

حل عددی معادلات آب کم عمق با استفاده از روش فشرده ترکیبی مرتبه ششم

سرمد قادر^{۱*}، فرهنگ احمدی گوی^۱ و حکیم گلشاهی^۲

^۱موسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران، ایران
^۲گروه فیزیک دانشگاه آزاد اسلامی واحد شوشتر، ایران

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۱/۱/۲۹، تاریخ پذیرش: ۱۳۹۱/۶/۲۸)

چکیده

در این تحقیق، حل عددی معادلات آب کم عمق غیرخطی در صفحه f برحسب میدان‌های ارتفاع، واگرایی و تاوایی با استفاده از روش فشرده ترکیبی مرتبه ششم مورد بررسی قرار می‌گیرد و نتایج آن با روش‌های مرتبه دوم مرکزی، فشرده مرتبه چهارم، آب‌فشرده مرتبه ششم و طیفی‌وار مقایسه می‌شود. برای این منظور، یک جت مداری به‌منزله شرایط اولیه در نظر گرفته می‌شود که با گذشت زمان به ساختارهایی پیچیده با مقیاس کوچک‌تر شکسته می‌شود. در این حل عددی، برای انتگرال‌گیری زمانی معادلات از فرمول‌بندی نیمه‌ضمنی سه‌ترازه استفاده شده است. در مورد معادله تاوایی، یک جمله فرابخش برای حفظ پایداری به حل عددی افزوده می‌شود. نتایج به‌دست آمده نشان از توانایی زیاد روش فشرده ترکیبی مرتبه ششم در شبیه‌سازی میدان‌های جریان پیچیده دارد. با وجود اینکه روش طیفی‌وار نسبت به سایر روش‌ها دقت بیشتری دارد، نزدیکی بسیار زیاد نتایج روش فشرده ترکیبی مرتبه ششم به نتایج روش طیفی‌وار امیدوار کننده است.

واژه‌های کلیدی: روش فشرده ترکیبی، دقت عددی، تفاضل متناهی، نیمه‌ضمنی، معادلات آب کم عمق غیرخطی، شبکه Z جت مداری

Numerical solution of shallow water equations using the sixth-order combined compact method

Sarmad Ghader^{1*}, Farhang Ahmadi-Givi² and Hakim Golshahy³

¹Institute of Geophysics, University of Tehran, Iran

²Physics Department, Islamic Azad University, Shoushtar Branch

(Received: 17 April 2012, accepted: 18 September 2012)

Summary

Usually, simplified models, such as shallow water model, are used to describe atmospheric and oceanic motions. The shallow water equations are widely applied in various oceanic and atmospheric extents. This model is applied to a fluid layer of constant density in which the horizontal scale of the flow is much greater than the layer depth. However, the dynamics of a two-dimensional shallow water model is less general than three-dimensional general circulation models but is preferred because of its greater mathematical and computational simplicity.

Taking intrinsic complexity of fluids, recently, numerical researches have been focused on highly accurate methods. Especially, for large grid spacing numerical simulation, the use of highly accurate methods have become urgent. This trend led to an interest in compact finite difference methods. The compact finite-difference schemes are

*Corresponding author:

sghader@ut.ac.ir

*نگارنده رابط:

simple and powerful ways to reach the objectives of high accuracy and low computational cost. Compared with the traditional explicit finite-difference schemes of the same-order, compact schemes have proved to be significantly more accurate along with the benefits of using smaller stencil sizes, which can be essential in treating non-periodic boundary conditions. Application of some families of the compact schemes to the spatial differencing in some idealized models of the atmosphere and oceans shows that compact finite difference schemes can be considered as a promising method for the numerical simulation of geophysical fluid dynamics problems.

In this research work, the sixth-order combined compact (CCD6) finite difference method was applied to the spatial differencing of f -plane shallow-water equations in vorticity, divergence and height forms (on a Randall's Z grid). The second-order centered (E2S), fourth-order compact (C4S) and sixth-order super compact (SCD6) finite difference methods were also used for spatial differencing of the shallow water equations and the results were compared to the ones from a pseudo-spectral (PS) method. A perturbed unstable zonal jet was considered as the initial condition for numerical simulation in which it breaks up into smaller vortices and becomes very complex. The shallow water equations are integrated in time using a three-level semi-implicit formulation. To control the build-up of small-scale activities and thus potential for numerical nonlinear instability, the non-dissipative vorticity equation was made dissipative by adding a hyperdiffusion term. The global distribution of mass between isolevels of the potential vorticity, called mass error, was used to assess numerical accuracy. The CCD6 generated the least mass error among finite difference methods used in this research. By taking the PS method as a reference, the qualitative and quantitative comparison of the results of the CCD6, SCD6, C4S and E2S, indicated the high accuracy of the sixth-order combined compact finite difference method.

Key words: Combined compact method, numerical accuracy, finite difference, semi-implicit, shallow water equations, Z grid, zonal jet

۱ مقدمه

به صورت تراکم‌ناپذیر، همگن و هیدروستاتیک در نظر گرفته می‌شود. با وجود این که مدل آب کم‌عمق در حکم یک مدل دو بُعدی، محاسبات و ریاضیات ساده‌تری دارد، ولی دارای کاربرد گسترده در دینامیک جو و اقیانوس است و در شارش‌های پیچیده آزمون مناسبی برای الگوریتم‌های عددی فراهم می‌کند. از جمله بررسی‌های عددی صورت گرفته در این مورد می‌توان به کارهای ویلس و مالتروود (۱۹۹۳)، دریچل و همکاران (۱۹۹۹)، محب‌الحجه و دریچل (۲۰۰۰)، گالوسکی و همکاران (۲۰۰۴)، دریچل و امباوم (۲۰۰۶)، دریچل و مک‌این‌تایر (۲۰۰۸) و قادر و همکاران (۲۰۰۹) اشاره کرد.

با توجه به پیچیدگی ذاتی شارش‌های جوی و اقیانوسی، بخشی از تحقیقات اخیر بر افزایش دقت شبیه‌سازی عددی این شارش‌ها متمرکز شده‌اند. در بین

حرکت‌های بزرگ‌مقیاس جو و اقیانوس که در اثر چرخش زمین و وجود چینه‌بندی پایدار ایجاد می‌شوند (مانند تاوه‌ها، جت‌های مداری و امواج کم‌بسامد)، تا اندازه‌ای می‌توانند به صورت حرکات شبه‌تلاطمی دو بُعدی توصیف شوند (بالدوین و همکاران، ۲۰۰۷؛ سازمان هواشناسی جهانی، ۲۰۰۷؛ چو و همکاران، ۲۰۰۱؛ چو و پولوانی، ۱۹۹۶). این پدیده‌ها که اغلب دارای ساختاری پیچیده هستند به صورت عددی، تحلیلی و یا میدانی مورد بررسی قرار می‌گیرند. در شبیه‌سازی عددی آنها (در توصیف حرکات فشاروردد)، معمولاً از شکل غیرخطی معادلات آب کم‌عمق استفاده می‌شود. در معادلات آب کم‌عمق، جریان در لایه‌ای نازک و با چگالی ثابت،

نوع دیگری از روش‌های فشرده است که در آن، مشتق اول و دوم به طور هم‌زمان تقریب زده می‌شوند (چو و فن، ۱۹۹۸، ۱۹۹۹، ۲۰۰۰؛ قادر و اصفهانیان، ۲۰۰۶؛ سنگوپتا و همکاران، ۲۰۰۹). ویژگی این روش هنگامی بیشتر آشکار می‌شود که در معادلات حاکم، هم مشتق اول و هم مشتق دوم وجود داشته باشد. قادر و اصفهانیان (۲۰۰۶)، خانواده‌ای از روش‌های فشرده سه نقطه‌ای را عرضه کرده‌اند که شامل طرحواره‌های تفاضل متناهی فشرده ترکیبی با دقت دلخواه است.

جدول ۱، فرمول‌بندی طرحواره‌های به کار رفته برای محاسبه مشتق‌های اول و دوم را در کار حاضر نشان می‌دهد که شامل طرحواره‌های مرتبه دوم مرکزی، فشرده مرتبه چهارم (لِل، ۱۹۹۲)، فشرده ترکیبی مرتبه ششم (چو فن، ۱۹۹۸) و طرحواره آب‌فشرده مرتبه ششم (قادر و اصفهانیان، ۲۰۰۶) است. اساس این روابط استفاده از بسط سری تیلور حول نقطه دلخواهی از شبکه است که برای نقاط داخل شبکه تعریف شده‌اند و در شرایط مرزی دوره‌ای می‌توانن برای نقاط مرزی نیز آنها را به کار برد. محاسبه مشتق اول یا دوم در یک شبکه با تعداد نقاط $N \times N$ ، در روش فشرده مرتبه چهارم به حل یک دستگاه N معادله با N مجهول منجر می‌شود ولی در روش آب‌فشرده مرتبه ششم، به صورت یک دستگاه $2N$ معادله با $2N$ مجهول است و در روش فشرده ترکیبی مرتبه ششم مشتق‌های اول و دوم با هم و به صورت توأمان با حل یک دستگاه $2N$ معادله با $2N$ مجهول محاسبه می‌شوند. به طور خلاصه می‌توان این دستگاه معادلات را به شکل ماتریسی به صورت زیر معرفی کرد:

$$\Gamma F = R, \quad (1)$$

که R شامل متغیرهای معلوم و ماتریس F شامل متغیرهای مجهول و Γ ماتریس ضرایب است. ماتریس ضرایب Γ ، در روش فشرده مرتبه چهارم برای محاسبه

روش‌های به کار رفته، روش‌های تفاضل متناهی فشرده با دقت مرتبه زیاد (هرش، ۱۹۷۵؛ لِ، ۱۹۹۲) بیشتر مورد توجه قرار گرفته‌اند. در این خصوص از جمله می‌توان به تحقیقات قادر و اصفهانیان (۱۳۸۵)، اصفهانیان و قادر (۱۳۸۶)، ما و فو (۱۹۹۶)، فو و ما (۲۰۰۱)، نیهی و ایشی (۲۰۰۳)، اصفهانیان و همکاران (۲۰۰۵)، قادر و اصفهانیان (۲۰۰۶)، محب‌الحجه و دریچل (۲۰۰۷) و قادر و همکاران (۲۰۰۹) در مورد روش‌های آب‌فشرده مرتبه ششم (SCD6) و فشرده ترکیبی مرتبه ششم (CCD6) اشاره کرد. در راستای این تحقیقات، پژوهش حاضر به بررسی دقت طرحواره‌های مرتبه دوم مرکزی (E2S)، فشرده مرتبه چهارم (C4S)، آب‌فشرده مرتبه ششم (SCD6) و فشرده ترکیبی مرتبه ششم (CCD6) در حل عددی معادلات آب کم عمق غیرخطی می‌پردازد.

۲ روش فشرده ترکیبی مرتبه ششم

روش‌های فشرده از جمله ابزارهای قوی در شبیه‌سازی دینامیک شاره‌ها محسوب می‌شوند. نیومروف (۱۹۲۴) و فاکس و گودوین (۱۹۴۹) جز نخستین افرادی هستند که ایده اصلی این روش‌ها را عرضه کردند. با وجود این، معرفی این روش‌ها تحت عنوان روش فشرده و کاربرد آن در شبیه‌سازی‌ها پس از تحقیقات کریس و اولیگر (۱۹۷۲) و هیرش (۱۹۷۵) رواج یافت و در طی چندسال، بسیاری از محققان از جمله لِ (۱۹۹۲)، انواع گوناگونی از روش‌های فشرده با خواص تفکیک متفاوت را معرفی کردند. در روش‌های تفاضل محدود فشرده متقارن استاندارد، مثل روش پاده که یک روش فشرده مرتبه چهارم (C4S) است (هرش، ۱۹۷۵؛ لِ، ۱۹۹۲) و روش آب‌فشرده (ما و فو، ۱۹۹۶؛ اصفهانیان و همکاران، ۲۰۰۵؛ قادر و همکاران، ۲۰۰۹)، برای تقریب مشتق اول، از خود تابع و مشتقات فرد آن و برای تقریب مشتق دوم، از خود تابع و مشتقات زوج آن استفاده می‌شود. در مقابل، روش فشرده ترکیبی

جدول ۱. فرمول‌بندی طرحواره‌های مرتبه دوم مرکزی (E2S)، فشرده مرتبه چهارم (C4S)، آبرفشرده مرتبه ششم (SCD6) و فشرده ترکیبی مرتبه ششم (CCD6) برای محاسبه مشتق‌های اول و دوم یک تابع دلخواه مانند f . مشتقات با علامت پریم نمایش داده شده‌اند.

روش	فرمول‌بندی
E2S	$\begin{cases} f'_j = \frac{1}{2d}(f_{j+1} - f_{j-1}) \\ f''_j = \frac{1}{d^2}(f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1}) \end{cases}$
C4S	$\begin{cases} \frac{1}{6}f'_{j+1} + \frac{2}{3}f'_j + \frac{1}{6}f'_{j-1} = \frac{1}{2d}(f_{j+1} - f_{j-1}) \\ \frac{1}{12}f''_{j+1} + \frac{5}{6}f''_j + \frac{1}{12}f''_{j-1} = \frac{1}{d^2}(f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1}) \end{cases}$
SCD6	$\begin{cases} f'_j + \frac{d^2}{120}f'''_{j-1} + \frac{3d^2}{20}f'''_j + \frac{d^2}{120}f'''_{j+1} = \frac{1}{2d}(f_{j+1} - f_{j-1}) \\ -f'_{j-1} + 2f'_j - f'_{j+1} + \frac{d^2}{12}f'''_{j-1} + \frac{5d^2}{6}f'''_j + \frac{d^2}{12}f'''_{j+1} = 0 \\ f''_j + \frac{d^2}{360}f'''_{j-1} + \frac{7d^2}{90}f'''_j + \frac{d^2}{360}f'''_{j+1} = \frac{1}{d^2}(f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1}) \\ -f''_{j-1} + 2f''_j - f''_{j+1} + \frac{d^2}{12}f'''_{j-1} + \frac{5d^2}{6}f'''_j + \frac{d^2}{12}f'''_{j+1} = 0 \end{cases}$
CCD6	$\begin{cases} f'_j + \frac{7}{16}(f'_{j+1} + f'_{j-1}) - \frac{d}{16}(f''_{j+1} - f''_{j-1}) = \frac{15}{16d}(f_{j+1} - f_{j-1}) \\ f''_j - \frac{1}{8}(f''_{j+1} + f''_{j-1}) + \frac{9}{8d}(f'_{j+1} - f'_{j-1}) = \frac{3}{d^2}(f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1}) \end{cases}$

این به نوبه خود، می‌تواند موجب کاهش حجم محاسبات شود.

۳ معادلات آب کم عمق

معادلات آب کم عمق برای توصیف دینامیک محیطی با چگالی ثابت به کار می‌رود. در این مدل دو بُعدی ساده، معادلات تکانه در دو بُعد و معادله پایداری جرم برای یک شاره تراکم‌ناپذیر با در نظر گرفتن تقریب هیدروستاتیک نوشته شده و از چگالی شاره بالای آب صرف نظر می‌شود (گیل، ۱۹۸۲). به این ترتیب، معادلات آب کم عمق غیرخطی برحسب سرعت افقی $u(v)$ و ضخامت لایه (h) به شکل زیر در می‌آید:

مشتق اول یا دوم به صورت سه قطری و در روش آبرفشرده مرتبه ششم به صورت سه قطری بلوکی است. این ماتریس در فشرده ترکیبی مرتبه ششم نیز به صورت سه قطری بلوکی است، با این تفاوت که با حل آن، مشتق اول و دوم با هم محاسبه می‌شوند. باید توجه داشت که در روش فشرده ترکیبی مرتبه ششم، فقط یک ماتریس سه قطری بلوکی برای محاسبه مشتق‌های اول و دوم ایجاد می‌شود در حالی که این مسئله در مورد دو روش فشرده دیگر، به دو ماتریس افزایش می‌یابد. بنابراین، حجم محاسبات در روش فشرده ترکیبی تا حد زیادی کمتر از روش‌های فشرده مرتبه چهارم و فشرده ترکیبی مرتبه ششم است و

(۴)

$$\begin{cases} \frac{\partial \delta}{\partial t} + \mathcal{H} h' = f_0 (\zeta - fh') + 2J(u, v) - \nabla \cdot (\delta \mathbf{u}) = S_\delta, \\ \frac{\partial h'}{\partial t} + \delta = -\nabla \cdot (h' \mathbf{u}) = S_h, \end{cases}$$

که $\mathcal{H} = gH \nabla^2 - f_0^2$ عملگر هلمهولتز پیراسته است (دریچل و همکاران، ۱۹۹۹).

برای گسسته سازی بخش زمانی از روش سه ترازی لیپ فراگ استفاده شده است. آن گاه، فرمول بندی نیمه ضمنی به شکل زیر بیان می شود:

$$\begin{cases} \frac{\delta^{n+1} - \delta^{n-1}}{2\Delta t} + \mathcal{H} \bar{h}' = S_\delta^n \\ \frac{h'^{n+1} - h'^{n-1}}{2\Delta t} + \bar{\delta} = S_h^n \end{cases} \quad (۵)$$

که بالانویس n معرف مرحله زمانی است و $\bar{\delta}$ و \bar{h}' به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\begin{cases} \bar{\delta} = (\delta^{n+1} + \delta^{n-1})/2 \\ \bar{h}' = (h'^{n+1} + h'^{n-1})/2 \end{cases} \quad (۶)$$

با جاگذاری h'^{n+1} و δ^{n+1} از رابطه (۶)، رابطه (۵) به شکل زیر در می آید:

$$\begin{cases} \frac{\bar{\delta}}{\Delta t} - \frac{\delta^{n-1}}{\Delta t} + \mathcal{H} \bar{h}' = S_\delta^n \\ \frac{\bar{h}'}{\Delta t} - \frac{h'^{n-1}}{\Delta t} + \bar{\delta} = S_h^n \end{cases} \quad (۷)$$

با حذف $\bar{\delta}$ از رابطه فوق، معادله هلمهولتز پیراسته زیر بر حسب متغیر \bar{h}' به دست می آید:

$$\begin{aligned} \left(\frac{-1}{\Delta t^2} + \mathcal{H} \right) \bar{h}' &= \left(S_\delta^n + \frac{\delta^{n-1}}{\Delta t} \right) - \frac{1}{\Delta t} \left(S_h^n + \frac{h'^{n-1}}{\Delta t} \right), \\ \nabla^2 \bar{h}' + B \bar{h}' &= R, \\ B &= -\frac{1}{gH} \left(\frac{1}{\Delta t^2} + f_0^2 \right) \\ R &= \frac{1}{gH} \left[\left(\frac{\delta^{n-1}}{\Delta t} + S_\delta^n \right) - \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{h'^{n-1}}{\Delta t} + S_h^n \right) \right]. \end{aligned} \quad (۸)$$

پس از حل این معادله، می توان $\bar{\delta}$ را از رابطه (۷) به دست آورد. آن گاه با معلوم بودن \bar{h}' و $\bar{\delta}$ ، می توان با استفاده از رابطه (۶) h'^{n+1} و δ^{n+1} را محاسبه کرد.

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + f \mathbf{k} \times \mathbf{u} = -g \nabla h \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (h \mathbf{u}) = 0 \end{cases}, \quad (۲)$$

که f پارامتر کوریولیس، g شتاب گرانی و \mathbf{k} بردار یکه در راستای قائم است.

در این تحقیق، از معادلات آب کم عمق غیر خطی در شبکه Z (رنالد، ۱۹۹۴) بر حسب متغیرهای تاوایی $(\zeta = \mathbf{k} \cdot \nabla \times \mathbf{u})$ ، واگرایی $(\delta = \nabla \cdot \mathbf{u})$ و ارتفاع (h) با در نظر گرفتن تقریب صفحه f استفاده شده است. در این صورت، رابطه (۲) به شکل زیر در می آید:

$$\begin{cases} \frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\nabla \cdot [(\zeta + f_0) \mathbf{u}] \\ \frac{\partial \delta}{\partial t} + gH \nabla^2 h' = f_0 \zeta + 2J(u, v) - \nabla \cdot (\delta \mathbf{u}), \\ \frac{\partial h'}{\partial t} + \delta = -\nabla \cdot (h' \mathbf{u}) \end{cases}, \quad (۳)$$

که H ارتفاع میانگین (ضخامت میانگین لایه) است، ژاکوبی به صورت $J(u, v) = J \left(\frac{u, v}{x, y} \right) = \begin{vmatrix} \partial_x u & \partial_x v \\ \partial_y u & \partial_y v \end{vmatrix}$ متغیر h' بر طبق $h = H(1 + h')$ تعریف شده است. پایین نویس های x و y به ترتیب نشان دهنده مشتق نسبت به راستای شرق سو و شمال سو هستند.

۴ الگوریتم حل عددی

۴-۱ فرمول بندی حل معادلات واگرایی و ارتفاع

در این تحقیق، برای فرمول بندی بخش زمانی معادلات (۳)، از روش نیمه ضمنی استفاده شده است. برای این منظور، فقط آن بخش از معادلات که در انتشار امواج گرانی نقش دارند، به صورت نیمه ضمنی فرمول بندی می شوند. به این ترتیب، روابط زیر برای فرمول بندی نیمه ضمنی در نظر گرفته می شود که شامل روابط مربوط به تحول زمانی واگرایی و ارتفاع است:

متداول برای این منظور، افزودن آن به صورت یک جمله در معادله تاوایی در حل عددی است که به شکل اویلری در نظر گرفته می‌شود. به این ترتیب، پس از گسسته‌سازی زمانی با روش لیپ‌فراگ، فرمول‌بندی حل معادله تاوایی به شکل زیر در می‌آید:

$$\begin{cases} \zeta^{n+1} = \zeta^{*n+1} - 2\Delta t v (-\nabla^2)^k \zeta^{*n+1} \\ \zeta^{*n+1} = \zeta^{n-1} - 2\Delta t \nabla \cdot [(\zeta + f_0) \mathbf{u}]^n \end{cases} \quad (11)$$

که توان k یک عدد صحیح است و مقدار آن به روش عددی به کار گرفته شده بستگی دارد. جزئیات بیشتر مربوط به فرمول‌بندی رابطه (۱۱) را قادر و همکاران (۲۰۰۹) تشریح کرده‌اند. به طور کلی، هرچه از توان بزرگ‌تر استفاده شود، میزان پخش کمتری به معادله تاوایی اضافه خواهد شد. لازم به ذکر است که این جمله، در هنگام استفاده از توان ۲ با عنوان پخش و در توان‌های بزرگ‌تر از ۲ تحت عنوان فرایخش شناخته شده است. ضریب فرایخش v در رابطه فوق، عدد ثابت بسیار کوچکی است که بسته به تعداد نقاط شبکه n_g ، طبق رابطه زیر (دریچل و همکاران، ۱۹۹۹) برحسب داده‌های اولیه، محاسبه می‌شود:

$$v = \frac{HQ}{k_{\max}^6}, Q = \max \left| \frac{\zeta - f_0 h'}{h} \right|, k_{\max} = n_g / 2. \quad (12)$$

عامل دیگری که در ایجاد ناپایداری‌های عددی مؤثر است، نوع شبکه عددی به کار رفته است. در این میان، شبکه Z (رنдал، ۱۹۹۴) به کار رفته در تحقیق حاضر، با توجه به تحقیقات صورت گرفته (اصفهانیان و همکاران، ۲۰۰۵؛ گلشاهی و همکاران، ۲۰۱۱) دارای کمترین خطا است.

۳-۴ گام زمانی و پالایه زمانی

در حل عددی بهتر است که گام زمانی به اندازه کافی کوچک باشد تا سهم امواج گرانی در جواب‌ها به درستی در نظر گرفته شود. در واقع اگرچه استفاده از فرمول‌بندی

با توجه به روابط (۳) قبل از حل این معادلات، باید میدان سرعت در هر گام زمانی از روی تاوایی و واگرایی گام قبلی محاسبه شود. برای این منظور، تابع جریان (ψ) و پتانسیل سرعت (χ) به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\nabla^2 \psi = \zeta, \quad \nabla^2 \chi = \delta. \quad (9)$$

آن‌گاه با حل دو معادله پواسون فوق می‌توان میدان جریان را از رابطه زیر به دست آورد:

$$\mathbf{u} = \mathbf{k} \times \nabla \psi + \nabla \chi. \quad (10)$$

در این تحقیق، برای حل معادلات پواسون و هلمهولتز از روش شیب مزدوج استفاده شده است. در این روش، معادله پواسون و یا هلمهولتز به صورت $\mathcal{L}(\phi) = R$ در نظر گرفته می‌شود. آن‌گاه، با الگوریتم تکرار خاصی، سمت چپ معادله فوق به صفر میل می‌کند و میدان ϕ به دست می‌آید (اسمولارکوویچ و مارگولین، ۱۹۹۴). برای گسسته‌سازی مکانی معادلات پواسون و هلمهولتز [یعنی روابط (۸) و (۹)] نیز از روش‌های ذکر شده در جدول ۱ استفاده می‌شود.

۲-۴ فرمول‌بندی حل معادله تاوایی

فرمول‌بندی حل معادله تاوایی نقش مهمی در دقت نتایج حل عددی معادلات آب کم عمق برپایه متغیرهای تاوایی، واگرایی و ارتفاع ایفا می‌کند. برای شارش‌های موردنظر با تقریب خوبی سهم امواج گرانی - لختی در تحول میدان تاوایی ناچیز است و می‌توان معادله تاوایی را به روش‌های گوناگون گسسته‌سازی کرد. در این تحقیق، برای این معادله نیز مثل معادله‌های واگرایی و ارتفاع، از روش لیپ‌فراگ برای گسسته‌سازی زمانی استفاده شده است. برای مهار ناپایداری غیرخطی و طبق تجربیات عددی گذشته (دریچل و همکاران، ۱۹۹۹؛ قادر و همکاران، ۲۰۰۹) برای رفع این ناپایداری و کنترل خطا، مقداری پخش عددی به حل وارد می‌شود. یکی از روش‌های

کرد که در بسیاری از تحقیقات بعدی مورد استفاده قرار گرفته است. در این تحقیق، از یک جت مداری در حکم شرایط اولیه با تحول زمانی پیچیده، در ناحیه‌ای مربع شکل با مرزهای دوره‌ای در مختصات دکارتی برای حل معادلات آب کم عمق در صفحه f استفاده شده است (دریچل و همکاران، ۱۹۹۹؛ تودا و همکاران، ۲۰۰۹). در واقع، این شرایط اولیه برای شبیه‌سازی یک ناپایداری فشارورد براساس کمیت تاوایی پتانسیلی به کار گرفته می‌شود. در این حل عددی، ارتفاع میانگین $H=1$ ، شتاب گرانی $g=4\pi^2$ و پارامتر کوریولیس $f_0=4\pi$ برحسب $1/D_{av}$ در نظر گرفته شده است، به گونه‌ای که یکای زمان در انتگرال‌گیری برحسب روز و شعاع تغییر شکل دگرشکلی راسبی $\sqrt{gH}/f_0=0.5$ است.

جزئیات کامل در مورد این شرایط اولیه را دریچل و همکاران (۱۹۹۹) عرضه کرده‌اند. به صورت مختصر باید اشاره کرد که میدان تاوایی پتانسیلی اولیه در ناحیه مربع شکل $-\pi \leq x \leq \pi$ و $-\pi \leq y \leq \pi$ ، با رابطه زیر معرفی می‌شود:

$$q = \begin{cases} \bar{q} + Q \operatorname{sgn}(\bar{y})(0.5 - (|\bar{y}| - 0.5)) & |\bar{y}| < 1 \\ \bar{q} & |\bar{y}| \geq 1 \end{cases} \quad (14)$$

$$\bar{y} = y + c_m \sin mx + c_n \sin nx, \quad (15)$$

که $Q=4\pi$ دامنه پریشیدگی تاوایی پتانسیلی، \bar{q} میانگین تاوایی پتانسیلی در کل ناحیه به‌ازای میانگین تاوایی نسبی صفر است ($\bar{\zeta}=0$). در اینجا مقادیر $c_m=-0.1$ و $c_n=0.1$ به‌ازای $m=2$ و $n=3$ در نظر گرفته شده‌اند. لازم به ذکر است که در کار حاضر از شرایط اولیه با دامنه پریشیدگی کمتر نسبت به کار دریچل و همکاران (۱۹۹۹) و مطابق با آنچه که قادر و همکاران (۲۰۰۹) به کار برده‌اند، استفاده شده است و میدان‌های تاوایی، واگرایی و ارتفاع اولیه براساس توازن مرتبه سوم میدان واگرایی تعیین می‌شوند.

نیمه‌ضمنی برای حل معادلات واگرایی و ارتفاع، محدودیت پایداری طبق شرط عدد کورانت-فردریکس-لوی را بر مبنای امواج گرانی-لختی ندارد، ولی برای کاستن از اثرات منفی ناشی از فرمول‌بندی نیمه‌ضمنی در نمایش امواج گرانی-لختی، برای تعیین گام زمانی در کار حاضر از این شرط استفاده می‌شود. بنابراین بر طبق این شرط یعنی $\sqrt{gH} \Delta t / \Delta x \leq 1$ ، گام زمانی Δt محاسبه می‌شود که در آن Δx فاصله شبکه‌ای است که برای هر دو راستای x و y یکسان در نظر گرفته شده است. همچنین، باید توجه داشت که در روش لیپ‌فراگ، برای حفظ پایداری روش عددی بایستی از پالایه زمانی روبرت-آسلین نیز استفاده شود. این پالایه که در هر گام زمانی روی میدان‌های تاوایی، واگرایی و ارتفاع اعمال می‌شود، به صورت زیر برای تابع دلخواه ϕ داده شده است:

$$\bar{\phi}^n = \phi^n + \alpha(\phi^{n+1} - 2\phi^n + \bar{\phi}^{n-1}), \quad (13)$$

که ϕ^n مقدار تابع در گام زمانی n و $\bar{\phi}^n$ مقدار آن پس از اعمال پالایه است و α ضریب ثابتی است که با توجه به آزمایش عددی ممکن است عددی بین ۰/۰۵ تا ۰/۳ باشد. در کار حاضر از مقدار ۰/۰۵ استفاده شده است.

۴-۴ شرایط اولیه

در بررسی دقت و توانایی روش‌های مورد استفاده در شبیه‌سازی شارش‌های جوئی و اقیانوسی، با توجه به پیچیدگی این شارش‌ها باید برای حل معادلات از شرایط اولیه‌ای استفاده کرد که پیچیدگی‌های موجود در این شارش‌ها را در نظر بگیرد. اغلب شرایط اولیه تحلیلی به کار رفته برای معادلات آب کم عمق، پیچیدگی لازم را ندارند و از این رو نمی‌توانند ابزار مناسبی برای بررسی عملکرد یک روش عددی در شبیه‌سازی این شارش‌های پیچیده فراهم کنند. در این مورد می‌توان به آزمایش‌های عددی ویلیامسون و همکاران (۱۹۹۲) در هندسه کروی اشاره

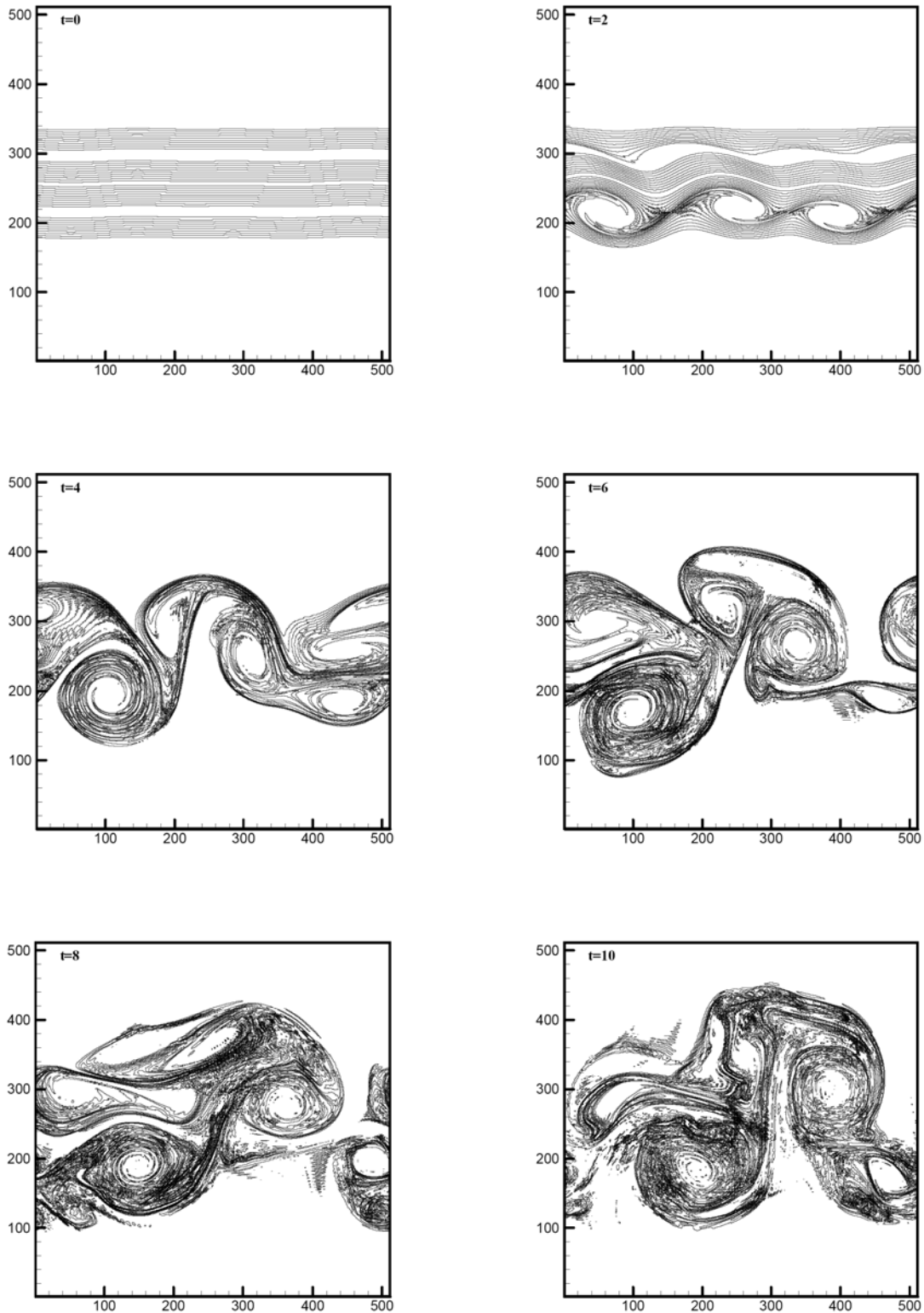
۵ نتایج حل عددی

در اینجا تحول زمانی شرایط اولیه موردنظر که یک جت مداری است، با استفاده از حل عددی معادلات آب کم عمق مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای همه طرحواره‌های به کار رفته، از چهار شبکه با تفکیک‌های ۶۴×۶۴ ، ۱۲۸×۱۲۸ ، ۲۵۶×۲۵۶ و ۵۱۲×۵۱۲ به ترتیب با گام‌های زمانی $۰/۰۱$ ، $۰/۰۰۵$ ، $۰/۰۰۲۵$ و $۰/۰۰۱۲۵$ (با توجه به نکات مورد اشاره در بخش ۴-۴) استفاده شده است. همچنین، ضریب $\alpha = ۰/۰۵$ برای پالایه زمانی روبرت-آسلین و توان $\kappa = ۳$ برای جمله فرایخش در نظر گرفته شده است. در شکل‌های ۱ تا ۴، میدان تاوایی پتانسیلی حاصل از این حل عددی برای مدت ۱۰ روز، به ترتیب با استفاده از روش‌های مرتبه دوم مرکزی، فشرده مرتبه چهارم، آب‌فشرده مرتبه ششم و فشرده ترکیبی مرتبه ششم در شبکه‌ای با تفکیک ۵۱۲×۵۱۲ آورده شده است. همان‌گونه که مشاهده می‌شود، میدان تاوایی پتانسیلی در ۵ روز اول انتگرال‌گیری دارای ساختار پیچیده شده و ساختارهای تاواری را می‌توان در آن مشاهده کرد. مقایسه کیفی نتایج به دست آمده برای روش‌ها نشان می‌دهد که روش مرتبه دوم دارای ضعیف‌ترین عملکرد بوده و حل عددی با نوفه بسیاری همراه است. این وضعیت، کم و بیش در روش فشرده مرتبه چهارم نیز مشاهده می‌شود، اگرچه عملکرد آن از روش مرتبه دوم مرکزی بهتر است. روش‌های فشرده ترکیبی مرتبه ششم و آب‌فشرده مرتبه ششم نیز دارای عملکرد مناسب هستند و از دیدگاه کیفی به صورت مشابه عمل کرده‌اند. البته مقایسه نحوه عملکرد روش‌ها به صورت کمی در بخش بعد مورد توجه قرار گرفته است.

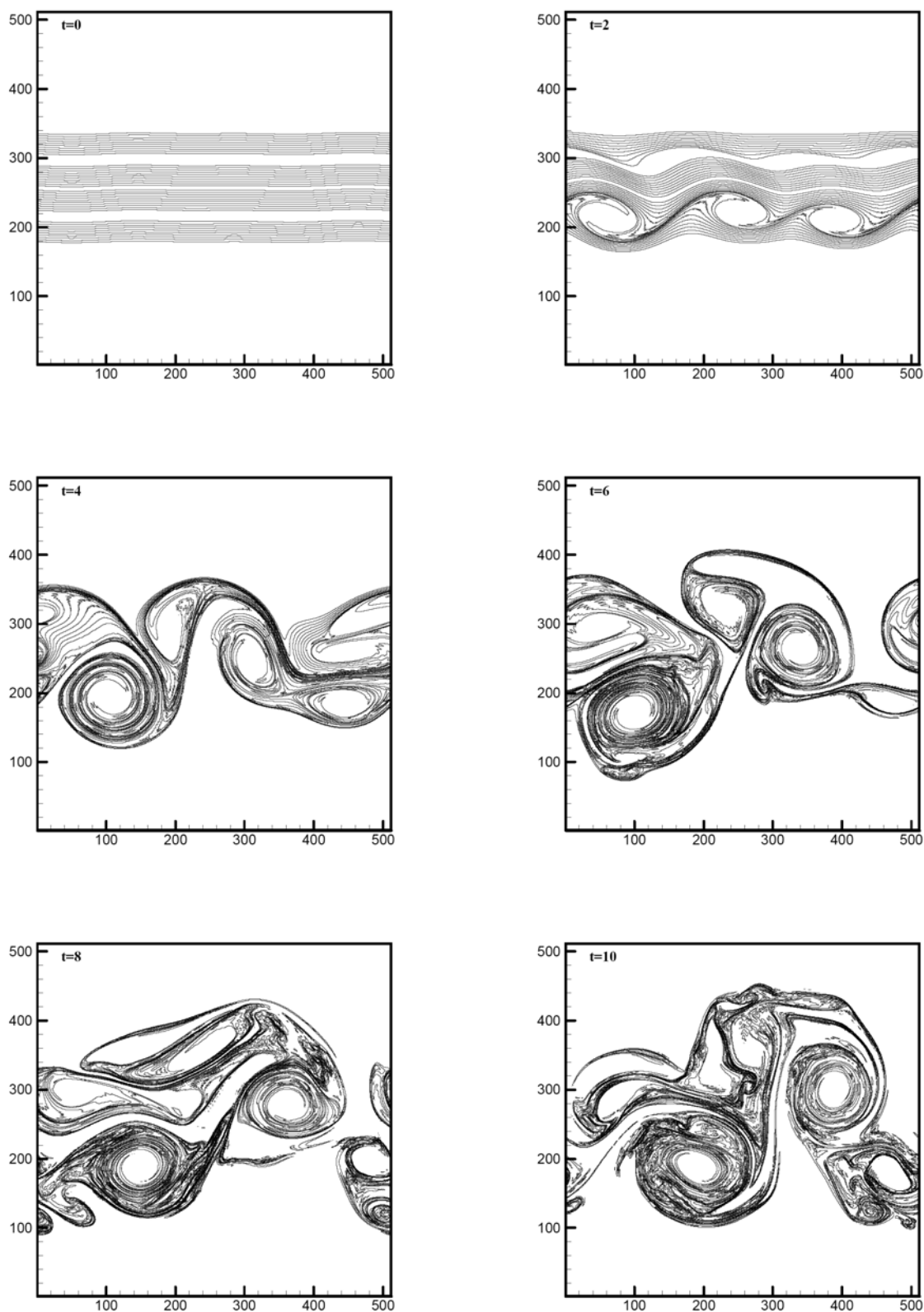
۱-۵ بررسی دقت

هدف اصلی پژوهش حاضر، مقایسه دقت روش فشرده ترکیبی ششم با روش‌های آب‌فشرده مرتبه ششم و طیفی‌وار

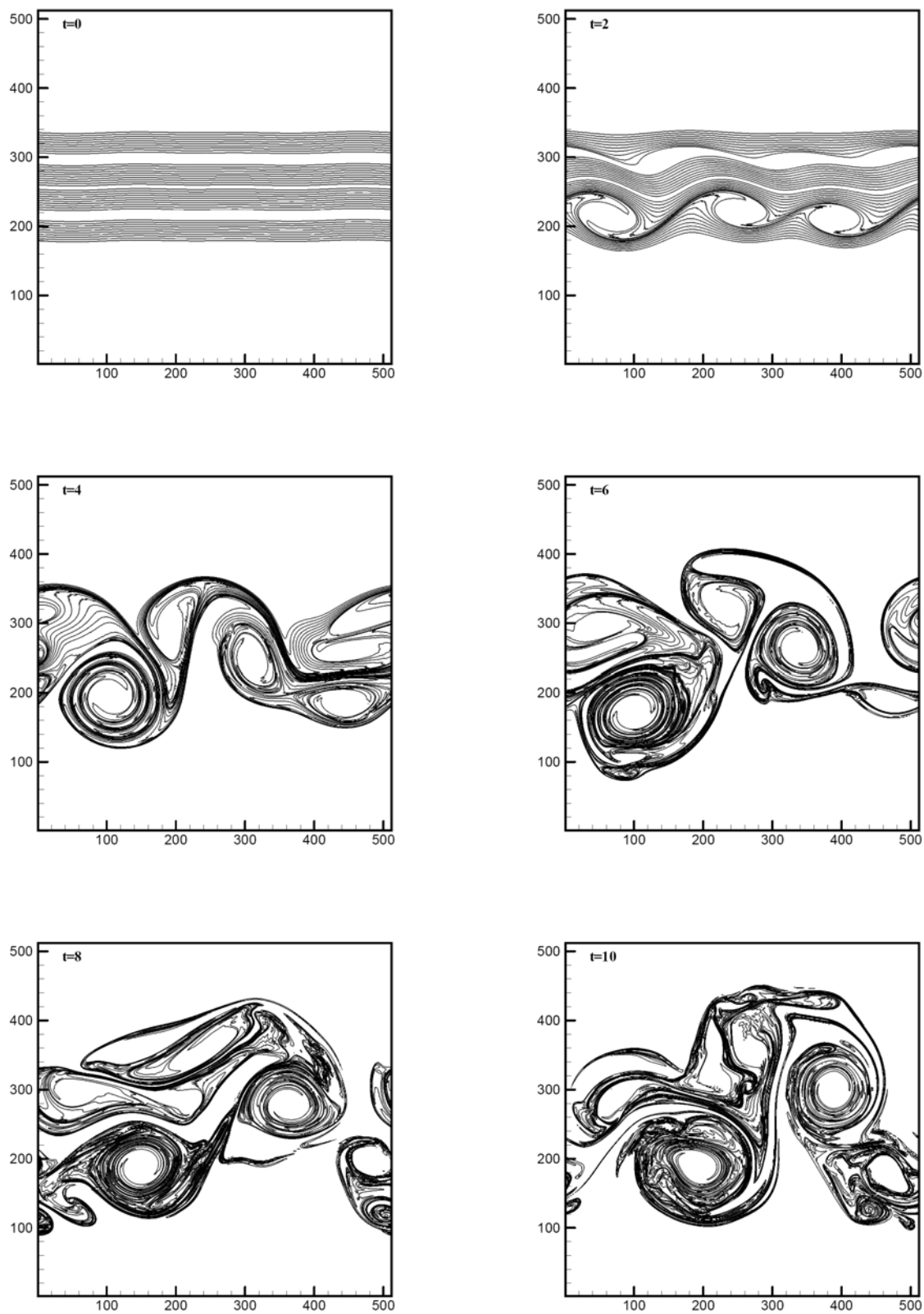
است. برای بررسی دقت نتایج به صورت کمی، توانایی هر یک از روش‌ها در پایسته نگه داشتن میزان جرم بین دو هم‌تراز تاوایی پتانسیلی مورد مقایسه قرار می‌گیرد و خطای جرم با توجه به میزان جرم میان این دو سطح هم‌تراز تعریف می‌شود. توضیحات کامل در مورد نحوه محاسبه خطای جرم را در پیچل و همکاران (۱۹۹۹) عرضه کرده‌اند. همان‌گونه که ذکر شد، مقایسه کیفی نتایج به دست آمده در شکل‌های ۱ تا ۴ نشان می‌دهد که روش‌های آب‌فشرده مرتبه ششم و فشرده ترکیبی مرتبه ششم، از دیدگاه دقت دارای عملکرد مناسب‌تری هستند. ولی مقایسه کیفی نتایج با یک روش با دقت بیشتر به منزله مبنای (در اینجا روش طیفی‌وار)، اطلاعات بیشتری را در اختیار ما قرار می‌دهد. شکل ۵ مقدار خطای جرم را برای روش‌های مرتبه دوم مرکزی، فشرده مرتبه چهارم، آب‌فشرده مرتبه ششم و فشرده ترکیبی مرتبه ششم نشان می‌دهد. همچنین نتایج روش طیفی‌وار (در پیچل و همکاران، ۱۹۹۹) نیز در این شکل در حکم مبنای مقایسه آورده شده است. شکل ۵ (الف) نشان‌دهنده تغییرات خطای جرم در روز دهم انتگرال‌گیری بر حسب تعداد نقاط شبکه (از ۶۴ تا ۵۱۲ نقطه) است. با توجه به شکل، می‌توان مشاهده کرد که روش مرتبه دوم مرکزی از این دیدگاه دارای بدترین عملکرد است، چرا که علاوه بر تولید خطای بیشتر نسبت به سایر روش‌ها، با افزایش تعداد نقاط شبکه به بیش از یک حد معین (۱۲۸ نقطه)، کاهش خطای جرم متوقف می‌شود و در عمل افزایش تفکیک باعث کاهش خطای این روش نمی‌شود. روش فشرده مرتبه چهارم اگرچه نسبت به روش مرتبه دوم مرکزی عملکرد مناسب‌تری دارد، ولی کم‌وبیش دارای شرایطی مشابه با این روش است؛ به ویژه، افزایش اختلاف خطای این روش با دو روش آب‌فشرده و فشرده ترکیبی هنگام افزایش تفکیک قابل توجه است. با توجه به شکل، عملکرد روش‌های آب‌فشرده و فشرده ترکیبی مرتبه ششم بسیار



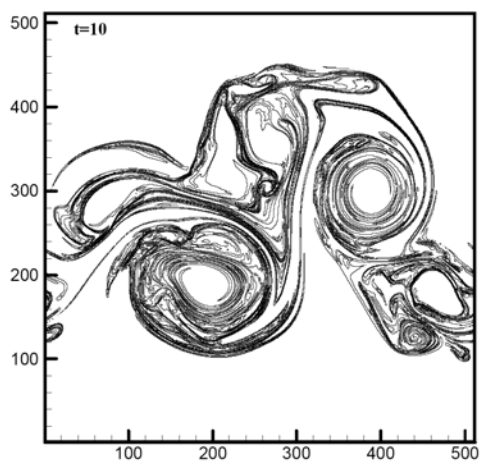
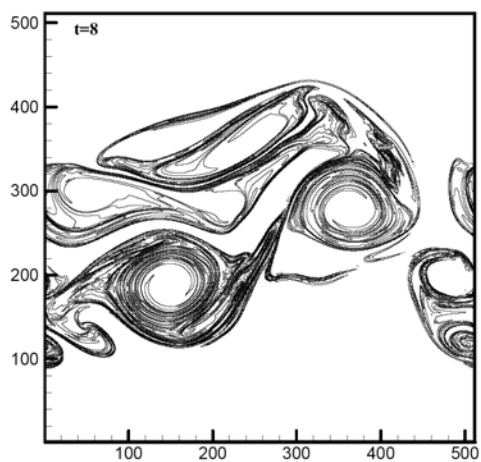
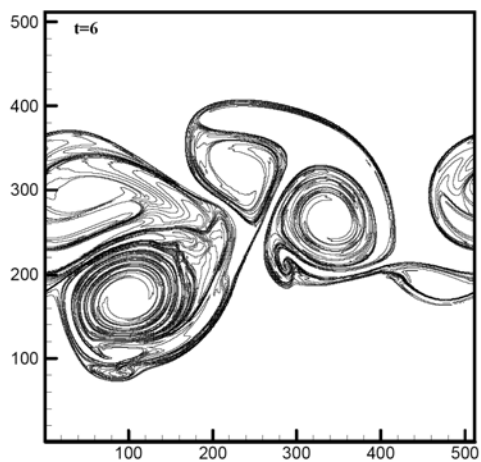
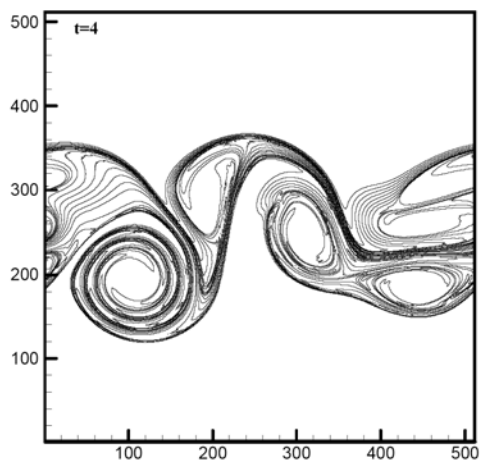
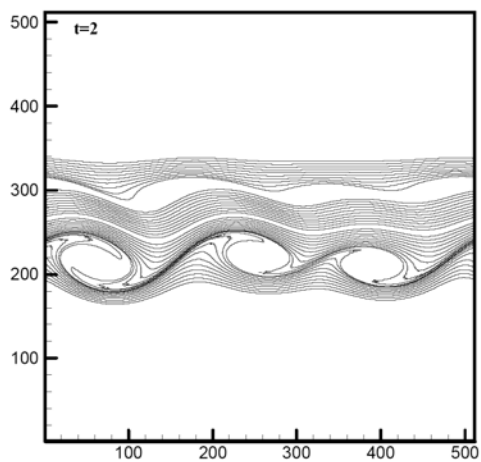
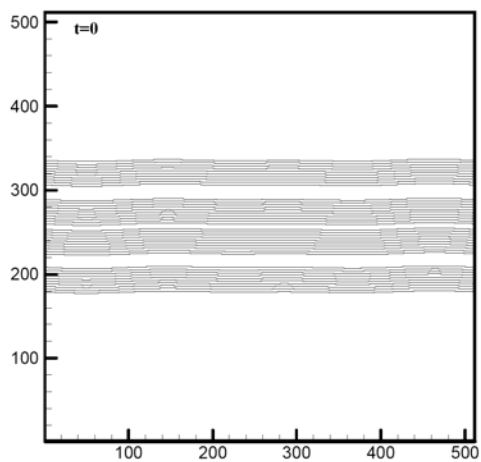
شکل ۱. تحول زمانی میدان تاوایی پتانسیلی در مدت ۱۰ روز با بازه زمانی ۲ روز به ازای تفکیک شبکه $n_g = 512$ ، برای روش مرتبه دوم مرکزی (E2S). محورهای افقی و قائم تعداد نقاط شبکه را در راستای X و Y نشان می‌دهند.



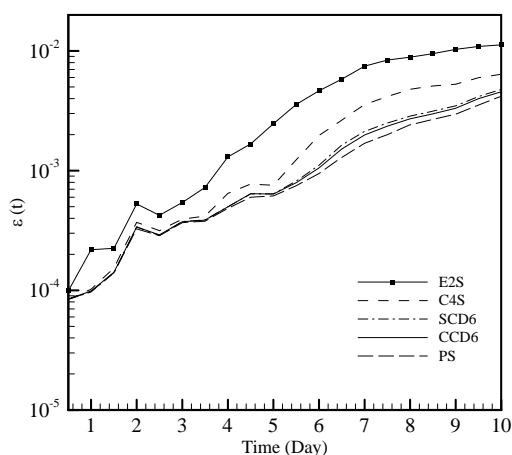
شکل ۲. مشابه شکل ۱ برای روش فشرده مرتبه چهارم (C4S).



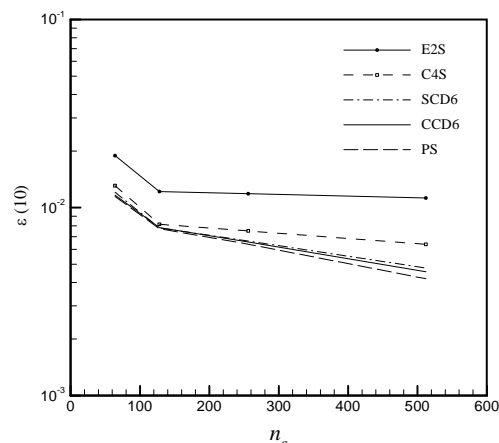
شکل ۳. مشابه شکل ۱ برای روش آبفشرده مرتبه ششم (SCD6).



شکل ۴. مشابه شکل ۱ برای روش فشرده ترکیبی مرتبه ششم (CCD6).



(ب)



(الف)

شکل ۵. خطای جرم برای روش‌های متفاوت (الف) برحسب تعداد نقاط شبکه در روز دهم انتگرال‌گیری، (ب) برحسب زمان برای شبکه‌ای با تفکیک 512×512 .

ششم به جواب‌های روش طیفی‌وار، نتیجه امیدوارکننده‌ای است و حکایت از توانایی مناسب روش پیش‌گفته دارد.

۶ نتیجه‌گیری

در پژوهش حاضر، حل عددی معادلات آب کم عمق غیرخطی در صفحه f برحسب متغیرهای ارتفاع، واگرایی و تاوایی با استفاده از روش‌های تفاضل متناهی مرتبه دوم مرکزی، فشرده مرتبه چهارم، آب‌فشرده مرتبه ششم و فشرده ترکیبی مرتبه ششم مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج به دست آمده و مقایسه آنها با روش طیفی‌وار نشان می‌دهد که روش فشرده ترکیبی مرتبه ششم در شبیه‌سازی شارش‌های پیچیده توانایی زیادی دارد. نزدیکی بسیار زیاد نتایج روش فشرده ترکیبی به نتایج روش طیفی‌وار موید این نکته است. همچنین، روش فشرده ترکیبی مرتبه ششم با برخورداری از حجم محاسبات کمتر، گزینه مناسب‌تری نسبت به سایر روش‌های مورد استفاده در حل معادلات آب کم عمق غیرخطی برای

نزدیک به روش طیفی‌وار است؛ البته خطای روش فشرده ترکیبی مرتبه ششم قدری نسبت به روش آب‌فشرده هم مرتبه کمتر است. نکته دیگر آنکه نتایج این دو روش در تفکیک‌های کم بسیار به روش طیفی‌وار نزدیک است، ولی با افزایش تفکیک قدری از روش طیفی‌وار فاصله می‌گیرند. شکل ۵ (ب) نیز تحول زمانی خطای جرم برای شبکه با تفکیک 512 را برای همه روش‌های مورد بررسی نشان می‌دهد. در این شکل می‌توان مشاهده کرد که روش مرتبه دوم مرکزی از همان ابتدای کار دارای خطای زیاد است. همچنین خطای روش فشرده مرتبه چهارم از روز پنجم انتگرال‌گیری (یعنی همان زمانی که شارش مورد بررسی دارای پیچیدگی بیشتری می‌شود) زیادتر می‌شود و از دو روش آب‌فشرده و فشرده ترکیبی فاصله می‌گیرد.

در نهایت، برای جمع‌بندی باید ذکر کرد که در بین روش‌های تفاضل متناهی مورد بررسی در کار حاضر، روش فشرده ترکیبی مرتبه ششم دقت بیشتری دارد. به علاوه، نزدیکی جواب‌های روش فشرده ترکیبی مرتبه

- Dritschel, D. G., and Ambaum, M. H. P., 2006, The diabatic contour advective semi-lagrangian model: *Mon. Wea. Rev.*, **134**, 2503-2514.
- Dritschel, D. G., and McIntyre, M. E., 2008, Multiple jets as PV staircases: the Phillips effect and the resilience of eddy-transport barriers: *J. Atmos. Sci.*, **65**, 855-874.
- Esfahanian, V., Ghader, S., and Mohebalhojeh, A. R., 2005, On the use of super compact scheme for spatial differencing in numerical models of the atmosphere: *Q. J. Roy. Meteorol. Soc.*, **131**, 2109-2130.
- Fox, L., and Goodwin, E. T., 1949, Some new methods for the numerical integration of ordinary differential equations: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **45**, 373-388.
- Fu, D., and Ma, Y., 2001, Analysis of super compact finite difference method and application to simulation of vortex-shock interaction: *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **36**, 773-805.
- Galewsky, J., Scott, R. K., and Polvani, L. M., 2004, An initial-value problem for testing numerical models of the global shallow-water equations: *Tellus*, **56A**, 429-440.
- Ghader, S., and Esfahanian, V., 2006, Generalized combined compact differencing method: *WSEAS Transactions on Fluid Mechanics*, **1**(5), 445-449.
- Ghader, S., Mohebalhojeh, A. R., and Esfahanian, V., 2009, On the spectral convergence of the supercompact finite-difference schemes for the f-plane shallow-water equations: *Mon. Wea. Rev.*, **137**, 2393-2406.
- Gill, A. E., 1982, *Atmosphere-Ocean Dynamics*: Academic Press, 662pp.
- Golshahy, H., Ghader, S., and Ahmadi-Givi, F., 2011, Accuracy assessment of the super compact and combined compact schemes for spatial differencing of a two-layer oceanic model: Presentation of linear inertia-gravity and Rossby waves: *Ocean Modelling*, **37**, 49-63.
- Hirsh, R. S., 1975, Higher order accurate difference solutions of fluid mechanics problems by a compact differencing technique: *Journal of Computational Physics*, **19**, 90-109.
- Kreiss, H. O., and Oliger, J., 1972, Comparison of accurate methods for the integration of hyperbolic equations: *Tellus*, **24**, 199-215.
- شیهه‌سازی شارش‌های جوئی و اقیانوسی پیچیده محسوب می‌شود.
- تشکر و قدردانی
- نگارندگان مقاله از دانشگاه تهران و دانشگاه آزاد اسلامی واحد شوشتر به خاطر حمایت از این کار تشکر می‌نمایند.
- منابع
- اصفهانیان، و.، و قادر، س.، ۱۳۸۶، بررسی دقت روش‌های فشرده و آبرفشرده در گسسته‌سازی مکانی معادلات آب کم‌عمق خطی شده: *مجله فیزیک زمین و فضا*، **۳۳**(۱)، ۱۰۷-۱۱۸.
- قادر، س.، و اصفهانیان، و.، ۱۳۸۵، حل عددی شکل پایستار معادلات آب کم‌عمق با روش آبرفشرده مرتبه ششم: *مجله فیزیک زمین و فضا*، **۳۲**(۲)، ۳۱-۴۴.
- Baldwin, M. P., Rhines, P. B., Huang, H-P., and McIntyre, M. E., 2007, The Jet-Stream Conundrum: *Science*, **315**, 467-468.
- Cho, J. Y-K., and Polvani, L. M., 1996a, The emergence of jets and vortices in freely-evolving shallow-water turbulence on a sphere: *Physics of Fluids*, **8**, 1531-1552.
- Cho, J. Y-K., de la Torre Juarez, M., Ingersoll, A. P., and Dritschel, D. G., 2001, A high-resolution, three-dimensional model of Jupiter's Great Red Spot: *Journal of Geophysical Research*, **106**, 5099-5105.
- Chu, P. C., and Fan, C., 1998, A three-point combined compact difference scheme: *Journal of Computational Physics*, **140**, 370-399.
- Chu, P. C., and Fan, C., 1999, A three-point sixth-order non-uniform combined compact difference scheme: *Journal of Computational Physics*, **148**, 663-674.
- Chu, P. C., and Fan, C., 2000, A three-point sixth-order staggered combined compact difference scheme: *Mathematical and Computer Modelling*, **32**, 323-340.
- Dritschel, D. G., Polvani, L. M., and Mohebalhojeh, A. R., 1999, The contour-advective semi-lagrangian algorithm for the shallow-water equations: *Mon. Wea. Rev.*, **127**, 1151-1165.

- Toda, K., Ogata Y., and Yabe, T., 2009, Multi-dimensional conservative semi-Lagrangian method of characteristics CIP for the shallow water equations: *Journal of Computational Physics*, **228**, 4917–4944.
- Vallis, G. K., and Maltrud, M. E., 1993, Generation of mean flows on a beta plane and over topography: *J. Phys. Oceanogr.*, **23**, 1346–1362.
- Williamson, D. L., Drake, J. B., Hack, J. J., Jakob-Chien, R., and Swarztrauber, P. N., 1992, A standard test set for numerical approximations to the shallow water equations in spherical equations in spherical geometry: *Journal of Computational Physics*, **102**, 211–224.
- World Meteorological Organization, 2007, Scientific Assessment of Ozone Depletion 2006, (Global Ozone Research and Monitoring Project - Report No. 50), Geneva: World Meteorological Organization.
- Hsu, S. K., Yeh, Y., and Doo, B., 2007, A derivative-based interpretation approach to estimating source parameters of simple 2D magnetic sources from Euler deconvolution the analytic-signal method and analytical expressions of the anomalies: *Geophysical prospecting*, **55**, 255–264.
- Keating, P., and Pilkington, M., 2004, Euler deconvolution of the analytic signal and its application to magnetic interpretation: *Geophysical Prospecting*, **52**, 165–182.
- Lele, S. k., 1992, Compact finite difference scheme with spectral-like resolution: *Journal of Computational Physics*, **103**, 16–42.
- Ma, Y., and Fu, D., 1996, Super compact finite difference method (SCFDM) with arbitrary high accuracy: *Computation Fluid Dynamics Journal*, **5**, 259–276.
- Mohebalhojeh, A. R., and Dritschel D. G., 2000, On the representation of gravity waves in numerical models of the shallow water equations: *Q. J. Roy. Meteorol. Soc.*, **126**, 669–688.
- Mohebalhojeh, A. R., and Dritschel, D. G., 2007, Assessing the numerical accuracy of complex spherical shallow-water flows: *Mon. Wea. Rev.*, **135**, 3876–3894.
- Nihei, T., and Ishii, K., 2003, A fast solver of the shallow water equations on a sphere using a combined compact difference scheme: *Journal of Computational Physics*, **187**, 639–659.
- Numerov, B. V., 1924, A method of extrapolation of perturbations: *Monthly Notices Royal Astronomical Society*, **84**, 592–601.
- Randall, D. A., 1994, Geostrophic adjustment and the finite-difference shallow-water equations: *Mon. Wea. Rev.*, **122**, 1371–1377.
- Sengupta, T. K., Lakshmanan, V., and Vijay, V. V. S. N., 2009, A new combined stable and dispersion relation preserving compact scheme for non-periodic problems: *Journal of Computational Physics*, **228**, 3048–3071.
- Smolarkiewicz, P. K., and Margolin, L. G., 1994, Variational solver for elliptic problems in atmospheric flows: *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, **4**, 527–551.