مجله ژئوفیزیک ایران، جلد ۴، شماره ۱، ۱۳۸۹، صفحه ۵۸-۷۱

شبیه‌سازی عددی جریان گرانی کف روی سطح شیب‌دار با استفاده از روش فشرده مرتبه چهارم

سرمد قادر[۱*]، ابوذر قاسمی ورنامخواستی[۲]، محمدرضا بنازاده ماهانی[۳] و داریوش منصوری[۴]

[۱] استادیار، گروه فیزیک فضا، مؤسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران، ایران
[۲] دانش‌آموخته کارشناسی‌ارشد فیزیک دریا، دانشکده علوم دریایی دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران
[۳] استادیار ،گروه فیزیک دریا، دانشکده علوم دریایی دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران
[۴] مربی، گروه فیزیک دریا، دانشکده علوم دریایی دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران

sghader@ut.ac.ir, abozar.gha@gmail.com, mansoury@modares.ac.ir

(تاریخ دریافت: ۱۳۸۸/۸/۳۰، تاریخ پذیرش: ۱۳۸۹/۳/۲۶)

چکیده

در تحقیق حاضر حل عددی معادلات حاکم بر جریان گرانی روی سطح شیب‌دار با استفاده از روش فشرده مرتبه چهارم به‌منزلهٔ روشی با توانایی تفکیک زیاد معرفی می‌شود. گسسته‌سازی مکانی معادلات حاکم با استفاده از دو روش تفاضل متناهی فشرده مرتبـه چهـارم و تفاضل متناهی مرتبه دوم مرکزی و گسسته‌سازی بخش زمانی معادلات بـا اسـتفاده از روش لیـپ‌فـراگ پیـشگو-مـصحح صـورت می‌گیرد. شبیه‌سازی برای دو رژیم شارش متفاوت با شوری‌های متفاوت به انجام می‌رسد و به‌علاوه جزئیات مربوط بـه نحـوه اعمـال شرط مرزی که مناسب و همخوان با روش فشرده مرتبه چهارم هستند، آورده می‌شـود. نتـایج نـشان مـی‌دهـد کـه روش مرتبـه دوم مرکزی نسبت به روش فشرده مرتبه چهارم در مقادیر شوری و تاوایی روی مرز، نوفـه بیـشتری ایجـاد مـی‌کنـد. همچنـین، مـشاهده می‌شود که روش فشرده مرتبه چهارم به‌خوبی توانسته است پیچیدگی‌های شارش را در قسمت دم جریـان گرانـی شـبیه‌سـازی کنـد. درنهایت نتایج گویای عملکرد مناسب‌تر روش فشرده مرتبه چهارم برای شبیه‌سازی عددی جریـان گرانـی کـف روی سـطح شـیب‌دار نسبت به روش مرتبه دوم مرکزی هستند.

واژه‌های کلیدی: جریان گرانی، تفاضل متناهی، طرحواره فشرده، دقت عددی، بوسینسک

Implementation of the fourth-order compact scheme for numerical simulation of bottom gravity current over a slope

Sarmad Ghader[1*], Abozar Ghasemi[2], Mohammad Reza Banazadeh[2], and Darioush Mansoury[2]

[1]*Institute of Geophysics, University of Tehran, Iran*
[2]*Faculty of Natural Resources and Marine Sciences, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran*

(Received: 21 November 2009, accepted: 16 June 2010)

Summary

In many numerical simulations of fluid dynamics problems, especially those possessing a wide range of length and time scales (e.g., geophysical flows), low-order numerical schemes are insufficient. Compact finite difference schemes, introduced as far back as the

Corresponding author: sghader@ut.ac.ir نگارنده رابط:

1930s, have been found to be simple ways of reaching the objectives of high accuracy and low computational cost. Compared with the traditional explicit finite difference schemes of the same order, the compact schemes are more accurate with the added benefit of using smaller stencil sizes, which can be essential when treating non-periodic boundary conditions. In recent years, the number of studies devoted to the application of compact schemes to spatial differencing of geophysical fluid dynamics problems has been increasing.

This work focuses on the application of a three-point fourth-order compact finite difference scheme for numerical solutions of bottom gravity current over a slope. The governing equations used to perform the numerical simulation are the vorticity-stream function-salinity formulation of the two dimensional viscous incompressible Boussinesq equations.

The details of spatial and temporal discretization of the governing equations are presented. For spatial differencing of the equations, the second-order central and a three-point fourth-order compact finite difference schemes are employed. In addition, the second-order two-stage predictor-corrector leapfrog scheme is used to advance the governing equations in time. Derivation of the consistent boundary condition formulation to generate stable numerical solution without degrading the global accuracy of the computations is also presented. To derive the required numerical boundary conditions for salinity and vorticity fields at lateral, top and bottom boundaries of the computational domain, the fourth-order one-sided (forward and backward) compact relations are used.

Two values for the salinity and a fixed value for bottom slope angle are used to perform the numerical simulations. Qualitative comparison of the results indicates better performance of the fourth-order compact scheme with respect to the second-order method. Furthermore, the computed value of the rate of the head growth of the gravity current generated by the fourth-order compact scheme is in agreement with existing numerical results, which indicates the accuracy of simulations in a quantitative manner. For the test cases used to perform the simulations in the present work, it was observed that the values of salinity and vorticity generated by the second-order method on bottom boundary were too noisy. While, values of salinity and vorticity generated by the fourth-order compact scheme, especially on the bottom boundary of computational domain, do not show this property and are more accurate than those generated by the second-order method. In addition, the numerical results show that the fourth-order compact scheme can successfully simulate the formation of vortices in the tail section of the gravity current, while the second-order scheme fails.

Key words: Gravity current, finite difference, compact scheme, numerical accuracy, Boussinesq

۱ مقدمه

سرما در دریاهای قطبی (دیکسون و همکاران، ۱۹۹۰) و تبخیر در دریاهای حاشیه‌ای (بارینر و پرایس، ۱۹۹۷a) باعث تشکیل توده آب‌های چگال می‌شوند، این توده آب‌ها که به‌صورت سرریز (Overflow) به داخل جریان‌های بزرگ‌مقیاس اقیانوسی رها می‌شوند، جریان‌های گرانی کف یا جریان‌های چگالی نامیده می‌شوند. برای مثال تبخیر شدید در دریای مدیترانه آب شوری تولید می‌کند که این آب شور به‌دلیل سنگینی زیاد از دهانه تنگه جبل‌الطارق در امتداد شیب قاره به کف اقیانوس اطلس نفوذ می‌کند و دچار آمیختگی و رقیق‌شدگی در محیط اطراف می‌شود (برایدن و کیندر، ۱۹۹۱). همچنین منشاء اصلی توده آب‌های عمیق و میانی در اقیانوس چنین سرریزشی از عرض‌های بالایی اقیانوس

و دریاهای حاشیه‌ای است (پرایس و بارینر، ۱۹۹۴). مشاهدات نشان می‌دهد که زبانه شوری دریای مدیترانه تا حوزه اقیانوس اطلس شمالی در عمق‌های میانی گسترش می‌یابد (لوزیر و همکاران، ۱۹۹۵) و در آنجا ضمن درون‌آمیزی با آب اقیانوس اطلس، رقیق می‌شود (پرایس و کوثور، ۱۹۹۳). مقایسه بین چندین مدل عددی اقیانوسی برای جریان اقیانوس اطلس شمالی نشان داده است که قدرت جریان‌های بزرگ‌مقیاس ترموهالاین به‌شدت تحت تاثیر نحوه مدل‌سازی سرریز در این مدل‌ها است و سرریز به‌طور معنی‌داری با نقش اقیانوس در دینامیک اقلیم مرتبط می‌شود. بنابراین سرریز نه تنها نقش مهمی در اندرکنش جو و اقیانوس دارد، بلکه نمایش دقیق آمیختگی آن با توده آب پیرامون یکی از فرایندهایی است که مشخصات توده آب‌های عمیق و میانی در اقیانوس را تعیین می‌کند (ویلبراند و کوثور، ۲۰۰۱).

ازآنجاکه توانایی پیش‌بینی رفتار جریان‌های بزرگ‌مقیاس اقیانوسی بر دقت (دینامیکی و عددی) مدل‌های اقیانوسی تکیه دارد، در نتیجه نمایش دقیق‌تر دینامیک سرریزش به‌ویژه آمیختگی آن با شاره پیرامون، در این مدل‌ها از اهمیت زیادی برخوردار است (اوزاکمن و همکاران، ۲۰۰۳).

مقیاس عمودی کوچک جریان‌های گرانی کف (در حدود ۲۰۰–۱۰۰ متر) و همچنین نشان دادن آمیختگی میان این جریان‌ها و سیال پیرامون که از راه ناپایداری کلوین–هلمهولتز (Kelvin–Helmholtz) رخ می‌دهد، مشکل اصلی شبیه‌سازی این سرریزش‌ها در جریان‌های عمومی اقیانوسی است. برای برطرف کردن این مشکل و نمایش آشکار جریان‌های گرانی کف، مدل عددی نه تنها باید دارای مقیاس شبکه‌بندی عمودی کوچک باشد بلکه مقیاس شبکه‌بندی افقی نیز برای نمایش تشکیل خیزآب‌ها (Billow) در نزدیکی سطح مشترک چگالی، باید به قدر کافی کوچک باشد. چنین مدلی، مدل عددی با توانایی تفکیک زیاد (High-resolution) نامیده می‌شود (اوزاکمن و چاسیگنت، ۲۰۰۲).

همان‌گونه که بیان شد، جریان‌های گرانی تأثیر مهمی بر توده آب‌های عمیق و میانی دارند. این مطلب مهم‌ترین دلیل برای کاوش در فهم و درک چگونگی به‌وجود آمدن این جریان‌ها و همچنین نحوه گسترش و عملکرد و به‌طور کلی دینامیک این جریان‌ها است. یکی از ابزارهایی که برای درک دینامیک جریان گرانی مورد استفاده قرار می‌گیرد، استفاده از روش‌های عددی برای شبیه‌سازی این جریان است. از جمله کارهای عددی مهمی که برای شبیه‌سازی جریان گرانی صورت گرفته، می‌توان به کارهای اوزاکمن (اوزاکمن و چاسیگنت، ۲۰۰۲؛ اوزاکمن و همکاران، ۲۰۰۳؛ اوزاکمن و همکاران، ۲۰۰۴)، بلانچت و همکاران (۲۰۰۵) اشاره کرد. تحقیق حاضر در ادامه بررسی های صورت گرفته و در جهت شناخت بهتر دینامیک جریان گرانی به استفاده از روش تفاضل متناهی فشرده مرتبه چهارم در شکل سه‌نقطه‌ای آن برای حل عددی معادلات بوسینسک تراکم‌ناپذیر حاکم بر جریان گرانی روی سطح شیب‌دار اختصاص دارد.

ایده اصلی روش‌های فشرده به کارهای نیومروف (۱۹۲۴) و همچنین فاکس و گودوین (۱۹۴۹) باز می‌گردد. البته شناخت این ایده تحت عنوان روش فشرده و استفاده از آنها برای شبیه‌سازی دقیق‌تر معادلات حاکم بر جریان شاره تا سال ۱۹۷۲ به تعویق افتاد تا اینکه کریس و اولیگر در ۱۹۷۲ و هرش در ۱۹۷۵ این روش‌ها را درحکم ابزاری بسیار قوی برای شبیه‌سازی دقیق مسائل مکانیک سیالات معرفی کردند. در طی چند سال گذشته بسیاری از محققان گروه‌های متنوعی از روش‌های فشرده با خواص تفکیک متفاوت را معرفی کرده‌اند که از جمله تحقیقات مهم صورت گرفته در این زمینه می‌توان به کار له له (۱۹۹۲) اشاره کرد.

۲ معادلات حاکم و گسسته‌سازی آنها

معادلات حاکم معادلات بوسینسک دوبعدی ناپایا، وشکسان و تراکم‌ناپذیر در شکل فرمول‌بندی تاوایی – تابع جریان هستند (اوزاکمن و چاسیگنت، ۲۰۰۲). با استفاده از تعریف متغیرهای بی‌بعد زیر:

$$(x^*, z^*) = \frac{(x, z)}{h};\ \psi^* = \frac{\psi}{\nu_x};t^* = \frac{\nu}{h^2}t;\ S^* = \frac{S}{\Delta S}$$

و پس از بی‌بعدسازی و با حذف ستاره از متغیرهای بی‌بعد، معادلات در شکل بی‌بعد به‌صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + J(\psi, \zeta) = -Gr\frac{\partial S}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + r\frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2}\right) \qquad (۱)$$

$$\zeta = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \qquad (۲)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + J(\psi, S) = \frac{1}{\Pr}\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + r\frac{\partial^2 S}{\partial z^2}\right) \qquad (۳)$$

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, w = \frac{\partial \psi}{\partial x} \qquad (۴)$$

که در اینجا ζ تاوایی (Vorticity)، S شوری، ψ تابع جریان، u و w مولفه‌های افقی و قائم سرعت هستند (ζ و S جزء متغیرهای پیش‌یابی (Prognostic) و ψ متغیر فرایابی (Diagnostic) است). $Gr = \left(gh^3\beta\Delta S\right)/\nu_x^2$، عدد گراشف است که در واقع نسبت نیروی شناوری (عامل ناپایدار کننده) به نیروی لختی (عامل پایدار کننده) است. $g = 9.8\,\text{ms}^{-2}$ شتاب گرانی، $\beta = 7.5\times10^{-4}\ \text{psu}^{-1}$ ضریب همرفت شوری برای آب دریا، $r = \frac{\nu_z}{\nu_x} = \frac{k_z}{k_x}$ نسبت ضرایب پخش یا وشکسانی قائم به افقی و $\Pr = \frac{\nu_x}{k_x}$، عدد پرانتل است. Pr نسبت ضریب وشکسانی سینماتیکی به ضریب پخش مولکولی شوری است. عملگر ژاکوبین نیز به‌صورت $J(p,q) = \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial q}{\partial x}$ تعریف می‌شود که هنگام حل عددی با استفاده از فرمول پیشنهادی آرکاوا (۱۹۶۶) بر پایهٔ پایستگی انرژی و آنستروفی محاسبه می‌شود. همچنین جمله $\frac{\partial S}{\partial x}$، جمله تولید تاوایی کژفشار نامیده می‌شود (هارتل و همکاران، ۲۰۰۰؛ پدلاسکی، ۱۹۸۷).

شایان ذکر است که در تحقیق حاضر معادلات و اعداد بی‌بعد استفاده شده اوزاکمن و چاسیگنت (۲۰۰۲) برای شبیه‌سازی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۲-۱ گسسته‌سازی زمانی معادلات حاکم

برای گسسته‌سازی زمانی معادلات از روش لیپ‌فراگ پیشگو- مصحح که یک روش سه‌ترازه مرتبه دوم است، استفاده می‌شود (گزدگ، ۱۹۷۶؛ دوران، ۱۹۹۹). معادلات حاکم بر مسئله را می‌توان به‌صورت کلی $\frac{\partial U}{\partial t} = G(U)$ بازنویسی کرد. که در حالت کلی U می‌تواند یک متغیر نرده‌ای یا برداری در فضای یک تا سه‌بعدی باشد (برای مثال در معادله تاوایی مورد استفاده در تحقیق حاضر تابع G شامل همهٔ مشتقات مکانی در معادله (۱) است). شکل گسسته معادله پیش‌گفته به روش لیپ‌فراگ پیشگو – مصحح به‌صورت زیر است:

$$\tilde{U}^{m+1} = U^{m-1} + G^m 2\Delta t \qquad (۵)$$

$$U^{m+1} = U^m + (G^m + \tilde{G}^{m+1})\Delta t/2 \qquad (۶)$$

در این رابطه بالانویس m نشان‌دهنده تراز زمانی به‌صورت $m\Delta t$ است و علامت مَد نشان‌دهنده متغیرها در مرحلهٔ پیشگو است. در این روش ابتدا در مرحله پیشگو مقداری برای U در زمان $t = (m+1)\Delta t$ از رابطه (۵) به‌دست می‌آید. سپس این مقدار به‌دست آمده برای U (منظور $\tilde{U}^{m+1}$) که آن را در اصطلاح، مقدار موقتی کمیت U می‌نامند، در مرحله دوم که همان مرحله تصحیح است با رابطه (۶) تصحیح می‌شود.

در واقع طرحواره پیش‌گفته یک طرحواره جایگزین مرتبه دوم برای روش لیپ‌فراگ برای اعمال به معادله فرافت-پخش است. توضیحات مشروح مربوط به پایداری محاسباتی این روش را گزدگ (۱۹۷۶) و دوران (۱۹۹۹) عرضه کرده‌اند.

۲-۲ گسسته‌سازی مکانی معادلات حاکم

برای گسسته‌سازی مکانی معادلات در دو راستای x و z از روش تفاضل متناهی فشرده مرتبه چهارم استفاده می‌شود(هرش، ۱۹۷۵). روابط روش فشرده مرتبه چهارم برای برآورد مشتقات اول و دوم یک تابع (مانند F) بر پایهٔ اینکه در هر نقطه گسسته‌سازی نه‌تنها مقدار تابع، بلکه مقدار مشتقات تابع نیز مجهول است، به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{1}{6}F'_{i+1}+\frac{2}{3}F'_i+\frac{1}{6}F'_{i-1} -\frac{1}{2d}(F_{i+1}-F_{i-1})=0 \qquad (۷)$$

$$\frac{1}{12}F''_{i+1}+\frac{5}{6}F''_i+\frac{1}{12}F''_{i-1} -\frac{1}{d^2}(F_{i+1}-2F_i+F_{i-1})=0 \qquad (۸)$$

در روابط بالا d بیان‌کننده گام شبکه‌ای در شبکه یکنواخت است. برای گسسته‌سازی مشتقات اول و دوم روی مرز از روابط پیشرو و پسرو فشرده استفاده می‌شود (هرش، ۱۹۷۵). با استفاده از روش هرمیتی و بسط تیلور، روابط پیشرو فشرده به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$F_i-F_{i+1}+dF'_i +d^2(\frac{1}{3}F''_i+\frac{1}{6}F''_{i+1})=0 \qquad (۹)$$

$$F_i-F_{i+1}+dF'_{i+1} -d^2(\frac{1}{6}F''_i+\frac{1}{3}F''_{i+1})=0 \qquad (۱۰)$$

و روابط پسرو فشرده نیز به‌صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$F_i-F_{i-1}-dF'_{i-1} -d^2(\frac{1}{6}F''_i+\frac{1}{3}F''_{i-1})=0 \qquad (۱۱)$$

$$F_i-F_{i-1}-dF'_i +d^2(\frac{1}{3}F''_i+\frac{1}{6}F''_{i-1})=0 \qquad (۱۲)$$

حل هم‌زمان معادلات بالا مشتمل بر روابط روی مرز و روابط داخل حوزه برای مشتقات اول و دوم منجر به حل یک دستگاه معادلات سه‌قطری بلوکی با بلوک‌های دو عضوی می‌شود، که با حل این دستگاه معادلات، مقدار مشتقات اول و دوم به‌دست می‌آیند.

۲-۳ گسسته‌سازی شرایط مرزی

در شبیه‌سازی حاضر با دو نوع شرط مرزی بدون نفوذ و بدون لغزش و شرط مرزی لغزش آزاد سروکار داریم. شرط مرزی بدون نفوذ و بدون لغزش بیان می‌کند که سرعت‌های افقی و قائم در روی مرز صفر هستند ($u=w=0$). اگر b نشان‌دهنده مرز باشد، در فرمول‌بندی تاوایی– تابع جریان روابط تحلیلی $\psi|_b=0$ و $\left.\frac{\partial\psi}{\partial z}\right|_b=0$ بیان‌کننده شرط بدون لغزش روی مرز است. شرط مرزی لغزش آزاد بیان می‌کند که هیچ سرعت عمودی روی مرز وجود ندارد ($w=0$) و اینکه هیچ شرط برشی روی سرعت مماسی اعمال نمی‌شود ($\frac{\partial u}{\partial z}=0$)، که در فرمول‌بندی تاوایی تابع جریان روابط تحلیلی $\left.\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right|_b=\zeta|_b=0, \psi|_b=0$ بیان‌کننده شرط لغزشی روی مرز است. شرط مرزی برای شوری نیز به‌صورت $\frac{\partial S}{\partial\hat{n}}=0$ درنظر گرفته می‌شود که بردار $\hat{n}$ بردار عمود بر مرز است (روچ، ۱۹۹۸).

برای گسسته‌سازی شرایط مرزی باید دقت کرد که این گسسته‌سازی باعث ایجاد ناپایداری در حل عددی نشود و به‌علاوه شرایط مرزی نباید باعث کاهش دقت

کلی محاسبات شود. بنابراین می‌بایست برای گسسته‌سازی شرایط مرزی از یک روش سازگار با حل عددی استفاده شود. در ادامه به گسسته‌سازی شرایط مرزی سازگار و متناسب با روش فشرده مرتبه چهارم پرداخته می‌شود. برای محاسبه شوری روی مرزها با استفاده از رابطه (۹) برای مرز پایین و با توجه به اینکه مشتق اول شوری روی مرز صفر است، رابطه جدیدی از دقت مرتبه چهارم روی مرز پایین به صورت زیر استخراج می‌شود:

$$S\big|_b = S\big|_{b+2} - \Delta z^2 \left(\frac{1}{3} S''\big|_{b+1} + \frac{1}{6} S''\big|_{b+2}\right) \quad (۱۳)$$

در روی مرز بالا و چپ و راست نیز مشابه رابطه بالا با استفاده از روابط پسرو و پیشرو مناسب رابطه مرزی مناسب برای شوری استخراج می‌شود.

برای محاسبه تاوایی روی مرز بدون لغزش رابطه تحلیلی موجود نیست یا به‌عبارتی، مشکل فرمول‌بندی تاوایی–تابع جریان در استفاده از مرز بدون لغزش این است که برای محاسبه مقدار تاوایی روی مرز سخت مانند شوری و تابع جریان رابطه صریحی موجود نیست، بنابراین برای محاسبه تاوایی در مرزها رابطه زیر مورد استفاده قرار می‌گیرد (هرش، ۱۹۷۵):

$$\zeta\big|_b = \frac{12}{\Delta z^2}\psi\Big|_{b+1} - \frac{6}{\Delta z}\psi'\Big|_{b+1} + \psi''_{i,2}\big|_{b+1} \quad (۱۴)$$

این رابطه، رابطه‌ای از دقت مرتبه سوم است و به‌دلیل یک مرتبه اختلاف دقت با داخل حوزه، با حل عددی، سازگاری خوبی دارد.

همچنین برای اعمال شرط مرزی بدون لغزش از دو رابطه دیگر یکی از دقت مرتبه دوم و دیگری از دقت مرتبه یک نیز استفاده می‌شود. رابطه مرتبه دوم روی مرز پایین با استفاده از رابطه (۹) و با استفاده از معادله پواسون در روی مرز به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\zeta\big|_b = \frac{3}{\Delta z^2}\psi\big|_{b+1} - \frac{1}{2}\psi''\big|_{b+1} \quad (۱۵)$$

اما رابطه دیگر که یک رابطه مرتبه اول است، به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\zeta\big|_b = 2(\psi\big|_b - \psi\big|_{b+1}) / \Delta z^2 \quad (۱۶)$$

این رابطه، رابطه‌ای سازگار و همخوان با روش مرتبه دوم مرکزی است، طوری‌که محققان زیادی از آن استفاده کرده‌اند (روچ ۱۹۹۸؛ تیلور ۱۹۷۰؛ تام ۱۹۳۳؛ فورمان و بنت؛ ۱۹۸۸).

۲-۴ شرایط حل عددی

همان‌گونه که در قسمت مقدمه بیان شد، مشکل اصلی نمایش جریان‌های گرانی کف اقیانوس در مدل‌های گردش عمومی اقیانوسی، مقیاس قائم کوچک این جریان‌ها است، که نوعاً از مرتبه ۱۰۰–۲۰۰ متر است (پرایس و یانگ، ۱۹۹۸). از تجارب آزمایشگاهی (سیمپسون، ۱۹۶۹) و مشاهدات میدانی (بارینر و پرایس، a ۱۹۹۷) به‌خوبی معلوم است که اختلاط مابین جریان چگال و شاره پیرامون عمدتا از راه ناپایداری کلوین– هلمهولتز رخ می‌دهد. بنابراین برای نمایش صریح جریان گرانی کف نه‌تنها باید مقیاس قائم شبکه کوچک باشد بلکه مقیاس افقی شبکه نیز برای تسخیر تشکیل خیزآب‌ها در نزدیک سطح مشترک باید به‌اندازه کافی کوچک باشد. در شبیه‌سازی حاضر برطبق دلایلی که در بالا گفته شد و تا آنجا که ممکن است (با توجه به امکانات محاسباتی) مقیاس افقی و عمودی شبکه کوچک (برابر با ۱۰ متر) انتخاب شده‌است. برای انتخاب گام زمانی نیز از عدد کورانت برای سریع‌ترین امواج به‌صورت $\frac{\sqrt{g'h}\,\Delta t}{\Delta x} \le 1$ استفاده می‌شود. در این رابطه $g' = g\beta\Delta S$ بیانگر گرانی کاهیده است.

حال با توجه به هندسه مورد استفاده در تحقیق حاضر و عنایت به این نکته که گام زمانی حاصل از شرط CFL شرط لازم برای پایداری را به‌دست می‌دهد (بنابراین برای تضمین پایداری بهتر است که گام زمانی مورد استفاده نسبت به گام زمانی حاصل از عدد کورانت کمتر گرفته شود) در تحقیق حاضر از گام زمانی یک ثانیه برای حل عددی استفاده می‌شود.

حل عددی مورد نظر در یک ناحیه ذوزنقه‌ای شکل که مرز بالای آن افقی و مرز پایین آن شیب‌دار است صورت می‌گیرد. حداکثر عمق ناحیه در سمت راست ناحیه $H = 1000$ m و حداقل آن از سمت چپ با شروع شیب $H = 200$ m است. شروع شیب از ارتفاع $h = 800$ m و از سمت چپ ناحیه است. طول افقی ناحیه نیز $L = 12000$ m است. نمایی ساده از هندسه به‌کاررفته در شبیه‌سازی جریان گرانی روی سطح شیب‌دار در شکل ۱ نشان داده شده‌است.

اکثر نظریه‌های منتشرشده و تحقیقات آزمایشگاهی جریان گرانی روی سطح شیب‌دار بر کنترل دو پارامتر اختلاف چگالی شاره پیرامون با جریان گرانی و زاویه شیب به‌منزلهٔ پارامترهای اصلی جریان گرانی تاکید کرده‌اند. لذا در تحقیق حاضر با توجه به امکانات محاسباتی موجود، دو بررسی موردی، یکی با $\theta = 2.5^{\circ}$, $\Delta S = 1.5$ psu و دیگری با $\theta = 2.5^{\circ}$, $\Delta S = 0.5$ psu انتخاب می‌شود (θ بیانگر زاویه شیب است). زاویه انتخاب‌شده از مرتبه شیب قاره در مقیاس ژئوفیزیکی و مقدار شوری‌ها نیز در گستره چگالی سرریزهای اقیانوسی انتخاب شده‌اند (پرایس و بارینر، ۱۹۹۴). آزمایش‌های عددی در غیاب هرگونه لایه‌بندی شاره پیرامون صورت می‌گیرد.. پارامترهای آزمایش‌های عددی در جدول ۱ آمده است. نسبت ضریب پخش عمودی به افقی $r = 10^{-5}$ است، با درنظر گرفتن این مقدار نه‌تنها فرض می‌شود که ضریب پخش عمودی در اقیانوس کوچک است بلکه اطمینان حاصل می‌شود که آمیختگی عمودی مابین جریان گرانی و شاره پیرامون از راه درون‌آمیزی (Entrainment) و اختلاط القاشده پیچکی (Eddy-Induced Mixing) و نه از راه پخش اتفاق می‌افتد (لدول و همکاران، ۱۹۹۳). عدد پرانتل نیز از روی وشکسانی افقی و پخش افقی برابر با $\mathrm{Pr} = 7$ درنظر گرفته می‌شود.

شرایط مرزی به‌کار رفته در دستگاه معادلات جریان گرانی روی سطح شیب‌دار به‌صورت مرز بالا لغزش آزاد و بدون نفوذ ($\zeta = \psi = \frac{\partial S}{\partial z} = 0$)، مرز پایین مرز بدون لغزش و بدون نفوذ ($\psi = \frac{\partial S}{\partial z} = 0, \zeta = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$) و مرز سمت چپ و راست مرز باز ($\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0$) (به ترتیب مرز ورودی و خروجی درنظر گرفته می‌شود) است. به‌دلیل اینکه در مرز بالا و پایین مقدار تابع جریان صفر انتخاب شده است، در نتیجه از این دو سطح هیچ انتقالی صورت نمی‌گیرد، بنابراین در پاسخ به حرکت جریان گرانی به‌سمت پایین جریانی در خلاف آن، در سطح تشکیل می‌شود، این مسئله با این حقیقت که یک جریان بازگشتی قوی در سریزهای اقیانوسی مشاهده می‌شود قابل توجیه است (بارینر و پرایس، ۱۹۹۷b).

شکل ۱. نمایی از هندسه به‌کار رفته در شبیه‌سازی جریان گرانی روی سطح شیب‌دار.

۳ نتایج و بحث

۳-۱ صحت‌سنجی

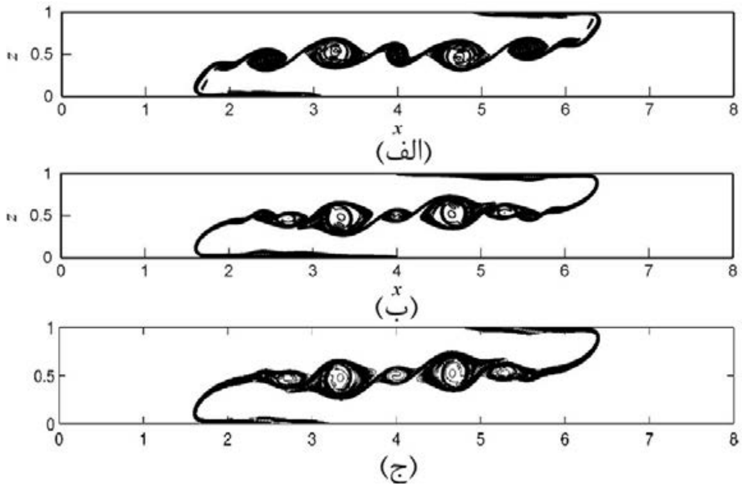
همان‌گونه که می‌دانیم کدهای عددی نوشته شده برای شبیه‌سازی پدیده‌های گوناگون نیاز به اعتبارسنجی دارند. در تحقیق حاضر از مسئله اقیانوسی استومل (استومل، ۱۹۴۸) به‌منزلهٔ یک مسئله خطی و از مسئله شبیه‌سازی جریان گرانی روی سطح صاف یا جریان گرانی در قالب شارش گرانی تبادلی (Lock exchange) به‌منزلهٔ یک مسئله غیرخطی برای این امر استفاده شده است. نتایج حاصل از شبیه‌سازی مسئله خطی استومل نشان می‌دهد که روش فشرده مرتبه چهارم نسبت به روش مرتبه دوم مرکزی دقیق‌تر عمل می‌کند و همچنین از توانایی تفکیک بیشتری نیز برخوردار است.

در شکل ۲ نتایج حاصل از شبیه‌سازی شارش گرانی تبادلی با استفاده از روش فشرده مرتبه چهارم و مرتبه دوم مرکزی و با به‌کارگیری روابط (۱۳) و (۱۴) برای مرز بدون لغزش و همچنین نتایج به‌دست آمده لیو و همکاران (۲۰۰۳) آورده شده است (برای جزئیات بیشتر به مقاله قادر و همکاران (۱۳۸۸) رجوع شود). در شکل مشاهده می‌شود که نتایج شبیه‌سازی به روش فشرده مرتبه چهارم در تحقیق حاضر همخوانی بسیار خوبی با تحقیق لیو و همکاران دارد. همچنین در شکل مشاهده می‌شود با آنکه روش مرتبه دوم مرکزی، تعداد تاوه‌ها را درست تشخیص داده است ولی در شبیه‌سازی جزئیات آن بسیار ضعیف عمل کرده است.

۳-۲ نتایج شبیه‌سازی با استفاده از روش مرتبه چهارم فشرده

شبکه انتخاب‌شده برای حل عددی شبکه‌ای با تفکیک 1201×101 نقطه متناظر با فواصل شبکه‌ای 10 m در دو راستای محورهای مختصات است. همچنین با توجه به شرط پایداری محاسباتی برای حل عددی از گام زمانی یک ثانیه استفاده می‌شود.

شکل ۳ نتایج حاصل از شبیه‌سازی جریان گرانی کف روی سطح شیب‌دار با استفاده از روش فشرده مرتبه چهارم را با $\theta = 2.5^\circ,\ \Delta S = 1.5\ \text{psu}$ نشان می‌دهد. پربندهای نشان داده شده در این شکل در بازه $[0.05,\ 1.45]$ قرار



شکل ۲. مقایسه نتایج حاصل از شبیه‌سازی عددی میدان شوری جریان گرانی مسطح با به‌کارگیری شرط مرزی بدون لغزش در زمان $t = 4$ (فاصله میان دو پربند متوالی برابر با 0.025 است)، (الف) روش مرتبه دوم مرکزی، (ب) روش فشرده مرتبه چهارم و (ج) نتیجه عرضه شده لیو و همکاران (۲۰۰۳).

دارند و فاصله بین دو پربند متوالی 0.05 است. شکل ۳-الف مقدار کوچکی از شاره به ارتفاع 190 m را که در تنگه رهاسازی می‌شود نشان می‌دهد، شکل ۳-ب رشد اولیه سامانه را که شبیه جریان گرانی تبادلی (Lock exchange) است، نشان می‌دهد که در آن شاره سبک‌تر در بالا باقی می‌ماند و شاره سنگین که در کف است به‌سمت پایین نفوذ می‌کند و در امتداد سطح شیب‌دار گسترش می‌یابد (کولگان، ۱۹۵۸؛ سیمپسون، ۱۹۹۷). شکل۳-ج نشان می‌دهد که جریان گرانی به یک آهنگ ثابت ورودی در تنگه می‌رسد و مشخصه نوک (Head) در قسمت لبه حمله (Leading edge) جریان شکل می‌گیرد. درشکل ۳-د مشاهده می‌شود که جریان گرانی که در ابتدا پایدار است، با گذشت زمان در حدود فاصله۷ کیلومتری پایین شیب قسمت نوک و عقب جریان شروع به ناپایدار شدن می‌کند که در این قسمت، نوک ناحیه شکست امواج و اختلاط شدید است. در شکل ۳-ه مشاهده می‌شود که قسمت عقبه جریان نیز که دم (Tail) نامیده می‌شود شکل ناپایداری به خود گرفته است و ناپایداری بالای دم باعث تشکیل یک روی هم جمع‌شدگی (Roll up) به‌صورت تاوه‌های کلوخه‌ای (Lumped vortices) می‌شود. این رفتار به‌طور واضح به ناپایداری کلوین-هلمهولتز اشاره دارد که باعث به‌دام افتادن شاره سبک در شاره سنگین می‌شود (کورکوس و شرمان، ۱۹۸۴). ضخامت دم در حدود ۱۰۰ تا ۱۵۰ متر است که توافق نسبتاً خوبی با ضخامت جریان گرانی اقیانوس در فلات قاره‌ها دارد (پرایس و یانگ، ۱۹۹۸). همین‌طور که جریان گرانی به‌سمت پایین شیب نزول می‌کند، نوک رشد می‌کند و از راه درون‌آمیزی با شاره کم‌چگال پیرامون، رقیق می‌شود.

در شکل ۴ نتایج حاصل از شبیه‌سازی با به‌کارگیری پارامترهای $\theta = 2.5^\circ$, $\Delta S = 0.5$ psu نشان داده شده است. پربندهای نشان داده شده در این شکل در بازه $[0.05,\ 0.45]$ قرار دارند و فاصله بین دو پربند متوالی 0.05 است. همان‌گونه که در شکل مشاهده می‌شود، سرعت نزول جریان به پایین سطح شیب‌دار با مورد قبلی که مقدار اختلاف شوری در آن بیشتر بود تفاوت معنی‌داری دارد که این خود گویای آن است که اختلاف چگالی جریان گرانی با محیط پیرامون اثر معنی‌داری بر سرعت نزول این جریان دارد، به‌طوری که بعد از گذشت مدت زمان ۵ ساعت از رهاسازی جریان گرانی در بالای تنگه، جریان به حدود ۷ کیلومتری پایین سطح شیب‌دار رسیده است. همچنین ارتفاع نوک نیز کمتر است درصورتی که جریان با اختلاف شوری $\Delta S = 1.5$ psu بعد از مدت زمان ۴/۲۵ ساعت به حدود ۱۲ کیلومتری پایین سطح شیب‌دار می‌رسد و ارتفاع نوک نیز بیشتر می‌شود. قسمت دم نیز در مورد دوم حتی بعد از گذشت مدت زمان ۵ ساعت به حالت ناپایدار شبیه مورد اول نمی‌رسد و شکل تقریبا پایداری دارد یا به‌عبارت بهتر درون‌آمیزی شاره سنگین با کمتر شدن مقدار اختلاف شوری با محیط پیرامون کاهش می‌یابد.

در مرحله بعدی برای اِعمال شرط مرزی بدون لغزش از روابط (۱۵) و (۱۶) که به‌ترتیب روابطی از دقت مرتبه دو و یک هستند استفاده می‌شود. نتایج به‌دست آمده حاکی از آن بود که استفاده از رابطه مرتبه سوم برای تاوایی، خطای کمتری روی مرز پایین تولید می‌کند. یا به‌عبارتی استفاده از روابط (۱۵) و (۱۶) خطای (نوفه) بیشتری نسبت به رابطه (۱۴) روی مرز تولید می‌کنند.

نتایج آزمایشگاهی حاصل از کارهای الیسون و ترنر (۱۹۵۹)، بریتر و لیندن (۱۹۸۰) و موناقان و همکاران (۱۹۹۹) نشان دادند که آهنگ تغییرات ضخامت نوک H با فاصله از مبدا مختصات X برابر است با:

$$\frac{dH}{dX} \approx 4\times 10^{-3}\theta$$

دراینجا θ برحسب درجه است. در آزمایش عددی حاضر برای کمی کردن نرخ تغییرات H با فاصله X در دو آزمایش (با شوری متفاوت ولی با زاویه شیب برابر) صورت گرفته است؛ در هر 0.5 km پیشروی جریان به‌سمت پایین شیب، ارتفاع نوک اندازه‌گیری شد (اوزاکمن و چاسیگنت، ۲۰۰۲)، که مقدار به‌دست آمده برابر شد با:

$$\frac{dH}{dX}=0.034$$

از این رابطه و رابطه آزمایشگاهی به‌دست آمده به‌خوبی استنباط می‌شود که شبیه‌سازی حاضر به درستی توانسته است آهنگ ثابت رشد نوک را بدون وابستگی به مقدار اختلاف شوری ΔS نشان دهد. با مقایسه نتایج آزمایشگاهی و عددی، مشاهده شد که dH/dX در نتایج آزمایشگاهی تقریبا سه برابر مقدار به‌دست آمده از نتایج عددی است. در بررسی عددی اوزاکمن و چاسیگنت (۲۰۰۲) این مقدار برابر با 0.038 به‌دست آمد که توافق خوبی با کار حاضر دارد. اوزاکمن بیان کرد که اختلاف حاصل از نتایج آزمایشگاهی و عددی، ناشی از حل دوبعدی است، که در آن گسترش و عریض شدن جریان از کناره‌ها در نزول جریان به پایین سطح شیب‌دار درنظر گرفته نمی‌شود.

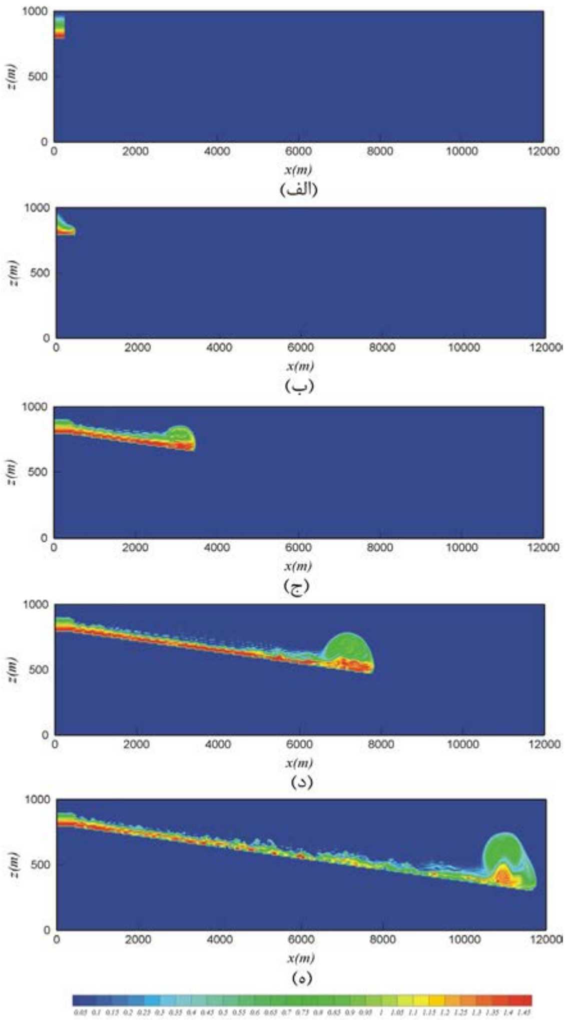
۳-۳ شبیه‌سازی با استفاده از روش مرتبه دوم مرکزی

برای ایجاد امکان مقایسه، از روش مرتبه دوم مرکزی نیز برای شبیه‌سازی استفاده شد. مانند قسمت قبل شبکه انتخاب شده، شبکه‌ای با تفکیک 1201×101 متناظر با فواصل شبکه‌ای 10 m در دو راستای مختصات است و مقدار شوری و زاویه شیب برای شبیه‌سازی $\theta=2.5^{\circ},\ \Delta S=1.5$ psu انتخاب می‌شود. بقیه جزئیات نیز مانند مورد قبل است. شکل ۵ نتایج حاصل از حل عددی جریان گرانی به روش مرتبه دوم مرکزی را نشان می‌دهد. پربندهای نشان داده شده در این شکل در بازه $[0.05,\ 1.45]$ قرار دارند و فاصله بین دو پربند متوالی 0.05 است. در این شکل نیز مانند مورد قبلی، با نزول جریان به‌سمت پایین، ارتفاع نوک افزایش می‌یابد.

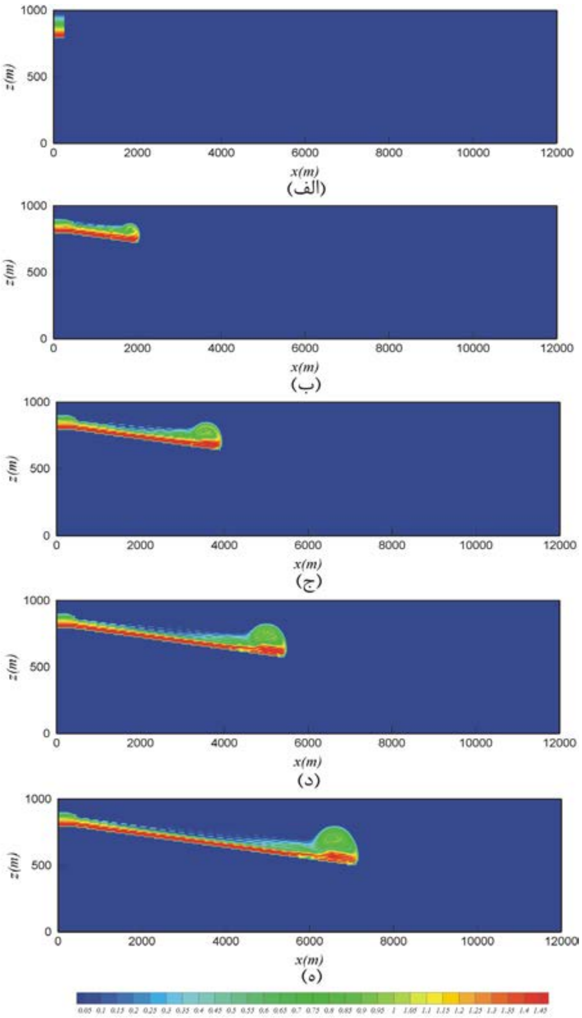
در شکل ۵-ج مشاهده می‌شود که بعد از گذشت 1.5 ساعت از نزول جریان به‌سمت پایین، مشخصه نوک شکل می‌گیرد. با گذشت زمان درون‌آمیزی شاره سنگین با شاره پیرامون باعث می‌شود که حجم نوک افزایش یابد که این موضوع در شکل‌های ۵-د و ۵-ه به‌خوبی دیده می‌شود.

۴-۳ مقایسه نتایج حاصل از شبیه‌سازی با روش مرتبه دوم مرکزی و فشرده مرتبه چهارم

با مقایسه نتایج حاصل از شبیه‌سازی با روش مرتبه دوم مرکزی و مرتبه چهارم فشرده مشاهده شد که نتایج حاصل از این دو روش با هم تفاوت ملموسی دارند. قسمت دم در شبیه‌سازی با روش مرتبه دوم تقریبا پایدار باقی می‌ماند و فقط قسمت‌هایی از دم که در پایین سطح شیب‌دار است به‌صورت ناپایدار در می‌آید. در استفاده از روش فشرده مشاهده شد که بعد از تقریباً فاصله ۷ کیلومتری پایین سطح شیب‌دار، قسمت دم شروع به ناپایدار شدن، می‌کند. پدیده کلوخه‌شدگی به‌راحتی در قسمت دم دیده می‌شود، به‌طوری که از این زمان به بعد ناپایداری رشد می‌کند و به تمام قسمت دم انتقال می‌یابد. نکته جالب دیگر اینکه همان‌گونه که در جدول ۲ مشاهده می‌شود، در شبیه‌سازی به روش مرتبه دوم، مقدار اولیه پربندهای شوری که در زمان اولیه میان $[0.05,\ 1.45]$ است بعد از گذشت مدت‌زمان 4.25 ساعت و نزول جریان به پایین سطح شیب‌دار به مقدار $[-1.5,\ 10.0]$ افزایش می‌یابد که این نشان‌دهنده تولید خطای بسیار زیادی است. با بررسی پربندهای خطا، مشخص شد که این مقادیر روی مرز پایین تولید می‌شود. باید توجه کرد که رابطه مرزی مورد



شکل ۳. تحول زمانی میدان شوری روی سطح شیب‌دار به روش فشرده مرتبه چهارم با اختلاف شوری $\Delta S = 1.5\,\mathrm{psu}$ برحسب ساعت ، (الف) $t = 0\,\mathrm{h}$، (ب) $t = 0.125\,\mathrm{h}$، (ج) $t = 1.5\,\mathrm{h}$، (د) $t = 3\,\mathrm{h}$ و (ه) $t = 4.25\,\mathrm{h}$.



شکل ۴. تحول زمانی میدان شوری روی سطح شیب‌دار به روش فشرده مرتبه چهارم با اختلاف شوری $\Delta S = 0.5\,\mathrm{psu}$ برحسب ساعت، (الف) $t = 0\,\mathrm{h}$، (ب) $t = 1.5\,\mathrm{h}$، (ج) $t = 3\,\mathrm{h}$، (د) $t = 4\,\mathrm{h}$ و (ه) $t = 5\,\mathrm{h}$.

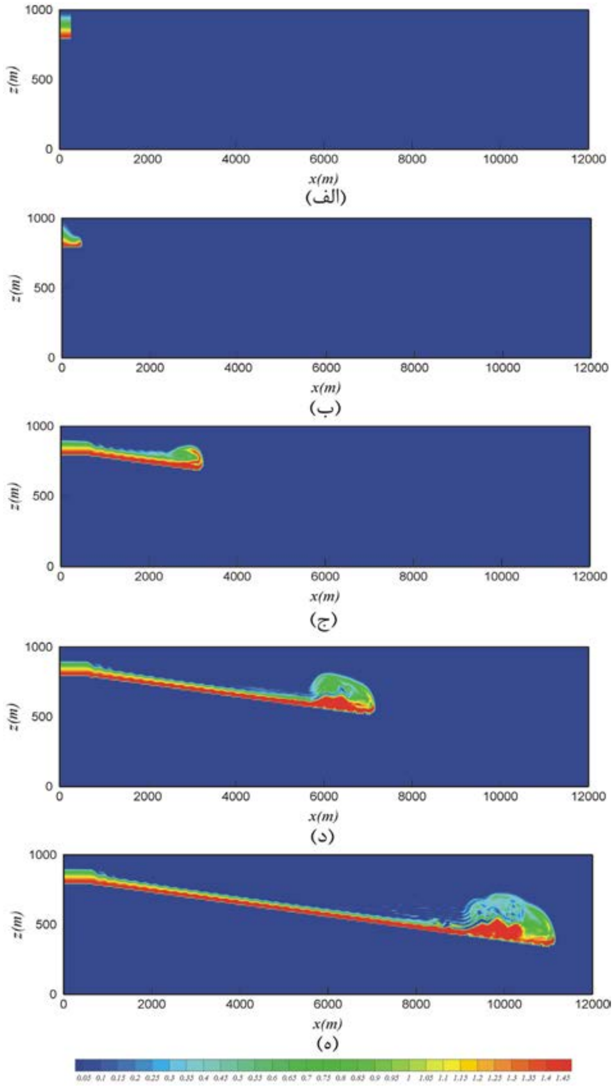
جدول ۱. پارامترهای آزمایش‌های عددی جریان گرانی روی سطح شیب‌دار.

ابعاد ناحیه	12000×1000 m
زاویه شیب بستر	$\theta = 2.5^{\circ}$
اختلاف شوری	$\Delta S = 1.5, 0.5$ psu
ضرایب وشکسانی (x, z)	$\nu_x = 7\,\mathrm{m^2 s^{-1}}, \nu_z = 7\times10^{-5}\,\mathrm{m^2 s^{-1}}$
ضرایب پخش (x, z)	$k_x = 1\,\mathrm{m^2 s^{-1}}, k_z = 1\times10^{-5}\,\mathrm{m^2 s^{-1}}$
قدرت تفکیک	$\Delta x = \Delta z = 10$ m
عدد گراشف	1534($\Delta S = 1.5$ psu), 514($\Delta S = 0.5$ psu)
عدد پرانتل	Pr = 7
نسبت پخش	$r = 10^{-5}$

استفاده در مرز پایین برای شوری و تاوایی، مشابه مورد شارش گرانی تبادلی است که از جملهٔ بهترین روابط در شبیه‌سازی با روش مرتبه دوم مرکزی محسوب می‌شود (روچ (۱۹۹۸)، تیلور (۱۹۷۰)، تام (۱۹۳۳)، فورمان و بنت (۱۹۸۸)). اما در شبیه‌سازی با روش فشرده مرتبه چهارم، مقدار بیشینه و کمینه پربندهای شوری که تا زمان $4.25\ (h)$ تولید می‌شود به‌ترتیب برابر با $[-0.8,\ 2.49]$، و مربوط به زمان $3.5\ (h)$ است. این در مقایسه با روش مرتبه دوم، نتیجه بسیار خوبی محسوب می‌شود.

۵ نتیجه‌گیری

در تحقیق حاضر به بررسی کاربرد روش فشرده مرتبه چهارم در نحوه افزایش دقت مسئله موردی جریان گرانی روی سطح شیب‌دار در دو بعد پرداخته شده است. نتایج به‌دست آمده و مقایسه کیفی آنها برای میدان شارش جریان گرانی با پیچیدگی‌های فراوان نشان می‌دهد که روش فشرده مرتبه چهارم از توانایی مناسبی برای شبیه‌سازی دقیق میدان شارش مورد بررسی برخوردار است. مقایسه روش فشرده مرتبه چهارم با روش تفاضل متناهی مرکزی مرتبه دوم در شبیه‌سازی جریان گرانی روی سطح شیب‌دار نشان می‌دهد که روش مرتبه دوم مرکزی عملکرد ضعیفی در شبیه‌سازی میدان شارش پیچیده مورد بررسی در تحقیق حاضر دارد و روش مرتبه دوم مرکزی نسبت به روش فشرده مرتبه چهارم نوفه بیشتری در مقادیر شوری و تاوایی روی مرز ایجاد می‌کند. همچنین مشاهده شد که روش فشرده مرتبه چهارم به‌خوبی توانسته است پیچیدگی‌های جریان را در قسمت دم شبیه‌سازی کند. این امر خود نشان از قدرت تفکیک زیاد روش فشرده مرتبه چهارم دارد.



شکل ۵. تحول زمانی میدان شوری روی سطح شیب‌دار به روش مرتبه دوم مرکزی با اختلاف شوری $\Delta S = 1.5\,\text{psu}$ برحسب ساعت، (الف) $t = 0\,\text{h}$، (ب) $t = 0.125\,\text{h}$، (ج) $t = 1.5\,\text{h}$، (د) $t = 3\,\text{h}$، (ه) $t = 4.25\,\text{h}$.

جدول ۲. مقایسه خطای تولید شده در مقدار پربندهای شوری برای روش‌های فشرده مرتبه چهارم و روش مرتبه دوم مرکزی.

نوع روش	کمینه پربندهای شوری	بیشینه پربندهای شوری
مرتبه چهارم فشرده	-0.8	2.49
مرتبه دوم مرکزی	-1.5	10.0

تشکر و قدردانی

نویسندگان از دانشگاه‌های تهران و تربیت مدرس به‌لحاظ حمایت از این کار تحقیقاتی تشکر می‌کنند.

منابع

قادر، س.، قاسمی، ا.، بنازاده، م.، منصوری، د.، ۱۳۸۸، حل عددی معادلات بوسینسک تراکم‌ناپذیر با استفاده از روش فشرده مرتبه چهارم: مطالعه موردی شارش lock-exchange: دوازدهمین کنفرانس دینامیک شاره‌ها.

Arakawa, A., 1966, Computational design for long-term numerical integration of the equations of fluid motion: Two dimensional incompressible flow: Journal of Computational Physics, **1**, 119-143.

Baringer, M. O., and Price, J. F., 1997a, Mixing and spreading of the Mediterranean outflow: Journal of Physical Oceanography, **27**, 1654-1677.

Baringer, M. O., and Price, J. F., 1997b, Momentum and energy balance of the Mediterranean outflow: Journal of Physical Oceanography, **27**, 1678-1692.

Blanchette, F., Piche, V., Meiburg, E., and Strauss, M., 2005, Evaluation of a simplified approach simulating gravity currents over slopes of varying angles: Computers & Fluids, **35**, 492-500.

Britter, R. E., and Linden, P. F., 1980, The motion of the front of a gravity current traveling down an incline: Journal of Fluid Mechanics, **99**, 531-543.

Bryden, H. L. and Kinder, T. H., 1991, Steady two-layer exchange through the Strait of Gibraltar: Deep-Sea Research, **38**, 445-463.

Corcos, G. M., and Sherman, F. S., 1984, The mixing layer: Deterministic models of a turbulent flow. Part 1: Introduction and the two-dimensional flow: Journal of Fluid Mechanics, **139**, 29-65.

Dickson, R. R., Gmitrowics E. M., and Watson A. J., 1990, Deep water renewal in the northern North Atlantic: Nature, **344**, 848-850.

Durran, D. R., 1999, Numerical methods for wave equations in geophysical fluid dynamics: Springer, New York.

Ellison, T. H. and Turner, J. S., 1959, Turbulent entrainment in stratified flows: Journal of Fluid Mechanics, **6**, 423-448.

Foreman, M. G. G., and Bennett, A. F., 1988, On the no-slip boundary conditions for the incompressible Navier-Stokes equations: Dynamics of Atmospheres and Oceans, **12**, 47-70.

Fox, L., and Goodwin E. T., 1949, Some new method for the numerical integration of ordinary differential equations: Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, **45**, 373-388.

Gazdag, J., 1976, Time-differencing schemes and transform methods: Journal of Computational Physics, **20**, 196-207.

Hartel, C., Meiburg, E., and Necker, F., 2000, Analysis and direct numerical simulation of the flow at a gravity-current head: Part 1: flow topology and front speed for slip and no-slip boundaries: Journal of Fluid Mechanics, **418**,189-212.

Hirsh, R. S., 1975, Higher order accurate difference solutions of fluid mechanics problems by a compact differencing technique: Journal of Computational Physics, **19**, 90-109.

Keulegan, G. H., 1958, The motion of saline fronts in still water: U.S. National Bureau of Standards Report**.**

Kreiss, H. O., and Oliger, J., 1972, Comparsion of accurate methods for the integration of hyperbolic equations: Tellus, **24**, 199-215.

Ledwell, J. R., Watson, A. J., and Law, C. S., 1993, Evidence for slow mixing across the pycnocline from an open-ocean tracer-release experiment: Nature, **364**, 701-703.

Lele, S., 1992, Compact finite difference schemes spectral-like resolution: Journal of Computational Physics, **103**, 16-42.

Liu, J. G., Wang, C., and Johnston, H., 2003, A Fourth order Scheme for Incompressible Boussinesq Equations: Journal of Scientific Computing, **18**, (2), 253-285.

Lozier, M. S., Owens, W. B., and Curry, R. G., 1995, The climatology of the North Atlantic: Progress in Oceanography, **36**, 1-44.

Monaghan, J. J., Cas, R. A. F., Kos, A. M., and Hallworth, M., 1999, Gravity currents descending a ramp in a stratified tank: Journal of Fluid Mechanics, **379**, 39-70.

Numerov, B. v., 1924, A method of extrapolation of perturbations: Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, **84**, 592-601.

Mediterranean outflow mixing and dynamics: Science, **259**, 1277-1282.
Roache, P. J., 1998, Computational fluid dynamics: Hermosa Publishers.
Simpson, J. E., 1969, A comparison between laboratory and atmospheric density currents: Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society, **95**, 758-765.
Simpson, J. E., 1997, Gravity Currents: in the Environment and the Laboratory: 2nd Ed. Cambridge University Press.
Stommel, H., 1948, The westward intensification of wind driven ocean currents: Transactions American Geophysical Union, **29**, 202-1948.
Taylor, P. J., 1970, The linear stability of no-slip boundary conditions in the numerical solution of nonsteady fluid flows: Journal of Computational Physics, **6**, 268-287.
Thom, A., 1933, The flow past a circular cylinders at low speeds: Proceedings of the Royal Society of London, **141A**, 651-666.
Willebrand, J., Barnier, B., Boning, C., Dieterich, C., Killworth, P. D., Le Provost, C., Jia, Y., Molines, J-M., and New, A. L., 2001, Circulation characteristics in three eddy-permitting models of the North Atlantic: Progress in Oceanography, **48**, 123-161.
Ozgokmen, T. M., and Chassignet, E., 2002, Dynamics of two-dimensional turbulent bottom gravity currents: Journal of Physical Oceanography, **32**, 1460-1478.
Ozgokmen, T. M., Fischer, P., Duan J., and Iliescu, T., 2004, Three dimensional turbulent bottom density currents from a high-order nonhydrostatic spectral element model: Journal of Physical Oceanography, **34**, 2006-2026.
Ozgokmen, T. M., Johns, W., Peters, H., and Matt, S., 2003, Turbulent mixing in the Red Sea outflow plume from a high resolution nonhydrostatic model: Journal of Physical Oceanography, **33**, 1846-1869.
Pedlosky, J., 1987, Geophysical fluid dynamics: Springer-verlag, New York.
Price, J. F., and Yang, J., 1998, Marginal sea overflows for climate simulations: Ocean Modelling and Parameterization, E. P. Chassignet and J. Verron, Eds., Kluwer Academic, 155-170.
Price, J. F. and Baringer, M. O., 1994, Outflows and deep water production by marginal seas: Progress in Oceanography, **33**, 161-200.
Price, J. F., Baringer, M. O., Lueck, R. G., Johnson, G. C., Ambar, I., Parrilla, G., Cantos, A., Kennelly, M. A., and Sanford, T. B., 1993,