

شبیه‌سازی و بررسی ناپایداری غیر خطی انگشتی شدن لزج دو سیال قابل امتزاج در محیط متخلخل همگن

ایمان ملکا آشتیانی، علی صابری و محمدرضا شاه‌نظری*

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه‌نصیرالدین طوسی، تهران، ایران

تاریخ دریافت: ۹۵/۴/۴ تاریخ پذیرش: ۹۵/۱۲/۳

چکیده

پدیده انگشتی‌شدن ناشی از ناپایداری سیال در محیط متخلخل، کاربردها و نمونه‌های مختلفی در صنایع، فرآیندها و مسائل طبیعی دارد. در سال‌های اخیر، مطالعات متعددی بر روی پایداری در محیط متخلخل توسط محققین صورت گرفته‌است. با توجه به اینکه پایداری جریان قابل امتزاج در محیط‌های متخلخل، یکی از مسائل کلاسیک به شمار می‌رود، در این مقاله با شبیه‌سازی غیر خطی ناپایداری انگشتی‌شدن لزج، در محیط همسان‌گرد، به بررسی آن پرداخته‌ایم. با استفاده از روش طیفی و به کاربردن تبدیل فوریه سریع، معادلات بازنویسی و ناپایداری شبیه‌سازی شد. با در نظر گرفتن طول اختلاط، بازدهی و میانگین غلظت عرضی به‌عنوان پارامترهایی جهت تشخیص میزان ناپایداری و بررسی آنها به ازای شرایط مختلف نسبت تحرک، مساله ناپایداری، زمان رشد و اغتشاش و شدت آن مورد بررسی قرار گرفت. با افزایش میزان نسبت تحرک، از بازدهی کاسته و به طول اختلاط افزوده می‌شود. همچنین با تحلیل نمودار طول اختلاط و استفاده از حل دقیق، زمان شروع انگشتی اولیه را مورد بحث قرار دادیم. سپس الگوهای انگشتی مورد بررسی قرار گرفت و یک الگوی جدید برای اولین بار مشاهده و نام‌گذاری شد. همچنین با استفاده از برهم نهی بردار سرعت و کانتور غلظت، به‌صورت کامل تاثیر غلظت بر بردار سرعت و تاثیر هر دو پارامتر بر علت به وجود آمدن الگوهای مختلف انگشتی مورد بررسی قرار گرفت.

کلمات کلیدی: ناپایداری، انگشتی لزج، محیط متخلخل، بردار سرعت، الگوی انگشتی، غیرخطی.

مقدمه

نوع ناپایداری که از آن به‌عنوان ناپایداری انگشتی لزج^۱ یاد می‌شود، باعث ایجاد انگشتی ماندندایی در سطح مشترک دو سیال شده و بازدهی و اختلاط دو سیال را تحت تاثیر قرار می‌دهد. عوامل متفاوتی می‌توانند این نوع ناپایداری را تشدید یا تضعیف

جابه‌جایی سیال در یک محیط متخلخل که یک سیال با ویسکوزیته بیشتر توسط سیالی با ویسکوزیته کمتر جایگزین می‌شود، باعث ایجاد ناپایداری در سطح مشترک دو سیال خواهد شد. این

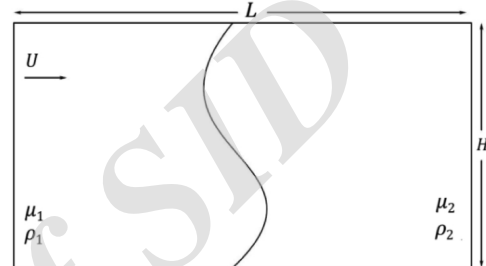
انتقال معادلات در هر زمان به فضای فوریه بود، چرا که علاوه بر دقت بالای این روش، هزینه زمانی کمتری نیز متحمل می‌شدند. دو سال بعد، زیرمن و حمصی [۸] با استفاده از همین روش شبه طیفی برای یک محیط ناهمسان‌گرد، با انتقال معادلات حاکم در هر زمان به فضای هارتلی، نتایج مشابه‌ای را به دست آوردند. پس از حمصی و زیرمن، پژوهش‌های بسیاری [۹-۱۵] توسط سایرین با استفاده از روش شبه‌طیفی انجام شد. زیرمن و حمصی [۱۰] در ادامه روند استفاده از روش طیفی، در شبیه‌سازی همگن خود فرآیند به هم آمیختگی را برای اولین بار مشاهده کردند. در یکی دیگر از کارهای مشابه، تن [۱۱] اثرات ناهمگنی در ضریب نفوذ را مورد بررسی قرار دادند. همچنین در ادامه زیرمن و همکاران [۱۲] با استفاده از همین روش، جابه‌جایی در محیط متخلخل را در محیط سه بعد مورد بررسی قرار دادند، از آنجایی که هیچ نتایجی مبتنی بر مشاهده شماتیکی خاص از انگشتی‌ها گزارش نشد، آنها حل دوبعدی مساله را برای درک این پدیده کافی دانستند. در سال‌های اخیر همچنین با اضافه کردن روش‌هایی به روش شبه‌طیفی، سعی در گسترش اختلاف ویسکوزیته صورت گرفته است. اسلام و ازایز [۱۶] با حل در شبکه تفاضل محدود و استفاده از روش ضمنی ADI و استفاده از فضای هارتلی، به ازای اختلاف بیشتری از ویسکوزیته به شبیه‌سازی پرداختند. در این مقاله ابتدا حل مساله دو بعدی جابه‌جایی و شبیه‌سازی ناپایداری، و بررسی پارامترهای موثر بر آن مورد بررسی قرار گرفت و برای اولین بار الگوی خاصی از انگشتی‌ها مشاهده و نام‌گذاری شد. سپس با برهم‌نهی بردار سرعت و کانتور غلظت، به‌صورت کامل تاثیر این دو پارامتر بر یکدیگر و همچنین بر الگوی های انگشتی مورد تفسیر قرار گرفت. در نهایت تاثیر پارمتر نسبت ابعاد بر تعداد و الگوی انگشتی‌ها نیز بررسی شد.

کنند که هدف این تحقیق، علاوه بر شبیه‌سازی این پدیده در محیط همسان‌گرد و برآورد سطح مشترک دو سیال، بررسی تاثیر پارامترهای مختلف بر تعداد، طول انگشتی‌شدن‌ها و بازدهی می‌باشد. پس از این که هیل و همکاران [۱] برای نخستین بار این ناپایداری را مشاهده کردند، تلاش‌های زیادی برای شبیه‌سازی این پدیده صورت گرفت، که از جمله اولین کارها، می‌توان به تحقیق پیسمن و همکاران [۲] اشاره کرد. آنها با به کارگیری معادلاتی که بر پایه سرعت و فشار بود و همچنین استفاده از روش تفاضل محدود، سعی در محاسبه جریان ناپایدار انگشتی‌لج داشتند و با مقایسه نتایج خود با آزمایش [۳] به نتایج قابل قبولی رسیدند. کریس و بوند [۴] با بهبود دادن کار پیسمن [۲]، با افزایش تعداد گره‌ها، مساله ناپایداری را برای دامنه وسیع‌تری از نسبت تحرک دو سیال شبیه‌سازی کردند توماس و همکاران [۵]، با استفاده از روش المان محدود سعی در شبیه‌سازی ناپایداری داشتند. همچنین مویسس و همکاران [۶]. نیز با استفاده از همین روش، معادلات غلظت و فشار را بازنویسی کردند. اما مساله‌ای که همواره از استفاده از روش تفاضل و المان محدود وجود دارد، تعداد گره‌های مورد استفاده در مساله می‌باشد. هرچقدر تعداد این گره‌ها کمتر باشد، باعث می‌شود تا نفوذی که در سیستم در نظر گرفته شده، نسبت به نفوذ واقعی بیشتر باشد و باعث شود انگشتی‌ها به سرعت ناپدید شوند. همچنین به دلیل هزینه محاسباتی که این روش دارد، محدودیت‌هایی در ابعاد و زمان صورت می‌گیرد [۷]. با محدودیت‌هایی که این روش‌ها داشتند، پژوهشگران بسیاری پس از آن به شبیه‌سازی‌های خود را با استفاده از روش دقیق‌تر شبه طیفی انجام دادند. تن و حمصی [۷] برای اولین بار با استفاده از روش این شبه طیفی با استفاده از الگوریتم تفاضل محدود به بررسی این ناپایداری پرداختند. روشی که آنها استفاده کردند،

فیزیک مساله

تعریف مساله

یک سلول هل-شاو^۱ که شامل دو صفحه موازی به طول L ، عرض H و فاصله دو صفحه b است که این فاصله در مقایسه با عرض صفحه بسیار کوچک‌تر ($H \gg b$) است، می‌تواند به‌عنوان نمونه‌ای مشابه به یک محیط متخلخل همسان‌گرد با ضریب ثابت نفوذپذیری k عمل کند (شکل ۱).



شکل ۱ شماتیکی از مساله مورد بررسی

روابط زیادی را برای آن مطرح کرد [۱۷]، اما جهت ساده‌سازی معادلات، [۷ و ۸] رابطه ۴ معرفی می‌شود. در رابطه ۴ تغییرات ویسکوزیته به‌صورت تابعی‌نمایی از غلظت در نظر گرفته شده است.

$$\frac{d(\ln(\mu/\mu_1))}{d(c/c_1)} = -R \quad (۴)$$

$$R = \ln(M) \quad (۵)$$

لازم به ذکر است که نسبت تحرک برابر لازم به ذکر است که نسبت تحرک برابر $M = (k_1/\mu_1)/(k_2/\mu_2)$ می‌باشد و با توجه به همگن در نظر گرفتن محیط مقادیر k در تمامی نقاط ثابت و برابر فرض می‌شود، لذا نسبت تحرک با نسبت ویسکوزیته‌ها برابر می‌شود.

شرایط مرزی و اولیه

پس از تعریف مساله، برای تکمیل حل، شرایط مرزی و شرایط اولیه را تعریف می‌شود.

$$\text{at } x=0, \quad u=U, \quad v=0, \quad c=c_1 \quad (۶)$$

$$\text{at } x=L, \quad u=U, \quad v=0, \quad c=c_2 \quad (۷)$$

$$(u, c)(x, 0, t) = (u, c)(x, H, t) \quad (۸)$$

در معادله ۶ و معادله ۷ فرض می‌شود قبل رسیدن انگشتی‌ها به مرزها شبیه‌سازی متوقف شود، لذا تاثیر انگشتی‌ها بر روی دو سمت دیواره محسوس نخواهد بود. اما برای دو مرز در راستای عرض، معادله ۸ مشابه کار تن و حمصی [۷]، در نظر گرفته شده است. شرط متناوب بودن برای سرعت و غلظت، به‌جای در نظر گرفتن شرط عدم جریان که در کار پیسمن [۲] لحاظ شده بود، انتخاب شده است. شرایط اولیه متفاوتی را می‌توان برای مساله لحاظ کرد، رایج‌ترین نوع شرط اولیه برای زمان $t=0$ به‌صورت زیر می‌باشد.

$$\text{at } x=U, \quad v=0, \quad c=c_0(x, y, t=t_0) \quad (۹)$$

که مقدار اولیه c_0 به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$c_0 = \begin{cases} 1 & x < L/2 \\ 0 & x > L/2 \\ 0.5 & x = L/2 \end{cases} \quad (۱۰)$$

لازم به ذکر است که به‌علت امتزاجی بودن دو سیال، مقدار غلظت در مرز، همواره برابر مقدار میانگین غلظت دو سیال در لحظه اولیه است.

1. Hele-Shaw

فرآیند جابه‌جایی سیال در فضای بین دو صفحه دو بعدی و قابل امتزاج در نظر گرفته می‌شود. در ادامه این تحقیق سیال جابه‌جاکننده به‌عنوان سیال یکا و سیال جابه‌جاشونده به‌عنوان سیال دو نام‌گذاری می‌شود.

معادلات حاکم

جابه‌جایی قابل امتزاج شامل سیال نیوتونی تراکم‌ناپذیر در یک محیط متخلخل، به‌وسیله معادله پیوستگی، معادله مومنوم توسط دارسی و معادله جابه‌جایی نفوذ برای غلظت بیان می‌شود:

$$\nabla u = 0 \quad (۱)$$

$$\nabla p = -\left(\frac{\mu}{k}\right)u \quad (۲)$$

$$\frac{Dc}{Dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + u \cdot \nabla c = \nabla \cdot D \nabla c \quad (۳)$$

μk تحرک سیال تعریف می‌شود که حاصل نسبت ویسکوزیته سیال μ و ضریب نفوذپذیری محیط k است. از آنجایی که سیستم همسان‌گرد فرض می‌شود، لذا می‌توان مقدار تانسور ضریب پراکنش را ثابت و D فرض کرد. همچنین ویسکوزیته نیز تابعی از غلظت در نظر گرفته می‌شود که می‌توان

استفاده از تابع جریان و پتانسیل به تعریف مساله پرداخته‌اند، چرا که با استفاده از این تبدیل، تعداد متغیرهای مستقل بیشتری نسبت به حالت عادی فشار و سرعت وجود دارد [۱۷ و ۲۰]. در این پژوهش نیز، از تابع جریان و گردابه استفاده شده است. با استفاده از تعاریف داریم:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (18)$$

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (19)$$

حال با جای‌گذاری معادله ۱۸ در معادله ۱۹، معادله ۲۰ به صورت زیر تبدیل می‌شود که شرط پیوستگی را هم تامین می‌کند:

$$\omega = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi \quad (20)$$

با جای‌گذاری معادله ۱۸ در ۱۶ می‌توان رابطه‌ای را برای معادله نفوذ-جابه‌جایی براساس تعریف تابع جریان ترتیب داد:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \left(\frac{\partial c}{\partial x}\right) - \frac{\partial \psi}{\partial x} \left(\frac{\partial c}{\partial y}\right)\right) + \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \quad (21)$$

و با اعمال عملگر کرل (تاو) از معادله ۱۵ و استفاده از معادله ۱۷، فشار از معادلات حذف شده و گردابه به صورت رابطه ۲۲ نمایش داده می‌شود.

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \left(\frac{\partial c}{\partial x}\right) - \frac{\partial \psi}{\partial x} \left(\frac{\partial c}{\partial y}\right)\right) + \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \quad (22)$$

الگوریتم حل

جهت شبیه‌سازی ناپایداری انگشتی شدن، از روش شبه طیفی استفاده می‌نماییم. روش شبه طیفی که یک روش عددی برای حل معادلات با مشتقات جزئی است، دارای دقت بالایی نسبت به سایر روش‌های عددی می‌باشد و همچنین به صورت گسترده در علم مکانیک سیالات مورد استفاده قرار می‌گیرد. لذا با استفاده از تبدیل فوریه سریع، معادلات مشتقات جزئی را به معادلات دیفرانسیلی تبدیل می‌کنیم و سپس به حل آنها می‌پردازیم. اما یکی از مشکلات اصلی استفاده از روش شبه طیفی در حل مساله، تناوبی نبودن سیستم مورد بررسی است.

بی‌بعد سازی معادلات

بهترین مدلی که می‌توان معادلات را بی‌بعد نمود و از طرفی شبیه‌سازی انگشتی‌ها به گونه‌ای مدل کرد که مرزها را در این حالت کم اهمیت شوند، استفاده از مقیاس پراکنش است [۱۸]. همچنین از آنجایی که سیال با سرعت ثابت U در حال حرکت است، می‌توان دستگاه مختصات را به دستگاه مختصات متحرک با سرعت U تبدیل نمود [۷]. لذا داریم:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= (x, y)(D/U) \\ t^* &= t/(D/U^2) \\ \bar{u} &= u/U \\ p^* &= p/(\mu_1 D) \\ \mu^* &= \mu/\mu_1 \\ c^* &= c/c_1 \end{aligned} \quad (11)$$

و با انتقال به دستگاه متحرک جهت ثابت نمودن موقعیت مرز داریم:

$$x^* = (x^*, y^*) = \bar{x} - it \quad (12)$$

$$u^* = (u^*, v^*) = \bar{u} - i \quad (13)$$

که i بردار واحد در راستای x است.

لذا معادلات بی‌بعد شده و شرایط مرزی به صورت زیر تبدیل می‌شوند.

$$\nabla u^* = 0 \quad (14)$$

$$\nabla p^* = -\mu^*(u^* + i) \quad (15)$$

$$\frac{Dc^*}{Dt^*} = \frac{\partial c^*}{\partial t^*} + u^* \cdot \nabla c^* = \nabla^2 c^* \quad (16)$$

همچنین رابطه ۴ نیز به صورت زیر تبدیل خواهد شد.

$$\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dc} = -R \quad (17)$$

در ادامه، تمامی علامت ستاره بالانویس برای پارامترهای بی‌بعد، جهت راحتی در نمایش حذف می‌شوند.

استفاده از تابع جریان و گردابه

برای حل معادلات ۱۴ تا ۱۶ حل تحلیلی‌ای موجود نیست، لذا برای حل این معادلات غیر خطی، از روش شبه طیفی استفاده می‌شود [۷ و ۱۹]. می‌توان این معادلات را براساس فشار و سرعت حل نمود و یا با استفاده از توابع خط جریان و گردابه، معادلات را براساس آن بازنویسی کرد. بسیاری از محققان با

آن برابر ۰/۵ خواهد شد [۲۲]. لازم به ذکر است در این روش تنها به حل قسمت اغتشاشی غلظت به جای کل غلظت می‌پردازیم و نتایج حاصل شده این ترم را در نهایت با حل پایه جمع می‌کنیم. لذا شرایط مرزی متناوب به صورت متناوب بازنویسی می‌شود:

$$(\omega, \psi, c')(x, 0, t) = (\omega, \psi, c')(x, Pe/A, t) \quad (25)$$

$$(\omega, \psi, c')(0, y, t) = (\omega, \psi, c')(Pe, y, t) \quad (26)$$

که عدد پکلت Pe به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Pe = UL/D \quad (27)$$

$$A = L/H \quad (28)$$

همچنین شرط اولیه سیستم هم به صورت رابطه ۲۹ است:

$$u = U, \quad v = 0, \quad c = c_0(x, y, t = t_0) \quad (29)$$

$$c_0(x, y, t) = \bar{c}(x, 0) + \delta \cdot rand(y) \cdot \exp(-x^2/\sigma^2) \quad (30)$$

جهت استفاده از فضای فوریه، هر یک از پارامترهای مربوطه را به صورت جمعی از توابع مشخص می‌نویسیم:

$$c(x, y, t) = \sum \sum \hat{c}_{m,n}(t) \cdot \exp(i(k_m x + k_n y)) \quad (31)$$

که $k_m = 2\pi m / (A \cdot Pe)$ و $k_n = 2\pi n / (Pe)$ می‌باشد. در ادامه برای حل مساله با استفاده از روشی که تن و حمصی [۷] به کار بردند مساله شبیه‌سازی و محاسبه پیشروی غلظت، با استفاده از روش حدس-اصلاح آدام بشفورث^۴ صورت می‌گیرد.

نتایج

از آنجایی که اغتشاش ورودی به صورت دلخواه وارد سیستم می‌شود، انگشتی‌های به وجود آمده شکل دلخواهی را به ازای شرایط یکسان به خود می‌گیرند، لذا برای یکسان‌سازی خروجی و مقایسه بهتر حالت‌های مختلف، میانگین غلظت در راستای عرضی را برحسب زمان و موقعیت طولی می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$\bar{c}(x, t) = \frac{A}{Pe} \int_0^{Pe/A} c(x, y, t) dy \quad (32)$$

با توجه به شرط مرزی معادله ۸، در مرز ورودی و خروجی، سیستم متناوب نیست، این درحالی است که در روش شبه طیفی وابسته به فضای فوریه^۱ و یا فضای هارتلی^۲، شرایط مرزی متناوب جز طبیعت این دو فضا می‌باشد [۲۱]. لذا برای جلوگیری از پدیده گیپس^۳ در مرز ورودی و خروجی، باید سیستم را متناوب نماییم. یکی از راه‌کارهای ارائه شده، دو برابر کردن سیستم مورد بررسی در راستای طولی است [۷] در این روش، تنها در مرز سمت چپ ناپایداری انگشتی لزج رخ خواهد داد، چرا که در مرز سمت راست، ویسکوزیته سیال جابه‌جا کننده مقداری بیشتر از ویسکوزیته سیال جابه‌جا شونده می‌باشد. در این روش به علت دو برابر کردن ناحیه مورد بررسی، هزینه محاسباتی بالایی را خواهد داشت. مانیکام و همکاران [۱۵] راهکار بهتری را معرفی کردند که توسط سینگ و آرایز [۹] آزمایش شد. در این روش، در هر زمان، غلظت به دو ترم حل پایه و حل اغتشاشی تقسیم می‌شود. از آنجایی که حل پایه، یک بعدی و دارای حل دقیق می‌باشد، می‌توان تنها مساله را برای حالت اغتشاشی مورد بررسی قرار داد. از آنجایی که اغتشاش تنها در مرز به سیستم وارد می‌شود و در هر دو سمت صفحه، اغتشاشی وجود ندارد، می‌توان سیستم را متناوب در نظر گرفت. لذا شرایط حل به روش طیفی را نیز ارضا می‌کند. ترم غلظت به صورت زیر قابل نمایش است:

$$c(x, y, t) = \bar{c}(x, t) + c'(x, y, t) \quad (23)$$

که در اینجا \bar{c} حل پایه است که تنها تابعی از (x, t) می‌باشد و $c'(x, y, t)$ غلظت ناشی از اغتشاش در مرز مشترک است. پاسخ حل پایه به صورت زیر می‌باشد:

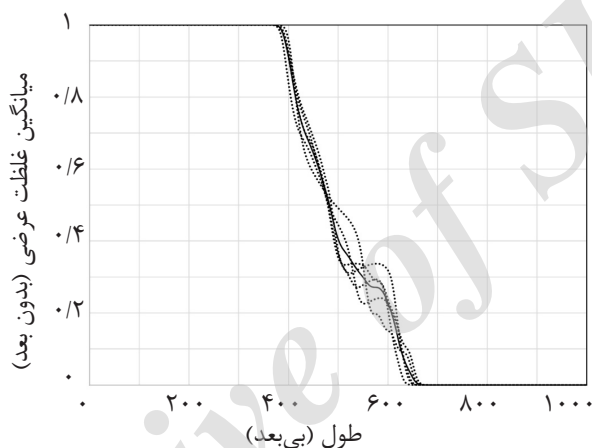
$$\bar{c}(x, t) = c_s \left(1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{4t}} \right) \right) \quad (24)$$

که در آن c_s میانگین غلظت در دو سوی مرز در نظر گرفته می‌شود، در اینجا با توجه به این که مقدار غلظت در دو سوی مرز برابر یک و صفر است، مقدار

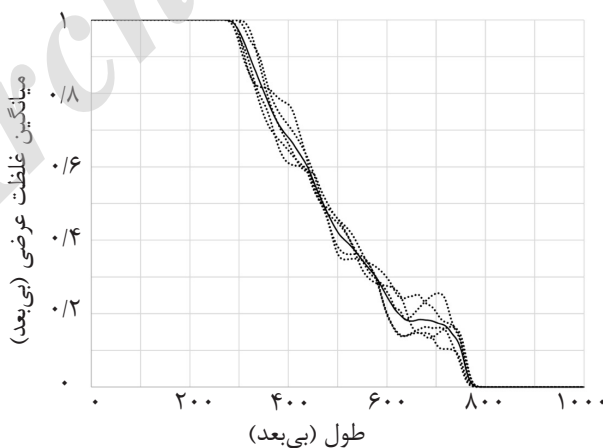
1. Fourier Transeform
2. Hartley Transeform
3. Gibbsec Phenomena
4. Adamsec-Basechforth predictor-corrector method

می‌دهد. با توجه به نتایج حاصل، میانگین‌گیری غلظت عرضی را می‌توان روشی مناسب برای مقایسه این پدیده به ازای پارامترهای مختلف در نظر گرفت. نکته قابل توجه در شکل‌های ۲ و ۳ این است که نقطه آغازین و پایانی تغییرات غلظت برای بارگذاری‌های مختلف شبیه‌سازی دقیقاً یکسان است. تنها تفاوت در نوع انگشتی شدن هاست که باعث ایجاد تفاوت‌های ناچیزی در نمودار، (حد فاصل نقطه آغازین و پایانی) می‌شود که آن نیز وابسته به اغتشاش ورودی به سیستم است.

با استفاده از این تعریف، می‌توان نمودار غلظت میانگین عرضی نسبت به طول را در زمان‌های مختلف ترسیم نمود. به ازای پنج بار تکرار شبیه‌سازی در شرایط یکسان و البته ورودی اغتشاش متفاوت، نمودار غلظت میانگین عرضی براساس طول در شکل ۲ رسم شده‌است. می‌توان دریافت به ازای شرایط متفاوت ورودی اغتشاش، نتایج حاصل از میانگین‌گیری نسبتاً یکسانی را خواهیم داشت. همچنین شکل ۳ نیز برای زمان‌های بالاتر، تغییرات غلظت میانگین عرضی را نسبت به طول نمایش



شکل ۲ میانگین غلظت عرضی براساس طول به ازای شبیه‌سازی‌های یکسان در $Pe=1000$ ، $R=3$ و $A=2$ در زمان $s=350$.



شکل ۳ میانگین غلظت عرضی براساس طول به ازای شبیه‌سازی‌های یکسان در $Pe=1000$ ، $R=3$ و $A=2$ در زمان $s=450$.

به مقدار ۱ همگرا می‌شود. به ازای هر ورودی ثابت می‌توان تغییرات مکان را به صورت تابعی از زمانی در نظر گرفت [۲۲]:

$$\frac{x}{\sqrt{4t}} = \text{constant} \rightarrow x \propto \sqrt{t} \quad (34)$$

کوال [۲۳] و همچنین تاد [۲۴]، با در نظر گرفتن میانگین غلظت عرضی، در شبیه‌سازی‌های خود، این پارامتر را به صورت تابعی خطی از زمان به دست آوردند که می‌توان در شکل ۴ نیز در زمان‌هایی که ناپایداری رشد پیدا می‌کند آن را مشاهده کرد. با توجه به شکل ۴ می‌توان گفت با کاهش اختلاف ویسکوزیته بین دو سیال، علاوه بر اینکه از طول اختلاط یا همان طول انگشتی‌ها کاسته می‌شود، زمان شروع رشد اغتشاش‌ها نیز افزایش پیدا می‌کند، در حقیقت در سیستم مورد نظر، با کاهش اختلاف ویسکوزیته دو سیال، جابه‌جایی به سمت پایدارتر شدن حرکت می‌کند.

بازدهی جاروبی

بازدهی جاروبی که یکی دیگر از پارامترهای مهم برای تشخیص و درک گسترش الگوی انگشتی‌ها در جریان است، به صورت نسبت تعداد نقاطی که غلظت آنها برابر یا مساوی ۰/۵ است بر کل تعداد نقاط موجود در ناحیه محاسباتی در هر زمان محاسبه می‌شود.

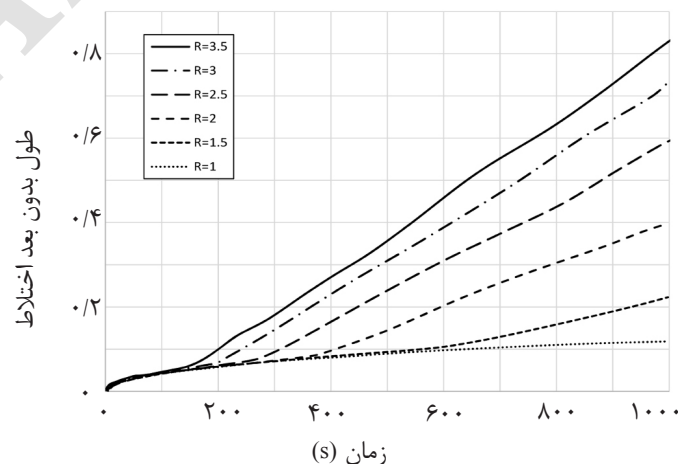
نکته قابل توجه دیگر، تاثیر اغتشاش بر انگشتی شدن‌هاست. از مقایسه هر دو شکل می‌توان به این نکته پی برد که در زمان‌های اولیه که انگشتی‌ها کوچک هستند، برای هر اغتشاش وارده، الگوی آنها شبیه یکدیگر می‌باشند لذا نوع اغتشاش تاثیر چندانی بر شرایط کلی در زمان‌های اولیه ندارد، اما با گذشت زمان، انگشتی‌ها متناسب با نوع اغتشاش وارد شده، رشد می‌کنند، هرچند نمودار میانگین غلظت عرضی آنها به ازای انواع اغتشاش یکسان است.

طول انگشتی‌ها

یکی از پارامترهای مهمی که می‌توان با توجه به آن به بررسی این نوع ناپایداری پرداخت، طول انگشتی‌هاست. رابطه کلی استفاده شده برای محاسبه طول انگشتی‌ها به صورت زیر است [۷]:

$$L_{\delta} = x_{c=\delta} - x_{c=1-\delta} \quad (33)$$

در این رابطه، δ یک مقدار کوچک است که همان طور که گفته شد با فرض در نظرگیری مقدار ۰/۰۱ برای آن، می‌توان رابطه بالا را در هر زمان محاسبه کرد، نکته قابل توجه در این قسمت این است که ϵ ، مقدار میانگین غلظت عرضی می‌باشد. با توجه به حل دقیق برای حالت پایدار یک بعدی، به ازای مقادیر ورودی مثبت، پاسخ تابع خطا همواره بین ۰ تا ۱ می‌باشد و در حدود ورودی ۱/۵ و بعد از آن،



شکل ۴ تغییرات طول اختلاط براساس زمان، به ازای R های مختلف

زمان، از سرعت در جهت طولی آن کاسته شده و شروع به پخش شدن در راستای عرضی می‌کند. این پدیده تا جایی پیش می‌رود که انگشتی ذکر شده به آرامی در سیال دوم حل شود.

پدیده دو شاخه‌ای^۲: هنگامی که پدیده انتشار در یکی از انگشتی‌ها رخ می‌دهد، همان‌طور که گفته شد باعث پهن‌تر شدن سر انگشتی می‌شود، اگر این انگشت قبل از دست‌دادن غلظت خود به اندازه کافی پهن شود تا بیشتر از دو موج در آن رشد کند [۲۵]، شیب اختلاف غلظت به دلیل وجود جریان در آن بیشتر شده و سر انگشتی ناپایدار می‌شود، لذا انگشتی به دو قسمت شکافته می‌شود [۷]. شکل ۶ در زمان ۶۰۰ و ۴۵۰ sec این پدیده قابل مشاهده است.

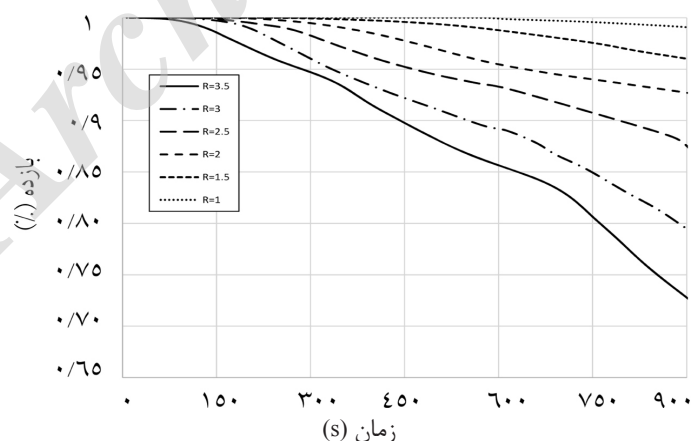
پدیده بهم‌آمیختگی دوسویه^۳: در این پدیده، همان‌طور که در شکل ۶ در زمان ۱۵۰ s نیز به خوبی مشخص شده است، دو انگشتی، به آرامی به سمت یک انگشتی میانی متمایل شده و کم‌کم در آن نفوذ می‌کنند.

با توجه به شکل ۵، با افزایش زمان، انگشتی‌ها رشد کرده و جابه‌جایی سیال را با مشکل مواجه می‌کنند، لذا بازدهی سیستم کاهش می‌یابد، همچنین با افزایش نسبت تحرک، مقدار انگشتی‌ها و ناپایداری نیز بیشتر شده و سیستم با کاهش بازدهی روبرو می‌شود.

تغییرات غلظت

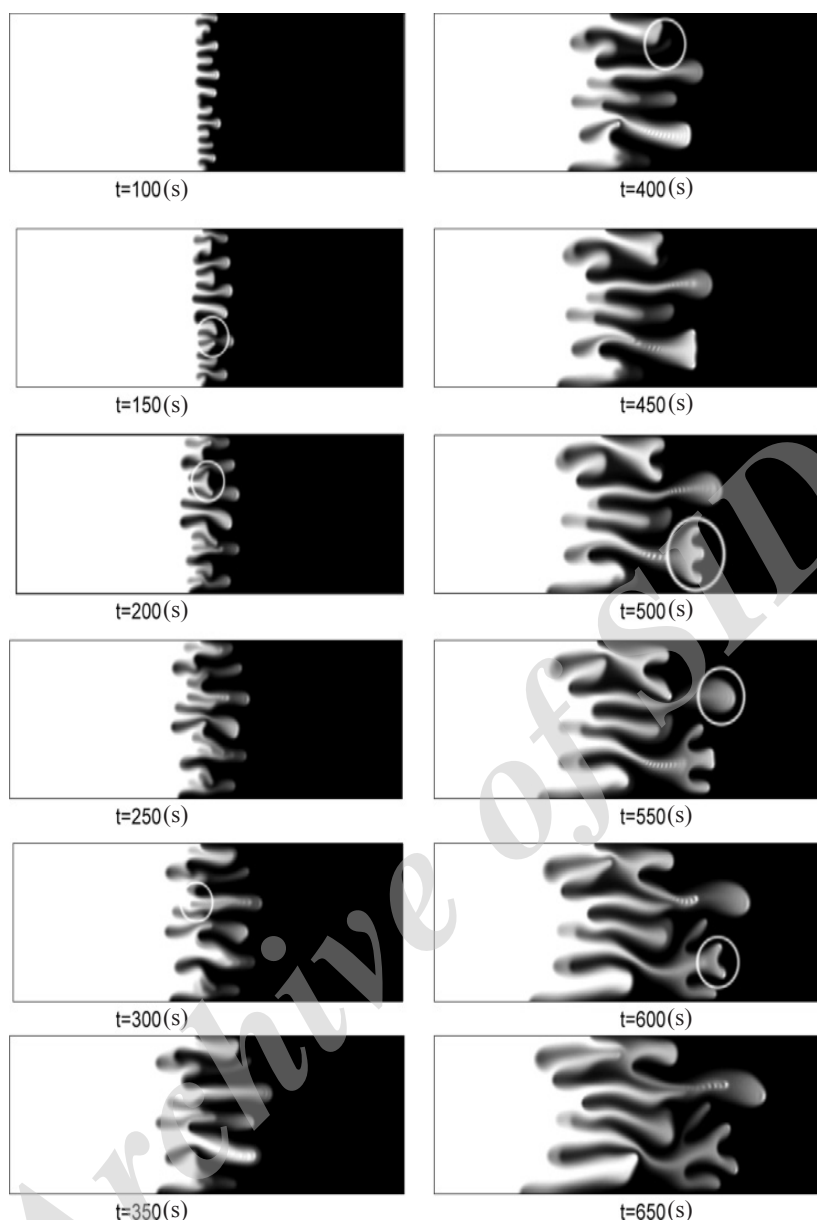
همان‌طور که گفته شد، با افزایش نسبت تحرک، ناپایداری انگشتی‌شدن نیز انتظار داریم افزایش بیابد. به ازای اغتشاش‌های متفاوت دلخواه، خروجی انگشتی‌ها متفاوت می‌باشند، از آنجایی که فرآیندهای متفاوتی در آمیزش این انگشتی‌ها با یکدیگر وجود دارد، شکل ۶ پس بارها بارگزاری شبیه‌سازی انتخاب شده است تا تمامی حالت‌های مد نظر را در خود جای داده باشد.

پدیده انتشار^۱: پدیده انتشار یکی از محتمل‌ترین پدیده‌هایی است که امکان دارد در الگوی انگشتی‌ها به وجود بیاید. در این پدیده همان‌طور که شکل ۶ زمان ۵۵۰ s مشخص است یکی از انگشتی‌ها سریع‌تر از سایرین در جهت جریان حرکت داشته و با گذر



شکل ۵ تغییرات بازدهی براساس زمان، به ازای R های مختلف

1. SEC Predding
2. Tip Secplitting
3. Double Coaleseccence



شکل ۶ کانطور غلظت در زمان‌های مختلف به ازای $Pe = 1000$ ، $R = 3$ و $A = 3$.

تغذیه نمی‌شود (بهم پیوستگی) و طول انگشتی به آرامی در سیال جابه‌جا شونده محو می‌شود. شکل ۶ در زمان $s = 400$ این پدیده را به نمایش گذاشته است.

حلقه جدا شده^۲: پس از اینکه یکی از انگشتی‌ها به داخل انگشتی دیگری نفوذ می‌کند، در بین این دو انگشتی فاصله‌ای ایجاد می‌شود که سیال جابه‌جا شونده در آن به دام می‌افتد.

این پدیده که اولین بار توسط ازایز و سینگ [۹] برای دو سیال قابل امتزاج غیرنیوتونی مشاهده و نام‌گذاری شد. همچنین با توجه به اطلاعات نویسنده، پس از [۱۶] این برای اولین است که این پدیده برای جابه‌جایی دو سیال قابل امتزاج نیوتونی در نسبت تحرک‌های پایین مشاهده می‌شود.

پدیده محو شدن^۱: پدیده دیگری که به ندرت مشاهده می‌شود، پدیده محو شدن است. در این حالت، به دلیل جریان، انگشتی با سرعت حرکت کرده اما با گذر زمان، توسط انگشتی‌های مجاور

1. Fading
2. Trailing Lobe Detachment

سپری به خود گرفته و سپس در مرکز این انگشتی و در دو سویه آن، رشد اغتشاش باعث سه شاخه‌ای شدن گشته‌است. در ادامه خود این انگشتی سه شاخه‌ای، از سمت شاخه مرکزی، در زمان‌های بعدی، دچار پدیده دو شاخه‌ای شدن می‌گردد که پیشتر درباره آن صحبت کردیم.

تأثیر بردار سرعت و تغییرات غلظت بر الگوها

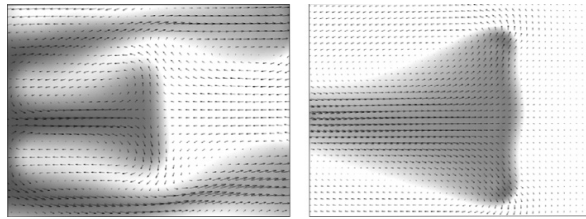
در قسمت قبل درباره الگوهای انگشتی شدن صحبت نمودیم، حال سعی داریم تا درباره علت به وجود آمدن دو مورد از این الگوها با استفاده از خطوط جریان صحبت کنیم. در شکل ۷ بردارهای سرعت و کانتور غلظت به صورت یکجا بر روی هم قرار گرفته‌اند تا نمایش بهتری را داشته باشند. همان‌طور که در بی‌بعدسازی نیز ذکر شد، دستگاه مختصات متحرک انتخاب شده و این سرعت‌ها، تنها سرعت‌های ناشی از اغتشاش و اختلاف غلظت می‌باشند. با توجه به شکل ۷، جریان در داخل انگشتی به سمت پایین دست در حال حرکت است اما در سر انگشتی، با جریانی مخالف مواجه می‌شود که در حال حرکت به سمت بالادست می‌باشد، این جریان مخالف باعث ایجاد سپری در سر انگشتی شده و همان‌طور که بردارهای سرعت نیز نشان می‌دهند، یک جریان چرخشی بین ابتدا و انتهای انگشتی شکل می‌گیرد، انگشتی زیرین و بالایی در حال جذب و هدایت انگشتی نشان داده شده به سمت خود می‌باشند، که جذب انگشتی زیرین به دلیل سرعت بیشتر دارای قدرت بیشتری نیز می‌باشد، به همین منظور پدیده به هم آمیختگی تک سویه را به وجود می‌آورد و انگشتی از قسمت تحتانی در انگشتی مجاور نفوذ کرده اما از قسمت فوقانی، نفوذ کمتری را خواهد داشت.

به این فاصله که معمولاً به شکل قطره ظاهر می‌شود، حلقه جدا شده می‌گویند و مملو از سیال با ویسکوزیته بیشتر است. با گذر زمان این قطره به دام افتاده آرام آرام شروع به پخش شدن در سیال جابه‌جاکننده کرده و از بین می‌رود. این پدیده اولین بار توسط راجرسون [۱۳] مشاهده و نام‌گذاری شد. در شکل ۶ در زمان $s = 300$ این پدیده به وضوح قابل مشاهده است.

آمیختگی کناری: حالت دیگری که ممکن است برای انگشتی‌ها رخ دهد، آمیختگی کناری نام دارد. در این حالت، همان‌طور که در شکل ۶ در زمان $s = 200$ مشخص است ابتدا سر دایره‌ای شکل انگشتی، حالت سپر^۲ به خود می‌گیرد و سپس با توجه به اینکه جریان در کدام سوی این سپر با توجه به گرادیان غلظت بیشتر است، قبل از اینکه پدیده دو شاخه‌ای ایجاد شود، به یک سو حرکت کرده و با انگشتی کناری در هم می‌آمیزد، در حالی که شاخه دیگر انگشتی، به دلیل نداشتن جریان، در جای خود ثابت می‌ماند.

سه شاخه شدن:^۳ تاکنون گزارش‌های بسیاری درباره دو شاخه‌ای شدن سر انگشتی‌ها شده است، اما با توجه به اطلاعات نویسنده، هیچ‌گونه مشاهداتی برای اینکه سر انگشتی به یک سه شاخه‌ای تقسیم شود صورت نگرفته است. نزدیک‌ترین الگوی به مشاهده شده توسط نویسنده به الگوی به دست آمده در این تحقیق، در پژوهش اسلام [۱۶] است که با در نظرگیری نسبت تحرک‌های بسیار بالا، در جابه‌جایی سیال نیوتونی به الگویی که پیشتر توسط کاواگوچی [۲۶] در نرخ ورودی بسیار بالا و همچنین لی [۲۷] در جابه‌جایی دو سیال غیرنیوتونی رسیده بودند، دست یافتند. الگوی مشاهده شده توسط آنها که شمشیرمانند^۴ نامیده شده است، بسیار با الگوی مشاهده شده در این تحقیق متفاوت است. این الگوی سه شاخه‌ای را که برای اولین بار در این تحقیق به دست آمده است، سه شاخه شدن^۵ می‌نامیم. شکل ۶ در زمان $s = 500$ ، به وضوح این سه شاخه‌ای قابل مشاهده است. ابتدا در زمان $s = 450$ شکل

1. SECide Merging
2. SEChield
3. Trifurcated Tip
4. Seckewering
5. Trifurcated Tip



شکل ۷ تغییرات غلظت و بردارهای سرعت به ازای $Pe=1000$ ، $R=3$ و $A=3$.

در نظرگیری سه نسبت ۱، ۴ و ۸ با نسبت تحرک $R=20/4$ و پکلت ۱۰۰۰ شکل‌های ۸ تا ۱۰ کانتور غلظت را به نمایش می‌گذارند. می‌توان دریافت هرچقدر که نسبت ابعاد بیشتر می‌شود، از پیچیدگی الگوی‌های انگشتی‌ها کاسته شده و به دلیل عرض کم، انگشتی‌ها در همان ابتدا با یکدیگر آمیخته شده و یک الگوی ساده را ایجاد کرده و از تعداد انگشتی‌ها کاسته می‌شود. همچنین با افزایش این نسبت ابعاد، زمان رسیدن به مرز نیز افزایش می‌یابد. می‌توان این‌طور تفسیر کرد که در نسبت ابعاد ۸، مرز تنها شامل یک انگشتی است و به همین منظور، دارای ناپایداری کمتری نسبت به حالت نسبت ابعاد ۴ می‌باشد، لذا زمان بیشتری طول می‌کشد تا انگشتی‌ها به انتهای مرز برسند.

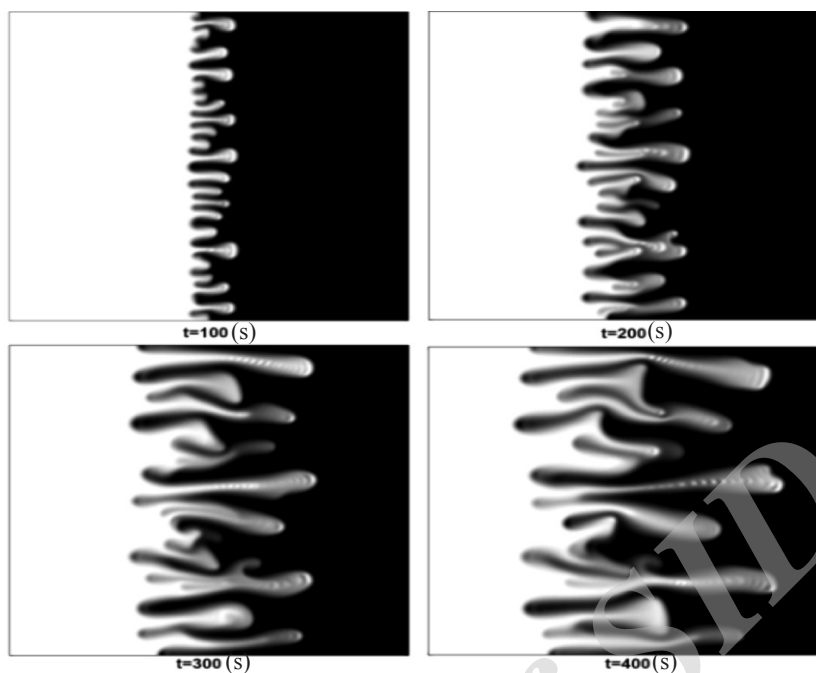
تاثیر عدد پکلت

با استفاده از تعریف عدد بی‌بعد پکلت که به صورت $Pe = UL/D$ است می‌توان دریافت افزایش عدد پکلت به معنی کاهش ضریب نفوذ در سرعت ثابت یا افزایش سرعت در مقدار ثابتی از ضریب نفوذ می‌باشد. با توجه به شکل ۱۱ و ۱۲ هر چقدر مقدار عدد پکلت بزرگ‌تر باشد، جابه‌جایی بر نفوذ غلبه کرده و سیستم دچار انگشتی‌های بیشتری می‌شود، اما اگر عدد پکلت کوچک انتخاب شود، نفوذ دارای قدرت بیشتری نسبت به جابه‌جایی بوده و ناحیه مرزی دو سیال وسعت بیشتری پیدا کرده و دو سیال بیشتر در یکدیگر پخش می‌شوند. انتظار می‌رود با افزایش عدد پکلت سرعت بیشتر شده و زمان رسیدن به مرز انتهایی کاهش یابد، اما به دلیل تاثیر عدد پکلت بر طول ناحیه، نمی‌توان مقایسه دقیقی از آن را ارائه کرد.

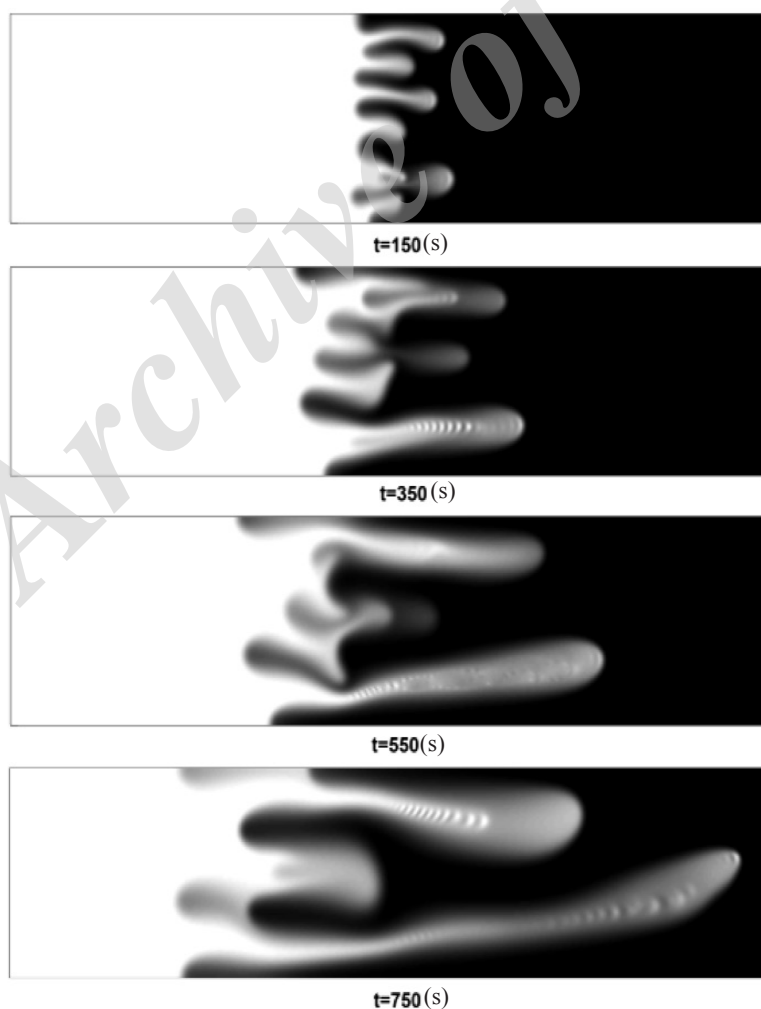
همچنین قابل ذکر است که با رشد انگشتی در یک سو، جریان از آن سمت نیز بیشتر شده و عملاً جریان از سر دیگر انگشتی کم می‌شود، لذا رشد کم و توقف آن را نتیجه می‌دهد. تفاوت بارزی که بین دوشاخه‌ای شدن و به هم آمیختگی تک سویه وجود دارد، در میزان غلظت در دو سوی سر سپری شکل زبانه است. با برابری این غلظت، هر دو جریان خروجی از آنها یکسان بوده و رشد یکسانی نیز خواهد داشت. هنگامی که یک انگشتی شروع به رشد می‌کند، در اثر جریان مخالف به سمت پایین‌دست، در سرانگشتی جریان مجبور به چرخش شده و شکل سپر مانندی به خود می‌گیرد، در حالت دو شاخه‌ای شدن اگر گردایان غلظت در طول این سپر زیاد باشد و همچنین این سر سپری شکل به اندازه کافی پهن شده باشد، جریان‌های چرخشی دو سوی سر انگشتی را به سمت بیرون هدایت کرده و دو شاخه‌ای می‌شود، در این مقاله میزان پهنای این سر زبانه بسیار گسترش یافته و غلظت نه تنها در دو سوی این انگشتی، بلکه در مرکز آن نیز بیشتر از سایر نقاط می‌باشد، با ایجاد جریان‌های چرخشی در دو سوی این زبانه، از هر دو سمت زبانه‌های شکل می‌گیرد اما به دلیل غلظت بالا در مرکز و جریان مستقیم، جریان در مرکز به حرکت خود ادامه داده و باعث ایجاد الگوی سه شاخه‌ای می‌شوند.

نسبت ابعاد

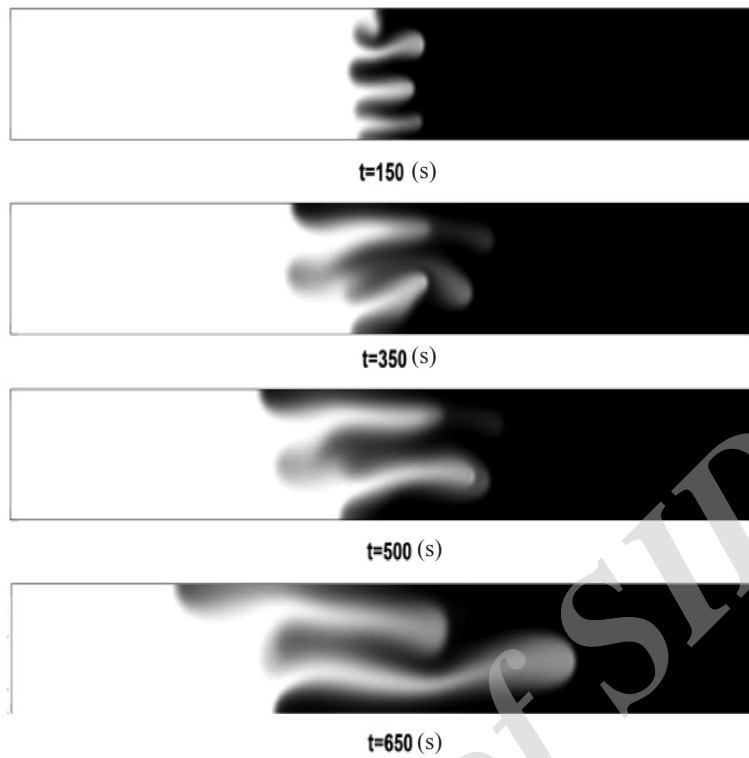
یکی از پارامترهای موثر در الگوی انگشتی‌ها نسبت ابعاد $A=L/W$ است. با توجه به اینکه طول بی‌بعد شده را $L=Pe$ و عرض را معادل $H=Pe/A$ در نظر گرفته‌ایم، با تغییر نسبت ابعاد، عرض سیستم را دچار تغییر می‌شود. به همین منظور با



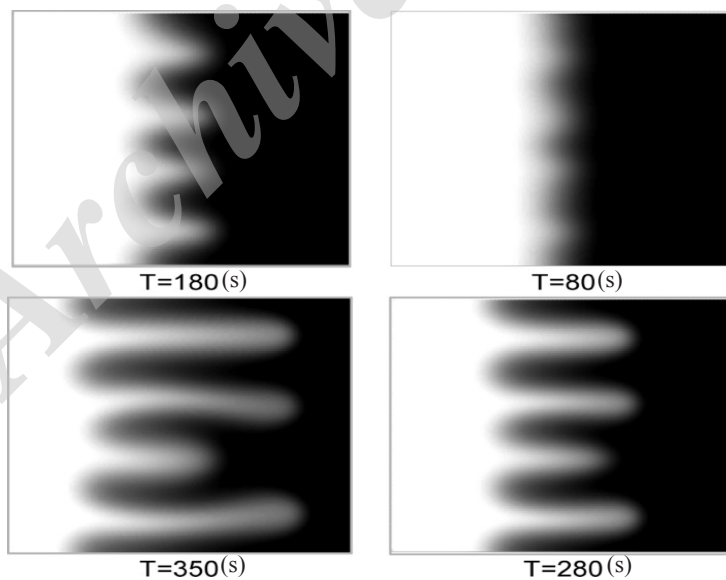
شکل ۸ کانتور غلظت به ازای $Pe=1000$ ، $R=3$ و $A=1$.



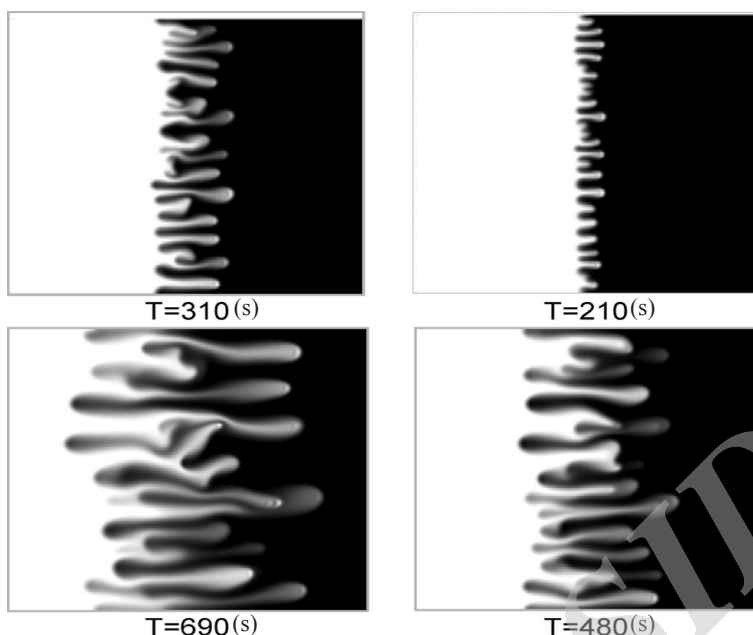
شکل ۹ کانتور غلظت به ازای $Pe=1000$ ، $R=3$ و $A=4$.



شکل ۱۰ کانتور غلظت به ازای $Pe=1000$ ، $R=3$ و $A=8$.



شکل ۱۱ کانتور غلظت به ازای شرایط $Pe=200$ ، $R=3$ و همچنین $A=1$ در زمان‌های مختلف.



شکل ۱۲ تغییرات غلظت به ازای شرایط $Pe=1500$ ، $R=3$ و همچنین $A=1$ در زمان‌های مختلف

نتیجه گیری

الگوهای انگشتی‌ها به صورت کامل مورد بحث قرار گرفت. شایان به ذکر است که الگوی دوسویه نیز برای اولین بار برای نسبت تحرک‌های کمتر از ۲۴ در این مقاله مشاهده شد. هدف از این مقاله علاوه بر بررسی تاثیر جریان و غلظت بر الگوهای انگشتی و یافتن الگوهای جدید، بررسی پارامترهای مختلف بر ناپایداری انگشتی شدن لزج نیز بود. همان‌طور که ذکر شد، تاثیر به سزای غلظت بر جریان و جریان بر نحوه رشد انگشتی‌ها، بسیار قابل توجه است.

علائم و نشانه‌ها

A : نسبت طول به عرض (بی بعد)

b : ضخامت (m)

c : غلظت (%)

D : پراکندگی (m^2s^{-1})

H : عرض صفحه (m)

K : قابلیت نفوذپذیری (m^2)

L : طول صفحه (m)

M : نسبت تحرک (بی بعد)

P : فشار (Nm^{-2})

R : لگاریتم نسبت ویسکوزیته (بی بعد)

در این مقاله ناپایداری انگشتی شدن لزج در جابه‌جایی سیال نیوتونی قابل امتزاج در محیط متخلخل بررسی شد. تاثیر پارامترهای نسبت ابعاد و نسبت تحرک بر روی ناپایداری سیستم مورد بررسی قرار گرفتند و طول اختلاط و بازدهی سیستم به ازای مقادیر مختلف نسبت تحرک ترسیم شدند. با استفاده از منحنی‌های طول اختلاط، زمان آغاز ناپایداری را زمانی تخمین زدیم که منحنی از حالت $t^{1/2}$ خارج شده و حالت خطی به خود می‌گیرد. همچنین با استفاده از منحنی بازدهی، دریافتیم طبق انتظار با افزایش میزان اختلاف بین ویسکوزیته بین دو سیال، ناپایداری افزایش یافته و بازدهی سیستم را کاهش و طول اختلاط را افزایش می‌دهد. یکی از دیگر بحث‌های صورت گرفته، تاثیر ناپایداری به زمان انتشار و رسیدن انگشتی‌ها به مرز می‌باشد. با افزایش ناپایداری، سرعت حرکت انگشتی‌ها افزایش و زودتر به مرز می‌رسند هرچند دارای بازدهی کمی هستند. در این مقاله برای اولین بار پدیده سه‌شاخه‌ای شدن، صورت پذیرفت و نام‌گذاری شد و همچنین با ترکیب بردارهای سرعت و کانتور غلظت، تاثیر جریان و غلظت بر یکدیگر و علت

ω : گردابه (s^{-1})	u : سرعت (ms^{-1})
ψ : تابع جریان ($m^2 s^{-1}$)	علایم یونانی
δ : شدت مقدار اغتشاش (/.)	μ : لزجت دینامیکی ($kgm^{-1}s^{-1}$)
σ : عمق اغتشاش (m)	ρ : چگالی (kgm^{-3})

مراجع

- [1]. Hill, S. "Channeling in packed columns," Chem. Eng. Sci., Vol. 1, Issue 6, pp. 247-253, 1952.
- [2]. Peaceman D. W. and Rachford JR. H., "Numerical calculation of multidimensional miscible displacement," SPE, Vol. 2, pp. 327-339, 1962
- [3]. Blackwell R. J., Rayne J. R. and Terry W. M., "Factors influencing the efficiency of miscible displacement," Trans. AIME, Vol. 217, pp. 1-8. 1959,
- [4]. Christie M. A. and Bond D. J., "Multidimensional Flux Corrected Transport for Reservoir Simulation," SPE Reservoir Simulation Symposium, 1985.
- [5]. Thomas F. R., Mary F. W. and Chen C., "Large-scale simulation of miscible displacement by mixes and characteristic finite Element Methods," Mathematical and Computational Method in Seisanic Exploration and Reservoir Modeling, pp. 85-107, 1986.
- [6]. Moissis D. E, Miller C. A. and Wheeler M. F. "A Parametric study of viscous fingering In miscible displacement by numerical simulation," Numerical Simulation in Oil Recovery, pp. 227-247, 1988.
- [7]. Tan C.T. and Homsy G. M. "Simulation of nonlinear viscous fingering in miscible displacement," Physics of Fluids. Vol. 31(6) , 1988.
- [8]. Zimmerman W. B. and Homsy G. M. "Nonlinear viscous fingering in miscible displacements with anisotropic dispersion," Phys. Fluids A, Vol. 4, pp. 1859-1872, 1992
- [9]. Singh B. K. and Azaiez J. "Numerical simulation of viscous fingering of shear-thinning fluids," The Canadian journal of Chemical Engineering, Vol. 79(6), pp. 961-967, 2001.
- [10]. Zimmermann W. B. and Homsy G. B., "Viscous fingering in miscible displacements: Unification of effects of viscosity contrast, anisotropic dispersion and velocity dependence of dispersion on non-linear finger propagation," Physics of Fluids A, Vol. 4, pp. 2348-2359, 1991.
- [11]. Tan C. T. and Homsy G. M., "Viscous fingering with permeability heterogeneity," Physics of Fluids A, Vol. 4, pp. 1099-1108, 1992.
- [12]. Zimmermann W. B. and Homsy G. M., "Three-dimensional viscous fingering: a numerical study," Physics of Fluids A, Vol. 4, pp. 1901-1914, 1992.
- [13]. Rogerson A., Meiburg E. "Numerical simulation of miscible displacement recesses in porous media flows under gravity," Physics Fluids A, Vol. 5, pp. 2644-2666, 1993.

- [14]. Manickam O. and Homsy, G. M., "Fingering Instabilities in Vertical Miscible Displacement Flows in Porous Media," Journal of Fluid Mechanics, Vol. 6, pp. 95-107, 1995.
- [15]. Manickam O. and Homsy G. M., "Stability of miscible displacements in porous media with no monotonic viscosity profile," Physics of Fluids, Vol. 5, pp. 1356-1367, 1993.
- [16]. Islam M. N. and Azaiez J., "Fully implicit Finite difference pseudo-spectral method for simulating high mobility-ratio miscible displacements," International Journal for Numerical Methods In Fluids, Vol. 47(2), pp. 161-183, 2005.
- [17]. Tryggvason G. and Aref H., "Finger-interaction mechanisms in stratified Hele-Shaw flow," J. Fluid Mech, Vol. 154, pp. 287-301, 1985.
- [18]. Tan C. T. and Homsy G. M., "Stability of miscible displacements in porous media, rectilinear flow," Phys. Fluids, Vol. 29, pp. 3549-3556, 1986.
- [19]. Wit A. De., "Miscible density fingering of chemical fronts in porous media," Phys. Fluid, Vol. 16(1), pp. 163-175, 2004.
- [20]. Meiburg E. and Homsy G. M., "Nonlinear unstable viscous fingers in Hele-Shaw flows. II. Numerical simulation," Physics of Fluids, Vol. 31(3), pp. 429-439, 1988.
- [21]. Canuto C., Hussaini M. Y., "Spectral methods in fluid Dynamics," Springer, 1987.
- [22]. Kenneth A. and Jackson, "Kinetic processes: crystal growth, diffusion, and phase transitions in materials," Wiley VCH, p. 85, 2010.
- [23]. Koval E. J. "A method for predicting the performance of unstable miscible displacements in heterogeneous media," The Society of Petroleum Engineers, Vol. 219, pp. 145-150, 1963.
- [24]. Todd M. R. and Longstaff W. J., "The development, testing and application of a numerical simulator for predicting miscible flood performance," Journal of Petroleum Technology, Vol. 24(7), pp. 874-882, 1972.
- [25]. Norouzi M. and Shogh M. R., "Nonlinear simulation of non-newtonian viscous fingering instability in anisotropic porous media," Modares Mechanical Engineering, Vol. 15, No. 7, pp. 415-425, 2015
- [26]. Kawaguchi M., Makino K. and Kato T., "Comparison of viscous fingering patterns in polymer and Newtonian fluids," Physica D, Vol. 105, pp. 121-129, 1997.
- [27]. Li H. "Viscous fingering in non-newtonian flow," M.Sc. Thesis, Department of Chemical & Petroleum Engineering, University of Calgary, 2002.