

واهمامیخت داده‌های لرزه‌ای با به کارگیری نظریه بیز

فاطمه روستائی^۱، علی غلامی^{۲*} و احمد سدید خوی^۳

^۱موسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران، ایران

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۰/۷/۶، تاریخ پذیرش: ۱۳۹۱/۳/۳۰)

چکیده

واهمامیخت یکی از مراحل مهم پردازش داده‌های لرزه‌ای است که جزو مسئله‌های بدوضع دسته‌بندی می‌شود. حل مسئله‌های بدوضع بدون اطلاعات اولیه عملاً بی‌پهوده است و درستی این اطلاعات در کیفیت جواب نهایی تأثیر بسیاری دارد. نظریه بیز، دیدگاه مناسبی برای وارد کردن اطلاعات اولیه در فرمول‌بندی مسئله‌های وارون است. در این مقاله واهمامیخت در چارچوب نظریه بیز فرمول‌بندی می‌شود و جواب مسئله به صورت بردار بیشینه کننده توزیع احتمال پسین در نظر گرفته خواهد شد. توزیع احتمال‌های دنبال سنگین نظیر توزیع لاپلاس و کوشی که منطبق با تنک بودن سری بازتاب زمین هستند در حکم اطلاعات اولیه در حوزه مدل در نظر گرفته می‌شوند. با عرضه دو تابع پتانسیل جدید و مقایسه آنها با تابع‌های پتانسیل به کار گرفته شده از قبل، سعی در بهبود پاسخ مسئله و کاهش خطای میانگین مربعات (MSE) داریم. از روش IRLS (Iteratively reweighted least squares) به علت سادگی و همگرایی مناسب، در بهینه‌سازی تابع هدف استفاده می‌شود. بررسی عملکرد توزیع‌های دنبال سنگین متفاوت با استفاده از داده‌های شبیه‌سازی شده و داده‌های واقعی نشان‌دهنده کیفیت و قدرت تفکیک بسیار زیاد این روش‌ها در مقایسه با روش واهمامیخت مرسوم وینر است.

واژه‌های کلیدی: واهمامیخت، نظریه بیز، مسئله‌های بدوضع، IRLS

Deconvolution of seismic data by applying the Bayes theory

Fateme Roostae¹, Ali Gholami^{1*} and Ahmad SadidKhouy¹

¹Institute of Geophysics, University of Tehran, Iran

Received: 28 september 2011, accepted: 13 June 2012)

Summary

Deconvolution is a longstanding problem in many areas of signal and image processing with applications in astronomy, remote-sensing imagery, medical imaging, and other fields working with imaging devices. It is also one of the major steps of seismic data processing and is studied in the framework of inverse problem theory. It is an ill-posed problem in the sense that the recovered solution (reflectivity series) is unstable and very sensitive to the presence of noise in the data. It is well known that the solution of an ill-posed problem is practically unusable unless taking into account some prior information about the original solution and the accuracy of such information highly affects the quality of the final regularized solution. Mathematically, usability of the prior information is of

*Corresponding author:

agholami@ut.ac.ir

*نگارنده رابط:

great importance. The availability and usability of the prior information are two main concerns in solving inverse problems and hence deconvolution. Here, we introduce and develop some priors (in the category of heavy-tailed priors such as Cauchy and Laplace priors) that favor solutions having isolated spikes. One of the main advantages of such priors is that they have less penalization on large spikes corresponding to the true reflection coefficients while severely penalizing small spikes due to the noise and therefore results in a sparse reflectivity series. We then used the Bayes theory to incorporate the prior information into the formulation of deconvolution problems. Therefore, in this study, deconvolution was formulated in the framework of Bayes theory and the regularized solution of the problem was considered as a maximizer of the posterior probability distribution including the likelihood and the prior terms. In contrast to the conventional Wiener deconvolution which results in a minimum L2-norm solution, the methods presented in this paper recover the minimum structure or simple solutions. Sparse or simple solutions are more consistent with true earth reflectivity series, since the earth reflectivity series is simple in the sense that most of its coefficients are zero. The non-zero coefficients identify and quantify the impedance mismatches between different geological layers that are of great interest to the geophysicist.

After formulating the deconvolution as a general cost function which can be convex or non-convex, we study an alternative method of determining its minimizer, as the limit of an Iteratively Re-weighted Least Squares (IRLS) algorithm. The IRLS algorithm benefits from simplicity and is easy to be coded. Furthermore, it is shown that its convergence to a local minimum from any initial guess is guaranteed and the convergence rate is superlinear. The main step of the proposed IRLS finds, for a given diagonal weight matrix Q , the solution of a weighted zero order quadratic regularization where matrix Q is updated at each iteration. Moreover, using different priors about the reflectivity series results in only a simple change of the definition of matrix Q .

Numerical experiments with synthetic and field data show that the proposed sparsity-based deconvolutions estimate the reflectivity with good resolution. Therefore, they can be used for accurate delineation of the thin layers in real poststack seismic data. The numerical results also show that the proposed methods perform much better than conventional Wiener deconvolution in the sense of the reconstruction error.

Key words: Deconvolution, Bayes theory, ill-posed problems, IRLS

۱ مقدمه

امروزه اکثر شاخه‌های علوم و مهندسی به‌نحوی با مسئله‌های وارون سروکار دارند. اهمیت کاربرد مسئله‌های وارون در حل مسئله‌های جهان واقعی باعث شده است تا تحقیقات وسیعی در این زمینه صورت پذیرد. علم ژئوفیزیک نیز جزو زمینه‌های تحقیقی-کاربردی است که همیشه در پیشبرد و توسعه حل مسئله‌های وارون نقش بسزایی ایفا می‌کند و این امر به این علت است که کمتر مسئله‌ای در ژئوفیزیک یافت می‌شود که با مسئله‌های

وارون در ارتباط نباشد. هدف از حل یک مسئله وارون اظهار نظر کمی در مورد یک دستگاه فیزیکی با استفاده از پاسخ آن دستگاه به تحریک بررسی کننده است. ارتباط بین پاسخ دستگاه و تحریک وارده می‌تواند خطی یا غیرخطی باشد که این خود اساس طبقه‌بندی مسئله‌های وارون به دو دسته کلی خطی و غیرخطی است. در مسئله واهمامیخت که هدف این مقاله قرار دارد، ارتباط بین ورودی و خروجی زمین (دستگاه) به‌صورت خطی بیان می‌شود.

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} w_1 & w_N & w_{N-1} & \dots & w_2 \\ w_2 & w_1 & w_N & \ddots & w_3 \\ w_3 & w_2 & w_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & w_N \\ w_N & \dots & w_3 & w_2 & w_1 \end{bmatrix}$$

البته باید در نظر داشت که در این فرمول‌بندی به تعداد مناسب به انتهای بردار x صفر اضافه شده است. در رابطه (۳) در آن y بردار مشاهدات از مدل دلخواه و مجهول x است که ابتدا با ماتریس همایخت G تبدیل و سپس با نوفه e ترکیب شده است. با داشتن y و G ، مسئله واهمایخت شامل یافتن x است. در زلزله‌شناسی، w به صورت یک تابع گاوسی در نظر گرفته می‌شود که دربرگیرنده اثرات موجک چشمه و جذب زمین است، و واهمایخت منجر به برآورد آن قسمتی از لرزه‌نگاشت می‌شود که مربوط به اثرات مسیر و در نتیجه ساختار کشتان زمین است (استفان و همکاران، ۲۰۰۶).

ساده‌ترین راهی که برای حل رابطه (۳) به ذهن می‌رسد وارون کردن مستقیم ماتریس G و یا به عبارتی اعمال G^{-1} بر داده‌ها است. اما این راه‌حل برای مسئله واهمایخت مناسب نیست، چرا که ماتریس وارون G بسیار ناپایدار است و نوفه موجود در داده‌ها را به شدت تقویت می‌کند، به طوری که مدل حاصل قابل تفسیر نخواهد بود. دلیل این واقع را این گونه می‌توان توضیح داد: یک ماتریس چرخشی حاصل از موجک چشمه است؛ اگر $F_{k,n} = \frac{1}{\sqrt{N}} \exp\left(\frac{-i2\pi kn}{N}\right)$ و $k, n = 0, \dots, N-1$ ماتریس تبدیل فوریه گسسته باشد، آن‌گاه می‌توان نشان داد $\mathbf{G} = \mathbf{F}^H \mathbf{D} \mathbf{F}$ (غلامی، ۱۳۸۸)، که H نشان‌دهنده ترانهاد هرمیتی و $\mathbf{D} = \text{diag}(\mathbf{F}\mathbf{w})$ یک ماتریس قطری است که طیف فوریه موجک $(\mathbf{F}\mathbf{w})$ بر روی قطر اصلی آن قرار دارد. با استفاده از این دیدگاه داریم $\mathbf{G}^{-1} = \mathbf{F}^H \mathbf{D}^{-1} \mathbf{F}$ که نشان می‌دهد وارون‌پذیر بودن G مستلزم این است که همه ضرایب طیف موجک، غیرصفر باشند. اما در عمل

واهمایخت سابقه‌ای نسبتاً طولانی در بسیاری از زمینه‌های پردازش سیگنال و تصویر با کاربردهایی در نجوم، تصویرسازی پزشکی، ژئوفیزیک و علوم دیگری که با دستگاه‌های تصویربرداری در ارتباط هستند دارد (تیلر و همکاران، ۱۹۷۹؛ لوی و فولگار، ۱۹۸۱؛ الدنبرگ و همکاران، ۱۹۸۳؛ وگل، ۲۰۰۲). هنگام کار با یک تصویر، بردار تصویر حاصل به علت اثرات دستگاهی کدر یا مات می‌شود. اگر تغییر ایجاد شده در سراسر تصویر یکنواخت باشد به صورت همایخت با یک فیلتر پایین‌گذر قابل شبیه‌سازی است. فرایند برداشتن اثر مات‌شدگی را واهمایخت می‌گویند.

همچنین، واهمایخت یکی از مراحل مهم در پردازش داده‌های لرزه‌ای است. هدف اصلی واهمایخت لرزه‌ای برداشتن اثر موجک چشمه از روی لرزه‌نگاشت ثبت شده و برآورد سری بازتاب زمین است. ضرایب سری بازتاب نشان‌دهنده اختلاف بین مقاومت صوتی لایه‌های زمین‌شناسی متفاوت هستند و بنابراین ساختار کشتان زمین را به تصویر می‌کشند که برای ژئوفیزیک‌دانان اهمیت ویژه‌ای دارد. اگر $x(t)$ سری بازتاب زمین و $w(t)$ موجک چشمه باشد، آن‌گاه لرزه‌نگاشت ثبت شده $y(t)$ به صورت همایخت خطی زیر قابل شبیه‌سازی است:

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)w(t-\tau)d\tau + e(t), \quad (1)$$

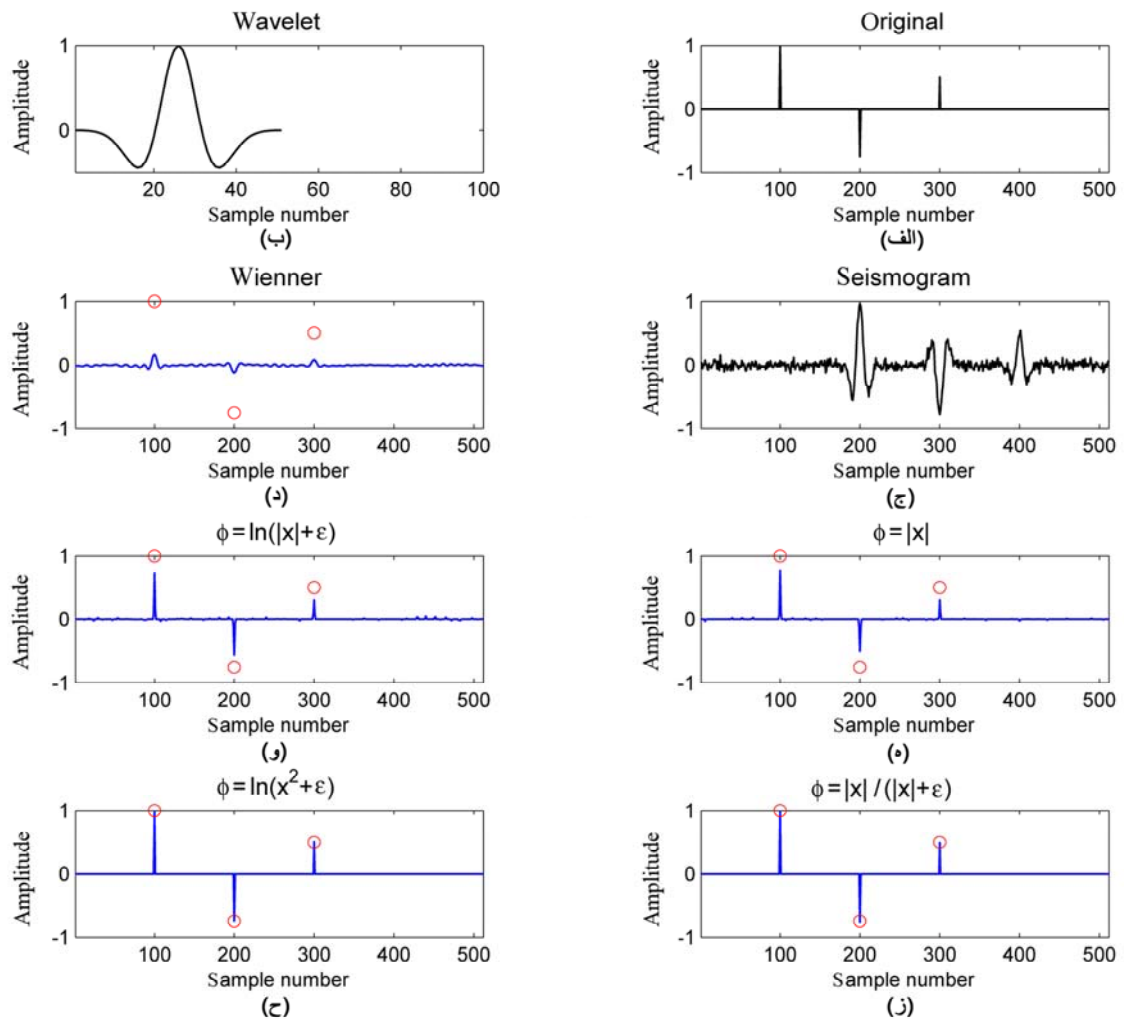
که $e(t)$ نوفه تصادفی است که فرض می‌شود دارای توزیع نرمال و واریانس محدود σ^2 باشد. شکل گسسته رابطه (۱) به صورت زیر است:

$$y[n] = \sum_{i=1}^N x_i w_{n-1} + e[n], \quad (2)$$

که می‌توان آن را به شکل ماتریسی زیر نوشت:

$$\mathbf{y} = \mathbf{G}\mathbf{x} + \mathbf{e}, \quad (3)$$

که



شکل ۱. مثال مصنوعی از واهمامیخت لرزه‌ای با استفاده از تابع‌های پتانسیل متفاوت. لرزه‌نگاشت مصنوعی حاصل از همامیخت سری بازتاب اصلی (الف) و تابع چشمه (ب) پس از ترکیب شدن با نوفه در شکل (ج) نشان داده شده است. جواب حاصل از واهمامیخت این لرزه‌نگاشت با تابع‌های پتانسیل متفاوت در شکل‌های (د) تا (ح) آورده شده است. دایره‌های سرخ رنگ در هر شکل مولفه‌های غیرصفر سری بازتاب اصلی را برای مقایسه نشان می‌دهند.

میزان انرژی یا نُرم-۲ (نُرم-۲ بردار $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$ به صورت $L_2(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^N v_i^2$ تعریف می‌شود) جواب می‌شود و بنابراین به سرکوب کردن نوفه تصویر شده به فضای مدل منجر می‌شود، اما به علت فرض محدود بودن نوار بسامدی (که از قید L_2 حاصل می‌شود) قدرت تفکیک زیادی ندارد (دبیه و ریل، ۱۹۹۰).

روش‌های متفاوتی به منظور برطرف کردن محدودیت نوار در فیلتر وینر و بالا بردن قدرت تفکیک آن عرضه

موجک لرزه‌ای طول نوار بسامدی محدودی دارد و بنابراین G^{-1} یا وجود ندارد و یا بسیار ناپایدار است. برای برطرف کردن این مشکل و یافتن یک جواب پایدار باید از اطلاعات اولیه کمک گرفته شود تا دامنه مدل‌هایی که با G^{-1} پیش‌بینی می‌شوند محدود، و به نحوی جواب مسئله یکتا شود.

واهمامیخت به روش فیلتر وینر از مرسوم‌ترین روش‌ها برای پایدارسازی مسئله است. این روش با فرض گاوسی بودن توزیع سری بازتاب موجب قیدگذاری بر حد بالای

در این مقاله، چگونگی استفاده از نظریه بیز در فرمول‌بندی واهمامیخت لرزه‌ای نشان داده می‌شود. سپس عملکرد فرض توزیع گاوسی در مقابل توزیع‌های دنبال سنگین لاپلاس و کوشی مورد بررسی قرار می‌گیرد. علاوه بر این، دو روش جدید عرضه خواهد شد که با توجه به خطای بازسازی نسبت به روش‌های پیش‌گفته، عملکرد بهتری به‌دست می‌دهند. اعمال روش روی داده‌های شبیه‌سازی شده و داده‌های واقعی نشان از عملکرد قوی روش‌های تنک‌کننده در مقابل روش مرسوم وینر دارد.

۲ روش تحقیق

۱-۲ فرمول‌بندی واهمامیخت با به‌کارگیری نظریه بیز نظریه بیز با اضافه کردن اطلاعات اولیه مستقل از داده‌ها در فرایند واهمامیخت، سعی در پایدار و یکتا کردن جواب دارد. برآورد بیزی (برگرفته از نام توماس بیز، ۱۷۰۱-۱۷۶۱) برآوردی آماری است که به هرکدام از عناصر موجود در فضاهای مدل و داده، یک احتمال نسبت می‌دهد. قانون بیز را می‌توان برحسب چگالی احتمال‌های

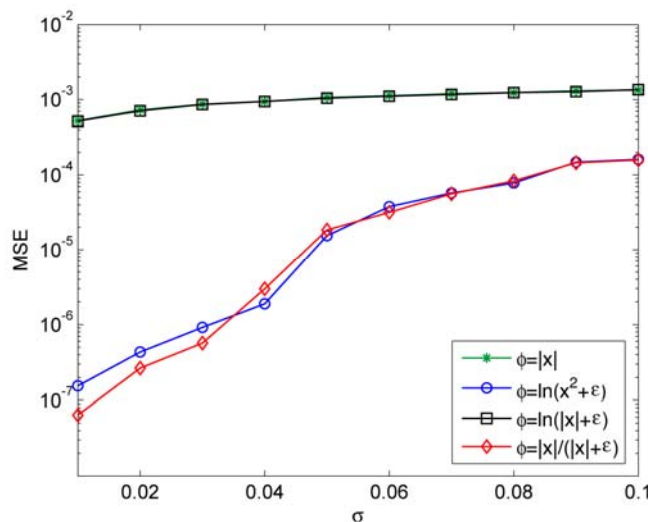
شده است. دسته‌ای از این روش‌ها بر مبنای نرم-۱ (نرم-۱)

بردار $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$ که به صورت $L_1(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^N |v_i|$ تعریف

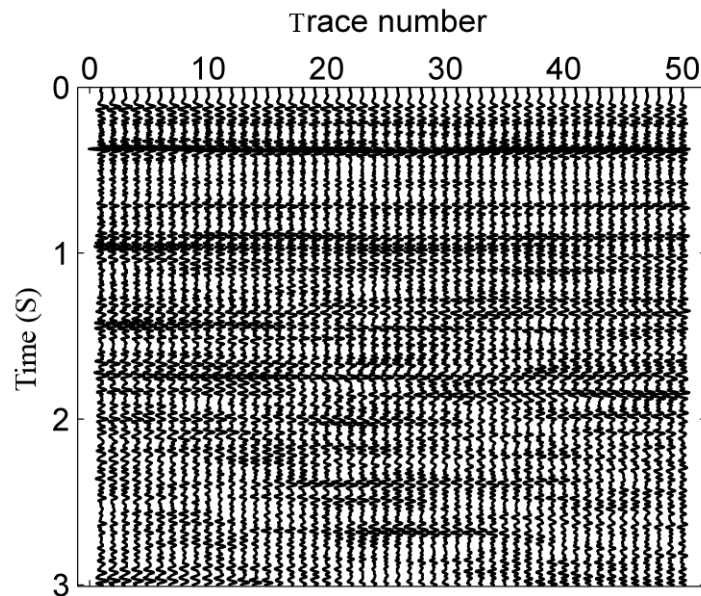
می‌شود) هستند که با فرض پیروی سری بازتاب از توزیع لاپلاس حاصل می‌شود. کیفیت عملکرد این دیدگاه را تعدادی از محققان به اثبات رسانده‌اند (تیلر و همکاران، ۱۹۷۹؛ لوی و فولگار، ۱۹۸۱؛ الدنبرگ و همکاران، ۱۹۸۳؛

دیه و ریل، ۱۹۹۰). ساشی (۱۹۹۷) با فرض توزیع کوشی که یک توزیع دنبال سنگین است برای سری بازتاب به حل مسئله واهمامیخت لرزه‌ای پرداختند. توزیع کوشی نسبت به توزیع لاپلاس توزیع دنبال سنگین‌تری است.

بنابراین، روش واهمامیخت مربوط منجر به تولید سری بازتاب تنک‌تری می‌شود. به‌هرحال، خصوصیت استفاده از توزیع‌های دنبال سنگین برای سری بازتاب این است که منجر به جوابی تنک می‌شوند که با ساختار لایه‌بندی زمین بیشتر هم‌خوانی دارد، باین‌حال حل مسئله بهینه‌سازی مربوط پیچیده‌تر خواهد شد.



شکل ۲. نمودار میانگین مربعات خطا برحسب میزان نوفه‌های متفاوت برای تابع‌های پتانسیل متفاوت در روند واهمامیخت لرزه‌نگاشت مصنوعی نشان داده شده در شکل ۱-ج.



شکل ۳. یک مقطع لرزه بازتابی واقعی.

شامل یافتن محتمل‌ترین بردار پارامترهای مدل (x) است که y را تولید کرده باشد یا به عبارتی دیگر یافتن مدلی است که توزیع پسین پارامترها را بیشینه کند:

$$\bar{x} = \arg \max_x \{p(x|y, \theta)\}, \quad (5)$$

که بردار θ شامل پارامترهایی نظیر واریانس توزیع پیشین است. رابطه (۵) را می‌توان به صورت مسئله کمینه‌سازی زیر نوشت، زیرا تابع \ln یک تابع اکیداً صعودی است که با اعمال آن روی تابع‌های متفاوت تغییری در نقاط اکسترمم آنها به وجود نمی‌آید و می‌توان از آن برای پیدا کردن ساده‌تر نقاط اکسترمم تابع‌ها استفاده کرد:

$$\bar{x} = \arg \min_x \{-\ln p(x|y, \theta)\}, \quad (6)$$

که نتیجه می‌شود:

$$\bar{x} = \arg \min_x \left\{ \underbrace{-\ln p(y|x, \theta)}_{\Phi_1} - \underbrace{\ln p(x, \theta)}_{\Phi_2} \right\}. \quad (7)$$

برای به دست آوردن رابطه (۷) از مخرج کسر رابطه (۴) به خاطر مستقل بودن از x صرف نظر شده است. مجموع جملات Φ_1 و Φ_2 تابع هدف نامیده می‌شود

(PDF) مدل و داده به صورت زیر نوشت:

$$p(x|y) = \frac{p(y|x)p(x)}{p(y)}. \quad (4)$$

رابطه اخیر این امکان را فراهم می‌کند که با ترکیب سه توزیع احتمال مجزا بتوان توزیع احتمال درست بودن مدل برآورد شده را به شرط مشاهدات موجود اندازه‌گیری کرد. در رابطه (۴):

۱. توزیع موردنظر و نشان‌دهنده توزیع پسین $p(x|y)$ (Posterior) پارامترهای مدل است.

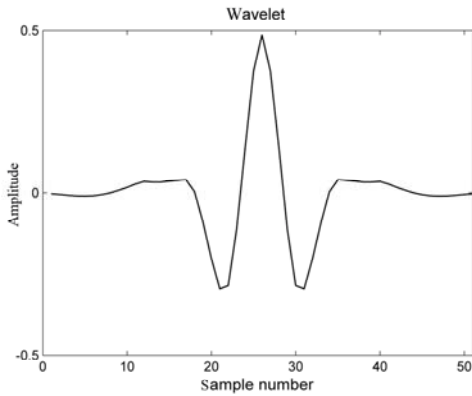
۲. تابع درست‌نمایی (Likelihood function)، $p(y|x)$ ، نشان‌دهنده توزیع داده‌ها به شرط درست بودن مدل است.

۳. توزیع پیشین (Prior)، $p(x)$ ، شامل اطلاعات موجود در مورد مدل قبل از مشاهده داده‌ها است.

۴. مقدار ثابت $p(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(y|x)p(x)dx$ نشان دهنده احتمال مشاهده داده‌ها به شرط درست بودن یا درست نبودن مدل است.

با داشتن بردار مشاهدات y ، مسئله واهم‌میخت پیزی

مقدمه بیان شد، G^\dagger بسیار ناپایدار است و منجر به یک جواب معقول نخواهد شد. برای رفع این مشکل و پایدارسازی جواب به اطلاعات اولیه نیاز داریم.



شکل ۴. موجک چشمه مقطع لرزه بازتابی نشان داده شده در شکل ۳.

۳-۲ حل مسئله‌های معکوس با اطلاعات اولیه

روش دیگر واهمایخت استفاده از اطلاعات اولیه موجود در مورد سری بازتاب به‌منظور کنار گذاشتن مدل‌هایی است که مولفه نوفه موجود در داده‌ها را تولید می‌کنند. فرض کنید که توزیع چندمتغیره پیشین به‌صورت کلی زیر تعریف شود:

$$p(x) \propto \exp\left(-\alpha \sum_i \varphi(x_i)\right), \quad (13)$$

که $\alpha > 0$ و $\varphi(x)$ برای $x \geq 0$ همواره صعودی، پیوسته مشتق‌پذیر و غیرمنفی فرض می‌شود تا در مبدا مقدار صفر اختیار کند. همچنین در این مقاله تابع $\varphi(x)$ ممکن است محدب یا غیرمحدب باشد، به‌طوری‌که شرط زیر برقرار شود (کربونیر و همکاران، ۱۹۹۷):

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \frac{d\varphi}{dx} = C, \quad (14)$$

که C یک مقدار ثابت ($C \in \mathbb{R}^+$) است. این شرط از این لحاظ اهمیت دارد که ماتریس \mathbf{R} در روابط (۱۶) و (۱۷)،

(الریچ و همکاران، ۲۰۰۰). با فرض گاوسی بودن توزیع مولفه‌های نوفه، تابع توزیع چندمتغیره زیر برای بردار نوفه حاصل می‌شود:

$$p(\mathbf{e}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} \sigma^N} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \mathbf{e}^T \mathbf{e}\right), \quad (8)$$

طبق رابطه (۳) داریم:

$$\mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{G}\mathbf{x}, \quad (9)$$

که با استفاده از رابطه (۸) می‌توان نوشت:

$$p(\mathbf{y}|\mathbf{x}, \theta) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} \sigma^N} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N [\mathbf{y} - \mathbf{G}\mathbf{x}]_i^2\right), \quad (10)$$

در نتیجه، رابطه (۷) را برای حل مسئله (۳) می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{x}} = \arg \min_x \phi(\mathbf{x}, \theta) \\ \phi(\mathbf{x}, \theta) = \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{G}\mathbf{x}\|_2^2 - \sigma^2 \ln p(\mathbf{x}, \theta) \end{cases}, \quad (11)$$

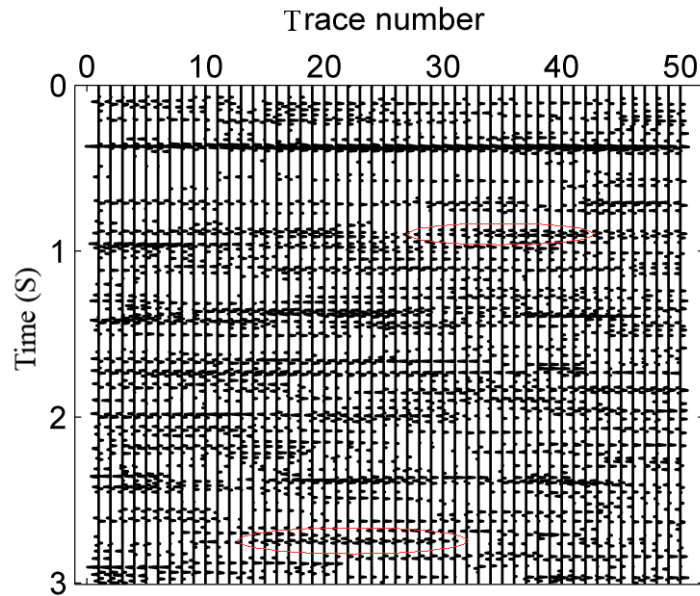
که رابطه (۱۱) جواب رابطه (۳) را با به‌کارگیری نظریه بیز به‌دست می‌دهد.

۲-۲ حل مسئله‌های معکوس بدون اطلاعات اولیه

فرض کنید هیچ‌گونه اطلاعات اولیه مستقل از داده‌های برداشت شده در مورد \mathbf{x} موجود نباشد، یا به‌عبارت‌دیگر $p(\mathbf{x}, \theta) = \text{const.}$ باشد. این حالت زمانی می‌تواند رخ دهد که واریانس توزیع پیشین بی‌نهایت باشد (تارانتولا، ۲۰۰۵). در این صورت، تابع هدف فقط شامل جمله $\frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{G}\mathbf{x}\|_2^2$ است و جواب مسئله به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \arg \min_x \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{G}\mathbf{x}\|_2^2, \quad (12)$$

جواب حاصل از این رابطه ($\tilde{\mathbf{x}}$) را جواب مور-پنروز (Moore-Penrose) می‌نامند. این جواب به‌طورکلی به‌صورت $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{G}^\dagger \mathbf{y}$ به‌دست می‌آید، که عملگر \mathbf{G}^\dagger را عملگر شبه‌وارون (pseudo-inverse) ماتریس \mathbf{G} می‌نامند (الریچ و همکاران، ۲۰۰۰). همان‌طور که در بخش



شکل ۵. مقطع حاصل از واهمامیخت داده‌های شکل ۳ با استفاده از الگوریتم پیشنهادی و به کمک تابع پتانسیل $\varphi(x) = \frac{|x|}{|x| + \varepsilon}$.

را روش واهمامیخت نرم-۱ نامند. این روش را پیش‌تر تعدادی از محققان مورد استفاده قرار داده‌اند (تیلر و همکاران، ۱۹۷۹؛ لوی و فولگار، ۱۹۸۱؛ الدنبرگ و همکاران، ۱۹۸۳؛ دیبه و ریل، ۱۹۹۰).

اگر در رابطه (۱۳) توزیع احتمال کوشی برای x در نظر گرفته شود، خواهیم داشت، $\varphi(x) = \ln(x^2 + \varepsilon)$ ، $\varepsilon > 0$ ؛ که در این صورت رابطه (۱۵) را روش واهمامیخت با نرم کوشی می‌نامند. توزیع احتمال کوشی را پیش‌ازین ساشی (۱۹۹۷) مورد استفاده قرار داده است.

از توزیع احتمال‌های دیگر نیز می‌توان استفاده کرد. در اینجا دو $\varphi(x)$ جدید را که قبلاً از آنها استفاده نشده است به کار می‌گیریم. یعنی $\varphi(x) = \ln(|x| + \varepsilon)$ و $\varphi(x) = \frac{|x|}{|x| + \varepsilon}$ که در این صورت توزیع احتمال‌های مربوط شدیداً دنبال سنگین و رابطه (۱۵) برای هر دو حالت غیرخطی است و منجر به جواب‌های تنک می‌شود (غلامی و حسینی، ۲۰۱۱).

وارون‌پذیر باشد، یعنی عناصر روی قطر آن که همان مقادیر تابع $\frac{\varphi'(x)}{x}$ هستند، بی‌نهایت نباشند. با قرار دادن رابطه (۱۳) در رابطه (۱۱) خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \bar{x} = \arg \min_x \phi(x, \mathbf{0}) \\ \phi(x, \mathbf{0}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{Gx}\|_2^2 + \lambda \sum_i \varphi(x_i) \end{cases} \quad (15)$$

که $\lambda = \sigma^2 \alpha$ است. انتخاب تابع‌های پتانسیل متفاوت در رابطه (۱۳) یا (۱۵) منجر به روش‌های متفاوت واهمامیخت می‌شود.

انتخاب $\varphi(x) = x^2$ به معنی در نظر گرفتن توزیع احتمال گاوسی برای x است. در این صورت رابطه (۱۵) را روش واهمامیخت وینر یا همان واهمامیخت نرم-۲ می‌نامند که یکی از مرسوم‌ترین روش‌های واهمامیخت است. این حالت از رابطه (۱۵) را شکل استاندارد منظم‌سازی می‌نامند که از لحاظ عددی، نسبت به سایر روش‌های منظم‌سازی ساده‌تر است.

انتخاب $\varphi(x) = |x|$ به معنی در نظر گرفتن توزیع احتمال لاپلاس برای x است و در این صورت رابطه (۱۵)

۴-۲ روش حل

با مشتق‌گیری از رابطه (۱۵) و برابر صفر قرار دادن نتیجه آن، رابطه زیر حاصل می‌شود (کریونیر و همکاران، ۱۹۹۷):

$$\mathbf{R}\mathbf{x} = \mathbf{G}^T \mathbf{y}, \quad (16)$$

که

$$\mathbf{R} = \mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda \operatorname{diag} \left(\frac{\phi'(x_i)}{x_i} \right)_{i=1, \dots, N}, \quad (17)$$

که diag نشان دهنده ماتریس قطری است و $\phi'(x_i)$ برابر با مشتق تابع $\phi(x_i)$ نسبت به x_i است. برای حالتی که $\phi(x) = x^2$ انتخاب شود، ماتریس $\mathbf{R} = \mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda \mathbf{I}$ مستقل از \mathbf{x} خواهد بود که در این صورت رابطه (۱۶) جواب تحلیلی خواهد داشت و برای حل آن از خصوصیات حوزه فوریه استفاده می‌شود. با قرار دادن $\mathbf{G} = \mathbf{F}^H \mathbf{D}\mathbf{F}$ ، جواب واهمایخت وینر در حوزه بسامد بدین گونه است:

$$\hat{x}_i = \frac{\hat{w}_i^* \hat{y}_i}{|\hat{w}_i|^2 + \lambda}, \quad i = 1, \dots, N \quad (18)$$

که $\hat{x} = \mathbf{F}\mathbf{x}$ نشان دهنده حوزه فوریه است. در رابطه (۱۸) علامت "*" به معنای مزدوج مختلط است. در عین پایداری و سرعت محاسبات، مشکل اصلی این روش این است که نمی‌تواند جواب‌های تنک تولید کند. از دیدگاه پردازش داده‌های لرزه‌ای تفسیر رابطه (۱۸) بدین صورت است: صورت کسر سمت راست رابطه، دگرستگی بین موجک چشمه و ردلرزه در حوزه بسامد است. همچنین در مخرج کسر عبارت $|\hat{w}_i|^2$ مولفه نام تابع حاصل از

همبستگی موجک چشمه است. پارامتر λ را whitening می‌نامند.

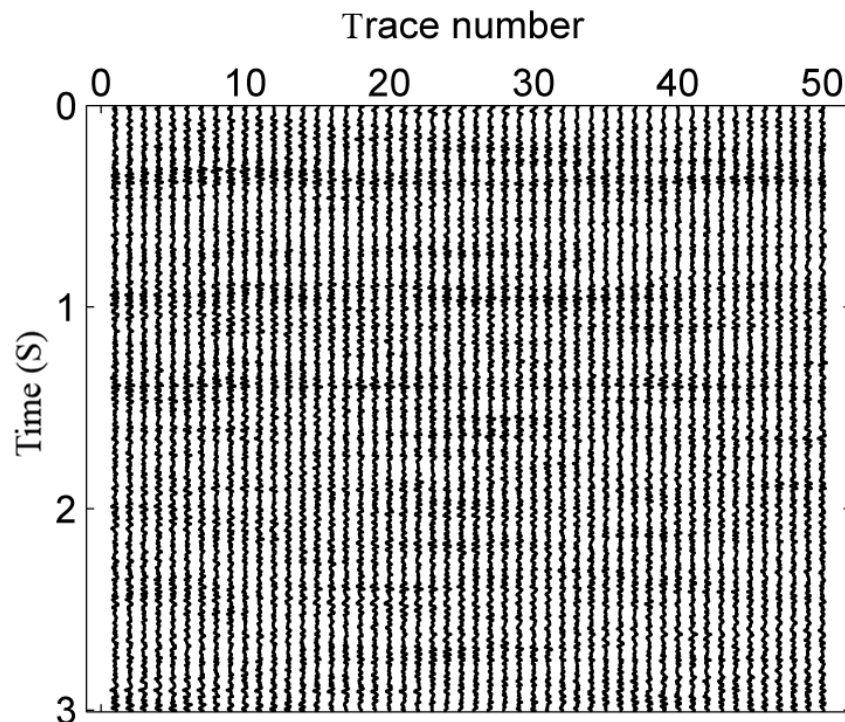
استفاده از دیگر تابع‌های $\phi(x)$ معرفی شده در بالا منجر به این می‌شود که ماتریس ضرایب \mathbf{R} در رابطه (۱۶) به x وابسته باشد و در این صورت محاسبه جواب به صورت تحلیلی ممکن نیست. یک راه حل ساده اما موثر برای حل این مسئله انتخاب یک جواب اولیه و بهبود آن به روش تکرار است. این روش به IRLS معروف است که مراحل اجرای آن را می‌توان به صورت بیان شده در جدول ۱ مطرح کرد (غلامی، ۱۳۸۸؛ دابچیز و همکاران، ۲۰۱۰). از خصوصیت خوب روش IRLS همگرایی سریع آن است. اعمال این الگوریتم بر مثال‌های متفاوت نشان می‌دهد که با ۱۵ تکرار به جواب قابل قبول همگرا می‌شود.

۵-۲ انتخاب پارامترهای منظم سازی

پارامترهای منظم‌سازی λ و ε نقش کلیدی در کیفیت جواب مسئله ایفا می‌کنند و جزو پارامترهای مجهول مسئله هستند که باید هنگام حل مسئله آنها را انتخاب کرد. یکی از روش‌های تعیین پارامتر λ استفاده از روش اصل عدم انطباق است (وگل، ۲۰۰۲). پارامتر λ کنترل‌کننده اهمیت نسبی بین منظم‌سازی و عدم انطباق داده‌ها با مقیاس‌گذاری همه ضرایب بازتاب است. λ مناسب با استفاده از توزیع نرم- χ^2 $\|e\|_2^2$ تعیین می‌شود که

جدول ۱. الگوریتم (IRLS) برای پیدا کردن جواب رابطه (۱۵). پارامتر منظم‌سازی λ با استفاده از روش اصل عدم انطباق تعیین شده است.

مرحله ۱. قرار دادن $k = 0, \mathbf{Q}^0 = \mathbf{I}_N, \mathbf{x}^0 = 0$
مرحله ۲. حل $(\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda \mathbf{Q}^k) \mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{G}^T \mathbf{y}$
مرحله ۳. محاسبه $\mathbf{Q}^{k+1} = \operatorname{diag} \left(\frac{\phi'(x_i^{k+1})}{x_i^{k+1}} \right)_{i=1, \dots, N}$
مرحله ۴. اگر $\ \mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\ < \text{tol}$ اتمام الگوریتم، در غیر این صورت $k = k + 1$ و برو به مرحله ۲.



شکل ۶. مقطع باقی مانده. تفاوت داده‌های پیش‌بینی شده از ضرایب بازتاب شکل ۵ و داده‌های شکل ۳.

۳ آزمون عملکرد روش با استفاده از مثال‌های عددی در این قسمت با ارائه مثال‌های شبیه‌سازی شده و واقعی چگونگی عملکرد الگوریتم واهمامیخت عرضه شده مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد.

۱-۳ مثال مصنوعی

برای یک زمین ساده با لایه‌بندی تخت، سری بازتاب x ($N = 512$) با استفاده از توزیع یکنواخت بر بازه $[-1, 1]$ با احتمال $\frac{3}{512}$ تولید شد، شکل ۱-الف. لرزه‌نگاشت اصلی حاصل از همامیخت این سری بازتاب با موجک چشمه (موجک ریکر با بسامد مرکزی 20 HZ، با فاصله نمونه‌برداری ۴ میلی ثانیه) شکل ۱-ب بعد از ترکیب شدن با نوفه ($\sigma = 0.05$) در شکل ۱-ج نشان داده شده است. از آنجا که هدف، مقایسه عملکرد تابع‌های پتانسیل عرضه شده است، در اینجا پارامتر λ در حکم کمینه‌کننده MSE

منجر به تعیین وضعیت عدم انطباق $\|G\tilde{x}(\lambda) - y\|_2^2 \leq \xi$ خواهد شد. در این رابطه میزان ξ به سطح نوفه در داده‌ها بستگی دارد که از مقدار انحراف استاندارد نوفه تعیین می‌شود. با در نظر گرفتن $\xi = \sigma^2 N$ (تعداد داده‌هاست) می‌توان \tilde{x} مربوطه را به‌طور نسبی به میزان یک انحراف استاندارد برآورد کرد. در این روش ابتدا دو مقدار λ_1 و λ_2 پیدا می‌شود، به طوری که کمیت $\|G\tilde{x}(\lambda) - y\|_2^2$ مربوط به آنها دربرگیرنده $\sigma^2 N$ باشد؛ سپس با کوچک کردن فاصله λ_1 و λ_2 با استفاده از تکرار می‌توان λ مناسب را یافت. پارامتر ε میزان تنگی جواب را کنترل می‌کند. روش جامعی برای نحوه انتخاب یک مقدار مناسب برای آن وجود ندارد اما آزمون‌های بی‌شمار صورت گرفته در این مقاله نشان می‌دهد که بهتر است مقدار ε وابسته به تکرار تغییر کند. در این مقاله $\varepsilon^{k+1} = 10^{-4} \max(|x^k|)$ که شماره تکرار الگوریتم است.

مقدار کمینه MSE قابل دستیابی برای هر تابع پتانسیل محاسبه شد. به‌منظور به‌دست آوردن نتیجه قابل اطمینان‌تر، حل مسئله برای نوفه‌های متفاوت با یک سطح معین ۵۰۰ بار تکرار و مقادیر MSE به‌دست آمده میانگین‌گیری و درنهایت نمودار MSE برحسب مقادیر متفاوت نوفه رسم شد که نتایج آن در شکل ۲ نشان داده شده است. واضح است که هرچه نمودار MSE ثبت شده برای مقادیر متفاوت نوفه سطح پایین‌تری داشته باشد، عملکرد تابع پتانسیل بهتر خواهد بود. همچنین به‌صورت شهودی می‌توان پیش‌بینی کرد که با افزایش سطح نوفه، مقدار MSE نیز افزایش و دقت ما در یافتن جواب صحیح کاهش خواهد یافت که این مسئله به‌صراحت در شکل ۲ مشخص است. با بررسی این نمودار می‌توان مشاهده کرد که عملکرد تابع‌های پتانسیل $\varphi(x) = \ln(|x| + \varepsilon)$ و $\varphi(x) = |x|$ مشابه هم است، همچنین عملکرد تابع‌های پتانسیل $\varphi(x) = \frac{|x|}{|x| + \varepsilon}$ و $\varphi(x) = \ln(x^2 + \varepsilon)$ تا حدودی نزدیک به هم است که با افزایش میزان نوفه جواب‌های حاصل از این دو روش به‌سمت هم همگرا خواهند شد. در کل، میزان دقت در پیدا کردن جواب صحیح در صورت استفاده از تابع پتانسیل $\varphi(x) = \frac{|x|}{|x| + \varepsilon}$ بسیار بیشتر از سایر حالت‌های بررسی شده است.

جدول ۲. کمترین میزان MSE برای تابع‌های پتانسیل متفاوت با میزان نوفه $\sigma = 0.05$.

$\varphi(x)$	$\frac{\varphi'(x)}{x}$	λ	MSE
$ x $	$\frac{1}{\sqrt{x^2 + \varepsilon}}$	0.037	6.52×10^{-4}
$\ln(x + \varepsilon)$	$\frac{1}{ x + \varepsilon}$	0.037	4.52×10^{-4}
$\ln(x^2 + \varepsilon)$	$\frac{1}{x^2 + \varepsilon}$	0.040	6.52×10^{-7}
$\frac{ x }{ x + \varepsilon}$	$\frac{1}{(x + \varepsilon)^2}$	0.043	6.43×10^{-7}
x^2 (wiener)	2	0.5065	2.96×10^{-3}

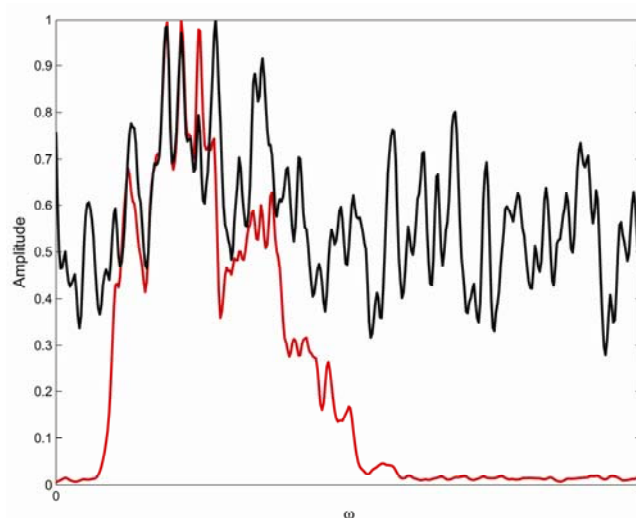
تعریف شده به‌صورت زیر در نظر گرفته شد تا مقایسه بین بهترین عملکرد این روش‌ها صورت پذیرد.

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}_i)^2, \quad (19)$$

جواب حاصل از تابع‌های متفاوت در شکل‌های ۱-د تا ۱-ح نشان داده شده است. در این شکل‌ها علامت "○" نشان‌دهنده مقدار واقعی سری بازتاب است که با مقایسه سری بازتاب‌های بازسازی شده با سری بازتاب اصلی می‌توان به برآوردی از عملکرد تابع‌های پتانسیل متفاوت دست یافت.

با بررسی شکل ۱ می‌توان مشاهده کرد که دقت روش و نر نسبت به سایر تابع‌های پتانسیل بسیار کمتر است. همچنین نتایج حاصل از به‌کارگیری تابع پتانسیل $\varphi(x) = \ln(|x| + \varepsilon)$ تقریباً مشابه نتایج حاصل از به‌کارگیری تابع پتانسیل $\varphi(x) = |x|$ و نتایج حاصل از به‌کارگیری تابع‌های پتانسیل $\varphi(x) = \frac{|x|}{|x| + \varepsilon}$ و $\varphi(x) = \ln(x^2 + \varepsilon)$ تا حدودی مشابه هم به‌نظر می‌رسند. در جدول ۲ کمترین میزان MSE برای روش‌های متفاوت حاصل از به‌کارگیری $\varphi(x)$ های متفاوت عرضه شده است.

همچنین، به‌منظور مقایسه دقیق‌تر عملکرد تابع‌های پتانسیل متفاوت در حل مسئله واهمایخت، مسئله را برای میزان نوفه‌های متفاوت بررسی و در هر بار حل مسئله



شکل ۷. طیف بسامدی ردلرزه شماره ۱. رنگ سرخ طیف بسامدی ردلرزه قبل از واهمامیخت و رنگ مشکی طیف بسامدی ردلرزه بعد از واهمامیخت است.

$$\hat{w} = \arg \min_x \left\{ \frac{1}{2} \|\hat{y} - \hat{x}\|_2^2 + \lambda \|L\hat{x}\|_2^2 \right\}, \quad (20)$$

که $L(20)$ یک عملگر مشتق مرتبه ۲ و علامت λ "نشان‌دهنده حوزه فوریه است. پارامتر λ با استفاده از روش GCV (وگل، ۲۰۰۲) محاسبه می‌شود.

مقطع حاصل از واهمامیخت با تابع پتانسیل $\varphi(x) = \frac{|x|}{|x| + \varepsilon}$ و مقطع باقی‌مانده به ترتیب در شکل‌های ۵ و ۶ نشان‌دهنده شده‌اند. لازم به یادآوری است که پارامتر منظم‌سازی λ به روش اصل عدم انطباق انتخاب شده است.

با توجه به خصوصیات مقطع حاصل از واهمامیخت می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

(۱) لایه‌های نازک موجود در مقطع لرزه‌ای واقعی در مقطع حاصل از واهمامیخت به وضوح آشکار شده‌اند.

(۲) موجک چشمه بعد از واهمامیخت کاملاً فشرده شده و به صورت یک اسپایک درآمده است که این نشان‌دهنده افزایش طول نوار بسامدی مربوط به آن است. برای مثال در شکل ۷ طیف

۲-۳ مثال واقعی

در شکل ۳ یک مقطع لرزه بازتابی پس از برانبارش مهاجرت داده شده مربوط به یکی از نواحی ایران نشان داده شده است که برای نشان دادن چگونگی عملکرد تابع پتانسیل $\varphi(x) = \frac{|x|}{|x| + \varepsilon}$ روی داده‌های میدانی از آن استفاده می‌شود. این داده شامل ۵۰ ردلرزه (هر ردلرزه شامل ۷۵۱ نمونه با فاصله نمونه‌برداری ۴ میلی‌ثانیه) است که افق‌های لرزه‌ای متفاوت را ترسیم می‌کنند. این مقطع لرزه‌ای شامل پدیده‌های تداخلی است که احتمالاً نشان‌دهنده لایه‌های نازک هستند.

موجک چشمه این مقطع لرزه‌ای در شکل ۴ نشان داده شده است که با استفاده از هموارسازی طیف دامنه ردلرزه شماره یک به روش منظم سازی درجه دوم به دست آمده است (غلامی، ۱۳۸۸). در نتیجه، جواب رابطه (۱۵)، γ در حکم طیف دامنه ردلرزه و $\varphi(x) = x^2$ ، به منزله برآورد γ از طیف دامنه موجک در نظر گرفته می‌شود. لازم به ذکر است که اثر فاز موجک قبلاً از مقطع مورد بررسی حذف شده است. در این صورت طیف دامنه موجک \hat{w} جواب مسئله زیر است

تشکر و قدردانی

نویسندگان از داوران محترم که با عرضه نظرات ارزشمند خود موجب بهبود سطح کیفی مقاله شدند، تشکر و قدردانی می‌کنند.

منابع

غلامی، ع.، ۱۳۸۸، منظم‌سازی مسائل بدوضع ژئوفیزیکی بر مبنای تنکی، رساله دکتری، مؤسسه ژئوفیزیک، دانشگاه تهران.

Charbonnier, P., Blanc-Feraud, L., Aubert, G., and Barlaud, M., 1997, Deterministic edge-preserving regularization in computed imaging: *IEEE Trans. Image Process*, **6**(2), 298-311.

Daubechies, I., DeVore, R., Fornasier, M., and Gunturk, S., 2010, Iteratively re-weighted least squares minimization for sparse recovery: *Commun. Pure Appl. Math*, **63**(1), 1-38.

Debye, H. W. J., and Van Riel, P., 1990, Lp-norm deconvolution: *Geophysical Prospecting*, **38**(4), 381-403.

Gholami, A., and Hosseini, S. M., 2011, A general framework for sparsity-based denoising and inversion: *IEEE transaction on signal processing*, **59**(11), 5202-5211.

Levy, S., and Fullagar, P. K., 1981, Reconstruction of a sparse spike-train from a portion of its spectrum and application to high-resolution deconvolution: *Geophysics*, **46**(9), 1235-1243.

Oldenburg, D. W., Scheuer, T., and Levy, S., 1983, Recovery of the acoustic impedance from reflection seismograms: *Geophysics*, **48**, 1318-1337.

Sacchi, M. D., 1997, Reweighting strategies in seismic deconvolution: *Geophys. J. Int.*, **129**(3), 651-656.

Stephan, W., Garnero, E., and Renaut R. A., 2006, Signal restoration through deconvolution applied to deep mantle seismic probes: *Geophys. J. Int.*, **167**(3), 1353-1362.

Tarantola, A., 2005, Inverse problem theory and methods for model parameter estimation, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.

Taylor, H. L., Banks, S. C., and McCoy, J. F., 1979, Deconvolution with the l1-norm: *Geophysics*, **44**(1), 39-52.

بسامدی اولین ردلرزه مقطع لرزه‌ای مورد بررسی، قبل از واهمامیخت (رنگ سرخ) و بعد از واهمامیخت (رنگ مشکی) نشان داده شده است. که در آن طول نوار بسامدی به وضوح افزایش یافته است.

۳) همان‌طور که در مقطع باقی‌مانده (شکل ۶) می‌توان مشاهده کرد، روش مورد استفاده انرژی ناهمدوس مدل را در حکم نوفه در نظر گرفته است؛ بدون آنکه به انرژی همدوس لطمه‌ای وارد کند.

بعضی از وقایع پیوسته در مقطع شکل ۳ (برای مثال حدود ۵۰۰ میلی ثانیه) در مقطع شکل ۵ ناپیوسته شده است که برای مفسر مطلوب نیست، اگرچه این نقص همراه همه روش‌های واهمامیخت بر مبنای تنکی است، با انتخاب بهتر پارامتر منظم‌سازی می‌توان آن را بهبود بخشید.

۴ نتیجه‌گیری

در این تحقیق از نظریه بیز به صورت ابزاری مناسب برای وارد کردن اطلاعات اولیه در فرمول‌بندی و حل مسئله واهمامیخت که خود یک مسئله وارون است استفاده شد. تنک بودن سری بازتاب زمین این امکان را فراهم ساخت تا بتوان با در نظر گرفتن توزیع احتمال‌های دنبال سنگین برای آن، به شدت بر ناپایداری جواب واهمامیخت غلبه کرد و در عین حال یک جواب تنک که با واقعیت زمین تطابق بیشتری دارد تولید کرد. با معرفی تابع‌های پتانسیل جدید و در نظر گرفتن الگوریتم حل مسئله مربوطه یک چارچوب جامع برای واهمامیخت لرزه‌ای عرضه شد. همچنین بررسی‌های صورت گرفته با داده‌های واقعی و شبیه‌سازی شده روشن ساخت که تابع‌های معرفی شده، با افزایش طول نوار بسامدی منجر به تولید جواب‌های تنک در حل مسئله می‌شوند و نتایج بهتری در مقایسه با روش واهمامیخت مرسوم وینر به دست می‌دهند.

Vogel, C. R., 2002, Computational Methods for Inverse Problems, SIAM, Frontiers Applied Mathematics.

Ulrych, T. J., Sacchi, M. D., and Woodbury, A., 2000, A Bayesian tour to inversion: Geophysics, **66**(1), 55-69.