



## حل شبه تحلیلی معادله‌ی سنت و نانت در محدوده جریان یکنواخت

محمد مهدی حیدری<sup>۱\*</sup> - صلاح کوچک‌زاده<sup>۲</sup>

تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۰۳/۱۹

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۴/۰۶/۰۷

### چکیده

ایجاد جریان غیرماندگار در شبکه‌های آبیاری نتیجه‌ی انجام عملیات بهره‌برداری برای پاسخگویی به تغییرات نیاز آبی است که بر عملکرد هیدرولیکی شبکه تاثیر می‌گذارد. افزایش عملکرد هیدرولیکی نیاز به شناخت جریان غیرماندگار در شبکه و کمی کردن عوامل موثر آن دارد. معادلات سنت و نانت که بر جریان غیرماندگار حاکم است، حل تحلیلی ندارند و باید با استفاده از روش‌های عددی حل شود. در این پژوهش، ابتدا معادلات حاکم بر جریان غیردائمی در اطراف دبی و عمق اولیه خطی شده و سپس یک رابطه‌ی شبه تحلیلی برای محاسبه‌ی دبی در زمان‌های مختلف ارائه شد. شبیه‌سازی‌های متعددی با استفاده از مدل عددی برای تغییرات دبی ۱۰، ۲۰ و ۳۰ درصد دبی اولیه صورت گرفت و نتایج مدل عددی با رابطه‌ی ارائه شده مقایسه گردید. نتایج نشان داد که مقدار حداکثر خطا رابطه‌ی ارائه شده برای  $KF2 > 1$ ، کمتر از ۳/۸ درصد است.

**واژه‌های کلیدی:** تبدیل لاپلاس، جریان غیرماندگار، خطی‌سازی معادله سنت و نانت، شبکه‌های آبیاری

### مقدمه

گرفته شود. پرایزمن (۱۵) شمای چهار نقطه‌ای را با استفاده از روش تفاضل محدود برای حل معادلات حاکم بر جریان غیرماندگار پیشنهاد نمود، این شمای عددی در بسیاری از مدل‌ها از جمله HEC-2، ISIS، RAS استفاده شده است. فنما و چدری (۴) برای شبیه‌سازی یک بعدی جریان شکست سد، شمای مک کورمک که به صورت صریح بوده و دارای دو مرحله‌ی پیش‌گو-اصلاحگر می‌باشد را بکار بردند. شبیه‌سازی جریان غیرماندگار در شبکه‌های آبیاری بدلیل تغییرات ناگهانی دبی ورودی از پیچیدگی‌های خاصی برخوردار است و در این زمینه محققین متعددی فعالیت نموده‌اند. کوچک‌زاده و همکاران (۱۰) با استفاده از مدل عددی ICSS-POM به بررسی رفتار جریان در شبکه‌ی آبیاری قوری چای پرداختند و مناسب‌ترین گزینه‌ی بهره‌برداری از این شبکه را پیشنهاد دادند. منتظری‌نمین و همکاران (۱۳) با استفاده از شمای تصنیف زمان معادلات جریان غیرماندگار را برای تغییرات ناگهانی دبی جداسازی و برای صحت‌سنجی این شمای عددی از مدل Mike11 استفاده نمودند، آن‌ها دقت این شمای عددی را قابل قبول توصیف کرده‌اند. حیدری و همکاران (۶) برای شبیه‌سازی جریان در کانال‌های آبیاری از شمای تصنیف زمان استفاده نمود و نتایج مدل عددی را با داده‌های آزمایشگاهی مقایسه کردند. نتایج آن‌ها نشان داد روش تصنیف زمان برای شبیه‌سازی جریان در کانال‌های آبیاری دقت مناسبی دارد. قبادیان و گلزاری (۵) با استفاده از روش تفاضل محدود، معادلات سنت و نانت را منفصل و جریان غیرماندگار در شبکه آبیاری دربند کرمانشاه را شبیه‌سازی کردند.

جریان غیرماندگار در شبکه‌های آبیاری به دلیل اجرای برنامه‌های تحویل و توزیع آب و انجام عملیات بهره‌برداری برای پاسخگویی به تغییرات نیاز آبی ایجاد می‌شود. این نوع جریان باعث پیچیدگی در تحویل و توزیع آب، کاهش عملکرد هیدرولیکی شبکه و متفاوت شدن میزان عرضه و تقاضای آب در شبکه می‌شود. بهبود شرایط بهره‌برداری مستلزم شناخت کافی جریان غیردائمی و کمی کردن ویژگی‌های آن در کانال‌های آبیاری است. معادلات حاکم بر جریان غیردائمی معادلات سنت و نانت است که از نوع مشتقات جزئی غیرخطی بوده و حل تحلیلی ندارند. روش‌های عددی متعددی در سه دهه‌ی اخیر برای حل این معادلات ابداع شده و به کار رفته‌اند. از روش‌های حل معادلات سنت و نانت می‌توان به روش‌های تفاضل محدود، حجم محدود، المان محدود و روش منحنی مشخصه اشاره نمود. استوکر اولین روش عددی را برای حل معادلات سنت و نانت با استفاده از روش منحنی مشخصه ارائه داد (۵). شمای عددی ایشان بصورت صریح بوده و برای پایداری آن باید گام زمانی کوچک در نظر

۱- استادیار گروه مهندسی آب، پردیس کشاورزی و منابع طبیعی، دانشگاه رازی کرمانشاه

\*- نویسنده مسئول: (Email: mm.heidari@razi.ac.ir)

۲- استاد گروه مهندسی آبیاری و آبادانی، پردیس کشاورزی و منابع طبیعی، دانشگاه تهران

در زمینه حل تحلیلی و شبه تحلیلی جریان غیرماندگار در شبکه‌های آبیاری تحقیقات اندکی صورت گرفته است. هدف اصلی این پژوهش ارائه یک روش شبه تحلیلی برای شبیه‌سازی جریان غیرماندگار در شبکه‌های آبیاری است.

### مواد و روش‌ها

معادلات سنت‌ونانت براساس متغیرهای هیدرولیکی مورد نظر به صورت‌های مختلف ارائه شده است. در صورتی که دو متغیر عمق جریان و دبی برای تعریف شرایط جریان به کار رود و دبی جانبی وجود نداشته باشد، این معادلات به صورت روابط (۱) و (۲) می‌باشد (۲):

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial(Q^2/A)}{\partial x} + gA \frac{\partial h}{\partial x} + gA(S_f - S_0) = 0 \quad (2)$$

که در آن، A سطح مقطع جریان، Q دبی جریان، h عمق جریان آب،  $S_f$  شیب خط افت انرژی،  $S_0$  شیب کف کانال، g شیب ثقل، x و t به ترتیب متغیرهای مربوط به مکان و زمان می‌باشد.

### شمای تنصیف زمان

برای حل عددی معادلات سنت و نانت شمهای مختلفی وجود دارد. تنصیف زمان یکی از شمهای حل معادله حاکم بر جریان غیرماندگار است. در شمای تنصیف زمان ابتدا ترم جابجایی مطابق روش فروم به صورت رابطه (۳) منفصل می‌شود (۱۳):

$$Q_i^* = Q_i^n - \frac{1}{2}(Q_{i-1}^n - Q_{i+1}^n)\varepsilon + \frac{1}{2}(Q_{i-1}^n - 2Q_i^n + Q_{i+1}^n)\varepsilon^2 \quad (3)$$

در رابطه‌ی فوق، n نمایانگر گام زمانی فعلی، i نمایانگر گام مکانی،  $\varepsilon$  عدد کورانت،  $Q_i^*$  مقدار جدید دبی جریان می‌باشد و سایر پارامترها قبلاً تعریف شده‌اند. بعد از حل ترم جابجایی، ترم‌های اصطکاک مطابق رابطه‌ی (۴) از معادله‌ی اندازه حرکت جدا شده و به صورت رابطه‌ی (۴) منفصل می‌شود.

$$Q_i^{**} = Q_i^* - gA_i \Delta t S_{fi}^* \quad (4)$$

در روابط فوق  $Q_i^{**}$  مقدار جدید دبی جریان و t اندازه گام زمانی می‌باشد. بعد از اینکه ترم جابجایی و ترم‌های اصطکاک معادله‌ی اندازه حرکت برای کل میدان محاسباتی حل گردید، ترم ثقلی معادله‌ی اندازه حرکت و معادله‌ی پیوستگی به صورت روابط (۵) و (۶) گسسته می‌شوند. ورود ضریب وزنی  $\alpha$  در منفصل‌سازی معادلات مزبور، به منظور دستیابی به فرم‌های صریح و ضمنی صورت گرفته است (۱۳).

$$\frac{Q_{i+1/2}^{n+1} - Q_{i+1/2}^{n*}}{\Delta t} + gA_{i+1/2}^n \frac{1}{\Delta x} \left[ \alpha (y_{i+1}^n - y_i^n) + (1-\alpha)(y_{i+1}^{n+1} - y_i^{n+1}) \right] = 0 \quad (5)$$

درستی مدل آنها برای جریان غیرماندگار رضایت بخش است. اسلام و همکاران (۷) مدل عددی با استفاده از شمای پرایزمن برای شبیه‌سازی جریان غیرماندگار در شبکه‌های آبیاری با وجود سازه‌های مختلف نظیر آبگیر، تنظیم کننده، آشپار و غیره را ارائه دادند و نتایج مدل را با داده‌های واقعی مقایسه کردند.

منفصل‌سازی معادلات سنت و نانت، اعمال شرایط اولیه و مرزی و همچنین کد نویسی معادلات جداسازی شده برای هر شخصی امکان پذیر نیست. در حل عددی باید آبراهه به گره‌های مکانی و زمانی تقسیم شده و بعد از اعمال شرایط مرزی و اولیه، مقادیر عمق و دبی برای هر مکان در زمان معین محاسبه شود. عمق و دبی محاسباتی هر گره در گره‌های دیگر تاثیر می‌گذارد و برای محاسبه خصوصیات هیدرولیکی یک مکان خاص در زمان معین باید تمام گره‌های مکانی در زمان‌های قبل محاسبه شود. از طرفی اندازه‌ی گام‌های مکانی و زمانی و همچنین مقدار عدد کورانت که توسط کاربر انتخاب می‌شود بر نتایج شبیه‌سازی تاثیر دارد و شخص باید بر نحوی جداسازی معادلات حاکم بر جریان غیرماندگار تسلط کافی داشته باشد و حساسیت شمای عددی بکار رفته را نسبت به اندازه گام‌های مکانی، زمانی و عدد کورانت بررسی نماید. ساده‌سازی معادلات سنت و نانت بدلیل مشکلات حل عددی و ارائه حل تحلیلی و شبه تحلیلی از گذشته مورد توجه محققین بوده است. روش‌های تقریبی نسبت به حل عددی معادله دینامیکی سنت و نانت مقداری خطا داشته اما کاربر به سادگی می‌تواند آن را کدنویسی و تحلیل نماید. انیزوکا و اودای (۱۴) با تبدیل معادلات سنت و نانت به معادله برگر برای یک کانال مستطیلی عریض عمق جریان را روندیابی و یک حل تحلیلی برای آن ارائه داد. آن‌ها همچنین حل تحلیلی را با روش عددی مقایسه کردند و دقت حل تحلیلی ارائه شده برای شبیه‌سازی جریان غیرماندگار در کانال مستطیلی عریض را مناسب ارزیابی کردند. وانگ و چن (۱۷) با استفاده از روش سلول‌های مختلط معادله‌ی پخشیدگی را به یک معادله دیفرانسیل غیرخطی مرتبه اول تبدیل و سپس با انتگرال‌گیری نسبت به زمان یک روش نیمه تحلیلی برای حل معادله جریان غیرماندگار ارائه دادند. فان و لی (۳) با در نظر گرفتن مقادیر ثابت برای سرعت موج و ضریب پخشیدگی و با استفاده از تبدیل لاپلاس یک حل تحلیلی برای موج پخشیدگی ارائه دادند. کازیریلماز و مدینا (۹) حل تحلیلی برای روندیابی موج سینماتیک و پخشیدگی با ضرایب ثابت ارائه دادند و آن را با شمای عددی مک کورمک مقایسه کردند. لیتریکو و همکاران (۱۲) بعد از خطی‌سازی معادله سنت و نانت حول شرایط اولیه با استفاده از تابع لاپلاس و روش تطبیقی انباشته معادلات سنت و نانت را به معادلات دیفرانسیل تبدیل و آن را برای شبیه‌سازی جریان غیرماندگار در رودخانه‌ها مورد استفاده قرار داد.

هیدروگراف دبی ورودی به شبکه‌های آبیاری به دلیل بازشدن ناگهانی دریچه‌ها متفاوت با هیدروگراف سیل در رودخانه‌ها می‌باشد و

$$\epsilon = V_1^2 \frac{dT_1}{dx} + gT_1 \left[ (1+K)S_0 - \left( (1+K) - F^2 (K-2) \right) \frac{dh_1}{dx} \right] \quad (14)$$

$$C_1 = \sqrt{gD_1} \quad (15)$$

$$K = \frac{7}{3} - \frac{4A_1}{3P_1T_1} \frac{dP_1}{dh_1} \quad (16)$$

در روابط فوق،  $V_1$  سرعت اولیه جریان،  $C_1$  سرعت موج سطحی و  $F$  عدد فرود است. به منظور حل شبه تحلیلی معادلات خطی شده سنت و نانت، از معادلات پیوستگی و اندازه حرکت تبدیل لاپلاس گرفته می‌شود. تبدیل لاپلاس برای تغییرات دبی و عمق آب به ترتیب مطابق روابط (۱۷) و (۱۸) است:

$$Q^*(x,s) = L[Q'(x,t)] = \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} Q'(x,t) dt \quad (17)$$

$$h^*(x,s) = L[h'(x,t)] = \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} h'(x,t) dt \quad (18)$$

با به کارگیری روابط (۱۷) و (۱۸) برای معادله‌ی پیوستگی و اندازه حرکت خواهیم داشت:

$$T_1 (sh^*(x,s) - h'(x,0)) + \frac{dQ^*(x,s)}{dx} = 0 \quad (19)$$

$$(s - \sim) Q^*(x,s) - Q'(x,0) + 2V_1 \frac{dQ^*(x,s)}{dx} + T_1 (C_1^2 - V_1^2) \frac{dh^*(x,s)}{dx} - \epsilon h^*(x,s) = 0 \quad (20)$$

شرایط اولیه برای معادلات سنت و نانت به صورت  $Q(x,0)=0$  و  $h(x,0)=0$  می‌باشد. با استفاده از شرایط اولیه و ساده‌سازی، تبدیل لاپلاس معادلات پیوستگی و اندازه حرکت مطابق رابطه‌ی (۲۱) ارائه می‌شود:

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} Q^*(x,s) \\ h^*(x,s) \end{pmatrix} = A_s \begin{pmatrix} Q^*(x,s) \\ h^*(x,s) \end{pmatrix} \quad (21)$$

که در آن ماتریسی مطابق رابطه‌ی (۲۲) است:

$$A_s = \begin{bmatrix} 0 & -T_1 s \\ \sim - s & \frac{2V_1 T_1 s + \epsilon}{T_1 (C_1^2 - V_1^2)} \end{bmatrix} \quad (22)$$

در محدوده‌ی جریان یکنواخت، تمام عناصر ماتریس  $A_s$  در طول کانال ثابت است. بنابراین رابطه‌ی (۲۱) یک دستگاه معادله‌ی دیفرانسیل خطی است که جواب آن به صورت رابطه‌ی (۲۳) است:

$$\begin{pmatrix} Q^*(x,s) \\ h^*(x,s) \end{pmatrix} = e^{A_s x} \begin{pmatrix} Q^*(0,s) \\ h^*(0,s) \end{pmatrix} \quad (23)$$

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x T_i^n} (Q_{i+1/2}^{n+1} - Q_{i-1/2}^{n+1}) = 0 \quad (6)$$

در معادلات فوق  $y$  تراز سطح آب،  $T$  عرض سطح آب و  $x$  اندازه گام مکانی است. با ترکیب دو معادله‌ی فوق، یک معادله‌ی سه مجهولی به صورت رابطه‌ی (۷) برای هر یک از گره‌های میانی بدست می‌آید.

$$B_i^1 y_{i-1}^{n+1} + B_i^2 y_i^{n+1} + B_i^3 y_{i+1}^{n+1} = B_i^0 \quad (7)$$

با اعمال شرایط مرزی بالادست و پایین دست به عنوان روابط جدید، دستگاه معادلات سه قطری ایجاد و با استفاده از الگوریتم توماس حل می‌گردد و بدین ترتیب مقادیر تراز سطح آب در تمام گره‌های محاسبه و با جایگذاری در معادله (۵) مقدار دبی هر گره نیز محاسبه می‌شود. دقت این مدل عددی در شبیه‌سازی جریان غیرماندگار در شبکه‌های آبیاری مورد بررسی قرار گرفته و مناسب ارزیابی شده است. (۶)

### خطی سازی و حل شبه تحلیلی معادله سنت و نانت

در شبکه‌های آبیاری به دلیل تغییر نیاز آبی آبگیرها جریان از یک حالت ماندگار به حالت ماندگار جدید تغییر می‌کند. در چنین شرایطی می‌توان معادلات سنت و نانت را در اطراف جریان ماندگار اولیه خطی نمود. به منظور خطی‌سازی معادلات، دبی و عمق آب در زمان و مکان‌های مختلف مطابق روابط (۸) و (۹) در نظر گرفته می‌شود:

$$Q(x,t) = Q_1 + Q'(x,t) \quad (8)$$

$$h(x,t) = h_1(x) + h'(x,t) \quad (9)$$

در روابط فوق،  $Q_1$  دبی در حالت ماندگار اولیه،  $Q(x,t)$  تغییرات دبی ایجاد شده در لحظه‌ی  $t$  و مکان  $x$ ،  $h_1(x)$  عمق اولیه‌ی آب در مکان  $x$  و  $h(x,t)$  تغییرات عمق آب در لحظه‌ی  $t$  و مکان  $x$  است. برای هر عبارت از معادلات سنت و نانت که در حالت کلی به صورت تابع  $f(Q,h)$  می‌باشد، بسط تیلور مرتبه اول مطابق با رابطه‌ی (۱۰) است:

$$f(Q,h) = f(Q_1, h_1) + f_Q(Q_1, h_1) Q' + f_h(Q_1, h_1) h' \quad (10)$$

در رابطه‌ی فوق،  $f_Q$  و  $f_h$  به ترتیب مشتق جزئی عبارت‌های معادلات سنت و نانت نسبت به دبی و عمق جریان است. معادله‌ی پیوستگی و اندازه حرکت در جریان غیرماندگار با استفاده از رابطه‌ی (۱۰) در اطراف دبی و عمق اولیه به صورت روابط (۱۱) و (۱۲) خطی می‌شوند:

$$T_1 \frac{\partial h'}{\partial t} + \frac{\partial Q'}{\partial x} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial Q'}{\partial t} + 2V_1 \frac{\partial Q'}{\partial x} - \sim Q' + (C_1^2 - V_1^2) T_1 \frac{\partial h'}{\partial x} - \epsilon h' = 0 \quad (12)$$

که در آن:

$$\sim = -\frac{2g}{V_1} \left( S_0 - \frac{dh_1}{dx} \right) \quad (13)$$

$C_1=0$  و  $C_2=Q^*(0,s)$  می‌باشد، بنابراین تغییرات دبی در فضای  $s$  و در محدوده‌ی جریان یکنواخت به صورت رابطه‌ی (۴۰) است:

$$Q^*(x,s) = Q^*(0,s)e^{\lambda_2 x} \quad (40)$$

با در نظر گرفتن شرط مرزی بالادست به صورت  $Q(0,t)=\Delta Q_{in}$  تبدیل لاپلاس شرط مرزی مزبور در فضای  $s$  به صورت رابطه‌ی (۴۱) می‌باشد:

$$Q^*(0,t) = \frac{\Delta Q_{in}}{s} \quad (41)$$

با جایگزینی رابطه‌ی (۲۶) و (۴۱) در رابطه‌ی (۴۰)، خواهیم داشت:

$$Q^*(x,s) = \frac{\Delta Q_{in}}{s} e^{(a_1+b_1s-\sqrt{l_1^2 s^2+m_1 s+a_1^2})x} \quad (42)$$

به منظور ساده‌سازی، رابطه‌ی کلی (۴۳) در نظر گرفته می‌شود:

$$e^{-\beta(\sqrt{s^2+\alpha^2}-s)} = 1 + \alpha\beta \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} \frac{I_1(\alpha\sqrt{t^2+2\beta t})}{\sqrt{t^2+2\beta t}} dt \quad (43)$$

که در آن  $I_1(t)$  تابع بسل تغییر شکل یافته‌ی نوع اول با اندیس یک می‌باشد که از رابطه‌ی (۴۴) محاسبه می‌شود:

$$I_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n+1} \quad (44)$$

با به کارگیری رابطه‌ی (۴۲) و (۴۳) و ساده‌سازی، خواهیم داشت:

$$Q^*(x,s) = \frac{\Delta Q_{in}}{s} e^{-(l_1-b_1)xs+(a_1-\frac{m_1}{2l_1})x} \times \left( 1 + El_1 x L \left[ \frac{e^{-\frac{m_1}{2l_1}t} I_1(E\sqrt{t^2+2l_1xt})}{\sqrt{t^2+2l_1xt}} \right] \right) \quad (45)$$

$$E = \frac{1}{l_1} \sqrt{\frac{m_1^2}{4l_1^2} - a_1^2} \quad (45)$$

برای یافتن  $Q(x,t)=L^{-1}[Q^*(x,s)]$  از رابطه‌ی (۴۵) استفاده می‌شود:

$$\frac{e^{-(l_1-b_1)xs}}{s} = L[u(t-(l_1-b_1)x)] \quad (46)$$

که در آن  $u(t-(l_1-b_1)x)$  تابع هوبساید است. با به کار گرفتن رابطه‌ی (۴۶) برای رابطه‌ی (۴۵)، خواهیم داشت:

$$Q^*(x,s) = \Delta Q_{in} e^{(a_1-\frac{m_1}{2l_1})x} (a_1+a_2)a_3$$

$$a_1 = L[u(t-(l_1-b_1)x)]$$

$$a_2 = El_1 x L[u(t-(l_1-b_1)x)] \quad (47)$$

$$a_3 = L \left[ \frac{e^{-\frac{m_1}{2l_1}t} I_1(E\sqrt{t^2+2l_1xt})}{\sqrt{t^2+2l_1xt}} \right]$$

با استفاده از خاصیت پیچش دو تابع و ساده‌سازی، دبی در زمان‌های مختلف برای هر مکان به صورت رابطه‌ی (۴۸) ارائه

$$e^{A_s x} = \Gamma(x,s) = \begin{bmatrix} x_{11}(x,s) & x_{12}(x,s) \\ x_{21}(x,s) & x_{22}(x,s) \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$= \frac{\lambda_1 e^{\lambda_2 x} - \lambda_2 e^{\lambda_1 x}}{\lambda_1 - \lambda_2} I + \frac{e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2 x}}{\lambda_1 - \lambda_2} A_s$$

در روابط فوق،  $I$  ماتریس واحد و  $\lambda_1$  و  $\lambda_2$  مقادیر ویژه ماتریس  $A_s$  است که از روابط (۲۵) تا (۳۰) محاسبه می‌شوند:

$$\lambda_1 = a_1 + b_1 s + \sqrt{l_1^2 s^2 + m_1 s + a_1^2} \quad (25)$$

$$\lambda_2 = a_1 + b_1 s - \sqrt{l_1^2 s^2 + m_1 s + a_1^2} \quad (26)$$

$$a_1 = \frac{\epsilon}{2T_1(C_1^2 - V_1^2)} \quad (27)$$

$$b_1 = \frac{V_1}{C_1^2 - V_1^2} \quad (28)$$

$$l_1 = \frac{C_1}{C_1^2 - V_1^2} \quad (29)$$

$$m_1 = \frac{V_1 \epsilon - T_1(C_1^2 - V_1^2)}{T_1(C_1^2 - V_1^2)^2} \quad (30)$$

با توجه به روابط فوق مقادیر عناصر  $(x,s)$  به صورت روابط (۳۱) تا (۳۴) محاسبه می‌شود:

$$x_{11} = \frac{\lambda_1 e^{\lambda_2 x} - \lambda_2 e^{\lambda_1 x}}{\lambda_1 - \lambda_2} \quad (31)$$

$$x_{12} = \frac{T_1 s (e^{\lambda_2 x} - e^{\lambda_1 x})}{\lambda_1 - \lambda_2} \quad (32)$$

$$x_{21} = \frac{\lambda_1 \lambda_2 (e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2 x})}{T_1 s (\lambda_1 - \lambda_2)} \quad (33)$$

$$x_{22} = \frac{\lambda_1 e^{\lambda_1 x} - \lambda_2 e^{\lambda_2 x}}{\lambda_1 - \lambda_2} \quad (34)$$

با استفاده از روابط (۲۳) و (۲۴)، میزان تغییرات دبی و تغییرات عمق آب در فضای  $s$  به صورت روابط (۳۵) و (۳۶) ارائه می‌شود:

$$Q^*(x,s) = x_{11}(x,s)Q^*(0,s) + x_{12}(x,s)h^*(0,s) \quad (35)$$

$$h^*(x,s) = x_{21}(x,s)Q^*(0,s) + x_{22}(x,s)h^*(0,s) \quad (36)$$

با در نظر گرفتن  $x=L$  و جایگزینی مقادیر عناصر  $(x,s)$  در رابطه‌ی (۳۵) و (۳۶) و ساده‌سازی، تغییرات دبی و عمق آب در فضای  $s$  به صورت رابطه‌ی (۳۷) است:

$$\begin{pmatrix} h^*(x,s) \\ Q^*(x,s) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -\lambda_1 \\ T_1 s \\ 1 \end{pmatrix} e^{\lambda_1 x} + C_2 \begin{pmatrix} -\lambda_2 \\ T_1 s \\ 1 \end{pmatrix} e^{\lambda_2 x} \quad (37)$$

$$C_1 = \frac{Q^*(L,s) - e^{\lambda_2 L} Q^*(0,s)}{e^{\lambda_1 L} - e^{\lambda_2 L}} \quad (38)$$

$$C_2 = \frac{Q^*(L,s) - e^{\lambda_1 L} Q^*(0,s)}{e^{\lambda_2 L} - e^{\lambda_1 L}} \quad (39)$$

در شرایطی که بازه‌ی مورد نظر تحت تأثیر جریان یکنواخت است،

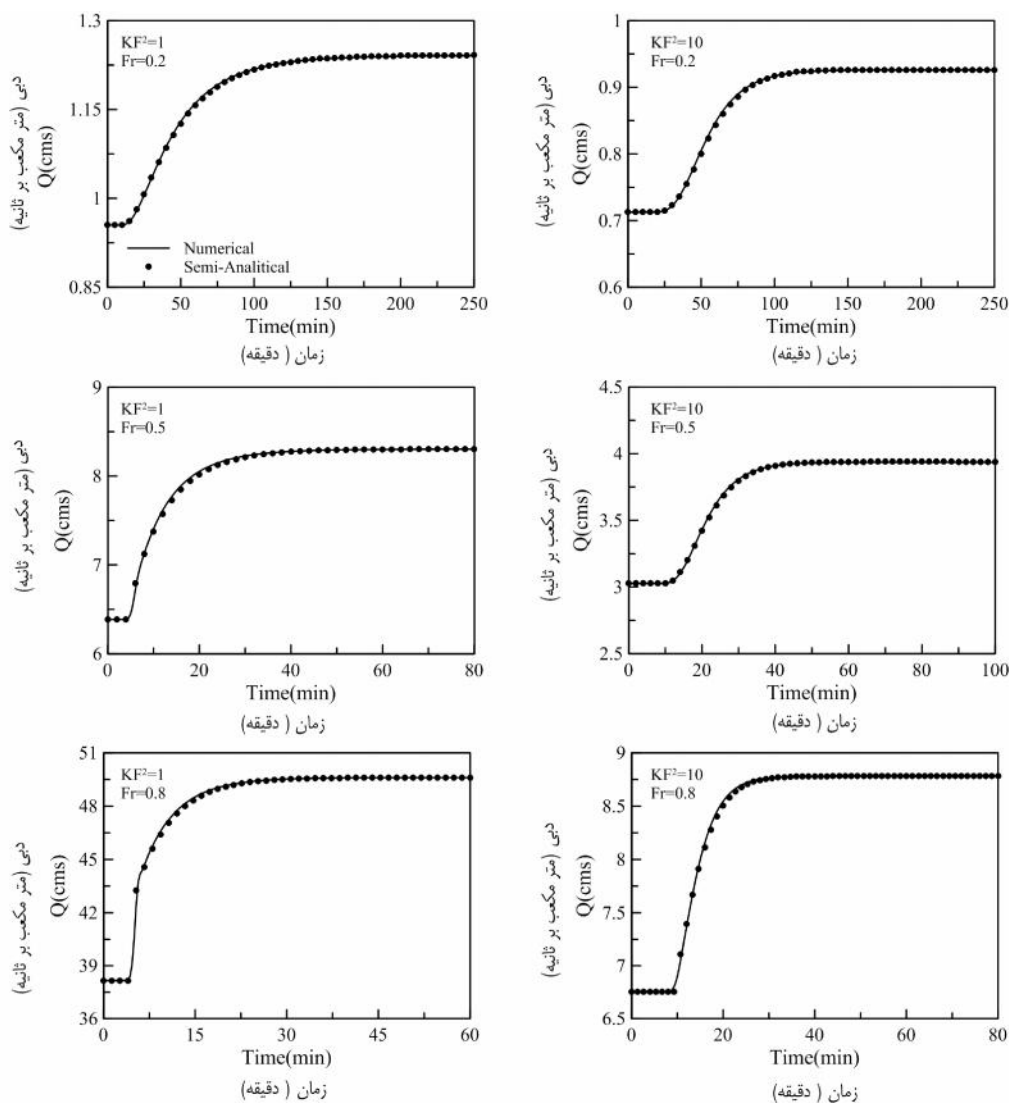
معادله سنت و نانت بسیار ساده‌تر است و این رابطه نیاز به شبکه‌بندی زمانی نداشته و حساسیت کمتری نسبت به گام مکانی دارد و محقق می‌تواند براحتی کدنویسی آن را انجام دهد.

می‌شود:

$$Q(x, t) = \begin{cases} Q_1 & 0 \leq t < (1-b_1)x \\ Q_1 + a_4 \Delta Q_m e^{(a-\frac{m}{2l})x} & t > (1-b_1)x \end{cases} \quad (48)$$

$$a_4 = \left[ 1 + Elx \int_{z=0}^{z=t-(1-b_1)x} e^{-\frac{m}{2l^2}z} \frac{I_1\left(\frac{E\sqrt{z^2+2lxz}}{2l}\right)}{\sqrt{z^2+2lxz}} dz \right]$$

رابطه‌ی فوق را می‌توان با استفاده از روش سیمسون حل نمود. لازم به ذکر است حل عددی رابطه‌ی (۴۸) نسبت به حل عددی



شکل ۱- هیدروگرافهای شبیه‌سازی شده با استفاده از حل عددی و شبه تحلیلی برای افزایش دبی ۳۰ درصد

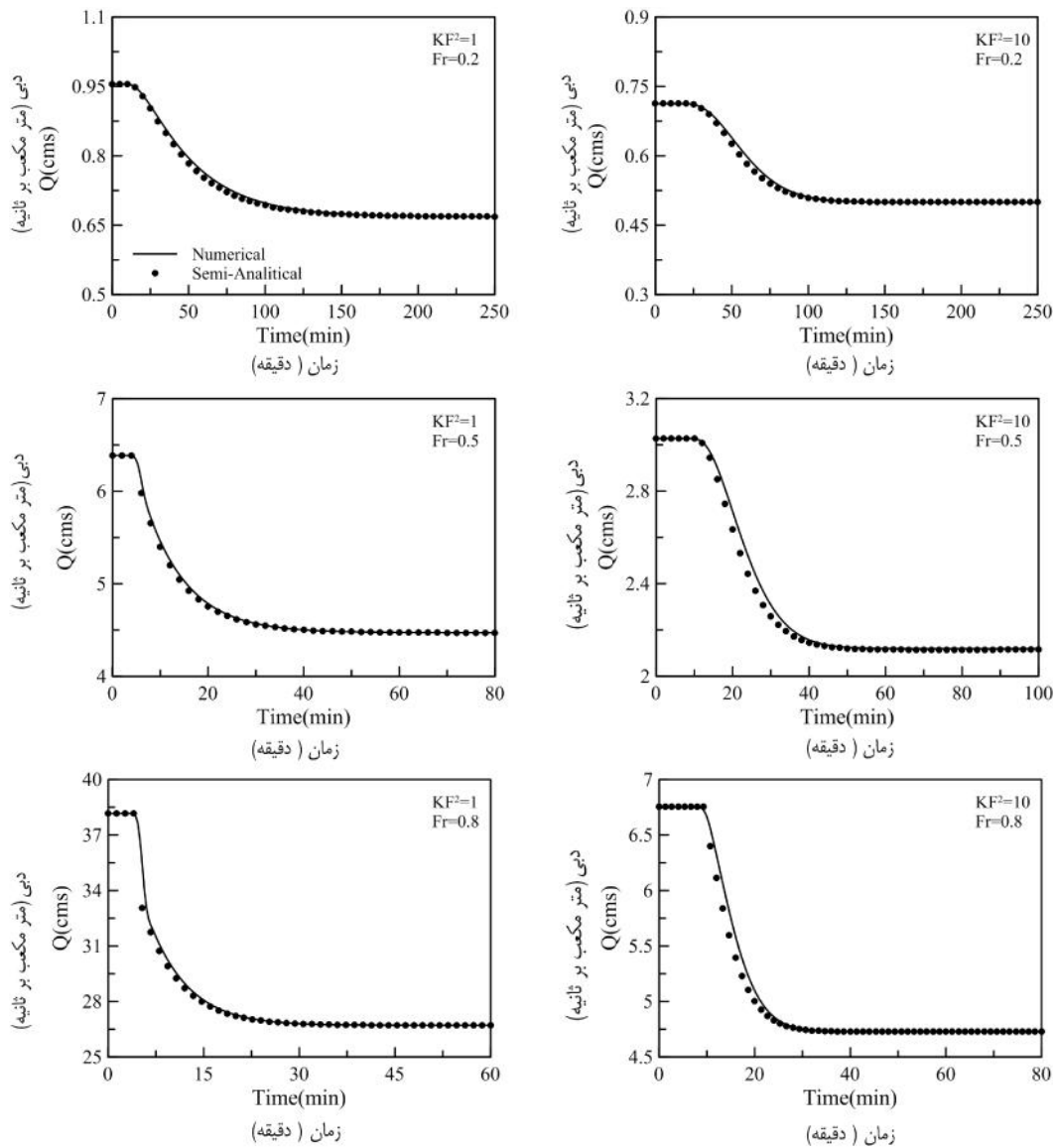
Figure 1- Simulated discharge hydrograph using numerical and semi-analytical for 30% increase in discharge

### بحث و نتایج

به منظور تعیین اثر پارامترهای بی بعد عدد فرود،  $Fr$ ، میزان تغییرات ناگهانی دبی ورودی،  $\Delta Q/Q$ ، و پارامتر بی بعد  $S_0L/y_1$  (که در آن  $S_0$  شیب کف کانال و  $L$  فاصله از محل تشکیل جریان غیرماندگار،  $y_1$  عمق اولیه آب و  $K$  عدد سینماتیک جریان است) بر درستی رابطه‌ی (۴۸) و همچنین صحت سنجی آن، شبیه‌سازی‌های متعددی با استفاده از مدل عددی صورت گرفت و نتایج مدل عددی و رابطه‌ی ارائه شده مقایسه گردید. در جدول (۱)

محدوده مشخصات هیدرولیکی و هندسی شبیه‌سازی‌های جریان غیرماندگار آورده شده است.

در جدول فوق،  $B$  عرض کف کانال،  $Z$  شیب دیواره،  $Q$  دبی اولیه کانال بر حسب مترمکعب بر ثانیه و  $ne$  ضریب مانینگ است، شکل‌های (۱) و (۲) نمونه‌هایی از هیدروگراف‌های دبی شبیه‌سازی شده توسط مدل عددی و رابطه‌ی (۴۸) برای عدد فرود و  $KF^2$  مختلف را نشان می‌دهد.



شکل ۲- هیدروگراف‌های شبیه‌سازی شده با استفاده از حل عددی و شبه تحلیلی برای کاهش دبی ۳۰ درصد

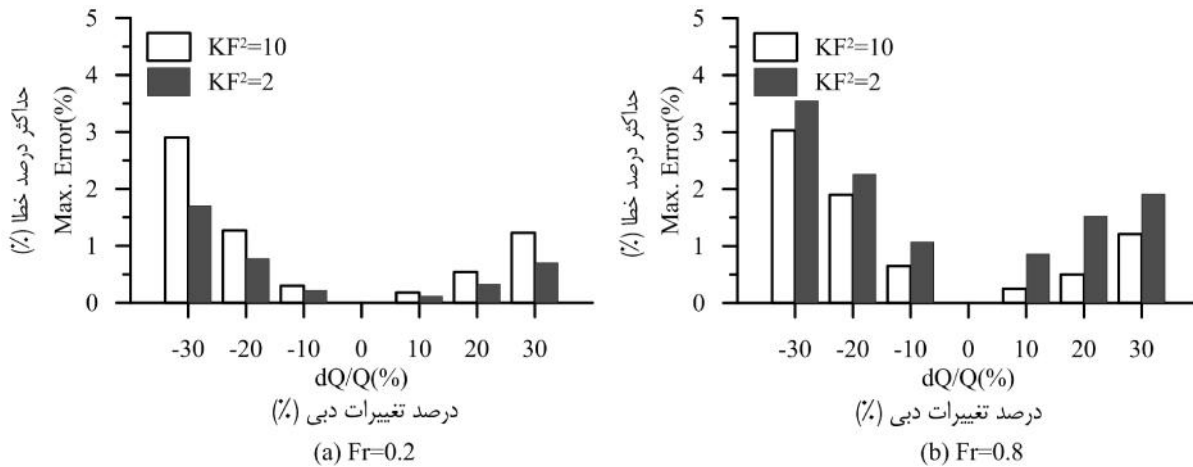
Figure 2- Simulated discharge hydrograph using numerical and semi-analytical for 30% decrease in discharge

تأثیر تغییرات دبی بر درستی رابطه‌ی ارائه شده آورده شده است. همانطور که ملاحظه می‌شود با افزایش تغییرات دبی مقدار خطای رابطه‌ی (۴۸) مقداری افزایش می‌یابد، اما همواره کمتر از ۳/۵ درصد است.

با توجه به اینکه در شبکه‌های آبیاری حداکثر تغییرات دبی در یک مرحله کمتر از ۳۰٪ است، برای تغییرات ۱۰٪، ۲۰٪ و ۳۰٪ شبیه‌سازی‌های متعددی صورت گرفت و میزان حداکثر خطای رابطه‌ی (۴۸) با مدل عددی محاسبه شد. در شکل (۳) نمونه‌ای از

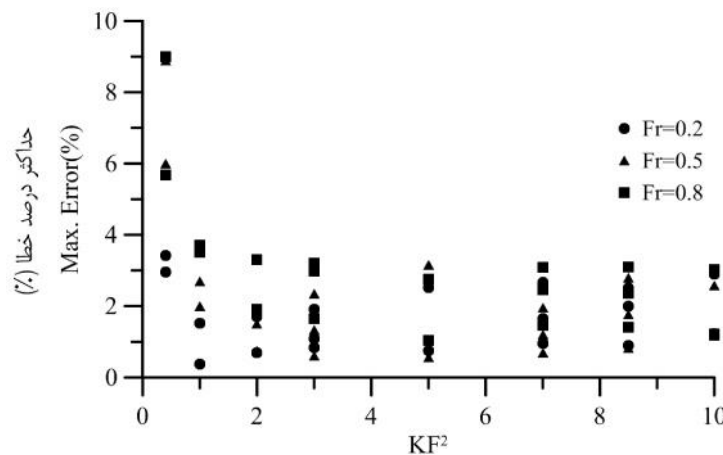
جدول ۱- محدوده‌ی مشخصات هیدرولیکی و هندسی کانال‌های شبیه‌سازی شده  
Table 1- Hydraulic and geometric characteristics of the channel used for numerical test

|                     | L<br>(m) | B<br>(m) | y <sub>1</sub><br>(m) | Z   | S <sub>0</sub> | ne    | Q<br>(m <sup>3</sup> /s) | F   | ΔQ/Q |
|---------------------|----------|----------|-----------------------|-----|----------------|-------|--------------------------|-----|------|
| حداقل<br>(Minimum)  | 2040     | 0.5      | 0.6                   | 0   | 0.0002         | 0.014 | 0.71                     | 0.2 | 5%   |
| حداکثر<br>(Maximum) | 10000    | 3.5      | 2.59                  | 1.5 | 0.0015         | 0.038 | 51.6                     | 0.8 | 30%  |



شکل ۳- تأثیر تغییرات دبی بر درستی رابطه‌ی ارائه شده

Figure 3- Effect of the variation of inflow discharge on the accuracy of the presented formula



شکل ۴- تأثیر پارامترهای KF<sup>2</sup> و عدد فرود بر درستی رابطه‌ی ارائه شده

Figure 4- Effect of dimensionless parameter of KF<sup>2</sup> and Froud number on the accuracy of the presented formula

درصد دبی اولیه شبیه‌سازی‌های متعددی با استفاده از مدل عددی صورت گرفت و نتایج با رابطه‌ی (۴۸) مقایسه گردید. نتایج نشان داد که رابطه ارائه شده درستی مناسبی برای شبیه‌سازی جریان غیرماندگار در شبکه‌های آبیاری دارد. همچنین تاثیر عدد فرود، پارامتر بی‌بعد  $KF^2$  و درصد تغییرات دبی بر درستی رابطه‌ی ارائه شده مورد بررسی قرار گرفت. نتایج نشان می‌دهند که با کاهش تغییرات دبی مقدار خطای رابطه نیز کاهش می‌یابد. همچنین برای  $KF^2 > 1$  و اعداد فرود مختلف مقدار حداکثر خطا کمتر از ۳/۸ درصد است.

### تشکر و قدردانی

این تحقیق در راستای اهداف و مأموریت‌های قطب علمی بهسازی و بازسازی شبکه‌های آبیاری و زهکشی تعریف و اجرا شده است. بدین وسیله از دانشگاه تهران و قطب یاد شده برای تامین امکانات و فضای مناسب تحقیق تشکر و قدردانی می‌شود

به منظور تعیین تاثیر پارامترهای  $KF^2$  و عدد فرود بر درستی رابطه‌ی (۴۸)، نتایج مدل عددی و رابطه‌ی پیشنهادی مقایسه شد و مقدار خطا در شکل (۴) ارائه شده است. همانطور که ملاحظه می‌شود در صورتی که پارامتر بی‌بعد  $KF^2$  بزرگتر از یک باشد میزان حداکثر خطای رابطه ارائه شده برای تمام مقادیر عدد فرود کمتر از ۳/۸ درصد می‌باشد، اما برای  $KF^2 < 1$  مقدار حداکثر خطا تا حدود ۱۰ درصد افزایش می‌یابد.

### نتیجه گیری

در این پژوهش معادلات سنت‌ونانت در محدوده‌ی جریان یکنواخت به صورت شبه تحلیلی حل گردید. بدین منظور ابتدا معادلات پیوستگی و اندازه حرکت در جریان غیرماندگار با استفاده از بسط تیلور در اطراف دبی و عمق اولیه خطی گردید و سپس با استفاده از تبدیل لاپلاس معادلات حاصل به صورت شبه تحلیلی حل شد. به منظور صحت‌سنجی رابطه‌ی ارائه شده، برای تغییرات دبی ۱۰، ۲۰ و ۳۰

### منابع

- 1- Chaudry M.H. 2008. Open Channel Flow. Springer, NewYork.
- 2- Cunge J.A., Holly F.M., and Verwey J.A. 1980. Practical Aspect of Computational River Engineering. Pitman Advanced Publishing Program, London.
- 3- Fan P., and Li J.C. 2006. Diffusive wave solutions for open channel flows with uniform and concentrated lateral inflow. Advances in Water Resources, 29: 1000-1019.
- 4- Fennema R.J., and Chaudry M.H. 1987. Simulation of one dimensional dam break flows. Journal of Hydraulic Research, 25(1):41-51.
- 5- Ghobadian R., and Gholzari S. 2012. Mathematical model to simulate unsteady flow in irrigation networks with internal boundary conditions (a case study, Darband irrigation network). Journal of Water and Soil, 26(1):150-161. (in Persian with English abstract)
- 6- Heidari M.M., Kouchakzadeh S., Darvishi E., and Hoorfar A.H. 2012. Determination of applicability range of Travel time and response time formulas in Irrigation networks. Iranian Journal of Irrigation and Drainage, 5:120-132. (in Persian with English abstract)
- 7- Islam A., Raghuwanshi N.S., and Singh R. 2008. Development and application of hydraulic simulation model for irrigation canal network. Journal of Irrigation and Drainage Engineering, 134(1): 49-59.
- 8- Jeffrey A. 2002. Advanced Engineering Mathematics. Harcourt Press, Newcastle.
- 9- Kazezyilmaz-Alhan C.M., and Medina M.A. 2007. Kinematic and diffusion waves: analytical and numerical solutions to overland and channel flow. Journal of Hydraulic Engineering, 133(2): 217-228.
- 10- Kouchakzadeh S., Monem M.J., and Kasbdouz S. 1999. Determination of optimal water distribution policy in an irrigation network (case study: Qurichay network). Iranian Journal of Agriculture Science, 30(2): 369-378. (in Persian with English abstract)
- 11- Litrico X., and Fromion V. 2004. Frequency modeling of open channel Flow. Journal of Hydraulic Engineering, 130(8): 806-815.
- 12- Litrico X., Pomet J.B., and Guinot V. 2010. Simplified nonlinear modeling of river flow routing. Advances in Water Resources, 33: 1015-1023.
- 13- Namin M.M., Bohluly A., Alahdin S., Ranjbaran L., and Mohammadzadeh M. 2007. Flow simulation in river networks by time-splitting method and comparison with mike11 model. 7th International River Engineering Conference Shahid Chamran University, Ahwaz, Iran. (in Persian with English abstract)
- 14- Onizuka K., and Odai S.N. 1998. Burgers' equation model for unsteady flow in open channels. Journal of Hydraulic Engineering, 124(5): 509-513.
- 15- Preissmann A. 1960. Propagation des intumescences dans les canaux et rivières. p. 433-442. First Congress of the



French Association for Computation, AFCAL Grenoble, France.

16- Robinson J.C. 2004. An Introduction to Ordinary Differential Equations. Cambridge University Press, Cambridge.

17- Wang G.T., and Chen S. 2003. A semianalytical solution of the saint-venant equations for channel flood routing. Water Resources Research, 39(4): 1-10.



## Developing Semi-Analytical solutions for Saint-Venant Equations in the Uniform Flow Region

M.M. Heidari<sup>1</sup> - S. Kouchakzadeh<sup>2</sup>

Received: 09-06-2014

Accepted: 29-08-2015

**Introduction:** Unsteady flow in irrigation systems is the result of operations in response to changes in water demand that affect the hydraulic performance networks. The increased hydraulic performance needed to recognize unsteady flow and quantify the factors affecting it. Unsteady flow in open channels is governed by the fully dynamic Saint Venant equation, which express the principles of conservation of mass and momentum. Unsteady flow in open channels can be classified into two types: routing and operation-type problems. In the routing problems, The Saint Venant equations are solved to get the discharge and water level in the time series. Also, they are used in the operation problem to compute the inflow at the upstream section of the channel according to the prescribed downstream flow hydrographs. The Saint Venant equation has no analytical solution and in the majority cases of such methods use numerical integration of continuity and momentum equations, and are characterized by complicated numerical procedures that are not always convenient for carrying out practical engineering calculations. Therefore, approximate methods deserve attention since they would allow the solution of dynamic problems in analytical form with enough exactness. There are effective methods for automatic controller synthesis in control theory that provide the required performance optimization. It is therefore important to get simplified models of irrigation canals for control design. It would be even more interesting to have linear models that explicitly depend on physical parameters. Such models would allow one to, handle the dynamics of the system with fewer parameters, understand the impact of physical parameters on the dynamics, and facilitate the development a systematic design method. Many analytical models have been proposed in the literature, Most of them have been obtained in the frequency domain by applying Laplace transform to linearized Saint-Venant equations. The got transcendental function can then be simplified using various methods to get a model expressed as a rational function of  $s$  (the Laplace variable), possibly including a time delay. It is therefore important to develop simple analytical models able to accurately reproduce the dynamic behavior of the system in realistic conditions.

**Materials and Methods:** Changes in water demand can create transient flow in irrigation networks. The Saint Venant equations are the equations governing open channel flow when unsteady flow propagates. In this research, the finite volume method using the time splitting scheme was employed to develop a computer code for solving the one dimensional unsteady flow equations. Considering stationary regime and small variations around it, the Saint-Venant equations around initial condition was linearized.

The Laplace transform is applied to the linearized saint venant equations, leading to an ordinary differential equation in the space variable  $x$  and parameterized by the Laplace variable  $s$ . The integration of this equation lead to a transfer matrix, and gives the discharge  $Q^*(x, s)$  at any location with respect for the upstream discharge. This matrix is coupled with the downstream boundary condition and developed an equation that solved using Simpson integration algorithm. It should be noted numerical solution of developed equation is easier than solving fully dynamic saint venant and is less sensitive to the spatial step and the researcher simply writing code.

**Results and Discussion:** Froud Number ( $F$ ), variation of inflow discharge ( $Q/Q$ ), and dimensionless parameter of  $KF^2$  in which  $K$  is the kinematic flow number, are effective factors on accuracy of developed equation. In order to determine the effect of the factors on accuracy of presenting formula, several simulations were performed using numerical model. The presented formula and numerical model were compared for 10, 20 and 30 percent discharge variation and error calculated, the maximum error increases with increasing  $Q/Q$ .

To assess the importance of Froud Number and  $KF^2$ , also several simulations were carried out, the results showed that the maximum error in the development equation for various Froud Number and  $KF^2 > 1$ , is less than

1- Assistant Professor, Department of Water Engineering, College of Agriculture and Natural Resources, Razi University, Kermanshah

(\*-Corresponding Author Email: mm.heidari@razi.ac.ir)

2- Professor, Department of Irrigation and Reclamation Engineering, College of Agriculture and Natural Resources, University of Tehran, Tehran

3.8 percent.

**Conclusion:** Using Laplace transform to the saint venant equations and with respect to upstream and downstream boundary a formula for routing discharge presented. Investigation of the applicability range of presenting formula and cognitive effective factors on accuracy is necessary. So, the finite volume method using the time splitting scheme was employed to develop a computer code for solving the one dimensional unsteady flow equation. Then some tests of unsteady flow were simulated and verified the equations. The results showed that the maximum error increases with decreasing  $KF^2$  and increasing the rate of sudden changes of discharge. The maximum error in the presented formula for all tests with  $KF^2 > 1$ , less than 3.8 percent.

**Keywords:** Irrigation Systems, Laplace Transform, Linearized Saint-Venant Equations, Unsteady Flow