

# مطالعه عددی و تحلیلی جریان گل حفاری در آنالوس با مدل سیال غیرنیوتنی کراس

اسماعیل قاسمی کفرودی و سید حسن هاشم‌آبادی\*

دانشکده مهندسی شیمی، دانشگاه علم و صنعت ایران، آزمایشگاه تحقیقاتی CFD

تاریخ دریافت: ۹۲/۱۱/۱۵ تاریخ پذیرش: ۹۳/۶/۵

## چکیده

در این مطالعه تغییرات ویسکوزیته گل حفاری بررسی گردیده و با استفاده از داده‌های آزمایشگاهی گزارش شده، پارامترهای مدل کراس و بینگهام پلاستیک تعیین شده است. سپس برای مدل کراس که نسبت به سایر مدل‌ها، رفتار غیرنیوتنی گل حفاری را بهتر پیش‌بینی می‌کند، حل تحلیلی انجام شد و کدی عددی ارائه گردید که معادلات مومنتوم و پیوستگی را به روش حجم محدود با در نظر گرفتن تمامی ترم‌ها در شرایط پایا حل می‌نماید. برای اعتبارسنجی کد، ابتدا پروفایل سرعت و ضریب اصطکاک برای سیال نیوتنی در لوله و آنالوس محاسبه شده و با نتایج حاصل از روابط نظری مقایسه گردید. سپس پروفایل سرعت سیال غیرنیوتنی با حل تحلیلی ارائه شده مقایسه شد که نتایج تطابق خوبی را نشان می‌دهد. طبق نتایج به دست آمده مدل کراس ویسکوزیته را به خوبی برآورد می‌کند و پروفایل سرعت محاسبه شده با استفاده از این مدل، هماهنگی بیشتری نسبت به مدل بینگهام دارد. در ادامه میدان جریان سیال غیرنیوتنی پیروی کننده از مدل کراس در آنالوس شبیه‌سازی و نتایج به صورت بی بعد ترسیم شده است. همچنین ضریب اصطکاک در ناحیه توسعه یافته جریان با دو مدل کراس و بینگهام پلاستیک محاسبه گردید که دقت مدل کراس با خطای حدود ۰.۵٪ نسبت به بینگهام (با خطای ۱.۲٪) بالاتر بود. با توجه به دقت مناسب مدل کراس، برای پیش‌بینی ضریب اصطکاک از برازش منحنی، رابطه‌ای جدید برحسب رینولدز (بسته به پارامترهای مدل کراس) برای رژیم جریان آرام ارائه شده است.

**کلمات کلیدی:** حل عددی و تحلیلی، گل حفاری، مدل کراس، ضریب اصطکاک، طول ناحیه توسعه یافته

## مقدمه

گاز بسیار حیاتی و مهم می‌باشد. با صراحت می‌توان گفت حفاری یکی از عملیات هزینه‌بر و بسیار حیاتی است و بدون آن امکان برداشت از مخازن وجود ندارد. هیدرودینامیک جریان سیالات حفاری از اهمیت فراوانی برخوردار است؛ زیرا با مطالعه هیدرودینامیک می‌توان عملکرد بهینه حفاری و کمترین هزینه برای پمپاژ گل را تعیین نمود. همچنین در صورت وجود نقص و عملکرد نامناسب سیال حفاری، با مطالعه هیدرودینامیک جریان سیال، می‌توان برای تشخیص مشکل و رفع آن اقدام کرد.

بسیاری از سیالات در فرآیندهای مهندسی و صنعتی، خواص غیرنیوتنی از خود نشان می‌دهند. این دسته از مواد دارای خواص رئولوژیکی پیچیده‌ای بوده که در این زمینه می‌توان به جریان‌های پلیمرهای مذاب، مواد غذایی، گل حفاری و ... اشاره کرد.

اهمیت حفاری در توسعه و بهره‌برداری از مخازن نفت و

\*مسئول مکاتبات

Email: Hashemabadi@iust.ac.ir

آدرس الکترونیکی

روی حمل ذرات بحث کردند. پیرا و همکارانش [۳] با استفاده از داده‌های مراجع مربوطه جریان گل حفاری را شبیه‌سازی کردند و پس از مقایسه با داده‌های تجربی، به این نتیجه رسیدند که مدل کراس نسبت به مدل پاورلا و هرشل‌بالکلی برای بعضی از سیالات بسیار مناسب‌تر می‌باشد.

احمد و میسکا در سال ۲۰۰۸ جریان آرام گل حفاری را در آنالوس غیرهم‌مرکز به‌صورت تجربی و تئوری مطالعه کردند و مدل پاورلا را به عنوان مدل غیرنیوتنی در نظر گرفتند [۴]. در سال ۲۰۱۰، پیرا و همکارانش [۵] میدان جریان سیال را در فضای حلقوی چاه شبیه‌سازی کردند.

موکهان و همکاران یک سیستم آزمایشگاهی دارای آنالوس با قابلیت چرخش شفت داخلی، طراحی نمودند. سیال مورد استفاده CMC بود که مدل پاور لا قادر به پیش‌بینی رفتار رئولوژی این سیال می‌باشد. همچنین با تغییر سرعت چرخش شفت، افت فشار را نیز اندازه‌گیری کردند. آنها نتیجه گرفتند که خواص رئولوژیکی گل حفاری تاثیر مهمی بر هیدرودینامیک جریان دارد و باید گل به شیوه‌ای طراحی گردد که هم از نظر ویسکوزیته و هم از نظر جرم حجمی مناسب باشد [۶]. از باقلو و سورگان در سال ۲۰۱۰ تاثیر چرخش رشته حفاری بر افت فشار و ضریب اصطکاک را بررسی کردند و نتیجه گرفتند در دبی‌های پایین با افزایش سرعت چرخش، افت فشار با یک شیب ملایم افزایش می‌یابد [۷]. وانگ و همکارانش تمیزسازی چاه‌های افقی را با حل معادلات حاکم بر هیدرودینامیک جریان و روش‌های عددی شبیه‌سازی کرده و در نهایت یک رابطه برای محاسبه ضخامت لایه ذرات باقی‌مانده در چاه افقی بر اساس شبیه‌سازهایشان ارائه دارند [۸]. گوماتی و تاکاشی به مطالعه تجربی هیدرودینامیک سیال فوم در صنعت حفاری پرداختند. برای این کار ابتدا رفتار سیال فوم (نوعی سیال مایع در صنعت حفاری) را بررسی کرده و خواص رئولوژی آن را تعیین نمودند. سپس به صورت تجربی افت فشار حاصل از حرکت سیال کف در آنالوس را بررسی کردند. آنها دو مدل برای محاسبه افت فشار این سیال بر اساس داده‌های تجربی ارائه دادند [۹].

گل حفاری واسطه‌ای است که نیروی هیدرولیک پمپ حفاری را از سطح به نوک مته انتقال می‌دهد. پس لازم است هیدرولیک جریان گل حفاری در هنگام طراحی و برنامه‌ریزی یک چاه مورد توجه قرار گیرد. به‌طور کلی، میزان گردش دورانی گل باید آن اندازه باشد که با حداقل نیرو، از مته تا بالا را تمیز نماید. خواص جریان یک گل، یعنی گرانی و تنش تسلیم گل اثر قابل ملاحظه‌ای در هیدرولیک جریان گل دارد. یکی از وظایف مهم گل در حال گردش، انتقال کنده‌های حفاری از ته چاه به سطح زمین است. سیال حفاری که از نازل‌های مته به‌صورت فواره‌ای جریان دارد، باعث تمیز نمودن ته چاه، فضای آنالوس و دندان‌های مته می‌گردد. این عمل باعث تضمین عمر مته و بالا بردن راندمان حفاری می‌شود. در بعضی موارد با استفاده از سیال حفاری، مته در ته چاه به گردش در می‌آید که این گردش بسیار وابسته به توان پمپ گل حفاری و خواص آن می‌باشد. با این توضیح می‌توان نتیجه گرفت که افت فشار و محاسبه آن در طول آنالوس بسیار مهم است و باید به‌طور دقیق محاسبه گردد تا بتوان توان بهینه را برای پمپ مشخص نمود.

رفتار سیالات، بر اساس رفتار مشاهده شده بین تنش برشی و شدت برش، به دو گروه نیوتنی و غیر نیوتنی تقسیم می‌شود. در سیالات نیوتنی یک رابطه تناسبی مستقیم بین تنش برشی و شدت برش وجود دارد. در حالی که در سیالات غیرنیوتنی، رابطه بین تنش برشی و شدت برش، غیرخطی است.

ویسکوزیته گل در مجاورت مته حفاری که دارای نرخ برش بالاست، باید کم باشد و در نواحی دور از مته که نرخ برش کم است، ویسکوزیته باید تا اندازه‌ای بالا باشد تا از سقوط کنده‌ها به ته چاه جلوگیری نماید. اسکودیر و همکارانش [۱] در سال ۲۰۰۲ ویسکوزیته سیال گل حفاری را در آنالوس بررسی کرده و با استفاده از این داده‌ها پارامترهای مدل‌های کریو<sup>۱</sup> و پاورلا<sup>۲</sup> را محاسبه نموده‌اند. این گروه همچنین جریان سیال را با مدل پاورلا شبیه‌سازی کردند. کایم و همکارانش [۲] حرکت گل حفاری را شبیه‌سازی نموده و پس از مقایسه نتایج مدل با داده‌های تجربی، بر

1. Carreau

2. Power Law

طول توسعه یافتگی و ضریب اصطکاک در آنالوس برای سیال غیرنیوتنی محاسبه شده و دو رابطه جدید برای محاسبه این دو کمیت با دقت نسبتا بالایی ارائه گردیده است.

### تعیین پارامترهای مدل

مدل‌های غیرنیوتنی کراس و بینگهام بر داده‌های تجربی گزارش شده برای سه نوع گل حفاری متفاوت متشکل از آب، سوسپانسیون بنتونیت و لیگنایت با ترکیبات ۲، ۳ و ۵٪ از لیگنایت [۱۰] برازش گردید که پارامترهای مدل و ضریب همبستگی آن در جدول ۱ نشان داده شده است.

جدول ۱- پارامترهای محاسبه شده مدل کراس و مدل بینگهام پلاستیک

	Fluid	$\eta_0$ (kg/m.s)	$\lambda$ (s)	n	$R^2$
۳ ۲ ۳	۱	۰/۱۱۷۷	۰/۱۲۰۲	۰/۵۰۴۷	۰/۹۹
	۲	۰/۱۲۷۹	۰/۱۴۱۲	۰/۵۴۶۴	۰/۹۸
	۳	۰/۱۸۳۴	۰/۴۷۳۷	۰/۴۸۵۲	۰/۹۹
بینگهام پلاستیک	Fluid	$\tau_y$ (Pa)	k (Pa.s)	$R^2$	
	۱	۱/۸۶۳	۰/۰۰۸۰۸۲	۰/۹۵۵	
	۲	۱/۹۵۰	۰/۰۱۰۸۴	۰/۹۶۸	
	۳	۲/۱۷۶	۰/۰۱۰۶۲	۰/۹۷۱	

در شکل (۱-الف) برازش منحنی برای مدل کراس بر روی داده‌های تجربی (ویسکوزیته بر حسب نرخ برش سیال ۲ و ۳) نشان داده شده است که از روی این شکل دقت بالای مدل برای پیش‌بینی ویسکوزیته به خوبی مشاهده می‌گردد. در شکل (۱-ب) برازش مدل بینگهام بر داده‌های تجربی رسم شده که مطابق شکل این مدل نتوانسته به خوبی مقدار تنش را بر حسب برش پیش‌بینی نماید. در جدول ۱ نیز مقدار  $R^2$  برای مدل بینگهام کمتر از مدل کراس می‌باشد. بدین ترتیب مدل کراس به‌عنوان مدل غیرنیوتنی در این مقاله استفاده شده است.

### معادلات حاکم

در شکل ۲ دو استوانه هم مرکز با شعاع خارجی R و داخلی  $kR$  ( $0 \leq k \leq 1$ ) به‌عنوان نمایی ساده از آنالوس چاه حفاری نشان داده شده است.

مدل بینگهام پلاستیک، تنش تسلیم گل حفاری را در نظر می‌گیرد، ولی پس از سیالیت گل، رابطه تنش و نرخ برش را خطی محاسبه می‌کند. عموماً مدل‌های مورد استفاده برای بیان رفتار رئولوژیکی گل حفاری عبارتند از:

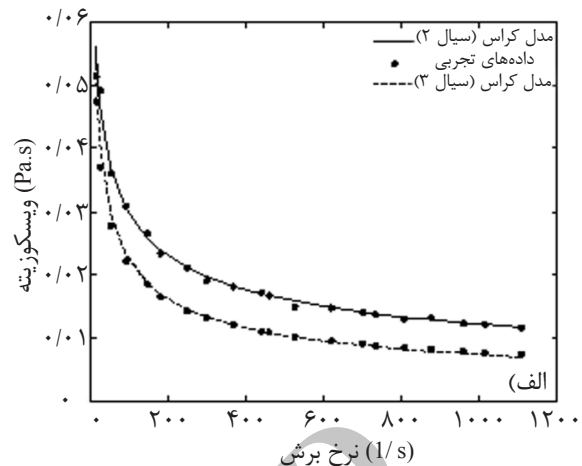
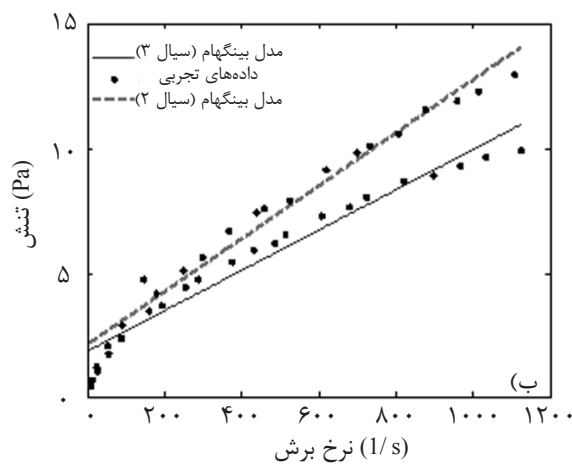
$$\tau = \tau_y + k \dot{\gamma} \quad \text{مدل بینگهام پلاستیک}$$

$$\tau = k |\dot{\gamma}|^n \quad \text{مدل پاورلا}$$

$$\tau = \tau_y + k |\dot{\gamma}|^n \quad \text{مدل هرشل بالکلی}$$

$$\eta_{\text{Cross}} = \eta / (1 + (\lambda |\dot{\gamma}|)^{1-n}) \quad \text{مدل کراس}$$

با توجه به اینکه مدل پاورلا و هرشل بالکلی در بعضی از مواقع خصوصاً در نواحی با نرخ برش نزدیک به صفر، قادر به پیش‌بینی خواص رئولوژیکی سیال در میدان جریان نمی‌باشد، نتایج شبیه‌سازی شده با استفاده از این دو مدل نسبت به داده‌های تجربی [۵] خطای بیشتری نسبت به مدل کراس دارد. در این مقاله، از مدل کراس استفاده شده است. برای محاسبه و پیش‌بینی میدان جریان و فشار لازم است معادلات پیوستگی و مومنوم حل شود. این معادلات جزئی، بسیار پیچیده بوده و به صورت تحلیلی بدون فرضیات ساده کننده قابل حل نمی‌باشد. زیرا عبارت‌های جابه‌جایی در معادله حرکت شامل مقادیر غیرخطی است و هر سه معادله مومنوم و معادله پیوستگی به‌طور پیچیده به هم وابسته‌اند. از طرفی همه مولفه‌های سرعت در معادلات اندازه حرکت و معادله پیوستگی ظاهر می‌شود. بیشتر پیچیدگی حل مساله نقشی است که توسط میدان فشار ایفا می‌شود. در هر سه معادله اندازه حرکت مشاهده می‌شود، اما ظاهراً هیچ معادله‌ای (انتقال و غیره) برای فشار وجود ندارد. همچنین غیرنیوتنی بودن سیال بر پیچیدگی معادلات افزوده و کار را بسیار مشکل می‌نماید. بر این اساس کد عددی بر اساس روش حجم محدود (با توجه به ماهیت مناسب روش حجم محدود برای جریان) توسعه داده شده است که قادر به تحلیل جریان سیال غیرنیوتنی پیروی کننده از مدل کراس در آنالوس می‌باشد. برای اعتبارسنجی، نتایج کد عددی معادلات حاکم پس از ساده‌سازی برای جریان آرام به‌صورت تحلیلی حل گردیده و نتایج با حل عددی مقایسه شده است. لازم به ذکر است که تا کنون حل تحلیلی سیال غیرنیوتنی پیروی کننده از مدل کراس گزارش نشده است. سپس با حل عددی،



شکل ۱- الف: برازش منحنی برای تعیین پارامترهای مدل کراس برای دو نوع گل حفاری با توجه به داده‌های آزمایشگاهی و ب: برازش منحنی برای تعیین پارامترهای مدل بینگهام برای گل‌های حفاری نوع ۲ و ۳ با داده‌های آزمایشگاهی [۱۰].

۴ به دست می‌آید.

$$\eta_{\text{Cross}} = \frac{\eta_0}{1 + (\lambda|\dot{\gamma}|)^{1-n}} \quad (4)$$

(همان‌طور که دیده می‌شود، این مدل به ازای  $n=1$  به سیال نیوتنی تبدیل می‌گردد). تنسور نرخ برش  $\dot{\gamma}$  طبق رابطه (۵) تعریف می‌شود و مقدار آن از روابط ۶ و ۷ به دست می‌آید:

$$\dot{\gamma} = \nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^t \quad (5)$$

$$|\dot{\gamma}| = \sqrt{\frac{1}{2} \dot{\gamma} : \dot{\gamma}} \quad (6)$$

$$|\dot{\gamma}| = 2 \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{v}{r} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] + \left[ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial r} \right]^2 \quad (7)$$

افت فشار ایجاد شده در ناحیه توسعه یافته آنالوس به علت اصطکاک حاصل از دیواره داخلی و خارجی می‌باشد. با موازنه نیرو در طول  $L$  از ناحیه توسعه یافته جریان در آنالوس تساوی ۸ حاصل می‌شود:

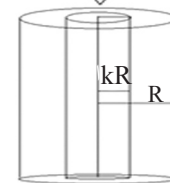
$$\Delta P \pi (R^2 - kR^2) = 2\pi L k R \tau_{w-in} + 2\pi L k R \tau_{w-out} \quad (8)$$

با استفاده از تعریف ضریب اصطکاک فانیگ و پروفایل سرعت سیال نیوتنی در آنالوس، رابطه (۹) برای محاسبه ضریب اصطکاک به دست می‌آید:

$$C_f = \frac{16(1-k)}{\text{Re}(1+k)} \quad (9)$$

اگر لوله درونی به حدی نازک شود که  $k$  به سمت صفر میل کند، یعنی آنالوس به لوله تبدیل شود، رابطه ۹ نیز به  $16/\text{Re}$  (رابطه محاسبه ضریب اصطکاک لوله) تبدیل می‌شود.

گل حفاری



گل حفاری به همراه کنده

شکل ۲- نمایی ساده از آنالوس چاه حفاری

از لوله وسط چاه، گل حفاری با فشار بالا پایین فرستاده می‌شود و از فضای بین دیواره چاه و لوله، گل به سمت بالا بر می‌گردد.

با در نظر گرفتن شرایط هم‌دما و پایا، معادلات حاکم بر هیدرودینامیک جریان شامل پیوستگی و مومنتم با معادلات ۱ تا ۳ بیان می‌شود [۱۱]:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho u) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r v v) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} (\rho r u v) = -\frac{\partial P}{\partial r} - \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rr}) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{zr}) \right] + \rho g_r \quad (2)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r v u) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} (\rho r u u) = -\frac{\partial P}{\partial z} - \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{zz}) \right] + \rho g_z \quad (3)$$

همچنین فرض شده که جریان حول محور آنالوس متقارن است و تغییراتی در جهت  $\theta$  در میدان جریان وجود ندارد. طبق مدل کراس ویسکوزیته ظاهری سیال از رابطه

همچنین  $\Gamma^*$  و  $K$  متغیرهای بی بعد می باشند که به صورت

$$K = \frac{\lambda R \Delta P}{2 \eta_0 \Delta Z}, \quad r^* = \frac{r}{R}$$

زیر تعریف می شوند:

ترم گرادیان فشار در عدد بی بعد  $K$  وجود دارد و می توان آن را با استفاده از دبی محاسبه نمود. برای محاسبه دبی از رابطه سرعت بر روی المان سطحی انتگرال گرفته و رابطه زیر برای محاسبه دبی حاصل می گردد:

$$Q = \frac{R\pi(K^2 + 4K)^{\frac{5}{2}}}{15K^3\lambda} + \frac{R\pi\sqrt{K^2 + 4K}}{K^2\lambda} \left( \frac{K+2}{2K} \right) + \frac{2R\pi L n(2-K + \sqrt{K^2 + 4K})}{K^3\lambda} - \frac{2R\pi L n(\lambda)}{K\lambda} - \frac{R\pi K}{4\lambda} - \frac{R\pi(K^2 + 4K)^{\frac{3}{2}}}{6K^2\lambda} \left( \frac{2+5K}{2K} \right) - \frac{2R\pi L n(2)}{K^3\lambda} - \frac{R\pi K^2}{15\lambda} - \frac{R\pi f(K)}{\lambda} + R\pi C_1 \quad (13)$$

ترم  $f(K)$  یک تابع انتگرالی با کران ۰ تا ۱ می باشد. این انتگرال جواب تحلیلی نداشته و به صورت عددی مقدار آن محاسبه شده است. سپس رابطه (۱۴) بر روی نتایج انتگرال با مقدار رگرسیون ۰/۹۹۹ برازش شده است.

$$f(K) = 3.64(-K)^{-0.7922} - 0.0007842 \quad (14)$$

با توجه به پروفایل سرعت به دست آمده برای سیال پیروی کننده از مدل کراس در ناحیه توسعه یافته جریان در لوله، می توان ضریب اصطکاک را به صورت زیر محاسبه نمود:

$$C_f = \frac{2\tau_{wall}}{\rho u^2} \quad (15)$$

ابتدا با استفاده از پروفایل سرعت، تنش در دیواره و سرعت متوسط محاسبه شده و سپس با جای گذاری آن در رابطه ۱۵، رابطه ضریب اصطکاک جریان آرام سیال پیروی کننده از مدل کراس در لوله به صورت زیر حاصل می گردد:

$$C_f = \frac{M_1}{Re M_2} \quad (16)$$

متغیرهای  $M_1$  و  $M_2$  به صورت زیر تعریف می شود.

$$M_1 = R(1-K)\sqrt{K^2 + 4K} - \frac{RK(2+K)}{\sqrt{K^2 + 4K}} - \frac{2R(2+K)}{\sqrt{K^2 + 4K}} + \frac{R(4\lambda\sqrt{K^2 + 4K} - 2 - K)}{\lambda(\lambda - 2 + \sqrt{K^2 + 4K})\sqrt{K^2 + 4K}} - 4RK(2+K)$$

## حل تحلیلی مدل غیرنیوتنی کراس در لوله

در صنعت حفاری، گل حفاری در حالت خاص از لوله ای که در وسط چاه قرار دارد، با فشار زیاد از لوله به ته چاه فرستاده می شود. سپس گل از فضای حلقوی بین لوله و دیواره چاه به سمت بالا حرکت می نماید. با فرض توسعه یافتگی جریان در لوله عمودی، می توان گرادیان فشار را وابسته به طول لوله و به طور خطی در نظر گرفت، در نتیجه معادله ۲ با ساده سازی به  $\partial P / \partial r = 0$  و رابطه ۳ با در نظر گرفتن فرض توسعه یافتگی جریان به رابطه ۱۰ تبدیل می شود:

$$\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) + \rho g_z = 0 \quad (10)$$

با فرض توسعه یافتگی و خطی بودن گرادیان فشار در راستای  $Z$ ، ترم شتاب جاذبه در گرادیان فشار ظاهر می شود:

$$\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z = \frac{(P_L + \rho g_z L) - (P_0 + \rho g_z 0)}{L - 0} \equiv \frac{\Delta P}{\Delta Z}$$

در این شرایط برای تنسور نرخ برش با وجود یک ترم گرادیان سرعت "du/dr" مولفه تنسور تنش به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\tau_{rz} = \eta \left( \frac{du}{dr} \right) = \frac{\eta_0}{1 + \left( \lambda \frac{du}{dr} \right)^{1-n}} \frac{du}{dr} \quad (11)$$

همان طور که در جدول ۱ ارائه شده، مقدار متغیر  $n$  در مدل کراس برای گل حفاری حول مقدار ۰/۵ تغییر می کند، لذا برای حل تحلیلی  $n=0/5$  در نظر گرفته شده است. با این فرض معادله دیفرانسیل ۱۰ به صورت تحلیلی حل می شود و پروفایل سرعت مطابق رابطه ۱۲ به دست می آید:

$$u(r^*) = \frac{R(K^2 r^{*2} + 4Kr^*)^{\frac{3}{2}}}{6K\lambda} - \frac{R\sqrt{K^2 r^{*2} + 4Kr^*}}{K\lambda} - \frac{2RLn\left(\lambda(2-Kr^*) + \sqrt{K^2 r^{*2} \lambda^2 + 4\lambda^2 Kr^*}\right)}{K\lambda} - \frac{RKr^{*2}}{2\lambda} - \frac{Rr^* \sqrt{K^2 r^{*2} + 4Kr^*}}{2\lambda} - \frac{RK^2 r^{*3}}{6\lambda} - RC_1 \quad (12)$$

در این رابطه  $C_1$  عددی ثابت است که با استفاده از شرط عدم لغزش در دیواره لوله ( $r=0, u_z=0$ ) مشخص شده است.

$$C_1 = \frac{(K^2 + 4K)^{\frac{3}{2}}}{6K\lambda} - \frac{\sqrt{K^2 + 4K}}{K\lambda} \left( \frac{1}{K} + \frac{1}{2} \right) - \frac{K^2}{6\lambda} - \frac{2Ln\left(\lambda(2-K) + \sqrt{K^2 \lambda^2 + 4\lambda^2 K}\right)}{K\lambda} - \frac{K}{2\lambda}$$



و ترم نفوذ معادله به صورت زیر گسسته‌سازی می‌شود:

$$\int_b^t \int_w^e \int_s^n \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv) \right) r dr d\theta dz =$$

$$\int_b^t \int_w^e \int_s^n \left[ \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (rv) \right) - \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (rv) \right] r dr d\theta dz =$$

$$\frac{r_n \mu \Delta \theta \Delta z}{\Delta r_n} (v_n - v_p) - \frac{r_s \mu \Delta \theta \Delta z}{\Delta r_s} (v_p - v_s)$$

$$- \frac{1}{r_p} v_p \mu \Delta \theta \Delta z \Delta r$$

$$\int_b^t \int_w^e \int_s^n \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} (r \mu \frac{\partial}{\partial z} (v)) r dr d\theta dz =$$

$$\frac{r_e \mu \Delta \theta \Delta r}{(\Delta z)_e} (v_e - v_p) - \frac{r_w \mu \Delta \theta \Delta r}{(\Delta z)_w} (v_p - v_w)$$

با همین روش معادله مومنتوم در جهت Z نیز گسسته‌سازی می‌گردد. در نهایت شکل عمومی رابطه انفصال با در نظر گرفتن شبکه جابه‌جا شده شکل ۳ به صورت روابط ۱۷ و ۱۸ (۱۸) ظاهر می‌شود:

$$a_{i,j} u_{i,j} = \sum a_{nb} u_{nb} + (P_{I-1,j} - P_{I,j}) A_{i,j} + b_{i,j} \quad (17)$$

$$a_{i,j} v_{i,j} = \sum a_{nb} v_{nb} + (P_{I,j-1} - P_{I,j}) A_{i,j} + b_{i,j} \quad (18)$$

با حدس میدان فشار P، از معادله ۱۹ و ۲۰ مولفه‌های سرعت متناظر به دست می‌آید:

$$a_{i,j} u_{i,j}^* = \sum a_{nb} u_{nb}^* + (P_{I-1,j}^* - P_{I,j}^*) A_{i,j} + b_{i,j} \quad (19)$$

$$a_{i,j} v_{i,j}^* = \sum a_{nb} v_{nb}^* + (P_{I,j-1}^* - P_{I,j}^*) A_{i,j} + b_{i,j} \quad (20)$$

از طرفی با میدان فشار دقیق P سرعت واقعی u محاسبه می‌گردد که در معادله (۲۱) نشان داده شده است:

$$a_{i,j} u_{i,j} = \sum a_{nb} u_{nb} + (P_{I-1,j} - P_{I,j}) A_{i,j} + b_{i,j} \quad (21)$$

حال از طریق تفاضل دو رابطه ۱۹ و ۱۷ مقدار تصحیح  $u'$  و  $P'$  به دست می‌آید. برای سرعت  $v$  نیز باید در تمامی مراحل، مشابه  $u$  عمل شود.

$$a_{i,j} (u_{i,j} - u_{i,j}^*) = \sum a_{nb} (u_{nb} - u_{nb}^*) +$$

$$[(P_{I-1,j} - P_{I-1,j}^*) - (P_{I,j} - P_{I,j}^*)] A_{i,j}$$

$$p' = P - P^*, \quad u' = u - u_i^*$$

اگر میدان سرعت حدس زده شده برابر با میدان واقعی باشد، ترم  $\sum a_{nb} u_{nb}'$  برابر صفر بوده و می‌توان از آن صرف نظر نمود.

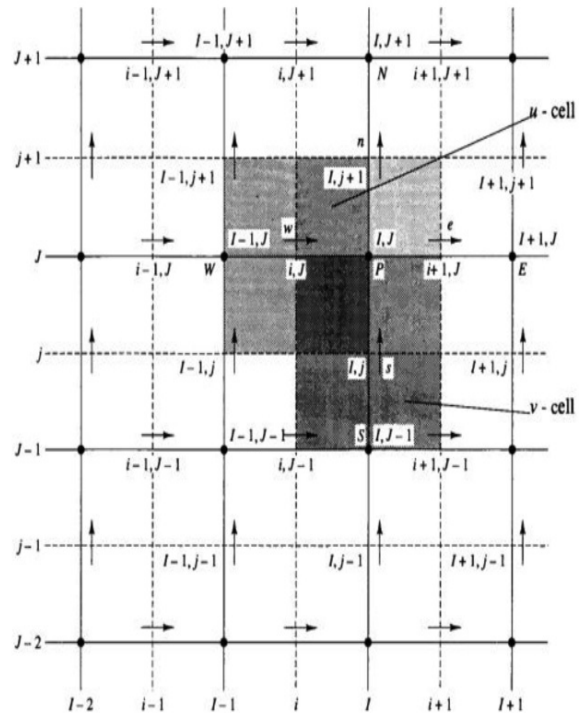
$$M_2 = \frac{\sqrt{K^2 + 4K}}{4K^3} (1+K) + \frac{(K^2 + 4K)^{\frac{5}{2}}}{60K^3} - \frac{\text{Ln}(\lambda)}{4K}$$

$$+ \frac{(K^2 + 4K)^{\frac{3}{2}}}{24K^2} \left( \frac{5K+2}{16K} \right) - K \left( \frac{15+4K}{60} \right) - \frac{\text{Ln}(2)}{4K^3}$$

$$- \frac{\text{Ln}(2 + \sqrt{K^2 + 4K} - K)}{4K^3} + \frac{f(K)}{2} + C_1 \lambda$$

### حل عددی جریان گل حفاری با مدل کراس

برای حل عددی، ابتدا هندسه موردنظر به روش شبکه جابه‌جا شده، مش بندی شده است. در این مش بندی برای هریک از کمیت‌های برداری (سرعت‌ها) یک سل جداگانه و برای همه کمیت‌های اسکالر از جمله فشار و گرانیوی یک سل در نظر گرفته می‌شود (شکل ۳).

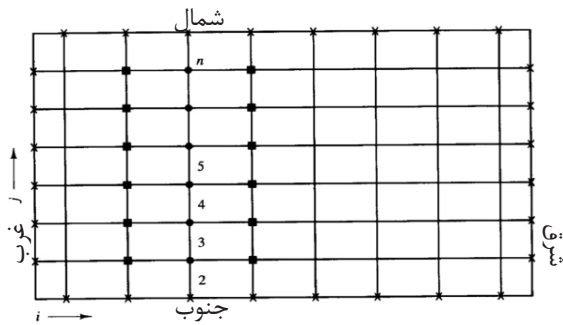


شکل ۳- شبکه جابه‌جا شده با دو سل برداری (سرعت‌ها) و سل اسکالر فشار [۱۲]

سپس برای گسسته‌سازی معادله مومنتوم به روش حجم محدود، از آن بر روی هر یک از حجم‌های کنترل انتگرال گرفته می‌شود [۱۲ و ۱۳]. حال به عنوان مثال ترم جابه‌جایی معادله مومنتوم در جهت  $r$  گسسته‌سازی می‌شود.

$$\int_b^t \int_w^e \int_s^n \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (prv) r dr d\theta dz = (r_n F_n v_n - r_s F_s v_s) \Delta z \Delta \theta$$

$$\int_b^t \int_w^e \int_s^n \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} (pruv) r dz dr d\theta = (r_e F_e v_e - r_w F_w v_w) \Delta r \Delta \theta$$



شکل ۴- شبکه در نظر گرفته شده برای محاسبه مقادیر گره‌ها

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E + a_S \phi_S + a_N \phi_N + b \quad (29)$$

ابتدا معادله ۲۹ را به شکل رابطه ۳۰ تبدیل کرده و مقادیر سمت راست معادله ۳۰ به صورت موقت، معلوم فرض می‌شود و سپس تساوی‌های  $C_j = a_w \phi_w + a_e \phi_e + b$  و  $D_j = a_p$ ،  $\beta_j = a_s$ ،  $\alpha_j = a_n$  در نظر گرفته می‌شود.

$$a_P \phi_P - a_S \phi_S - a_N \phi_N = a_W \phi_W + a_E \phi_E + b \quad (30)$$

در نتیجه رابطه (۳۰) به رابطه (۳۱) تبدیل می‌گردد:

$$-\beta_j \phi_{j-1} + D_j \phi_j - \alpha_j \phi_{j+1} = C_j \quad (31)$$

با نوشتن این رابطه برای گره‌هایی که مقادیرشان نامعلوم است، ماتریس سه قطری تشکیل می‌گردد که این ماتریس به روش الگوریتم سه قطری توماس حل می‌شود. بدین منظور در راستای طولی N-S با توجه به شکل ۴ معادلات برای مقادیر  $j=2,3,4,\dots,n$  حل می‌شود، سپس محاسبه به خط شمال-جنوب بعدی حرکت می‌کند. راستایی که خطوط در آن انتخاب می‌شوند، به راستای جاروب معروف می‌باشد. با این روند فرآیند حل تا همگرایی نتایج، تکرار می‌شود. البته می‌توان جهت غرب به شرق را نیز به عنوان جهت جاروب در نظر گرفت که در این حالت نیز مانند مورد قبل با آن رفتار می‌شود.

در کل می‌توان گفت معادلات گسسته‌سازی شده با استفاده از الگوریتم سیمپل که یک روش حدس و خطا می‌باشد، حل شده است. این الگوریتم ابتدا میدان فشار را حدس می‌زند و معادلات مومنتم را حل می‌کند. سرعت‌های به دست آمده باید در معادله پیوستگی صدق نمایند. در صورتی که معادله پیوستگی ارضا نگردد، یک مقدار تصحیح برای فشار محاسبه شده و با میدان فشار جدید معادلات مومنتم حل می‌گردد.

با استفاده از معادله پیوستگی، صحت میدان سرعت برآورد می‌شود و این کار تا زمانی که معادله پیوستگی ارضا شود،

$$a_{i,j} u'_{i,j} = \sum a_{nb} u'_{nb} + (P'_{I-1,j} - P'_{I,j}) A_{i,j}$$

در نتیجه مقدار تصحیح  $u'$  بر حسب فشار  $P'$  با رابطه (۲۲) محاسبه می‌گردد:

$$a_{i,j} u'_{i,j} = (P'_{I-1,j} - P'_{I,j}) d_{i,j} \quad (22)$$

$$d_{i,j} = \frac{A_{i,j}}{a_{i,j}}$$

برای محاسبه  $P'$ ، سرعت تصحیح با روابط ۲۳ تا ۲۶ در معادله پیوستگی قرار داده می‌شود و سپس مقدار  $P'$  به عنوان تصحیح میدان فشار مورد استفاده قرار می‌گیرد.

$$u_{i,j} = u_{i,j}^* + (P'_{I-1,j} - P'_{I,j}) d_{i,j} \quad (23)$$

$$v_{I,j} = v_{I,j}^* + (P'_{I,j-1} - P'_{I,j}) d_{I,j} \quad (24)$$

$$u_{i+1,j} = u_{i+1,j}^* + (P'_{I-1,j} - P'_{I+1,j}) d_{i+1,j} \quad (25)$$

$$v_{I,j+1} = v_{I,j+1}^* + (P'_{I,j-1} - P'_{I,j+1}) d_{I,j+1} \quad (26)$$

با گسسته‌سازی معادله پیوستگی به شکل رابطه ۲۷ و قرار دادن سرعت‌های به دست آمده، تساوی ۲۸ برای محاسبه تصحیح فشار حاصل می‌شود که با حل این رابطه برای ناحیه مورد نظر، مقدار تصحیح فشار محاسبه می‌گردد.

$$[(\rho u A)_{i+1,j} - (\rho u A)_{i,j}] + [(\rho v A)_{I,j+1} - (\rho v A)_{I,j}] = 0 \quad (27)$$

$$a_{I,j} P'_{I,j} = a_{I+1,j} P'_{I+1,j} + a_{I-1,j} P'_{I-1,j} + a_{I,j+1} P'_{I,j+1} + a_{I,j-1} P'_{I,j-1} + b'_{I,j} \quad (28)$$

ضرایب هر کدام از این عبارات با توجه به شبکه نشان داده شده در شکل ۳ به صورت زیر می‌باشد:

$$a_{I+1,j} = (\rho u A)_{i+1,j} \quad a_{I,j-1} = (\rho v A)_{I,j}$$

$$a_{I-1,j} = (\rho u A)_{i,j} \quad a_{I,j+1} = (\rho v A)_{I,j+1}$$

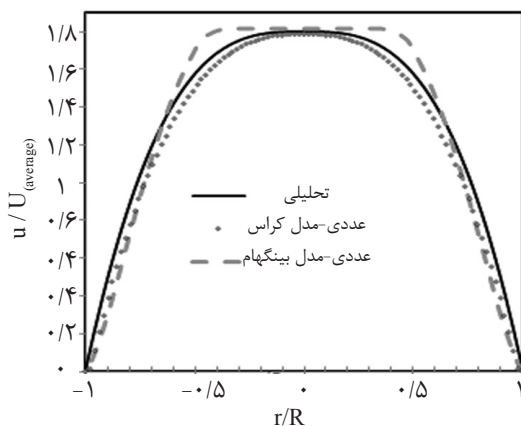
$$b'_{I,j} = (\rho u^* A)_{i,j} - (\rho u^* A)_{i+1,j} + (\rho v^* A)_{I,j} - (\rho v^* A)_{I,j+1}$$

به طور خلاصه می‌توان گفت ابتدا میدان فشار حدس زده می‌شود، سپس سرعت‌های حدسی  $u^*$  و  $v^*$  محاسبه می‌گردد، از این میدان سرعت به دست آمده، برای محاسبه مقدار تصحیح فشار در معادله پیوستگی استفاده می‌شود. در ادامه مقدار  $P'$  محاسبه شده از معادله پیوستگی برای تصحیح فشار و مولفه‌های سرعت استفاده می‌گردد.

### حل معادلات گسسته

دستگاه معادلات گسسته‌سازی شده، با رابطه عمومی ۲۹ برای هر گره ظاهر و شبکه دوبعدی شکل ۴ در نظر گرفته می‌شود.

پیش‌بینی تنش برحسب برش در نرخ برش‌های پایین می‌باشد. مقایسه پروفایل سرعت حل تحلیلی با حل عددی دو مدل کراس و بینگهام، نشان داد که همچنین توانایی مدل کراس در پیش‌بینی گرانی و پروفایل سرعت از مدل بینگهام بیشتر است و پروفایل سرعت در این روش به حل تحلیلی نزدیک‌تر است.



شکل ۶- مقایسه حل تحلیلی ارائه شده برای پروفایل سرعت سیال غیرنیوتنی پیروی‌کننده از مدل کراس با حل عددی مدل‌های کراس و بینگهام

در شکل ۶ پروفایل سرعت بی‌بعد از دو طریق حل عددی و تحلیلی در آنالوسی که  $k$  آن صفر باشد، مقایسه شده است. قدر مطلق خطای پروفایل سرعت نسبت به حل تحلیلی ۲٪ می‌باشد که می‌توان این مقدار خطا را ناچیز فرض نمود. شکل ۷ ضریب اصطکاک محاسبه شده از حل عددی و رابطه ارائه شده برای ضریب اصطکاک جریان در آنالوس را نشان می‌دهد. نتایج حل عددی و رابطه مذکور تطابق بسیار خوبی با یکدیگر دارد. همچنین مشاهده می‌شود که با افزایش عدد رینولدز در جریان آرام، مقدار ضریب اصطکاک کمتر می‌شود.

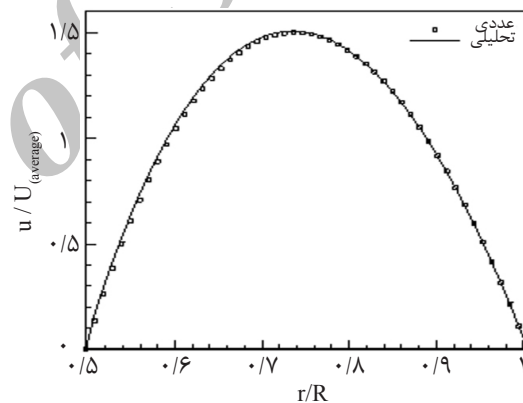
#### بررسی پروفایل سرعت گل حفاری

با توسعه کد عددی برای سیال غیرنیوتنی، میدان جریان سیال پیروی‌کننده از مدل کراس در آنالوس شبیه‌سازی شده است. سیال غیرنیوتنی انتخاب شده در این شبیه‌سازی گل حفاری است که با افزایش نرخ برش، ویسکوزیته سیال کمتر می‌شود.

ادامه می‌یابد. البته باید در نظر داشت که در هر مرحله، ویسکوزیته با توجه به نرخ برش محاسبه می‌شود.

#### تجزیه و تحلیل نتایج اعتبارسنجی

کد توسعه داده شده قابلیت استفاده برای تحلیل جریان در آنالوس و جریان بین دو صفحه را دارد. در ابتدا، حل عددی با حل تحلیلی جریان سیال نیوتنی ( $n=1$ ) در ناحیه توسعه یافته مقایسه شده است. در آنالوس، پروفایل سرعت به صورت سهمی نامتقارن بوده و ماکزیمم آن به دیواره داخلی نزدیک‌تر است که در شکل ۵ مشاهده می‌شود. منطبق شدن نتایج عددی بر روی پروفایل حل تحلیلی، صحت کد را نشان می‌دهد.



شکل ۵- مقایسه پروفایل سرعت حل تحلیلی و عددی سیال نیوتنی ( $n=1$ ) در آنالوس با  $k=0.5$

برای اعتبارسنجی سرعت سیال غیرنیوتنی در آنالوس از حل تحلیلی که پیشتر برای لوله (آنالوس  $k=0$ ) ارائه گردید، استفاده شده است. در شکل ۶ مشاهده می‌شود که پروفایل سرعت با استفاده از مدل بینگهام در نزدیکی دیواره‌ها که اندازه برش بیشتر است، اختلاف ناچیزی حل دقیق دارد. زیرا در این نواحی، تنش حاصل از حرکت سیال بیشتر از تنش تسلیم گل می‌باشد و این فاصله ناچیز را می‌توان به ضعف مدل بینگهام در پیش‌بینی ویسکوزیته به دلیل خطی در نظر گرفتن تنش برحسب برش در این مدل نسبت داد. در نواحی دور از دیواره‌ها پروفایل سرعت مدل بینگهام مقدار زیادی از حل تحلیلی تجاوز می‌نماید که با توجه به شکل ۱-ب به دلیل ضعف این مدل در

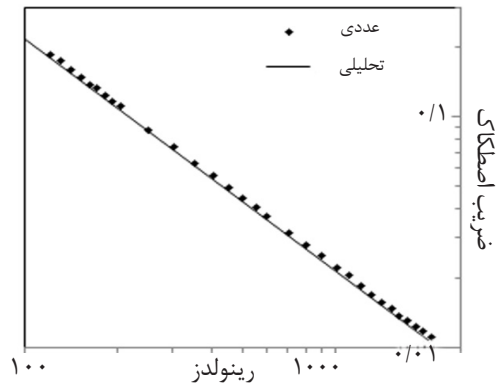


در ابتدای لوله به دلیل بالا بودن نرخ برش، ویسکوزیته سریعاً کاهش یافته و مشاهده می‌شود که شیب افزایش سرعت در ورودی نسبت به ناحیه توسعه یافته بیشتر است. سپس با پیشروی در طول لوله و یکنواخت‌تر شدن نرخ برش اطراف دیواره، پروفایل سرعت تخت‌تر می‌شود. نهایتاً در ناحیه توسعه یافته دو پروفایل که در دو سطح مقطع متفاوت رسم شده است، دقیقاً بر هم منطبق شده است. با در نظر گرفتن شرط عدم لغزش بر روی دیواره و با توجه به تندی پروفایل سرعت در کنار دیواره و کم شدن انحنای آن در مرکز لوله، می‌توان گفت در کنار دیواره‌ها که مقدار نرخ برش زیادتر است، سیال رقیق‌تر شده و ویسکوزیته آن کاهش یافته است. در مرکز لوله که گرادیان‌های سرعت کمتر می‌باشد، سیال تا حد زیادی لزجت بالای خود را حفظ کرده است. تنش وارد شده بر لایه‌های دورتر از دیواره نسبت به کنار دیواره، کمتر توانسته باعث رقیق شدن سیال و کاهش ویسکوزیته گردد و سیال در این نواحی حالت صلب بودن خود را تا حد زیادی حفظ کرده است.

پروفایل بی‌بعد سرعت سیال نیوتنی و سیال غیرنیوتنی پیروی‌کننده از مدل کراس در لوله با سرعت ورودی مشابه در شکل ۹ مقایسه شده است. سرعت سیال غیرنیوتنی در مرکز لوله تخت شده که این شکل‌گیری پروفایل سرعت با تغییرات ویسکوزیته و تفاوت در مقدار نرخ برش، توجیه پذیر است. ولی پروفایل سرعت سیال نیوتنی تیزتر از پروفایل سرعت سیال نیوتنی می‌باشد و دارای ماکزیمم بیشتری است.

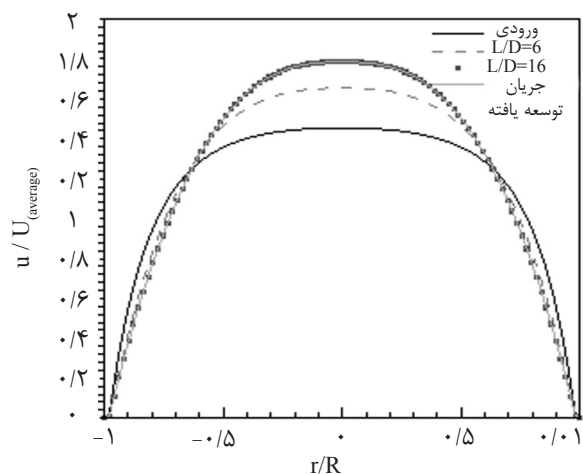
در شکل ۱۰ کانتور سرعت از ورودی تا ناحیه توسعه در آنالوس رسم شده است. مطابق شکل با ورود سیال غیرنیوتنی به آنالوس تغییرات شدیدی در کانتور سرعت مشاهده می‌گردد. ولی رفته رفته با پیشروی سیال در مسیر جریان، لایه‌های همگن‌تری پدیدار شده و اثرات دیواره وارد جریان می‌شود. در نهایت کانتور سرعت در جهت طول بدون تغییر می‌ماند که نشان دهنده توسعه یافتگی جریان می‌باشد.

شکل ۱۱ پروفایل سرعت سیال غیرنیوتنی در چند سطح مقطع متفاوت در طول آنالوس ( $k=0.5$ ) را نشان می‌دهد.

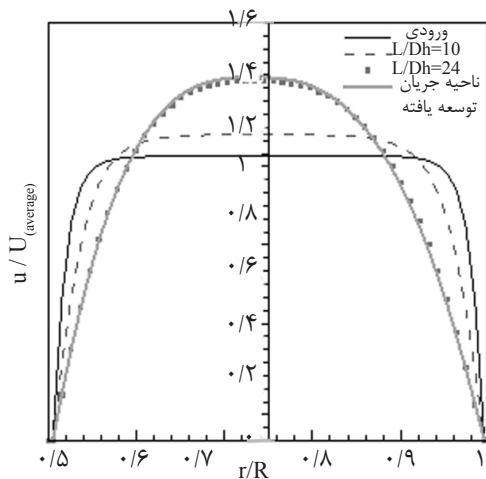


شکل ۷- مقایسه ضریب اصطکاک محاسبه شده با استفاده از کد عددی ارائه شده و رابطه تحلیلی ۹ در آنالوس برای سیال نیوتنی

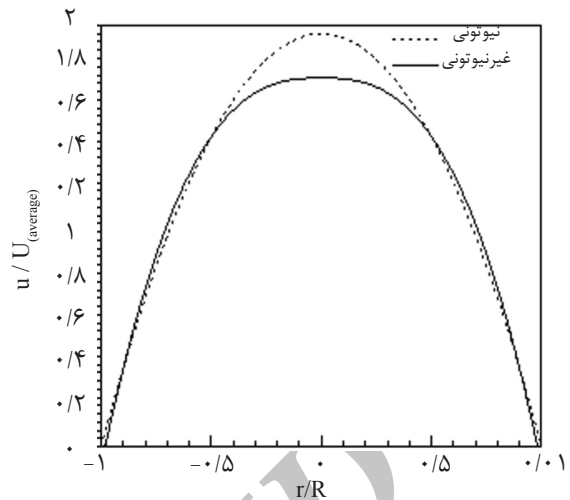
در هنگام پمپاژ گل حفاری از مسیر لوله به ته چاه، با توجه به شرط عدم لغزش بر روی دیواره، می‌دانیم که نرخ برش در نزدیکی دیواره نسبت به مرکز بسیار شدیدتر است. در نتیجه ویسکوزیته در این نواحی نسبت به مرکز لوله به شدت کاهش می‌یابد و پروفایل سرعت با شیب تند افزایش می‌یابد. ولی در نواحی مرکزی لوله که نرخ برش بسیار کمتر است، سیال شبیه به جسم صلب عمل می‌نماید و ناحیه پلاگ را تشکیل می‌دهد که در شکل ۸ به خوبی دیده می‌شود. در این شکل، پروفایل سرعت ورودی از ابتدا تا ناحیه توسعه یافته در چهار سطح مقطع متفاوت نشان داده شده است.



شکل ۸- پروفایل سرعت در مقاطع با فاصله ۶، ۱۶ و ۲۴ برابر قطر از ورودی لوله برای سیال غیرنیوتنی پیروی‌کننده از مدل کراس



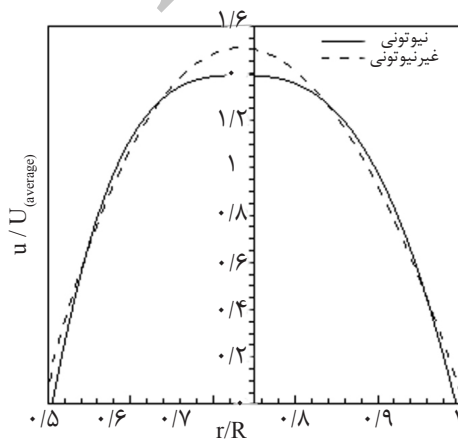
شکل ۱۱- پروفایل سرعت در مقاطع با فاصله ۱۰ و ۲۴ و ۳۴ برابر قطر از ورودی آنالوس (k=0.5) برای سیال غیرنیوتنی مدل کراس با رینولدز ۱۴۰۰ توسعه یافته



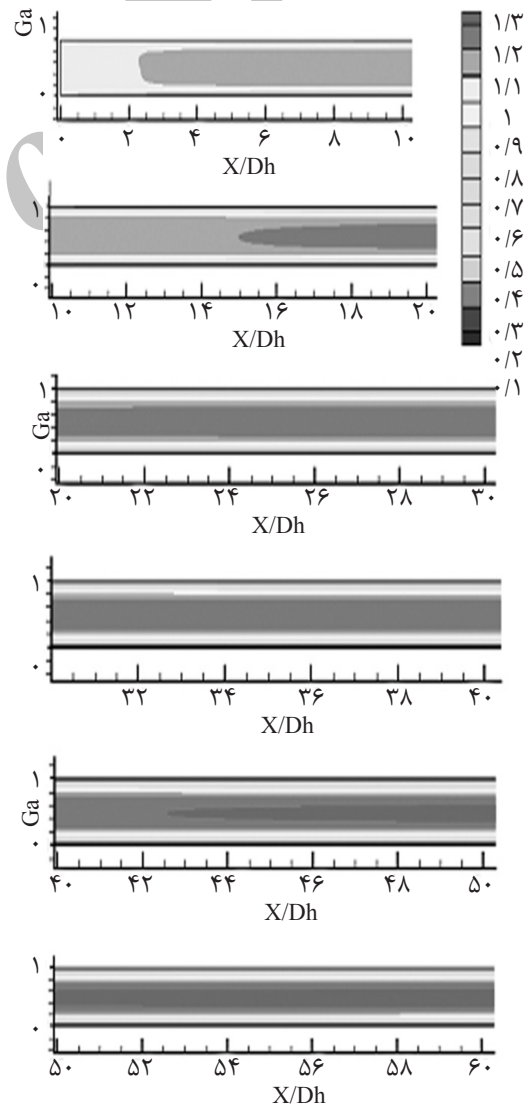
شکل ۹- مقایسه پروفایل سرعت سیال نیوتنی و سیال غیرنیوتنی مدل کراس در لوله

با ورود سیال به آنالوس، ویسکوزیته در کنار دیواره‌ها همانند لوله تحت تاثیر نرخ برش قرار می‌گیرد و سرعت در کنار دیواره‌ها با شیب تندی افزایش می‌یابد، سپس جریان به سمت توسعه یافتگی پیش می‌رود و در نهایت در فاصله  $L/D_h=44$  توسعه یافته می‌شود. در شکل ۱۲ پروفایل سرعت سیال نیوتنی و غیرنیوتنی مقایسه شده است. مطابق شکل پروفایل سرعت سیال غیرنیوتنی در آنالوس در مقایسه با لوله به پروفایل سرعت سیال نیوتنی نزدیک‌تر می‌باشد.

با توجه به دیواره سیلندر داخلی در آنالوس، می‌توان گفت که این دیواره باعث ایجاد برش در لایه‌های سیال و در نتیجه رقیق‌تر شدن سیال (کاهش ویسکوزیته) می‌شود.

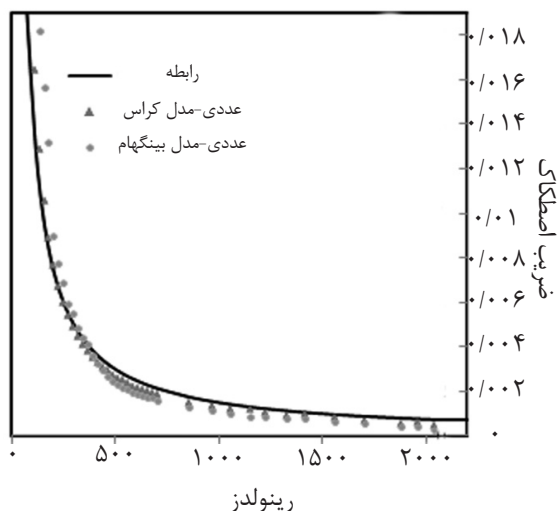


شکل ۱۲- مقایسه پروفایل سرعت سیال نیوتنی و سیال غیرنیوتنی مدل کراس در آنالوس



شکل ۱۰- کانتور پروفایل سرعت بی بعد از ورودی آنالوس تا ناحیه توسعه یافته برای سیال غیرنیوتنی پیروی کننده از مدل کراس

رینولدز موثر با رابطه ۳۲ تعریف می‌شود. در این رابطه ویسکوزیته موثر از مدل کراس با نرخ برش محاسبه شده از رابطه ۳۳ به دست آمده است.



شکل ۱۳- مقایسه ضریب اصطکاک محاسبه شده از حل عددی برای دو مدل کراس و بینگهام و رابطه (۹) برای سیال غیرنیوتنی

$$Re_{ef} = \frac{\rho U D_h}{\mu_{ef}} \quad (32)$$

$$\dot{\gamma}_{ef}^2 = \left(\frac{U}{D_h}\right)^2 + \left(\frac{w R_1}{D_h}\right)^2 \quad (33)$$

سپس برای محاسبه ضریب اصطکاک بر حسب رینولدز برای سیال غیرنیوتنی، با برازش منحنی که در شکل ۱۴ نشان داده شده، رابطه ۳۴ با انحراف معیار ۰/۹۸۸ تعیین گردیده است.

$$C_f = 9.635 Re^{-1.118} \quad (34)$$

با استفاده از این رابطه می‌توان ضریب اصطکاک را محاسبه نمود و افت فشار را از رابطه داری و ویسباخ برای سیال غیرنیوتنی پیروی کننده از مدل کراس به دست آورد.

#### بررسی طول توسعه یافتگی

با ورود جریان به آنالوس، پروفایل سرعت ثابت نبوده و با پیشروی در طول آنالوس تغییرات کمتر می‌شود. در نهایت تغییرات سرعت جریان در ناحیه توسعه یافته نسبت به طول آنالوس صفر شده و گرادیان سرعت در جهت جریان برابر صفر می‌گردد. همچنین ضریب اصطکاک که تابع تنش دیواره است، در ابتدای ورود جریان به آنالوس، با توجه به تغییرات سرعت در جهت طول، متغیر بوده و با توسعه یافتگی جریان ثابت می‌شود.

این کاهش ویسکوزیته در مرکز لوله وجود ندارد. در نتیجه ویسکوزیته نسبت به لوله همگن تر می‌شود. بنابراین، در نواحی دورتر از سیلندر بیرونی، به دلیل وجود سیلندر داخلی سیال رقیق تر و پروفایل سرعت، حالت تخت شدن خود را تا حد زیادی از دست می‌دهد و به پروفایل سیال نیوتنی نزدیک می‌گردد.

#### ضریب اصطکاک سیال غیرنیوتنی در آنالوس

در صورتی که برای محاسبه عدد رینولدز از ویسکوزیته محلی (ویسکوزیته روی دیواره) استفاده شود، مقادیر ضریب اصطکاک بر حسب عدد رینولدز از طریق رابطه ۹ به درستی محاسبه می‌شود. در شکل ۱۳ ضریب اصطکاک حاصل از حل عددی سیال پیروی کننده از مدل کراس و مدل بینگهام در آنالوس با منحنی رابطه ۹ نشان داده شده است. لازم به ذکر است که در این رابطه برای محاسبه ضریب اصطکاک از گرادیان روی دیواره‌ها (محاسبه عدد رینولدز) استفاده شده که در ناحیه توسعه یافته جریان، رینولدز ثابت و تغییرات آن بسیار ناچیز است.

در شکل ۱۳ مشاهده می‌شود که مقادیر ضریب اصطکاک حاصل از مدل بینگهام نسبت به مدل کراس دقت کمتری دارد. خطای این دو مدل که با رابطه ۹ محاسبه شده ۱۲/۲٪ و ۵/۳٪ می‌باشد که در مدل کراس این خطا را می‌توان به تقریب‌های عددی (به ویژه مشتق بر روی دیواره برای محاسبه ضریب اصطکاک) نسبت داد. در مدل بینگهام به دلیل ضعف در پیش‌بینی ویسکوزیته، خطا افزایش می‌یابد که در شکل ۱- ب خطای برازش برای پیش‌بینی تنش بر حسب برش مشاهده می‌شود.

در رابطه ۹ برای محاسبه ضریب اصطکاک از رینولدز موضعی (روی دیواره) استفاده می‌شود که تعیین عدد رینولدز مستلزم معلوم بودن ویسکوزیته بر روی دیواره می‌باشد. در حالی که اندازه‌گیری ویسکوزیته محلی بر روی دیواره یا امکان‌پذیر نیست و یا به سختی اندازه‌گیری می‌شود. در نتیجه از رابطه ۹ نمی‌توان به آسانی ضریب اصطکاک سیال غیرنیوتنی در آنالوس را محاسبه نمود. برای محاسبه ضریب اصطکاک سیال غیرنیوتنی به صورت مستقل از ویسکوزیته دیواره، با توجه به مقالات [۱۴]

بر مبنای این تفسیر، زمانی که مقدار ضریب اصطکاک ثابت گردد، جریان به توسعه یافتگی هیدرودینامیکی رسیده است. از طرفی در بعضی موارد محاسبه طول توسعه یافتگی مورد نیاز بوده و حل عددی وقت گیر می باشد. بدین منظور برای سه نوع سیال جدول ۱، میدان سرعت در چندین رینولدز، حل عددی گردید و در هر مورد با ثابت شدن ضریب اصطکاک، طول توسعه یافتگی تعیین شد. با بررسی داده‌های به دست آمده به نظر می رسد طول توسعه یافتگی متناسب با و بوده و با پارامتر  $n$  در مدل کراس رابطه توانی دارد. بدین منظور با بررسی روابط موجود [۱۵ و ۱۶]، معادله زیر برای محاسبه طول توسعه یافتگی بر حسب عدد رینولدز موثر ارائه شده است:

$$\frac{L_e}{D_h} = (0.0006836A^{4.762} + 0.02428)Re^a \quad (35)$$

که متغیر بی بعد  $A$  و توان  $a$  با استفاده از روابط زیر محاسبه می شود:

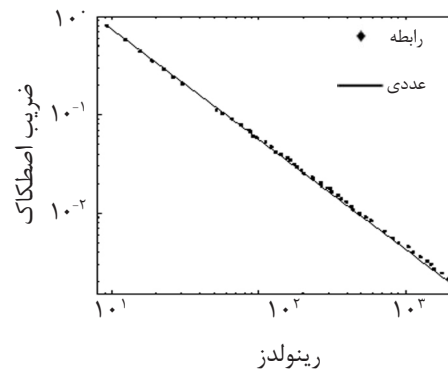
$$A = \frac{\lambda \eta_0}{\rho D_h^2}$$

$$a = 0.6455 \exp(-(n - 0.5217) / 0.06941)^2$$

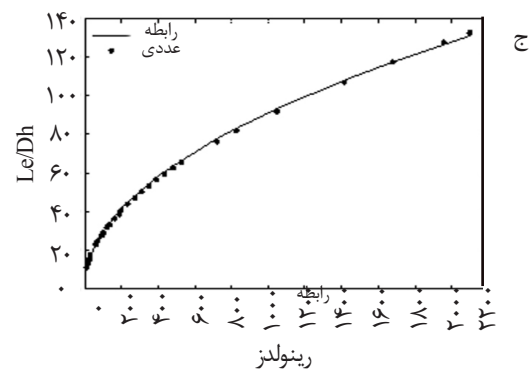
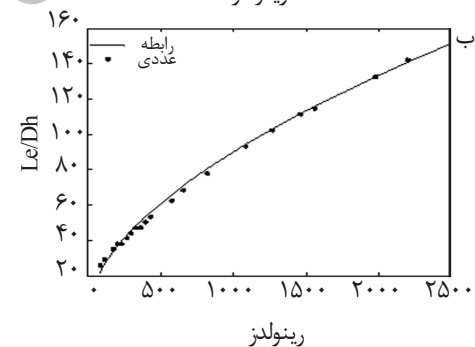
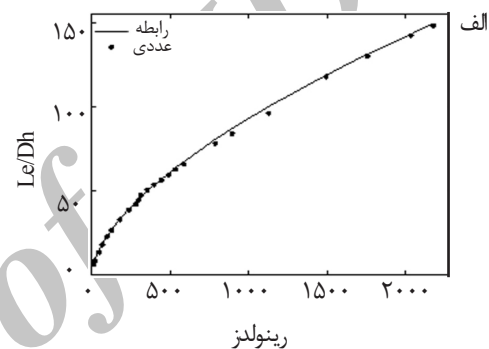
ضریب همبستگی برای رابطه ۳۵ برابر  $0.997$  می باشد. در شکل ۱۵ برای هر سه نوع سیال (جدول ۱)، نتایج عددی و رابطه ارائه شده (معادله ۳۵) مقایسه شده است. در این شکل مشاهده می شود که نتایج حل عددی و رابطه ارائه شده بسیار به هم نزدیک هستند و می توان از این رابطه برای محاسبه طول توسعه یافتگی برای سیال پیروی کننده از مدل کراس در آنالوس با استفاده نمود.

### نتیجه گیری

در این مطالعه نشان داده شد که مدل کراس به خوبی خواص رئولوژیکی سیال غیرنیوتنی گل حفاری را پیش بینی می نماید و حل تحلیلی برای این مدل در لوله (مسیر پمپاژ گل حفاری به ته چاه) انجام شد. سپس با استفاده از روش حجم محدود، کد CFD ارائه گردید که توانست پروفایل فشار و سرعت را برای سیال غیرنیوتنی گل حفاری در مقاطع دایره ای (آنالوس و لوله) و بین دو صفحه به خوبی پیش بینی کند. افت فشار حاصل از اصطکاک که بسیار وابسته به خواص سیال می باشد با استفاده از حل عددی کد CFD برای سیالات غیرنیوتنی محاسبه گردید.



شکل ۱۴- مقایسه ضریب اصطکاک محاسبه شده از حل عددی و رابطه ۳۴ بر حسب رینولدز موثر برای سیال غیرنیوتنی مدل کراس در آنالوس



شکل ۱۵- مقایسه طول توسعه یافتگی محاسبه شده از حل عددی و رابطه ۳۵ برای الف) سیال غیرنیوتنی نوع اول، ب) سیال غیرنیوتنی نوع دوم، ج) سیال غیرنیوتنی نوع سوم (جدول ۱) بر حسب رینولدز موثر

### علائم و نشانه‌ها

CFD: دینامیک سیالات محاسباتی	
$D_h$ : قطر هیدرولیک (m)	
g: نیروی جاذبه ( $m/s^2$ )	
L: طول آنالوس (m)	
P: فشار، ( $N/m^2$ )	
u: مولفه سرعت محوری (m/s)	
W: مولفه سرعت چرخشی (m/s)	
v: مولفه سرعت شعاعی (m/s)	
k: نسبت شعاع لوله به شعاع چاه حفاری	
R: شعاع چاه حفاری (m)	
r: مولفه مکان در جهت شعاع آنالوس (m)	
$C_f$ : ضریب اصطکاک	
Re: عدد رینولدز	
$L_e$ : طول توسعه یافتگی (m)	
$U_{average}$ : سرعت متوسط (m/s)	
Q: دبی ( $m^3/s$ )	
<b>علائم یونانی</b>	
$\mu$ : ویسکوزیته سیال (kg/m.s)	
$\rho$ : چگالی ( $kg/m^3$ )	
$\tau$ : تنش ( $N/m^2$ )	
$\eta_0$ : ویسکوزیته سیال ساکن (kg/m.s)	
$\lambda$ : ثابت زمانی (s)	
$\dot{\gamma}$ : نرخ برش (1/s)	

با مقایسه نتایج دو مدل بینگهام و کراس، مشاهده شد که مدل کراس هم در پیش‌بینی ویسکوزیته توانا تر است و هم پروفایل سرعت و ضریب اصطکاک را با دقت بالاتری برآورد می‌نماید. نتایج نشان می‌دهد پروفایل سرعت سیالات غیرنیوتنی، نسبت به سیال نیوتنی به دلیل تغییرات ویسکوزیته تخت‌تر می‌باشد و در کنار دیواره‌ها که نرخ برش زیاد است، سیال رقیق‌تر شده و پروفایل سرعت با شیب تندتری افزایش می‌یابد. ولی در نواحی وسط فضای حلقوی آنالوس که نرخ برش کمتر است، سیال تقریباً همانند یک جسم صلب عمل می‌نماید و دارای ویسکوزیته بیشتری نسبت به کنار دیواره می‌باشد. لذا نیروی درگ بیشتری به ذرات وارد شده و از ته نشینی آنها جلوگیری می‌کند. بنابراین برای آنکه گل حفاری بتواند به بهترین شکل کنده‌ها را حمل کرده و از ته نشینی آنها جلوگیری نماید، طراحی مته باید به شیوه‌ای باشد که کنده‌ها به وسط فضای حلقوی آنالوس منتقل شود. در ادامه نشان داده شد که می‌توان ضریب اصطکاک را با استفاده از رابطه پیشنهادی محاسبه و افت فشار را با استفاده از رابطه داریسی و سیباخ به دست آورد. همچنین نشان داده شد که طول توسعه یافتگی برای سیال پیروی کننده از مدل کراس، با پارامتر  $n$  رابطه توانی داشته و متناسب با سایر پارامترهای مدل کراس ( $\lambda$  و  $\eta$ ) می‌باشد. بر اساس رینولدز موثر می‌توان طول توسعه یافتگی را با رابطه ارائه شده در این مقاله با دقت بالایی محاسبه نمود.

### مراجع

- [1]. Escudier M. P., Oliveira P. J. and Pinho F. T., "Fully developed laminar flow of purely viscous non-Newtonian liquids through annuli", including the effects of eccentricity and inner-cylinder rotation, International Journal of Heat and Fluid Flow, Vol. 23, pp. 52-73, 2002.
- [2]. Al-Kayiem H. H., Zaki N. M., Asyraf M. Z. and Elfeel M. E., "Simulation of the Cuttings Cleaning During the Drilling Operation", American Journal of Applied Sciences, Vol. 7, 800-806, 2010.
- [3]. Pereira F. A. R., Barrozo M. A. S. and Ataíde C. H., "CFD predictions of drilling fluid velocity and pressure profiles in laminar helical flow, Brazilian Journal of Chemical Engineering", Vol. 24, Issue 4, pp. 587-595, 2007.
- [4]. Ahmed R. and Miska S., "Experimental Study and Modeling of Yield Power-Law Fluid Flow in Annuli with Drill-pipe Rotation", Presented at SPE 112604 and IADC/SPE Drilling Conference, Orlando, 2008.



- [5]. Pereira F. A. R., Barrozo M. A. S., and Ataíde C. H., "CFD approach using a discrete phase model for annular flow analysis, *Latin American Applied Research*", Vol. 40, pp. 53 – 60, 2010.
- [6]. S. Mokhan, Hwang Y. K., Woo N. S. and Kim Y. J., "Solid–liquid hydrodynamics in a slim hole drilling annulus", *Journal of Petroleum Science and Engineering* 70, pp. 308–319, 2010.
- [7]. Ozbayoglu E. M. and Sorgun M., "Frictional pressure loss estimation of non-newtonian fluids in realistic annulus with pipe rotation", *Journal of Canadian Petroleum Technology*, Vol. 49, No. 12, Dec. 2010.
- [8]. Wang Z. M., GUO X. I., and Hong Y., "Effect of drillpipe rotation cleaning for extended reach well", *Journal of Hydrodynamics*, Vol. 21, pp. 366-372, 2009.
- [9]. Gumati A. and Takahshi H., "Experimental study and modeling of pressure loss for foam-cuttings mixture flow in horizontal pipe", *Journal of Hydrodynamics*, Vol. 23, pp. 431-438, 2011.
- [10]. Kelessidis V. C., Maglione R., Tsamantaki C., and Aspirtakis Y., "Optimal determination of rheological parameters for Herschel–Bulkley drilling fluids and impact on pressure drop", *Velocity Profiles and Penetration Rates During Drilling*, *Journal of Petroleum Science and Engineering*, Vol. 53, pp.203-224, 2006.
- [11]. Byron Bird R., Stewart W. E., and Lightfoot E. N., *Transport Phenomena*, 2<sup>nd</sup> ed., John Wiley & Sons, Inc, 2002.
- [12]. Versteeg H. K. and Malalasekera W., "An introduction to computational fluid dynamics The finite volume method", Longman Scientific & Technical, 1995.
- [13]. Patankar S. V., *Numerical heat Transfer and Fluid Flow*, Hemisphere Series, 1980.
- [14]. Escudier M. P., Oliveira P. J., Pinho F. T., and Smith S., "Fully developed laminar flow of non-Newtonian liquids through annuli: comparison of numerical calculations with experiments", *Experiments in Fluids* Vol. 33, 101-11, 2002.
- [15]. Poole R. J. and Ridley B. S., "Development-Length Requirements for Fully Developed Laminar Pipe Flow of Inelastic Non-Newtonian Liquids", *Journal of Fluids Engineering* Vol.129, pp. 1281-1287, 2007.
- [16]. Poole R. J. and Chhabra R. P., "Development Length Requirements for Fully Developed Laminar Pipe Flow of Yield Stress Fluids", *Journal of Fluids Engineering* Vol.132, pp. 034501-1, 2010.