end{cases} \quad (۱۱)$$

با استفاده از هر یک از دو معادله فوق می توان یک عبارت برای Q بدست آورد. اگر از معادله اول استفاده شود، بردار دبی لوله برابر است با:

$$\mathbf{Q}=-\mathbf{A}_{11}^{-1}[\mathbf{A}_{12}\mathbf{H}+\mathbf{A}_{10}\mathbf{H}_{0}] \quad (۱۲)$$

اگر عبارت فوق در معادله دوم قرار گیرد، یک معادله به شکل زیر بدست می‌آید:

$$-\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}[\mathbf{A}_{12}\mathbf{H}+\mathbf{A}_{10}\mathbf{H}_{0}]=-\mathbf{q} \quad (۱۳)$$

و می‌توان بصورت زیر بازنویسی نمود:

$$[\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}]\mathbf{H}=\mathbf{q}-\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{10}\mathbf{H}_{0} \quad (۱۴)$$

با مشتق گیری از دو طرف معادله فوق عبارت زیر حاصل می گردد:

$$[\mathbf{A}_{21}\mathbf{D}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}][\mathbf{dH}_{\mathbf{H}}]=[\mathbf{dq}_{\mathbf{H}}] \quad (۱۵)$$

در صورتی که از روش نیوتن برای حل سیستم معادلات ۱۴ استفاده شود، داریم:

$$\mathbf{dH}_{\mathbf{H}}=\mathbf{H}_{\mathbf{H}}^{t}-\mathbf{H}_{\mathbf{H}}^{t+1} \quad (۱۶)$$

$$\mathbf{dq}_{\mathbf{H}}=\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{H}_{\mathbf{H}}^{t}-\mathbf{q}+\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{10}\mathbf{H}_{0}$$

که باجایگذاری روابط فوق، الگوریتم گرادیان بر حسب فشارهای گرهی بدست می‌آید:

$$\mathbf{H}_{\mathbf{H}}^{t+1}=\mathbf{H}_{\mathbf{H}}^{t}-\left[\mathbf{A}_{21}\mathbf{D}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\right]^{-1}[\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{H}_{\mathbf{H}}^{t}-\mathbf{q}+\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{10}\mathbf{H}_{0}] \quad (۱۷)$$

برای محاسبه $\mathbf{H}^{t+1}$ باید دستگاه معادله خطی در معادله ۱۷ حل گردد که در آن $\mathbf{V}=[\mathbf{A}_{21}\mathbf{D}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}]$ یک ماتریس متقارن با ابعاد [nn, nn] است که خواص آن در ادامه مورد بررسی قرار می‌گیرد.

روش های چند شبکه ای جبری

در بسیاری از مسائل، امروزه از روش چند شبکه ای جبری AMG برای حل سیستم معادلات خطی بزرگ استفاده می‌شود. در عمل کاربرد روش های تکراری یک سطحی (مانند گوس-سایدل و ژاکوبی) برای حل سیستم های خطی دارای محدودیت هایی هستند. برای رفع این مشکلات در حل سیستم های بزرگ، استفاده از روش‌های سلسله مراتبی مانند AMG بسیار موثر و کارامد خواهد بود. الگوریتم های سلسله مراتبی برای شتاب دادن به همگرایی روش‌های تکراری در سیستم های بزرگ خطی شکل گرفته است.

انگیزه بوجود آمدن روش های سلسله مراتبی، ناتوانی روش های کلاسیک و یک سطحی جهت کاهش محاسبه خطا از یک تکرار تا تکرار بعدی است. روش های تکراری کلاسیک و یک سطحی اغلب روند همگرایی کندی دارند و نمی توانند همه نوسانات خطا را بطور موثر از بین ببرند (۱۳). به عبارت دیگر با استفاده از این روش ها مولفه های خطا با فرکانس بالا بسیار سریعتر از مولفه های خطا با فرکانس پایین تخفیف می‌یابند. ولی با استفاده از روش های سلسله

مراتبی مانند روش چند شبکه ای کلیه فرکانس های خطا در سطح مناسب تخفیف می‌یابند. در این روش ها برخلاف روش های کلاسیک‌تعداد تکرار بسیار کمتری برای همگرایی مورد نیاز است زیرا از شبکه های با اندازه های مختلف استفاده می شود. به عبارت دیگر با انتقال جواب ها به شبکه درشت تر فرکانس های پایین برای شبکه ریز تبدیل به فرکانس های بالا برای شبکه درشت می گردد و با تعداد تکرار کمتری حذف می شوند.

برای استفاده ازAMG ماتریس ضرایب سیستم باید خواص معینی را برآورده سازد. از لحاظ تئوری AMG را می توان فقط در ماتریس های استیلجس بکار برد ولی در عمل AMG را می توان برای بیشتر ماتریس های معین مثبت بکار برد (۱۶). نسخه جدیدی از روش چند شبکه ای با نام AGMG توسط Notay در سال ۲۰۱۰ ارائه شد (۱۸). این روش، به حافظه کامپیوتری کمتری نیاز دارد و ماتریس‌های شبکه در سطوح مختلف آن بسیار اسپارس است. بنابراین سرعت حل این روش از نسخه های قبلی روش های چند شبکه ای بیشتر است. اگر چه روش چند شبکه ای سنتی در دهه هشتاد توسعه یافت ولی نسخه های توسعه یافته این روش به عنوان موثرترین و مناسب ترین روش جبری برای حل معادلات بیضوی به شمار می‌رود.

کلیات روش های چندشبکه ای هندسی و جبری

دستگاه معادلات خطی در محیطی با شبکه‌بندی ریز Ω^h و اندازه شبکه h را در نظر بگیرید:

$$\mathbf{A}^h\mathbf{u}^h = \mathbf{b}^h \tag{۱۸}$$

$\mathbf{A}^h$ یک ماتریس معین مثبت قطری، $\mathbf{u}^h$ بردار مجهولات و b^h بردار معلومات است. از هر روش تکراری ساده‌ای نظیر ژاکوبی یا گوس–سایدل می‌توان برای حل این دستگاه معادلات بهره برد. اما بخاطر خصوصیت هموارسازی روش‌های تکراری رایج، فرکانس‌های پایین طیف خطا در روند تکرار به‌کندی کاهش می‌یابند. به‌علاوه، نشان داده می شودکه تعداد تکرارهای لازم برای کاهش خطا به میزان 10^{-1} برابر، به توان دوم تعداد مجهولات بستگی دارد. در دستگاه معادلات ۱۸، اگر v^h تقریبی از جواب دقیق یعنی u^h باشد، بردار خطا بصورت $\mathbf{e}^h = \mathbf{u}^h - \mathbf{v}^h$ نوشته می‌شود و مقدار باقیمانده از رابطه $\mathbf{r}^h = \mathbf{b}^h - \mathbf{A}^h\mathbf{v}^h$ بدست می‌آید. بنابراین معادله باقیمانده‌ها را می‌توان بصورت زیر بیان کرد:

$$\mathbf{A}^h\mathbf{e}^h = \mathbf{r}^h \tag{۱۹}$$

عملیات درشت‌کردن شبکه معمولاً با دو برابر کردن اندازه شبکه- بندی یعنی $h \to 2h$ در هر جهت انجام می‌پذیرد. با تبدیل یک شبکه ریز به درشت و محدود کردن بردار باقیمانده‌ها از طریق عملگر شبکه درشت $\mathbf{I}_h^{2h}$، منحنی هموار خطا، نوسانی می‌شود و روش تکراری موثرتر عمل می‌کند. در واقع در شبکه درشت ماتریس تکرار شعاع طیفی کمتری دارد و روند تکراری به خوبی، حالت نوسانی خطا را از بین می‌برد بعلاوه در شبکه درشت به دلیل کاهش تعداد نقاط به نصف حجم محاسبات کاهش پیدا می‌کند.

در روش چندشبکه ای جبری (AMG) بر خلاف روش چند شبکه ای هندسی به هندسه مسئله نظیر دو برابر کردن اندازه شبکه توجهی نمی‌شود. بلکه دستگاه معادلات خطی فقط با استفاده از اطلاعات ماتریس ضرایب حل می‌گردد. در این روش سلسله مراتب درشت سازی شبکه ها بطور خودکار انجام می‌شود. شبکه درشت زیر مجموعه ای از شبکه ریز است. عملگر محدودسازی $\mathbf{I}_h^{2h}$ با توجه به شکل شبکه تعریف می‌شود بطوریکه اگر درایه ماتریس، a_{ij}، به اندازه کافی بزرگ باشد اتصال قوی بین نقاط i و j برقرار بوده و نقاط در شبکه درشت مطابق دستورالعمل زیر تعیین می‌شوند.

هر نقطه در شبکه درشت با حداقل یک نقطه از شبکه ریز اتصال قوی دارد.

هیچ دو نقطه ای در شبکه درشت نباید با یکدیگر اتصال قوی داشته باشند.

با تبدیل شبکه ریز به درشت و شبکه درشت به درشت تر و محدود کردن بردار باقیمانده‌ها در هر مرحله میزان خطا کاهش یافته و جواب اصلاح شده مسئله، به شبکه اصلی منتقل می‌گردد. این فرایند گسسته سازی C/F نامیده می‌شود.

شتاب دهنده های روش چند شبکه ای

یکی از روش های شناخته شده برای سرعت بخشیدن به AMG (و همچنین به عنوان یک حل کننده تکراری یک سطحی) استفاده از پیش شرط سازها در روش های کرایلف[1] می‌باشد (۱۶). روش های کرایلف برای سرعت بخشیدن به روش های تکراری در مواقعی که مانعی برای همگرایی این روش ها وجود دارد، بکار می‌رود. مشکلات همگرایی، ناشی از پراکندگی مقادیر ویژه در سیستم اصلی مقادیر ویژه می‌باشد. همگرایی روش های پیش شرط ساز کرایلف از روش های چند شبکه ای به تنهایی یا روش های تکراری در یک سطح بهتر است. در ادامه به کاربرد روش پیش شرط ساز کرایلفAMG-CG وAGMGدر حل دستگاه معادلات خطی روش های گرادیان می‌پردازیم. یکی از روش های معروف برای سرعت بخشیدن به روش‌های چند شبکه ای استفاده از پیش شرط ساز گرادیان مزدوج (AMG-CG) است که برای اولین بار زچین و همکاران (۱۳) در سال ۲۰۱۲ از آن در تحلیل هیدرولیکی شبکه های آبرسانی استفاده کردند.

1- Krylov

در مقاله حاضر علاوه بر روش AMG-CG برای اولین بار از یک روش چند شبکه ای جدید به نام AGMG استفاده می شود (۱۷ و ۱۸). در روش AGMG فرایند درشت سازی شبکه به گونه ای است که ماتریس ضرایب در شبکه درشت دارای درایه های غیر صفر کمتری است و از روش AMG-CG اسپارستر[1] است. در این حالت حل دستگاه معادله خطی سریعتر خواهد بود. علاوه بر آن در روش AGMG از یک روش گرادیان مزدوج ویژه با نام FCG[2] استفاده می‌شود که برای حل ماتریس های استیلجس بسیار مناسب و کاراست. این دو خصوصیت برتری روش AGMG بر AMG-CG را سبب می‌شود.

الگوریتم روش چندشبکه ای جبری و گرادیان مزدوج

برای حل دستگاه معادلات خطی $\mathbf{A}^h\mathbf{u}^h = \mathbf{b}^h$ می توان از روش های تکراری به شکل کلی زیر استفاده نمود،

$$\mathbf{u}_{t+1}^h = \mathbf{u}_t^h + (\mathbf{M}^h)^{-1}(\mathbf{b}_t^h - \mathbf{A}^h\mathbf{u}_t^h) \qquad (۲۰)$$

در روش تکراری ژاکوبی ماتریس پیش شرط ساز $\mathbf{M}^h$ از درایه های قطر اصلی ماتریس $\mathbf{A}^h$ تشکیل می‌شود. در روش گوس سایدل ماتریس $\mathbf{M}^h$ از ماتریس پایین مثلثی ماتریس $\mathbf{A}^h$ ساخته می‌شود. اگر روش گرادیان مزدوج به همراه پیش شرط ساز بکار برده شود، الگوریتم آن بصورت زیر خواهد بود (۱۷):

۱- $\mathbf{r}_0^h$ را از رابطه $\mathbf{r}_0^h = \mathbf{b}^h - \mathbf{A}^h\mathbf{u}^h$ محاسبه کنید.

۲- قراردهید: $t = 0, \mathbf{p}_0^t = \mathbf{z}_0^t, \mathbf{z}_0^t = (\mathbf{M}^t)^{-1}\mathbf{r}_0^t$

۳- محاسبه کنید:

$$\mathbf{r}_{t+1}^h = \mathbf{r}_t^h - \boldsymbol{\alpha}_t^h\mathbf{A}^h\mathbf{p}_t^h, \mathbf{u}_{t+1}^h = \mathbf{u}_t^h + \boldsymbol{\alpha}_t^h\mathbf{p}_t^h, \boldsymbol{\alpha}_t^h = \frac{(\mathbf{r}_t^h)^T z_t^h}{(\mathbf{p}_t^h)^T\mathbf{A}^h\mathbf{p}_t^h}$$

۴- اگر $\mathbf{r}_{t+1}^h$ به اندازه کافی کوچک است به گام ۵ بروید، در غیر اینصورت:

۴-۱- محاسبه کنید:

$$\mathbf{p}_{t+1}^h = \mathbf{z}_{t+1}^h - \boldsymbol{\beta}_t^h\mathbf{p}_t^h, \boldsymbol{\beta}_t^h = \frac{(\mathbf{z}_{t+1}^h)^T\mathbf{r}_{t+1}^h}{(\mathbf{z}_t^h)^T\mathbf{r}_t^h}, \mathbf{z}_{t+1}^h = (\mathbf{M}^h)^{-1}\mathbf{r}_{t+1}^h$$

۴-۲- قرار دهید $t=t+1$ و به گام ۳ بروید.

۵- $\mathbf{u}_{t+1}^h$ جواب مسئله است.

در الگوریتم فوق اصطلاحا $\boldsymbol{\alpha}_t$ پارامتر طول تکرار و $\mathbf{p}_t$ بردار جهت جستجو نامیده می شود. در روش AGMG پیش شرط ساز $\mathbf{M}^h$ (در گام ۴-۱) بوسیله هموار کننده گوس سایدل متقارن $\mathbf{M} = \mathbf{L}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{U}$ تعریف می شود که در آن L ماتریس پایین مثلثی A، D ماتریس قطری A و U ماتریس بالا مثلثی A می باشند. ماتریس درشت توسط عملگر گالرکین $\mathbf{M}^{2h} = \mathbf{I}_h^{2h}\mathbf{M}^h\mathbf{I}_h^{2h}$ ساخته می شود که در آن $\mathbf{I}_h^{2h} = \mathbf{I}_{2h}^{h\ T}$ است. برای حذف فرکانس های خطای باقیمانده، با استفاده از روش سریع خطی LAPACK، درشت ترین شبکه حل می شود (۱۸). در گام بعد مقدار اصلاح شده $\mathbf{z}$ به شبکه اصلی انتقال می‌یابد و گام ۴-۱ ادامه پیدا می کند.

جزئیات روش AMG-CG در (۱۶ و ۱۷) و جزئیات روش AGMG در (۱۸) شرح داده شده است.

کاربرد روش چند شبکه ای در تحلیل شبکه لوله ها

همانطور که در بخش های پیشین ذکر شد، تمرکز این مقاله به کابرد روش AGMG برای تسریع گام داخلی روش GGA اختصاص دارد. اهمیت حل سریع این گام محاسباتی به این دلیل است که بیشترین هزینه محاسباتی در روش های گرادیان به این قسمت تعلق دارد. از نقطه نظر تئوری روش های چند شبکه ای فقط در ماتریس‌های استیلجس[3] قابلیت همگرایی دارند. ماتریس استیلجس یک ماتریس معین مثبت متقارن است که درایه های غیر قطری آن منفی هستند. بنابراین باید ابتدا نشان داده شود که ماتریس V که در بخش‌های ۴ و ۵ ارائه شد، یک ماتریس استیلجس است.

در صورتی که ماتریس $\mathbf{V} = [\mathbf{A}_{21}\mathbf{D}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}]$ بطور دقیق تر بررسی گردد، باتوجه به ماتریس های A_{12} و A_{21} مطابق زیر تعریف می‌شود:

$$[\mathbf{V}]_{i,k} = \begin{cases} \sum_j [\mathbf{D}_{11}]_{jj}^{-1} & \text{اگر } k=i \\ -[\mathbf{D}_{11}]_{jj}^{-1} & \text{اگر لوله } j \text{ به گره } i \text{ و گره } k \text{ متصل باشد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \qquad (۲۱)$$

با توجه به اینکه درایه های ماتریس D_{11} مثبت هستند، بدون در نظر گرفتن شکل فیزیکی شبکه نتیجه می شود که درایه های روی قطر اصلی ماتریس V همیشه مثبت و درایه های غیرقطری ماتریس V همیشه منفی هستند. به عبارت دیگر ماتریس V برای هر شبکه لوله دلخواه یک ماتریس استیلجس است.

بدین ترتیب می‌توان برای حل دستگاه معادلات خطی در روش‌های گرادیان سراسری و گرادیان برحسب فشارهای گرهی از روش های چند شبکه ای استفاده نمود.

مثال عددی

در این بخش روش های حل کننده خطی در شبکه های بزرگ آب بررسی و آزمایش می شوند. کلیه محاسبات و برنامه های حل دستگاه معادلات خطی در نرم افزار MATLAB اجرا شده اند.

1- Sparse
2- Flexible Conjugate Gradient
3- Stieltjes

مجموعه ای از شبکه های حلقوی منظم با N×N گره را در نظر بگیرید که در آن N (تعداد گره ها در هر ردیف یا ستون) برابر ۲۰، ۵۰، ۱۰۰ و ۲۰۰ می باشد، حجم محاسبات با زیاد شدن N به شدت افزایش می یابد. به عنوان نمونه در شکل۱، یک شبکه ۲۰ × ۲۰ نشان داده شده است. طول کلیه لوله ها برابر ۱۰۰ متر و قطر کلیه لوله ها برابر ۲۰۰ میلیمتر در نظر گرفته شده است. در هر کدام از گره ها مقدار تقاضای گرهی با استفاده از اعداد تصادفی بین صفر تا ۱ لیتر بر ثانیه انتخاب شده است. شبکه های فوق بوسیله روش هایGGAو گرادیان بر حسب فشارگرهی تحلیل می شوند و دستگاه معادلات خطی حاصله در هر تکرار بوسیله ۸ روش سریع تکراری و مستقیم مختلف حل می‌گردد. این روش ها عبارتند از:

روش مجذور گرادیان مزدوج به همراه فاکتورگیری ناقص اسپارس LU[1](CGS+LUINC).

روش حداقل باقیمانده به همراه فاکتورگیری ناقص اسپارس LU[2](GMRES+LUINC).

روش گرادیان مزدوج تثبیت شده به همراه فاکتورگیری ناقص اسپارس LU[3](BICGSTAB+LUINC).

روش شبه باقیمانده حداقل به همراه فاکتورگیری ناقص اسپارس LU[4](QMR+LUINC).

روش مستقیم چولسکی (CHOLESKY).

روش پیش شرط ساز گرادیان مزدوج به همراه فاکتورگیری چولسکی[5] (PCG+Cholesky).

روش چند شبکه ای جبری به همراه پیش شرط ساز گرادیان مزدوج [6](AMG+CG).

روش چند شبکه ای جبری بر اساس متراکم سازی [7](AGMG).

هر یک از روش های کرایلف CGS، GMRES، BICGSTAB، QMR وPCG بدون استفاده از پیش شرط سازهای LU و چولسکی نمی‌توانند در شبکه های مذکور به همگرایی دست یابند. زیرا در حل دستگاه معادلات بزرگ، روش های تکراری قادر به حذف فرکانس های پایین ترم خطا نیستند.

بطور کلی نوع روش بکار برده شده در حل دستگاه معادله خطی، تاثیری بر نرخ همگرایی روش های تحلیل هیدرولیکی ندارد به همین دلیل در این بخش به بررسی یک گام محاسباتی هر یک از روش های گرادیان سراسری و گرادیان بر حسب فشارهای گرهی پرداخته می‌شود. دستگاه معادله خطی در دو روش فوق دقیقا یکسان است. زمان محاسبات در روش های حل دستگاه معادلات خطی با شرط $\|\varepsilon\| \le 1.e-6$ بدست می آید که در آنجا $\|\varepsilon\|$ نرم باقیمانده بر اساس مقدار حداکثر اختلاف بین مجهولات در دو گام متوالی محاسباتی تعریف می‌شود.

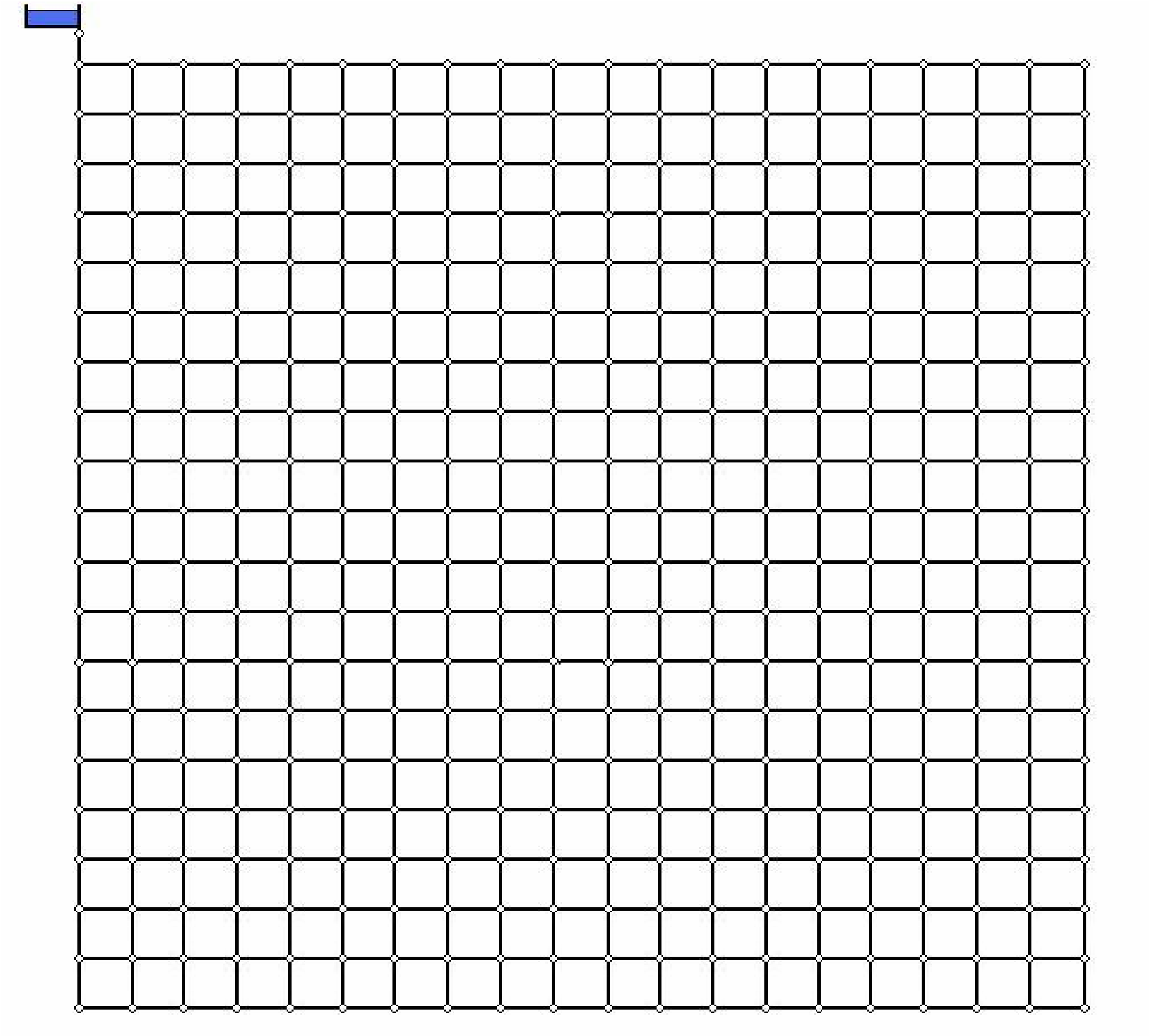
$$\|\varepsilon\| = \max|\varepsilon_i| \qquad (۲۲)$$

در شکل۲زمان همگرایی حل دستگاه معادلات خطی توسط روش های مختلف برای شبکه های ۲۰×۲۰ ، ۵۰×۵۰ ، ۱۰۰×۱۰۰ و ۲۰۰×۲۰۰بصورت لگاریتمی مقایسه شده است. جدول ۱ مقادیر دقیق زمان محاسباتی حل دستگاه معادلات خطی را نشان می دهد. در شبکه ۲۰×۲۰ زمان همگرایی روش AMG-CG طولانی تر از سایر روش هاست و روش چولسکی که در نرم افزارهای EPANET و WATERGEMS مورد استفاده قرار می‌گیرد کوتاهترین زمان همگرایی را دارد. سایر روش ها دارای زمان همگرایی تقریبا یکسانی هستند. در شبکه ۵۰×۵۰ زمان همگرایی روش های تکراری شامل CGS+LUINC، GMRES+LUINC، BICGSTAB+LUINC و QMR+LUINC نسبت به سایر روش ها بیشتر شده است و روش AMG-CG در این شبکه نسبت به ۴ روش فوق عملکرد بهتری دارد. ولی همچنان روش چولسکی کمترین زمان همگرایی را دارد. هرچند روش AGMG نیز دارای زمان همگرایی تقریبا یکسانی با روش چولسکی می‌باشد. در شبکه بزرگ ۱۰۰×۱۰۰ روش PCG+CHOLESKY همگرا نمی‌شود. ولی سایر روش های تکراری که از فاکتورگیری LU استفاده می‌کنند، در زمان تقریبا برابر یک ثانیه همگرا می‌شوند. در این شبکه روش AGMG کمترین زمان همگرایی را دارد و روش های چولسکی و AMG-CG در زمانی تقریبا برابر ۰/۲ ثانیه همگرا می‌گردند. در شبکه بسیار بزرگ ۲۰۰×۲۰۰ روش های چند شبکه ای عملکرد بسیار مطلوبی دارند و در کمتر از یک ثانیه همگرا می‌شوند. روش AGMG کمترین زمان همگرایی را دارد. روش AMG-CG نیز از روش چولسکی زودتر همگرا می‌شود.

نتایج و بحث

در مقاله حاضر بطور کلی سه نوع روش مختلف برای حل دستگاه معادلات خطی بکار برده شد: ۱-روش های مستقیم ۲-روش های تکراری ۳-روش های چند شبکه ای.

1- Conjugate Gradients Squared Method +Sparse Incomplete LU Factorization
2- Generalized Minimum Residual Method+Sparse Incomplete LU Factorization
3- Biconjugate Gradients Method+Sparse Incomplete LU Factorization
4- Quasi-Minimal Residual Method+Sparse Incomplete LU Factorization
5- Preconditioned Conjugate Gradients Method +Cholesky
6- Algebraic Multi-Grid +Conjugate Gradients Method
7- Aggregation Based Algebraic Multi-Grid Method



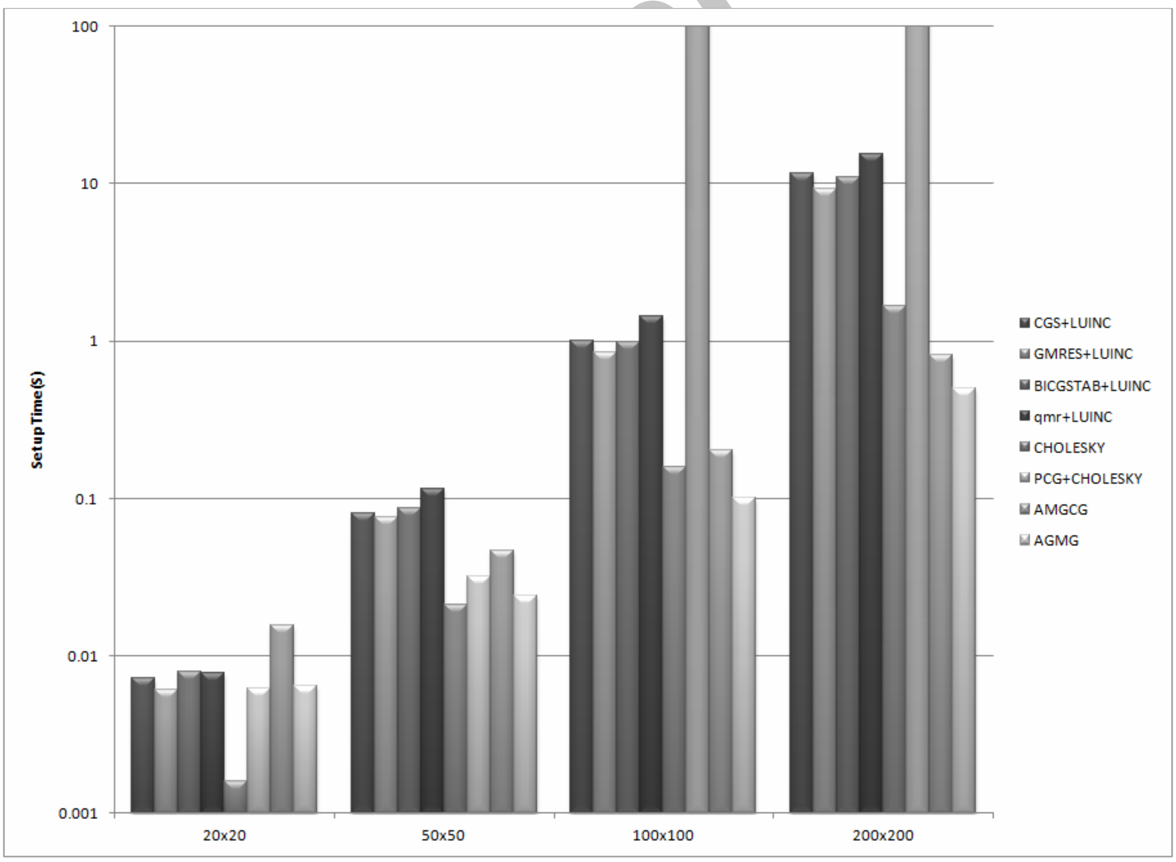
شکل۱- یک شبکه لوله 20x20

روش های مستقیم بسیار سریع و کارا هستند ولی با بزرگ شدن شبکه نیاز به حافظه کامپیوتری زیادی دارند به همین دلیل علی رغم عملکرد مناسب روش چولسکی در شبکه های کوچک، سرعت همگرایی این روش هادر شبکه های بزرگ، کاهش می‌یابد. روش‌های تکراری نیاز به حافظه کامپیوتری زیادی ندارند ولی برای تسریع سرعت همگرایی به روش های پیش شرط ساز مناسب با مسئله مورد بررسی، نیاز دارند. روش های چند شبکه ای با ترکیب روش های تکراری و روش های مستقیم بسیار سریع و کارا هستند و نیازی به حافظه کامپیوتری زیادی ندارند. همانطور که مشاهده شد روش های چند شبکه ای بویژه روش AGMGدر شبکه های بزرگ با بیش از ۲۵۰۰ گره زمان محاسبات کمتری نسبت به سایر روش ها صرف می‌کند. بدین ترتیب به عننوان نتیجه نهایی می توان گفت: بهتر است در شبکه های کوچکتر از روش چولسکی و برای شبکه های دارای بیشتر از ۲۵۰۰ گره از روش چند شبکه ای AGMG در حل دستگاه معادله خطی روش های گرادیان استفاده نمود. سایر روش های تکراری نیز در شبکه های بزرگ قابل رقابت با روش های چند شبکه ای و چولسکی نیستند.

اهمیت این کاهش زمانی محاسبات، در نشت یابی شبکه های آب و یا کالیبراسیون مشخص می‌شود، زیرا در این نوع مسائل شبکه مورد بررسی هزاران بار تحلیل می‌شود. همچنین در بهینه سازی شبکه های آبرسانی پس از هر بار انتخاب قطر یک بار تحلیل هیدرولیکی انجام می‌شود و بنابراین بهینه سازی شبکه های بزرگ آبرسانی نیازمند صدهاهزار بار تحلیل هیدرولیکی است که در این حالت، زمان تحلیل ممکن است تا چند ساعت کاهش یابد.

جدول۱- زمان همگرایی روش های مختلف در یک گام تحلیل شبکه های مختلف (ثانیه)

روش تحلیل	حل کننده دستگاه معادله خطی	زمان محاسبه در یک تکرار (ثانیه) 20X20= اندازه شبکه	زمان محاسبه در یک تکرار (ثانیه) 50X50=اندازه شبکه
گرادیان سراسری و گرادیان بر حسب فشار گرهی	CGS+LUINC	0.0072	0.081
	GMRES+LUINC	0.0061	0.076
	BICGSTAB+LUINC	0.0079	0.087
	QMR+LUINC	0.0078	0.115
	CHOLESKY	0.0016	0.021
	PCG+CHOLESKY	0.0062	0.032
	AMGCG	0.0156	0.0468
	AGMG	0.0064	0.024
روش تحلیل	**حل کننده دستگاه معادله خطی**	**زمان محاسبه در یک تکرار (ثانیه) 100X100= اندازه شبکه**	**زمان محاسبه در یک تکرار (ثانیه) 200X200= اندازه شبکه**
گرادیان سراسری و گرادیان بر حسب فشار گرهی	CGS+LUINC	1.011	11.533
	GMRES+LUINC	0.845	9.269
	BICGSTAB+LUINC	0.987	10.962
	QMR+LUINC	1.43	15.386
	CHOLESKY	0.157	1.675
	PCG+CHOLESKY	همگرا نمی شود	همگرا نمی شود
	AMGCG	0.203	0.811
	AGMG	0.101	0.499



شکل۲- زمان همگرایی روش های مختلف در یک گام تحلیل شبکه های مختلف

نتیجه گیری

در این مقاله از روش چند شبکه ای AGMG برای حل دستگاه معادله خطی حاصله از تحلیل شبکه های آبرسانی بوسیله روش GGAو روش گرادیان بر حسب فشار گرهی استفاده شد. این روش در شبکه های بزرگ با هزاران لوله دارای بیشترین سرعت همگرایی می باشد ونسبت به روش چولسکی که در نرم افزار EPANET بکار برده شده است کارایی مناسب تری دارد. با توجه به اینکه زمان همگرایی در شبکه های آبرسانی بزرگ مقیاس از اهمیت بسیاری برخوردار است، پیشنهاد می شود برای شبکه های با بیش از 2500 لوله به جای روش چولسکی از روش AGMG برای حل دستگاه معادلات خطی حاصله در روش های تحلیل هیدرولیکی فوق استفاده گردد.

منابع

1- Cross H. 1936. Analysis of flow in networks of conduits or conductors, in No. 286, University of Illinois, Engineering Experimental Station, Urbana, Illinois, Bulletin, Editor.
2- Bhave P.R. and Gupta R. 2006. Analysis of Water Distribution Networks. Oxford, ed. A.S.I. Ltd. U.K.
3- Martin D.W. and Peters G. 1963. The application of Newton's method to network analysis by digital computer. Journal of Institution of Water Engineers and Scientists,: Vol. 17, p. 115-129.
4- Shamir U. and Howard C.D. 1968. Water distribution systems analysis. Journal of the Hydraulics Division, ASCE, Vol. 94, No. HY1: p. 219-234.
5- Wood D.J. and Charles C.O.A. 1972. Hydraulic network analysis using linear theory. Journal of the Hydraulics Division, ASCE, Vol. 98, No. HY7: p. 1157-1170.
6- Collins A.G. and Johnson R.L. 1975. Finite-Element Method for Water Distribution Networks. Journal American Water Works. Association, Vol. 67(7): p. 385-389.
7- Todini E. and Pilati S. 1987. A Gradient Algorithm for the Analysis of Pipe Networks, in International Conference on Computer Applications for Water Supply and Distribution. Leicester, UK.
8- Powell M.J.D. 1978. Algorithms for Nonlinear Constraints that Use Lagrangian Functions. Math. Prog, p. 224–248.
9- Luenberger D.G. 2008. Linear and Nonlinear Programming. International Series In Operations Research and Management Science, Stanford University.
10- Bertsekas D.P. 1996. Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods. Athena Scientific, Belmont, Massachusetts.
11- Webster R. 1998. Efficient Algebraic Multigrid Solvers With Elementary Restriction And Prolongation. International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 28, p. 317-336.
12- Mahdizadeh H. and Jaefarzadeh M.R. 2009. Application of Multigrid method for pipe network analysis, in 8th International Congress on civil Engineering. Shiraz University, Shiraz, Iran.
13- Zecchin A.C., Thum P., Simpson A.R. and Tischendorf C. 2012. Steady-state Behavior of Large Water Distribution Systems: The Algebraic Multigrid Method For The Fast Solution of Linear Step. Journal of Water Resources Planning and Management, ASCE, Vol. 138(6): p. 639–650.
14- Collins M.A., Cooper L., Helgason R., Kennington J. and Leblank L. 1978. Solving the pipe network analysis problem using optimization techniques. Management science, Vol. 24(7): p. 747-760.
15- Todini E. 2006. On the convergence properties of the different pipe network algorithms, in 8th Annual Water Distribution Systems Analysis Symposium. Cincinnati, Ohio, USA.
16- St¨uben K. 2001b. An introduction to algebraic multigrid (U. Trottenberg, C.Oosterlee, and A. Sch¨uller, eds.) Academic Press, London, p. 413–532.
17- Iwamura C., Costa F.S., Sbarski I., Easton A. and Li N. 2003. An efficient algebraic multigrid preconditioned conjugate gradient solver. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 192(20-21): p. 2299-2318.
18- Notay Y. 2010. An aggregation-based algebraic multigrid method. Electronic Trans. Numer. Anal., Vol. 37: p. 123-146.

Journal of Water and Soil
Vol. 28, No. 1, Mar.-Apr. 2014, p. 61-71

نشریه آب و خاک (علوم و صنایع کشاورزی)
جلد ۲۸، شماره ۱، فروردین – اردیبهشت ۱۳۹۳، ص. ۷۱-۶۱

Application of Multi-Grid Method for Solving System of Linear Equations in Hydraulic Analysis of Pipe Networks

N. Moosavian[1*] - M.R. Jaefarzadeh[2]
Received:12-02-2013
Accepted:16-02-2014

Abstract

The gradient-based algorithms are widely used for hydraulic analysis of pipe networks. Solving system of linear equations has the most computational cost in the gradient-based methods particularly for large networks with more than hundreds of variables. The Jacobian matrix form in the gradient-based methods is square and banded. Elements of this matrix are function of flow rate and hydraulic resistance of pipe. The sparse Cholesky method with node reordering is commonly applied for solving system of linear equations in the EPANET and WATERGEMS softwares. As an alternative, the Jacobian matrix can be solved using the Multi-Grid method. This paper studies the application of pre-conditioner methods such as AMG-CG and AGMG for solving the Jacobian matrix and compares its results with other iterative and direct solvers. According to the results, AGMG demonstrates better performance than AMG-CG in all studied cases and it is the best method for solving system of linear equations in hydraulic analysis of huge pipe networks.

Keywords: Pipe networks, Hydraulic analysis, Multi-Grid method

1-PhD Graduated of Civil Engineering Department, University of Torbat-e-Heydarieh
(* - Corresponding Author Email: Naser.moosavian@yahoo.com)
2- Professor of Civil Engineering Department, Faculty of Engineering, Ferdowsi University of Mashhad