

## حساسیت تولید امواج گرانی- لختی به درجه کژفشاری در مدل دولایه‌ای روی کره

محمد میرزائی<sup>۱</sup>، علیرضا محب‌الحجہ<sup>۲\*</sup> و فرهنگ احمدی‌گیوی<sup>۳</sup>

<sup>۱</sup> دانشجوی دکتری هواشناسی، مؤسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران، ایران

<sup>۲</sup> دانشیار گروه فیزیک فضای، مؤسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران، ایران

<sup>۳</sup> استادیار گروه فیزیک فضای، مؤسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران، ایران

(تاریخ دریافت: ۱۳۸۹/۴/۸، تاریخ پذیرش: ۷/۱۰/۱۳۸۹، دسترسی برخط: ۱۳۸۹/۱۲/۲۵)

### چکیده

در این مقاله، شبیه‌سازی ایده‌آلی از تولید امواج گرانی- لختی در شارش تاواری در یک مدل عددی شامل معادلات بسیط روی کره با دو لایه همدما پتانسیلی و کاربست الگوریتم عددی فرابرد پریندی نیمه‌لاگرانژی برای حل معادلات، صورت می‌گیرد. شرایط اولیه مدل برای چهار آزمایش شامل یک جت متوازن با دمای پتانسیلی یکسان در لایه زیرین و دمای پتانسیلی متفاوت در لایه بالایی است. نتایج بیانگر آن است که بیشینه میانگین آهنگ رشد ناپایداری در آزمایش اول رخ می‌دهد و با افزایش پایداری ایستابی، میانگین آهنگ رشد کاهش می‌یابد. همچنین در آزمایش اول، تولید دو بسته موج گرانی- لختی یکی در پایین دست ناوه و دومی در بالادست آن مشاهده می‌شود؛ درحالی که در آزمایش دوم، فقط تولید بسته‌موج بالادست ناوه وجود دارد و در آزمایش‌های سوم و چهارم، دیگر نشانی از تولید دو بسته‌موج فوق نیست. قله انرژی در دسترس نامتوازن نیز بیشینه مقدار را در آزمایش اول دارد و با افزایش پایداری ایستابی، از مقدار آن کاسته می‌شود.

واژه‌های کلیدی: امواج گرانی- لختی، شارش تاواری، آهنگ رشد، پایداری ایستابی

## Sensitivity of the inertia–gravity waves generation to the degree of baroclinicity

Mohammad Mirzaei<sup>1</sup>, Alireza Mohebalhojeh<sup>1\*</sup>, and Farhang Ahmadi Givi<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Institute of Geophysics, University of Tehran, Iran

(Received: 29 June 2010, accepted: 28 December 2010, available online: 16 March 2011)

### Summary

The generation of inertia–gravity waves (IGWs) in the idealized simulation of vortical flows is investigated using the isentropic two-layer, primitive-equation model on the sphere. The contour-advection semi-Lagrangian (CASL) algorithm is used to solve the primitive equations in potential vorticity, velocity divergence, and acceleration divergence representation. The CASL algorithm consists of both Lagrangian and Eulerian parts. The Lagrangian part addresses the potential vorticity equation, which is solved by contour advection. The Eulerian part addresses the remainder of the model including the prognostic and diagnostic equations for the grid-based variables of velocity divergence,

\*Corresponding author:

amoheb@ut.ac.ir

\*نگارنده رابطه:

acceleration divergence and the depth. The Eulerian part is solved by the spectral transform in longitude, the forth-order compact differencing in latitude, and a three-time-level semi-implicit scheme in time. The power of CASL rests in its ability to represent the fine-scale structures in potential vorticity. Therefore, using CASL, it is possible to determine more precisely the generation and propagation of the IGWs generated by vortical flows.

The initial state of the numerical experiments is comprised of a balanced, zonal jet with a very small perturbation added to trigger instability. With regard to the balanced initial conditions used, the IGWs are generated mainly through spontaneous-adjustment emission. To determine the sensitivity of the IGWs generated to the degree of baroclinicity, four experiments were carried out in which the upper-layer potential temperature was set to 310, 315, 320, and 325K from the first to the fourth experiment, respectively. The lower-layer potential temperature was set to 280K in all of the experiments. As a result of increasing the upper-layer potential temperature, the static stability increased and thus the baroclinicity decreased from the first to the fourth experiment. To identify the IGWs accurately, the Bolin–Charney potential vorticity inversion was used to decompose the flow into a balanced part representing vortical flow and an unbalanced part representing free IGWs.

The analysis of the average growth rate of the baroclinic waves shows that the first experiment has the maximum average growth rate among the four experiments. Increase in static stability from the first to the fourth experiment led to a decrease in the average growth rate, but the time of occurrence of the peak in growth rate increased.

The investigation of the unbalanced velocity divergence shows the generation of two wave packets of IGWs during the evolution of the vortical flow in the first experiment; one wave packet on the downstream side of the trough, similar to the mesoscale waves described by Zhang (2004), and the other wave packet on the upstream side of the trough, similar to the wave packet described by Plougonven and Snyder (2007) in idealized simulations of baroclinic life cycle dominated by cyclonic behavior. The intrinsic frequency of both wave packets is close to that found by Wang and Zhang (2007) for the low static-stability experiment. The upstream wave packet appears in the second experiment, but failed to reach noticeable amplitude in the third and fourth experiments. The effect of increasing static stability is even more dramatic on the downstream wave packet, which is identifiable only in the first experiment.

Unbalanced linearized available energy (LAE) is used to quantify the strength of the IGWs. The results show that, consistent with the formation of two wave packets, only the first experiment that reached the maximum value of the unbalanced LAE. Due to increased static stability, there is a considerable reduction in peak value of unbalanced LAE. For example, the ratio of the peak of unbalanced LAE in the first experiment is 86 times as great as that of the fourth experiment. Another way to observe the substantial differences in the strength of the IGWs is to measure the maximum norm of the unbalanced velocity divergence. Before and after reaching the peak of the unbalanced LAE, the maximum norms of the unbalanced velocity divergence in the first experiment were between 15 and 21 times as great as the corresponding values in the fourth experiment.

**Key words:** Inertia–gravity waves, vortical flow, growth rate, static stability

معرفی کردند. بررسی های عددی بسیاری برای شبیه سازی امواج گرانی- لختی صورت گرفته است که برای نمونه می توان به تحقیق اسالیون و دانکرتون (۱۹۹۵) اشاره کرد. آنها با شبیه سازی امواج کژفشار روی کره، تولید امواج گرانی- لختی با بسامد نزدیک به بسامد لختی  $f$  و طول موج افقی ۱۰۰ تا ۶۰۰ کیلومتر در منطقه خروجی جت واقع در پوش سپهر و پایین دست پشته سطوح زبرین را نشان دادند. ژنگ (۲۰۰۴) با استفاده از مدل MM5 امواج کژفشار در یک کanal روی صفحه  $f$  را شبیه سازی کرد. او موفق شد در این تحقیق، امواج گرانی- لختی با بسامد ذاتی حدود ۳ تا ۴ برابر  $f$  و طول موج افقی ۱۰۰ تا ۲۰۰ کیلومتر را در پوش سپهر و بالای منطقه خروجی جت و نزدیک محور پشته شناسایی کند. وی از گسیل تنظیم خود به خودی در حکم مفهومی برای علت تولید امواج گرانی- لختی استفاده کرد. محب الحجه و دریچل (۲۰۰۰) حرکت های متوازن و امواج گرانی- لختی در طول تحول شارش های تواری در یک مدل عددی را با استفاده از معادلات آب کم عمق مورد بررسی قرار دادند. آنها به منظور حفظ توازن غیر خطی در معادلات آب کم عمق در حضور شیوه های قوی تاوایی پتانسیلی، سلسله های (hierarchy) جدیدی از الگوریتم فرا برد پر بنده نیمه لاگرانژی، معروف به CASL (advective semi-Lagrangian) را معرفی کردند و با بررسی چگونگی تولید امواج گرانی- لختی برای نظام های گوناگون شارشی، روشن ساختند که برای هر تفکیک و عدد فرود (Froude number) موردنظر، یک الگوریتم CASL بینه وجود دارد. نتایج بررسی عددی ویوز و دریچل (۲۰۰۶) روی یک شارش ناپایدار با در نظر گرفتن معادلات غیر هیدرولستاتیک بوسینسک در صفحه  $f$  و استفاده از الگوریتم CASL، حاکی از آن است که سرعت افقی امواج گرانی- لختی گسیل شده، سه مرتبه بزرگی از بخش متوازن کوچک تر است. از دیگر

## ۱ مقدمه

امواج گرانی- لختی ناشی از نوسانات آزمین گرد نقش بسیار مهمی در برخی از پدیده های جوی و تغییرات آنها دارند. اغلب این امواج دارای مقیاس افقی خیلی بزرگ تر از مقیاس قائم اند و با تقریب خوبی می توان از توازن هیدرولستاتیک برای توصیف آنها استفاده کرد. بسامد ذاتی این امواج بین بسامد شناوری  $N$  و بسامد لختی  $f$  قرار دارد. چشممه های شناخته شده این امواج شامل کوهستان، همرفت مرطوب، جبهه ها، جت های سطوح زبرین، تنظیم زمین گرد و تولید خود به خودی است.

جو و اقیانوس نمونه هایی از سامانه های دارای دو مقیاس زمانی متمایزند که دینامیک آنها متأثر از چرخش سریع و چینه بندی قوی می تواند به دو بخش، یکی آرام (متوازن) با مقیاس زمانی فرارفتی و دیگری سریع شامل امواج گرانی- لختی (نامتوازن) با مقیاس زمانی کوچک تر از دوره تناوب لختی جدا شوند. از آنجا که جو و اقیانوس عموماً در بسامدهای کم و اداشت می شوند، میزان فعالیت امواج گرانی- لختی اغلب کم است و در نتیجه دینامیک این سامانه ها را می توان به طور دقیق با مدل های متوازن که امواج گرانی- لختی را فیلتر می کنند، نشان داد. این مفهوم با معرفی ایده خمینه های آرام که زیرفضایی از فضای حالت هستند و انتشار امواج گرانی- لختی سریع روی آنها ضعیف است، بیان می شود (ونسته، ۲۰۰۸).

بررسی های تحلیلی روی شارش های با عدد راسی کوچک، دلالت بر تولید حتمی امواج گرانی- لختی از جریان های متوازن دارند، اگرچه بزرگی امواج ایجاد شده به صورت نمایی برحسب عدد راسی کوچک است (ونسته، ۲۰۰۴؛ ونسته و یاونه، ۲۰۰۴؛ پلو گونون و همکاران، ۲۰۰۵).

نظریه تولید خود به خودی امواج گرانی- لختی را نخستین بار فورد و همکاران (۲۰۰۰) از دیدگاه دینامیک جو و اقیانوس بر مبنای نظریه لایت هیل (Lighthill)

تحقیق، از کمیت باقیمانده معادله توازن غیرخطی برای تعیین مناطق مستعد شکست توازن استفاده شد. ونگ و ژنگ (۲۰۰۷) روش ساختند که آهنگ رشد شارش نامتوازن به خوبی با آهنگ رشد امواج کثفشار و در نتیجه با بسامد امواج گرانی-لختی همبستگی دارد.

در ادامه بررسی ونگ و ژنگ (۲۰۰۷) درباره میزان حساسیت تولید و انتشار امواج گرانی-لختی به کثفشاری شرایط اولیه با استفاده از مدل پیچیده MM5، در این پژوهش سعی شده است که با طراحی چهار آزمایش مجزا با شرایط اولیه متفاوت از نظر کثفشاری، انتشار امواج گرانی-لختی در طی تحول غیرخطی شارش‌های تواواری، با استفاده از یک مدل عددی ساده دولایه‌ای برای معادلات بسیط روی کرده مورد بررسی قرار گیرد. عامل مهم و مؤثر دیگر در نمایش بهتر و دقیق‌تر امواج گرانی-لختی، الگوریتم عددی به کار رفته است. در اغلب تحقیقات قبلی، از الگوریتم‌های اویلری استفاده گرفته شده است، حال آنکه در این تحقیق برای دستیابی به دقت زیاد و نشان دادن ساختار ریز شارش، از الگوریتم عددی فراورده پرینتی نیمه‌لاگرانژی استفاده شده است. جداسازی میدان‌های نامتوازن (امواج) از میدان‌های متوازن (تاوه) در شناخت پدیده گسیل خودبه‌خودی از اهمیت بسیار زیادی برخوردار است، حال آنکه در تحقیقات پیشین مورد توجه قرار نگرفته است. در این پژوهش با تجزیه شارش به دو بخش متوازن و نامتوازن، چگونگی تولید و انتشار امواج گرانی-لختی برای چهار آزمایش بررسی شده است.

## ۲ مدل عددی

در این تحقیق، یک مدل عددی برای حل معادلات بسیط کروی با دو لایه همدماهی پتانسیلی به کار رفته است. این مدل تعمیم الگوریتم CASL برای معادلات آب کم‌عمق روی کره (محب‌الحججه و دریچل، ۲۰۰۷) به مدل‌های با چینه‌بندی ناپیوسته در راستای قائم (محب‌الحججه و دریچل،

تحقیقات شیوه‌سازی ایدئالی می‌توان به تحقیق پلوگونون و استایدر (۲۰۰۷) اشاره کرد که با استفاده از مدل WRF (Weather Research and Forecasting)، دو نوع چرخه زندگی امواج کثفشار با رفتار چرخندی و واچرخندی در یک کanal f را مورد بررسی قرار دادند. نتایج این شیوه‌سازی در حالت چرخندی بیانگر وجود دو بسته امواج گرانی-لختی، یکی در سطوح بالا ولی در زیر هسته جت و دیگری در پوش‌سپهر زیرین بود. در حالت واچرخندی نیز دو بسته امواج، یکی با بسامد زیاد در جلوی جبهه سرد واقع در وردسپهر و دیگری روی ناوه و در منطقه وردسپهر شناسایی شد که ویژگی‌های آنها با امواج مربوط به حالت چرخندی متفاوت بود.

ونگ و ژنگ (۲۰۰۷) در یک شیوه‌سازی ایدئالی از امواج کثفشار با استفاده از مدل MM5، حساسیت امواج گرانی-لختی به کثفشاری سامانه‌های جبهه-جت را بررسی کردند. آنها با تغییر شیب وردایست و تاوایی پتانسیلی اولیه، چهار آزمایش مجزا با شرایط اولیه متفاوت از نظر پایداری ایستایی و چینش باد طراحی کردند. نتایج این تحقیق بیانگر گسیل قائم امواج گرانی-لختی در منطقه خروجی جت وردسپهر زیرین در همه آزمایش‌ها بود و آهنگ رشد امواج کثفشار به طور معنی‌داری در این چهار آزمایش متفاوت با هم به دست آمد. با کاربست تحلیل طیفی دو بعدی، مؤلفه‌هایی از امواج گرانی-لختی شامل امواج مقیاس کوتاه با طول موج‌های ۸۵-۱۶۱ km بسامد ذاتی ۱۱-۳ برابر f و امواج مقیاس متوسط با طول موج‌های ۳۵۰-۲۵۰ km و بسامد ذاتی کمتر از ۳ برابر f شناسایی شد. از دیگر نتایج آنکه بسامد ذاتی امواج گرانی-لختی با افزایش آهنگ رشد امواج کثفشار، افزایش می‌یابد. همچنین امواج گرانی-لختی با بسامد یکسان در آزمایش‌هایی که دارای میانگین آهنگ رشد امواج کثفشار مشابه‌اند، اما هندسه وردایست و پایداری ایستایی اولیه‌شان تغییر می‌کند، متفاوت است. در این

که کاربرد بنیادین در ساخت الگوریتم عددی مورد استفاده دارد. همان‌طور که در کارهای محب‌الحججه و دریچل (۲۰۰۰ و ۲۰۰۴) نشان داده شده است، شیوه‌ای شدید تاوایی پتانسیلی، سهم مهمی در شکست توازن و تولید امواج گرانی-لختی به هر دو صورت فیزیکی و عددی دارند. برای تعیین آن بخش از شارش که می‌تواند موج گرانی-لختی تلقی شود، شارش به دو بخش متوازن و نامتوازن تجزیه می‌شود که بخش نامتوازن با تاوایی پتانسیلی کنترل می‌شود و بخش نامتوازن نشانگر تولید امواج است. در این مقاله از روابط توازن بولین-چارنی (Bolin-Charney) برای تجزیه شارش به بخش‌های متوازن و نامتوازن موسوم به تجزیه موج-تاوه استفاده می‌شود. لازم به ذکر است که اعتبار نتایج با کاربست روابط توازن  $\delta\delta$  مرتبه سوم که با قطع معادلات از راه حذف جملات مربوط به مشتق‌های دوم و سوم واگرایی حاصل می‌شود، مورد آزمون قرار گرفته است. با توجه به آنکه این آزمون اعتبار نتایج را تا حد خوبی تایید می‌کند، بنابراین می‌توان به نتایج عرضه شده نبود توازن بر مبنای روابط بولین-چارنی اطمینان داشت.

در این پژوهش، برای هر چهار آزمایش شبکه‌ای با تعداد نقاط ۲۵۶ ۲۵۶ روی کره، یعنی ۲۵۶ نقطه روی مدار و ۲۵۶ نقطه از قطب جنوب تا قطب شمال با اعمال یک جابه‌جایی به اندازه نصف فاصله شبکه‌ای برای احتراز از مسئله قطب، در نظر گرفته و از الگوریتم فرابرد پریندی نیمه‌لاگرانژی (CASL) برای حل معادلات بسیط استفاده می‌شود که این شامل دو بخش لاگرانژی و اویلری است. بخش لاگرانژی شامل تاوایی پتانسیلی در نمایش پریندی است و الگوریتم فرابرد پریندی لاگرانژی برای آن به کار می‌رود. بخش اویلری شامل دیگر متغیرهای پیش‌یابی و فرایابی از قبیل میدان سرعت، واگرایی سرعت، واگرایی شبتاب و عمق در نمایش شبکه است. در بخش اویلری،

(۲۰۰۴) است. جزئیات مربوط به معادلات پیش‌یابی، معادلات فرایابی و نیز روش تصویر معادلات به فضای مد قائم در کارهای محب‌الحججه و دریچل (۲۰۰۷ و ۲۰۰۴) عرضه شده است. بنابراین در اینجا به آوردن فرمول‌بندی پایه در نمایش تکانه-جرم اکتفا می‌شود. معادلات جرم و تکانه به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} + \tilde{\mathbf{f}} \times \mathbf{V} = -\nabla \tilde{p}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} + \nabla \cdot [(1+\tilde{h})\mathbf{V}] = 0, \quad (2)$$

که  $\frac{D}{Dt}$  مشتق تام،  $\mathbf{V}$  بردار سرعت،  $f = 2\Omega_E \sin \phi$  پارامتر کوریولیس (آهنگ چرخش زمین و  $\phi$  عرض جغرافیایی)،  $\tilde{\mathbf{Z}}$  بردار یکه در راستای قائم،  $\tilde{q}$  پریشیدگی فشار و  $\tilde{h}$  پریشیدگی بی‌بعد ضخامت هر لایه است که با رابطه  $\tilde{h} = (h - H) / H$  در مبنای پریشیدگی ضخامت  $h$  و ضخامت میانگین  $H$  در هر لایه تعریف می‌شود. برای نمایش دقیق‌تر هر دو بخش متوازن و نامتوازن شارش، به جای نمایش تکانه-جرم، از نمایش تاوایی پتانسیلی راسبی-ارتل و اگرایی سرعت  $\delta$  و واگرایی شبتاب اینجا پارامتر کوریولیس، که مؤلفه قائم تاوایی نسبی و  $\gamma$  مولفه مداری سرعت است. با فرض ناگرانزو و بی‌دورو بودن که موردنظر مقاله فعلی است، تاوایی پتانسیلی راسبی-ارتل دارای پایستاری مادی است:

$$\frac{DQ}{Dt} = 0, \quad (3)$$

این شکل، بیشینه شیو تاوایی پتانسیلی واقع در محدوده عرض جغرافیایی  $40^{\circ}$ - $50^{\circ}$  درجه شمالی، منطبق بر هسته مرکزی جت است. تغییرات ارتفاع فصل مشترک دو لایه و ارتفاع سطح آزاد بر حسب عرض جغرافیایی مربوط به چهار آزمایش در شکل ۳ آورده شده است. شب ارتفاع فصل مشترک دو لایه در شکل ۳-الف که مربوط به آزمایش اول است، دارای بیشترین مقدار است و با افزایش اختلاف دمای دو لایه و در نتیجه افزایش پایداری ایستایی در آزمایش‌های دیگر، شب ارتفاع فصل مشترک کاهش می‌یابد. برای ایجاد ناپایداری، از یک پریشیدگی بسیار کوچک و تا حد امکان بدون حساسیت به شرایط اولیه استفاده شده است. مدل عددی برای  $30^{\circ}$  روز اجرا شده و خروجی آن در هر  $2/4$  ساعت ذخیره شده است.

### ۲-۳ تحلیل نتایج

بیش از عرضه و تحلیل نتایج، توجه به این نکته لازم است که هرچند پایداری ایستایی از آزمایش اول به آزمایش چهارم افزایش می‌یابد، اما در همه موارد و در طی همه آزمایش‌ها، چینه‌بندی پایدار باقی می‌ماند. بنابراین، صرف نظر از سهم ناچیز شرایط اولیه، نبود توازن، فقط می‌تواند با فرایند گسیل تنظیم خودبه‌خودی به وجود آید. برای بررسی کمی و کیفی چگونگی تحول و رشد تاوه در چهار آزمایش و مقایسه آنها با یکدیگر، می‌توان از متوسط پریشیدگی انرژی جنبشی روی کره استفاده کرد. پریشیدگی انرژی جنبشی موج کژفشار به صورت انتگرال انرژی جنبشی پریشیدگی روی کره، یعنی

$$K' = \frac{1}{2} \int \int d\lambda d\phi \left[ (u')^2 + (v')^2 \right] (1 + \tilde{h}) \cos \phi$$

، تعریف می‌شود که در اینجا  $u'$  و  $v'$  به ترتیب پریشیدگی‌های سرعت مداری و سرعت نصف‌النهاری نسبت به میانگین مداری هستند. برای مقایسه رشد ناپایداری در چهار آزمایش، از رابطه آهنگ رشد امواج

انتگرال گیری مکانی با استفاده از طرحواره تفاضل متناهی مرتبه چهارم فشرده در راستای نصف‌النهاری و تبدیل طیفی در راستای مداری و انتگرال گیری زمانی با استفاده از طرحواره نیمه‌ضمنی سه زمانه صورت می‌گیرد. همچنین به‌منظور حذف مد محاسباتی طرحواره سه‌ترازی، پالایه روبرت-اسلین (Robert-Asselin) به کار می‌رود. این الگوریتم توان دستیابی به تفکیک موثر بسیار بیشتری نسبت به الگوریتم‌های استاندارد، همانند الگوریتم طیفی‌وار دارد و با توجه به نوع الگوریتم مورد استفاده برای تاوایی پتانسیلی و متغیرهای پیش‌بایی، در بررسی تولید امواج گرانی - لختی از شارش‌های تاوایی، دقت بیشتری به ما می‌دهد.

### ۳ آزمایش‌های عددی

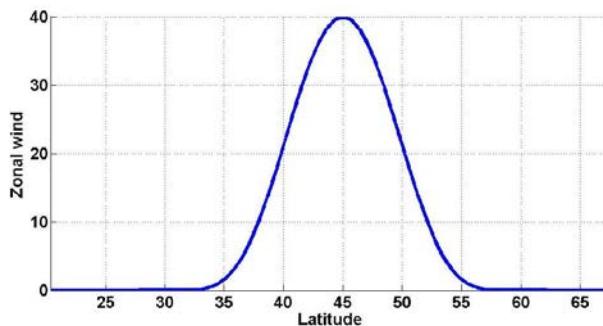
#### ۱-۳ شرایط اجرای مدل

در این پژوهش، چهار آزمایش با شرایط اولیه متفاوت صورت می‌گیرد که همه آنها شامل یک جت متوازن با سرعت شرق‌سوی  $40 \text{ ms}^{-1}$  در لایه بالایی مدل و حالت سکون در لایه پایینی هستند (شکل ۱). بیشینه سرعت مداری در عرض  $N 45^{\circ}$  قرار دارد که به طور نمایی حول این عرض جغرافیایی کاهش می‌یابد. دمای لایه پایینی در چهار آزمایش  $K 280$  است. به منظور تغییر پایداری ایستایی و در نتیجه تغییر کژفشاری، دمای لایه بالایی در آزمایش‌های اول تا چهارم به ترتیب برابر با  $K 310$ ،  $315$ ،  $320$  و  $325$  فرض می‌شود. تغییرات نصف‌النهاری تاوایی پتانسیلی دو لایه در شرایط اولیه برای چهار آزمایش در شکل ۲ نشان داده شده است. با توجه به شکل، بیشینه مقدار تاوایی پتانسیلی و همچنین شیو تاوایی پتانسیلی بین دو لایه در شکل ۲-الف دیده می‌شود که با افزایش اختلاف دمای دو لایه (شکل‌های ۲-ب تا ۲-د)، بیشینه مقدار تاوایی پتانسیلی و شیو نصف‌النهاری تاوایی پتانسیلی بین دو لایه کاهش می‌یابد. همچنین در

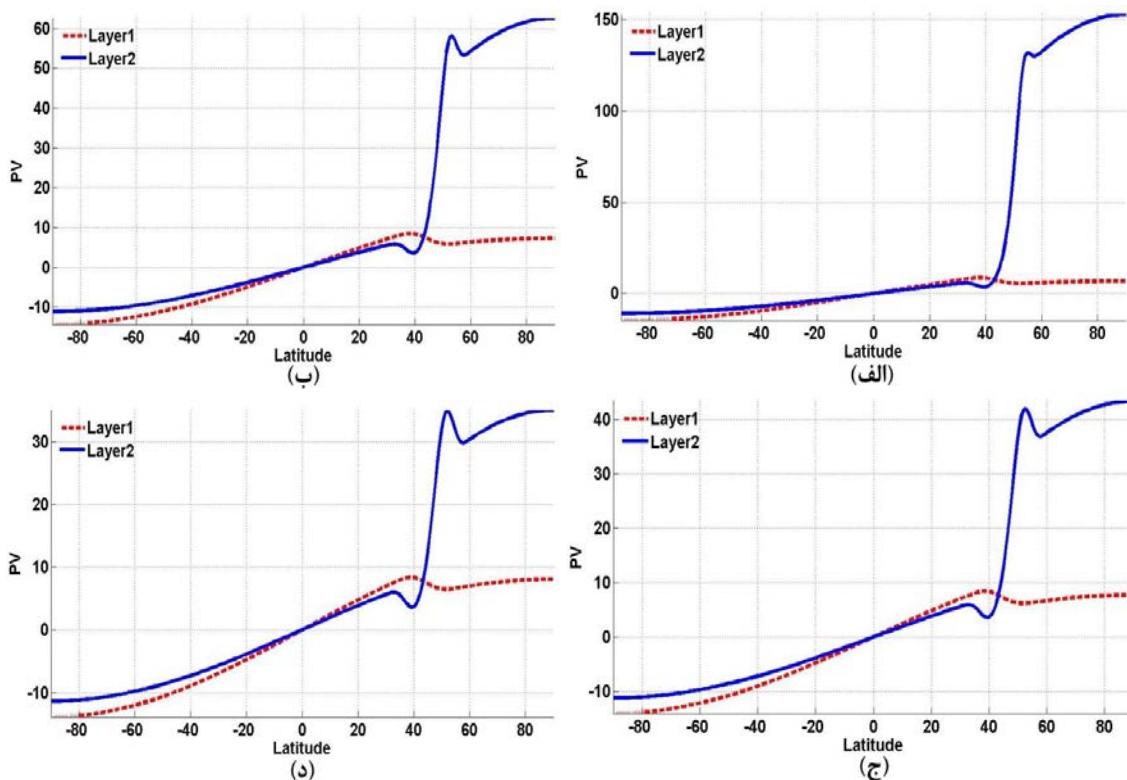
که  $K'_0$  و  $K'_t$  به ترتیب پریشیدگی انرژی جنبشی در زمان  $t$  است. با فرض برابری  $t$  با زمانی که مقدار پریشیدگی انرژی جنبشی بیشینه می‌شود (شکل ۴)، میانگین آهنگ رشد به دست می‌آید (جدول ۱). با مقایسه نمودار تحول زمانی پریشیدگی

کژفشار که با تعریف بجر و هاسکیتز (۲۰۰۱) به صورت زیر معرفی شده است، استفاده می‌کنیم:

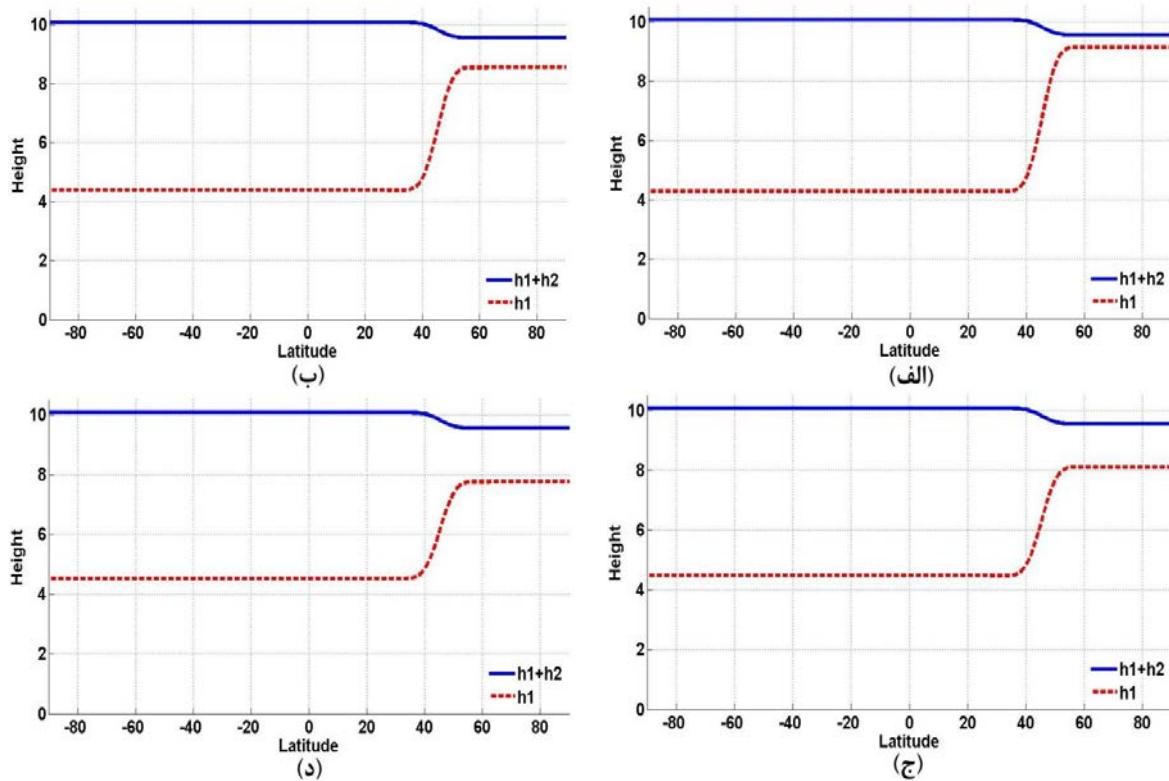
$$\sigma = \frac{\log\left(\frac{K'_t}{K'_0}\right)}{t}, \quad (4)$$



شکل ۱. تغییرات سرعت مداری (با یکای  $\text{ms}^{-1}$ ) لایه دوم نسبت به عرض جغرافیایی برای ساخت جت مورد استفاده در شرایط اولیه.



شکل ۲. تغییرات تاوانی پتانسیلی (بر حسب  $\text{m}^{-3} \text{s}^{-1} (\text{H})^{-1}$ ) نسبت به عرض جغرافیایی در دو لایه برای شرایط اولیه برای چهار آزمایش صورت گرفته. خطوط خطچین و توپر به ترتیب مربوط به لایه‌های اول و دوم هستند. لازم به یادآوری است که فواصل تقسیم‌بندی محورهای قائم متفاوت‌اند. برای جزئیات آزمایش‌ها به متن مقاله مراجعه شود.



شکل ۳ . تغییرات ارتفاع فصل مشترک (خطچین) و ارتفاع سطح آزاد (خطتپیر) برحسب km نسبت به عرض جغرافیایی در شرایط اولیه.  $h_1$  و  $h_2$  به ترتیب سخاوت لایه‌های زیرین و بالایی هستند.

می‌توان گفت که در آزمایش‌های این مقاله، ناپایداری شدیدتر از آزمایش‌های ونگ و ژنگ (۲۰۰۷) است. بررسی کمی بخش نامتوازن شارش در تعیین چگونگی تولید و انتشار امواج گرانی-لختی در طی تحول شارش تواوی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. بدین‌منظور، با استفاده از روابط توازن بولین - چارنی، شارش را به دو بخش متوازن و نامتوازن تجزیه می‌کنیم و بخش نامتوازن کمیت‌های واگرایی سرعت و واگرایی شتاب برای مددکث فشار را برای نشان دادن چگونگی تحول امواج گرانی-لختی به کار می‌بریم.

بررسی الگوی بخش نامتوازن واگرایی سرعت در طی تحول شارش تواوی برای آزمایش اول، نشانگر تولید و انتشار دو بسته موج، یکی در پایین دست ناوه در زمان

انرژی جنبشی چهار آزمایش در شکل ۴ و مقادیر میانگین آهنگ رشد در جدول ۱، مشاهده می‌شود که بیشترین میانگین آهنگ رشد مربوط به آزمایش اول است که بیشترین کثفشاری را دارد. به علاوه، با افزایش پایداری ایستایی و کاهش کثفشاری، میانگین آهنگ رشد به طور محسوسی کاهش می‌یابد. نسبت میانگین آهنگ رشد آزمایش اول به مقدار متناظر برای آزمایش چهارم حدود ۱/۲۷ است. در تحقیق ونگ و ژنگ (۲۰۰۷) که با استفاده از مدل MM5 صورت گرفت، بیشترین مقدار میانگین ۵ برابر با  $0.0264 \text{ h}^{-1}$  به دست آمد که مربوط به آزمایش با پایداری ایستایی کم در وردسپهر بود. این مقدار در مقایسه با مقدار آهنگ رشد میانگین برای چهار آزمایش صورت گرفته در این پژوهش، کوچک‌تر است. بنابراین

زمان و مکان برای نقطه‌ای منطبق بر بسته موج، بسامد مطلق و طول موج آن در راستاهای مداری و نصف‌النهاری تعیین می‌شود. براین اساس، طول موج بسته موج اول در دو راستای مداری و نصف‌النهاری به ترتیب حدود ۹۹۲ km و ۲۳۹ km برآورده است. با استفاده از رابطه پاشندگی محلی امواج گرانی-لختی برای مد کژفشار، یعنی رابطه (۵) به ازای  $C_2$  و پارامتر محلی کوریولیس  $f$ ، بسامد ذاتی این بسته موج برابر  $11/66$  به دست می‌آید. به همین روش برای بسته موج دوم، طول موج در دو راستای مداری و نصف‌النهاری به ترتیب حدود ۲۳۸ km و ۷۴۶ km و بسامد ذاتی برابر  $14/92$  تعیین می‌شود. مقایسه مشخصه‌های این دو بسته موج با نتایج بررسی‌های عددی مشابه قبلی، بیانگر نزدیک بودن بسامد این دو بسته موج به بسامد  $f$  است که ونگ و ژنگ (۲۰۰۷) برای بسته موج کوتاه در آزمایش با پایداری ایستایی کم وردسپهری به دست آورده‌اند.

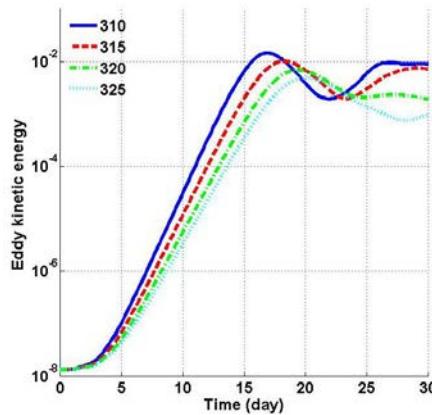
۱۷/۲ روز (شکل ۵-الف) و دیگری در بالادست ناوه در زمان ۱۸/۶ روز (شکل ۵-ب) است. موقعیت شکل گیری و انتشار بسته موج اول تقریباً مشابه بسته موجی است که ژنگ (۲۰۰۴) در وردسپهر زیرین و در پایین دست ناوه شناسایی کرد؛ بسته موج دوم نیز از نظر مکانی مشابه بسته موجی است که پلوگونون و اسنایدر (۲۰۰۷) در شبیه‌سازی موج کژفشار با شکست چرخندی در بالادست ناوه شناسایی کردند، اما از نظر چگونگی انتشار و مشخصه‌های موجی با آن متفاوت است. برای تعیین مشخصه‌های این بسته موج‌ها از رابطه پاشندگی محلی برای امواج گرانی-لختی در فضای مدهای قائم بصورت زیر استفاده می‌شود:

$$\tilde{\omega}^2 = f^2 + C_m^{-2} (k^2 + l^2), \quad (5)$$

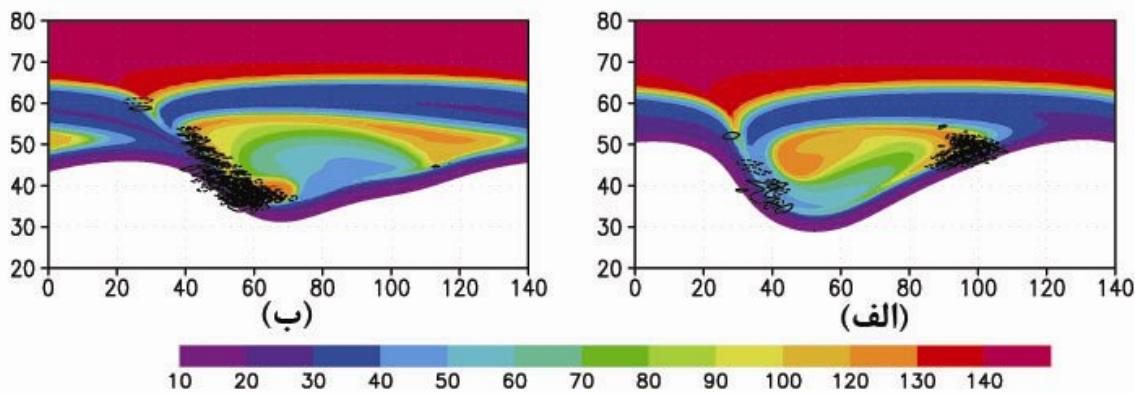
که  $\tilde{\omega}$  بسامد ذاتی،  $C_m$  تندی فاز مد ( $C_1$  برای مد فشارورده و  $C_2$  برای مد کژفشار)،  $k$  و  $l$  به ترتیب اعداد موج در راستای‌های مداری و نصف‌النهاری است. با ترسیم نمودار تغییرات بخش نامتوازن واگرایی سرعت با

جدول ۱. میانگین آهنگ رشد موج کژفشار (۵) و بیشینه مقدار انرژی در دسترس خطی شده بخش نامتوازن برای چهار آزمایش.

آزمایش چهارم	آزمایش سوم	آزمایش دوم	آزمایش اول	$\sigma$ ( $day^{-1}$ )
۰/۶۹۱۲	۰/۷۳۲۳	۰/۷۹۵۷	۰/۸۷۵۹	
$۰/۸۲۵ \cdot 10^{-5}$	$۱/۳۰۵ \cdot 10^{-5}$	$۲/۳۹۶ \cdot 10^{-5}$	$۷/۱۴۲ \cdot 10^{-4}$	بیشینه انرژی در دسترس (بی بعد)



شکل ۴. تحول زمانی پریشیدگی انرژی جنبشی (بی بعد) در چهار آزمایش.



شکل ۵ توزیع افقی تاوانی پتانسیلی در لایه دوم (به صورت سایه‌روشن برحسب  $m^{-1}s^{-1} \cdot 10^{-9}$ ) ۲) همراه با بخش نامتوازن واگرایی سرعت مد کثشار (با فاصله  $s^{-1} \cdot 10^{-9}$ ) ۵) برای آزمایش اول پس از (الف) ۱۸/۶ روز و (ب) ۱۸/۲ روز. محور افقی معرف طول جغرافیایی و محور قائم معرف عرض جغرافیایی و خطوط توپر و خطچین به ترتیب نشانگر مقادیر مثبت و منفی است.

$$\text{LAE} = \frac{1}{4} a^2 \sum_{l=1}^2 \iint \cos \phi d\lambda d\phi (u_l^2 + v_l^2 + \tilde{h}_l p_l), \quad (6)$$

لازم به یادآوری است که در تعریف LAE، روی دو لایه میان‌گیری شده است. نمودار تغییرات زمانی LAE نامتوازن در شکل ۷ ترسیم شده است. مطابق شکل، در هر چهار آزمایش در حدود روز چهارم شکست توازن شروع می‌شود و از آن پس، LAE نامتوازن تا رسیدن به مقدار بیشینه، افزایش می‌یابد. پس از بیشینه، LAE نامتوازن حول یک مقدار ثابت نوسان می‌کند که نشانگر تبدیل انرژی بین تاوه و موج است. زمان رسیدن به مقدار بیشینه از آزمایش اول به آزمایش چهارم به تدریج بزرگ‌تر می‌شود. مقایسه‌ای از بیشینه LAE نامتوازن برای چهار آزمایش در جدول ۱ آورده شده است. با توجه به این جدول، بیشینه نامتوازن آزمایش اول حدود ۳۰ برابر مقدار آن در آزمایش دوم است، درحالی که نسبت بیشینه LAE نامتوازن آزمایش دوم به آزمایش سوم حدود ۱/۸ و همین نسبت برای آزمایش سوم به آزمایش چهارم ۱/۶ به دست

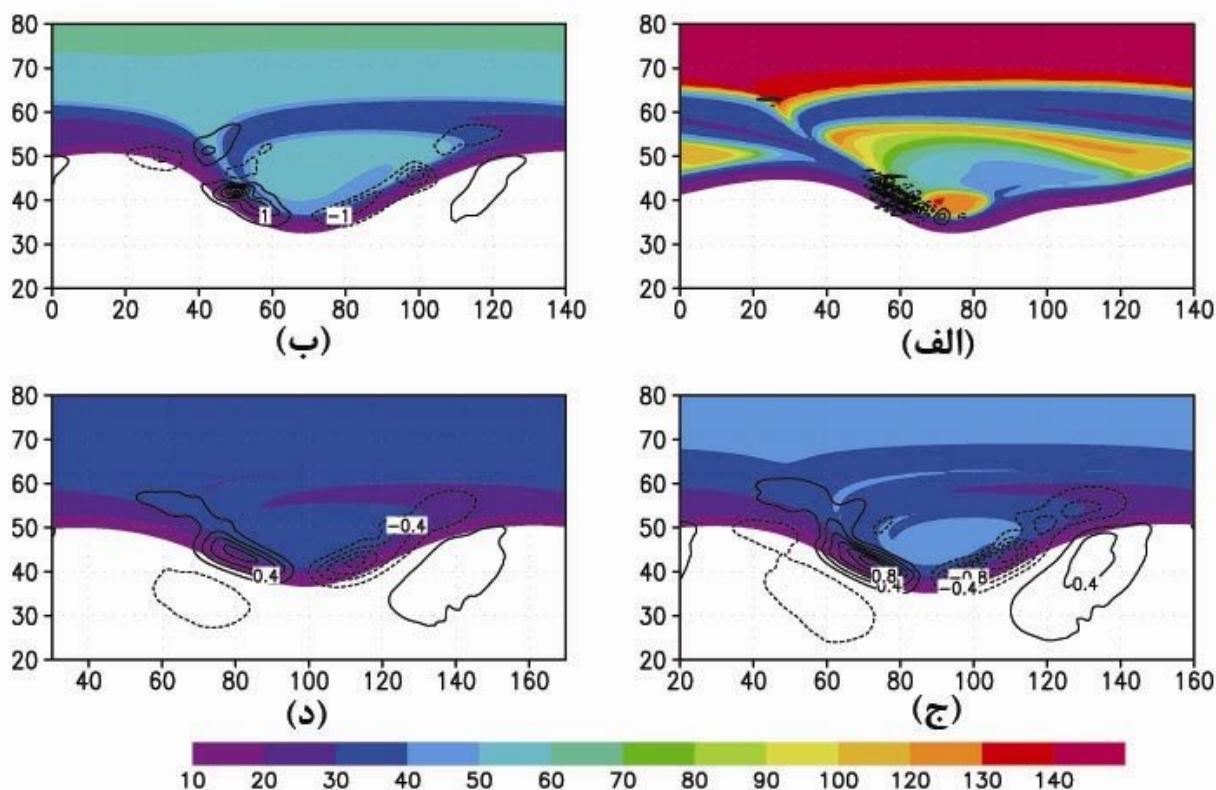
برای تعیین چگونگی تولید و انتشار امواج گرانی-لختی در دیگر آزمایش‌ها، الگوی بخش نامتوازن واگرایی سرعت در زمان‌هایی که بیشینه این کمیت در طی تحول شارش تواواری رخ می‌دهد، در شکل ۶ ترسیم شده است. با توجه به شکل ۶-الف که مربوط به آزمایش اول است، در انطباق با شکل ۵-ب، تولید و انتشار بسته موج دوم پس از ۱۸/۶ روز در بالادست ناوه دیده می‌شود. الگوی بخش نامتوازن واگرایی سرعت برای آزمایش دوم (شکل ۶-ب)، بیانگر تولید و انتشار تنها یک بسته موج در بالادست ناوه است که بررسی ویژگی‌های آن شامل طول موج و بسامد ذاتی، دلالت بر تشابه با بسته موج دوم در آزمایش اول دارد. همچنین الگوهای تحول زمانی بخش نامتوازن اول است که در این دو آزمایش، هیچ کدام از دو بسته موج با دامنه‌ای محسوس تولید نمی‌شوند (شکل‌های ۶-ج و ۶-د).

به منظور مقایسه چگونگی تحول بخش نامتوازن شارش (موج) و برهمکنش آن با بخش متوازن (تاوه) می‌توان از کمیت انرژی در دسترس خطی شده برای بخش نامتوازن به صورت زیر استفاده کرد:

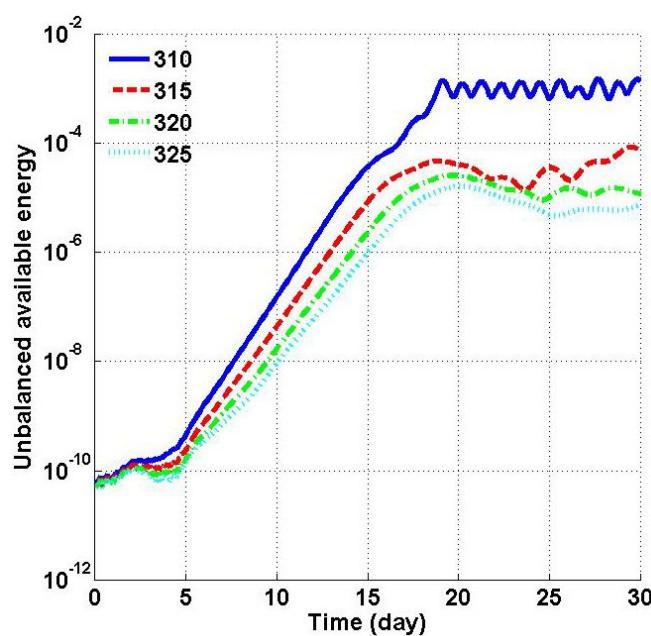
اساس، افزایش بزرگی بخش نامتوازن واگرایی سرعت از آزمایش اول به آزمایش چهارم در روزهای ۱۴ (شکل ۸) و ۲۵ (شکل ۹) و از روز ۱۴ به روز ۲۵ قابل مشاهده است. همچنین مقایسه بزرگی بیشینه بخش نامتوازن واگرایی سرعت برای این دو روز در جدول ۲، نشان می‌دهد که در روز ۱۴، بیشینه بخش نامتوازن واگرایی سرعت آزمایش اول حدود ۱۵ برابر آزمایش چهارم است، درحالی که این نسبت برای روز ۲۵ به حدود ۲۱ برابر افزایش می‌یابد. این نتیجه بیانگر افزایش اختلاف در بیشینه بخش نامتوازن واگرایی سرعت آزمایش‌ها بعد از رسیدن به بیشینه انرژی در دسترس است.

می‌آید. این مقایسه نشان می‌دهد که بیشینه فعالیت موج گرانی-لختی در آزمایش با کمترین پایداری ایستایی است و به طور کلی کاهش فعالیت موج گرانی-لختی با افزایش پایداری ایستایی وجود دارد.

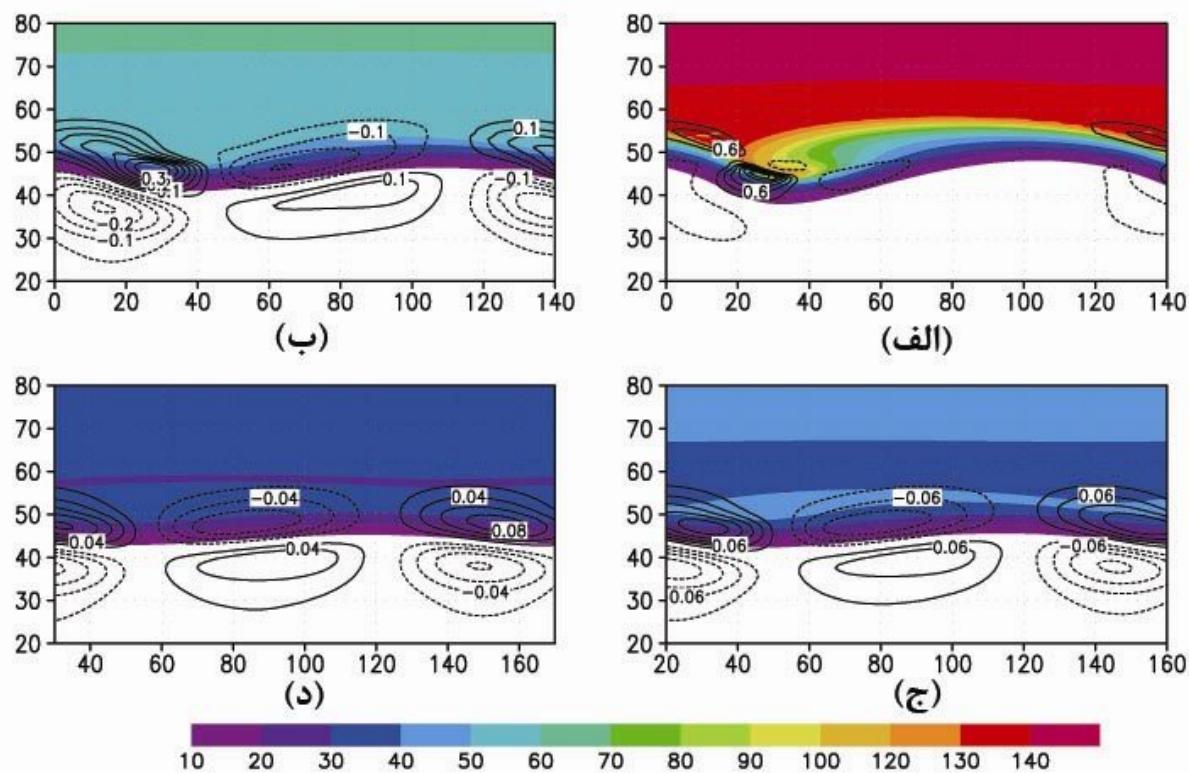
به منظور مقایسه بزرگی بخش نامتوازن شارش (موج) در این چهار آزمایش، الگوهای بخش نامتوازن واگرایی سرعت برای دو زمان، یکی قبل (روز ۱۴) و دیگری بعد (روز ۲۵) از وقوع بیشینه LAE نامتوازن در شکل‌های ۸ و ۹ ترسیم شده است. با بررسی این شکل‌ها و توجه به جدول ۲، به خوبی می‌توان مقایسه کمی بین الگوهای دو زمان فوق برای چهار آزمایش را عملی ساخت. بر این



شکل ۶. توزیع افقی تاوایی پتانسیلی در لایه دوم (به صورت سایه‌روشن بر حسب  $m^{-9}s^{-1}$ ) (۲) همراه با بخش نامتوازن واگرایی سرعت مد کژفشار برای (الف) آزمایش اول پس از ۱۹ روز (فاصله پرینتی  $10^{-6}s^{-1}$ )، (ب) آزمایش دوم پس از ۱۸/۶ روز (فاصله پرینتی  $10^{-6}s^{-1}$ ، ۰/۵)، (ج) آزمایش سوم پس از ۱۹/۵ روز (فاصله پرینتی  $10^{-6}s^{-1}$ ، ۰/۲) و (د) آزمایش چهارم پس از ۲۰ روز (فاصله پرینتی  $10^{-6}s^{-1}$ ، ۰/۲). محور افقی معرف طول جغرافیایی و محور قائم معرف عرض جغرافیایی و خطوط توپر و خطوط چین به ترتیب نشانگر مقادیر مثبت و منفی است.



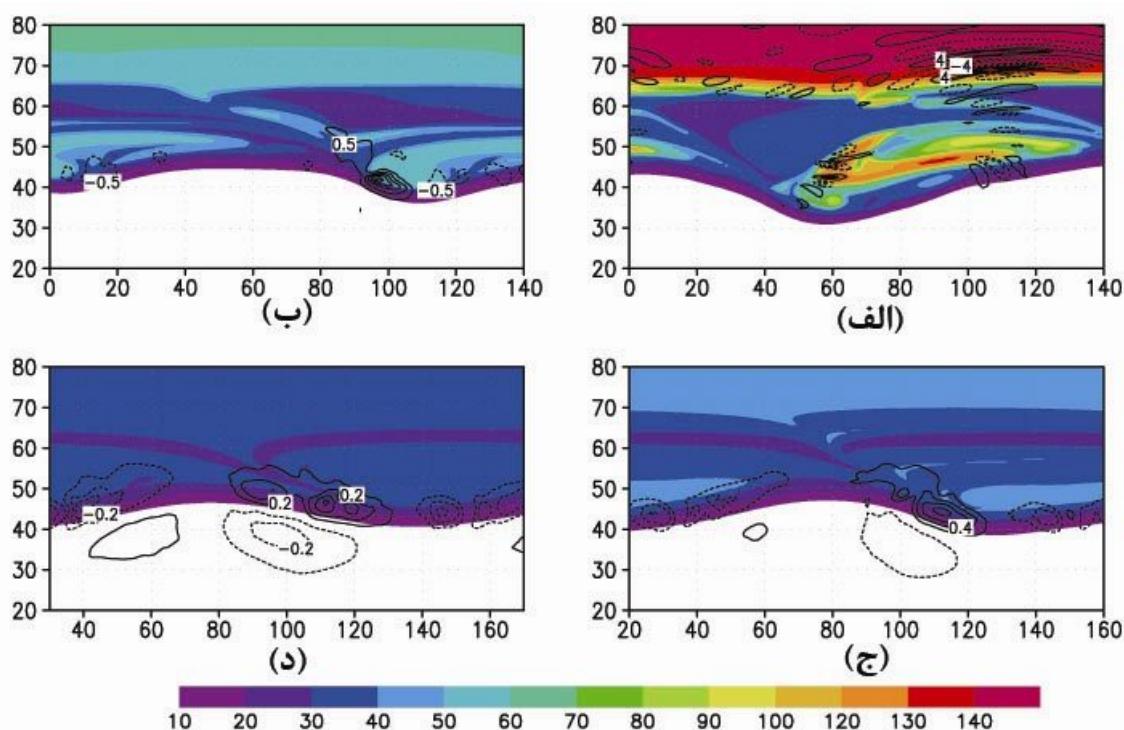
شکل ۷. تغییرات زمانی انرژی در دسترس خطی شده بخش نامتوازن (بی بعد) نسبت به زمان در چهار آزمایش.



شکل ۸ توزیع افقی تاوایی پتانسیلی در لایه دوم (بهصورت سایهروشن بر حسب  $10^{-4} \text{ m}^{-1} \text{s}^{-1}$ ) ۲) همراه با بخش نامتوازن واگرایی سرعت مد کثرشار پس از ۱۴ روز برای (الف) آزمایش اول (فاصله پریندی  $10^{-6} \text{ s}^{-1}$  /۳)، (ب) آزمایش دوم (فاصله پریندی  $10^{-6} \text{ s}^{-1}$  ۰/۰۵)، (ج) آزمایش سوم (فاصله پریندی  $10^{-6} \text{ s}^{-1}$  ۰/۰۳) و (د) آزمایش چهارم (فاصله پریندی  $10^{-6} \text{ s}^{-1}$  ۰/۰۲). خطوط توپر و خطچین به ترتیب نشانگر مقادیر مثبت و منفی واگرایی سرعت است.

جدول ۲. بیشینه مقدار بخش نامتوازن واگرایی سرعت (با یکای  $s^{-1}$ ) در روزهای ۱۴ و ۲۵ برای چهار آزمایش.

چهارم	سوم	دوم	اول	آزمایش روز
$0/101 \cdot 10^{-6}$	$0/168 \cdot 10^{-6}$	$0/394 \cdot 10^{-6}$	$2/110 \cdot 10^{-6}$	۱۴
$0/462 \cdot 10^{-6}$	$0/910 \cdot 10^{-6}$	$2/788 \cdot 10^{-6}$	$7/086 \cdot 10^{-6}$	۲۵

شکل ۹. مشابه شکل ۸ اما برای روز ۲۵. فاصله پریندها برای بخش نامتوازن واگرایی سرعت در (الف)  $10^{-6} s^{-1}$ ، (ب)  $10^{-6} s^{-1}$ ، (ج)  $10^{-6} s^{-1}$  و (د)  $10^{-6} s^{-1}$  است.

آزمایش‌ها، شرایط اولیه برای اجرای مدل شامل یک جت کثافتار متوازن با پریشیدگی بسیار کوچک روی آن است تا تولید امواج گرانی-لختی حاصل از نبود توازن در شرایط اولیه کمینه شود. استفاده از الگوریتم فرابرد پریندی نیمه‌لاگرانژی برای حل معادله تاوایی پتانسیلی این امکان را می‌دهد که بتوان ساختار ریزشارش را با دقیق‌تری نسبت به الگوریتم‌های اویلری رایج نمایش داد و در نتیجه

#### ۴ نتیجه‌گیری

در این پژوهش، به منظور بررسی میزان حساسیت تولید و انتشار امواج گرانی-لختی به درجه کثافتاری در یک مدل دولایه‌ای روی کره، یک شبیه‌سازی ایدئالی از تحول شارش تواری با اجرای چهار آزمایش که تنها با تغییر دمای لایه‌ی بالایی میزان پایداری ایستایی و کثافتاری تغییر داده می‌شود، صورت گرفته است. در همه

موجی است که ژنگ (۲۰۰۴) شناسایی کرده است. بسته موج دوم نیز در بالادست ناوه شکل می‌گیرد که از نظر مکانی مشابه بسته موجی است که پلوگونون و استایدر (۲۰۰۷) شیوه‌سازی کرده‌اند، اما از نظر سایر مشخصه‌های انتشار با آن متفاوت است. بسامد ذاتی هر دو بسته موج نزدیک به بسته موجی است که ونگ و ژنگ (۲۰۰۷) در آزمایش مربوط به شرایط اولیه با پایداری ایستایی کم در پرسپکتیو و برای امواج کوتاه به دست آوردن. با افزایش پایداری ایستایی در شرایط اولیه آزمایش دوم، تنها بسته موج دوم در بالادست ناوه با دامنه محسوس تولید و انتشار می‌یابد. با ادامه افزایش پایداری ایستایی در آزمایش‌های سوم و چهارم، هیچ‌یک از بسته موج‌های فوق تولید نمی‌شوند، هرچند میدان نامتوازن با دامنه‌ای محسوس و در مقیاسی بزرگ‌تر در پیرامون موج کژفشار باقی می‌ماند.

از انرژی در دسترس خطی شده بخش نامتوازن شارش، به اختصار انرژی نامتوازن، می‌توان در حکم کمیتی برای بررسی و مقایسه فعالیت موج گرانی-لختی و چگونگی برهمنکش موج و تاوه در این چهار آزمایش استفاده کرد. نتایج بررسی نمودارهای این کمیت حاکی از آن است که بعد از شروع شکست توازن، انرژی نامتوازن تا رسیدن به یک مقدار بیشینه افزایش می‌یابد و پس از آن حول یک مقدار ثابت، انرژی بین بخش نامتوازن و متوازن مبادله می‌شود. مقایسه مقادیر بیشینه انرژی نامتوازن در چهار آزمایش (جدول ۱) نشان می‌دهد که بیشترین مقدار مربوط به آزمایش اول با کمترین پایداری ایستایی است که این نتیجه توافق خوبی با شکل‌گیری قوی دو بسته موج در این آزمایش دارد. از آزمایش اول به آزمایش چهارم، بیشینه انرژی نامتوازن با افزایش پایداری ایستایی کاهش می‌یابد و به عبارتی به میزان قابل توجهی از فعالیت موج گرانی-لختی کاسته می‌شود. تفاوت بین بیشینه انرژی نامتوازن شارش در آزمایش اول با آزمایش‌های دیگر بسیار زیاد است. برای مثال، بیشینه انرژی نامتوازن آزمایش

توانایی بیشتری در شناسایی کمی و کیفی تولید امواج گرانی-لختی از شارش‌های تاوایی به دست آورد. دیگر نکته خاص این پژوهش، جداسازی بخش نامتوازن (موج) از بخش متوازن (تاوه) به کمک روابط توازن بولین-چارنی است. با استفاده از این روش و پس از تمرکز روی بخش نامتوازن میدان‌های واگرایی سرعت و شتاب، شناسایی چشمۀ امواج گرانی-لختی و چگونگی انتشار و برهمنکش آنها با بخش متوازن شارش (تاوه)، با دقت زیادی صورت می‌گیرد. لازم به ذکر است که تجزیه موج-تاوه با استفاده از روابط توازن  $\delta\delta$  مرتبه سوم حاصل از قطع معادلات با حذف جملات شامل مشتقات دوم و سوم واگرایی سرعت (اینجا نمایش داده نشده) توانی توافق کمی خوبی با نتایج حاصل از تجزیه بولین-چارنی دارد. این توافق کمی بر میزان اعتماد به نتایج عرضه شده در این کار می‌افزاید.

برای بررسی کمی و کیفی چگونگی تحول شارش تاوایی در چهار آزمایش، از پریشیدگی انرژی جنبشی و میانگین آهنگ رشد امواج کژفشار استفاده شده است. با ترسیم نمودار تغییرات زمانی پریشیدگی انرژی جنبشی و مقایسه میانگین آهنگ رشد (جدول ۱) دیده می‌شود که بیشینه میانگین آهنگ رشد با افزایش پایداری ایستایی و در نتیجه کاهش کژفشاری از آزمایش اول به آزمایش چهارم، کاهش می‌یابد. همچنین با افزایش پایداری آزمایش نتایج با کار ونگ و ژنگ (۲۰۰۷) نشان می‌دهد که مقدار میانگین آهنگ رشد در هر چهار آزمایش صورت گرفته در این تحقیق، بزرگ‌تر از مقادیر متناظر در آزمایش‌های آنها است.

بررسی الگوهای بخش نامتوازن واگرایی سرعت در آزمایش اول، بیانگر تولید و انتشار خودبه‌خودی دو بسته موج گرانی-لختی است. محل شکل‌گیری و انتشار بسته موج اول در پایین دست ناوه قرار دارد که مشابه بسته

- models: Quart. J. Roy. Meteorol. Soc., **130**, 347-364.
- Mohebalhojeh, A. R., and Dritschel, D. G., 2007, Assessing the numerical accuracy of complex spherical shallow-water flows: Mon. Wea. Rev., **135**, 3876-3894.
- O'Sullivan, D., and Dunkerton, T. J., 1995, Generation of inertia-gravity waves in a simulated life cycle of baroclinic instability: J. Atmos. Sci., **52**, 3695-3716.
- Plougonven, R., Muraki, D. J., and Snyder, C., 2005, A baroclinic instability that couples balanced motions and gravity waves: J. Atmos. Sci., **62**, 1545-1559.
- Plougonven, R., and Snyder, C., 2007, Inertia gravity waves spontaneously generated by jets and fronts, Part I: Different baroclinic life cycles: J. Atmos. Sci., **64**, 2502-2520.
- Vanneste, J., and Yavneh, I., 2004, Exponentially small inertia-gravity waves and the breakdown of quasigeostrophic balance: J. Atmos. Sci., **61**, 211-223.
- Vanneste, J., 2004, Inertia-gravity wave generation by balanced motion: revisiting the Lorenz-Krishnamurthy model: J. Atmos. Sci., **61**, 224-234.
- Vanneste, J., 2008, Exponential Smallness of Inertia-Gravity Wave Generation at Small Rossby Number: J. Atmos. Sci., **65**, 1622-1637.
- Viúdez, A., and Dritschel, D. G., 2006, Spontaneous generation of inertia-gravity wave packets by balanced geophysical flows: J. Fluid Mech., **553**, 107-117.
- Wang, S., and Zhang, F., 2007, Sensivity of mesoscale gravity waves to the baroclinicity of jet-front systems: Mon. Wea. Rev., **135**, 670-688.
- Zhang, F., 2004, Generation of mesoscale gravity waves in the upper-tropospheric jet front systems: J. Atmos. Sci., **61**, 440-457.

اول حدود ۳۰ برابر مقدار متناظر در آزمایش دوم و ۸۶ برابر مقدار متناظر در آزمایش چهارم است، این در حالی است که تفاوت بین آزمایش‌های دوم تا چهارم از نظر بیشینه انرژی نامتوازن کمتر است. مقایسه بزرگی بخش نامتوازن واگرایی سرعت در چهار آزمایش برای روزهای قبل و بعد از رسیدن به بیشینه انرژی نامتوازن (جدول ۲)، روشن می‌سازد که اختلاف بین بزرگی بخش نامتوازن واگرایی سرعت در چهار آزمایش، برای زمان قبل از رسیدن به بیشینه انرژی است. این تغییر چنان است که نسبت بزرگی بخش نامتوازن واگرایی سرعت در آزمایش اول به آزمایش چهارم برای روزهای قبل و بعد از رسیدن به بیشینه انرژی به ترتیب حدود ۱۵ و ۲۱ به دست می‌آید.

#### منابع

- Badger, J., and Hoskins, B. J., 2001, Simple initial value problems and mechanisms for baroclinic growth: J. Atmos. Sci., **58**, 38-49.
- Ford, R., McIntyre, M. E., and Norton, W. A., 2000, Balance and the slow quasimaniold: Some explicit results: J. Atmos. Sci., **57**, 1236-1254.
- Mohebalhojeh, A. R., and Dritschel, D. G., 2000, On the representation of gravity waves in numerical models of the shallow-water equations: Quart. J. Roy. Meteorol. Soc., **126**, 669-688.
- Mohebalhojeh, A. R., and Dritschel, D. G., 2004, Contour-advection semi-Lagrangian algorithms for many-layer primitive-equation