

## مقایسه روش‌های مختلف تعیین سطح تصحیح ارتفاع ژئودتیک: مطالعه موردی شهر تهران

سپیده رهبر<sup>1</sup> و محمدعلی شریفی<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup> کارشناس ارشد مهندسی نقشه‌برداری، دانشکده مهندسی نقشه‌برداری و اطلاعات مکانی، دانشگاه تهران، ایران  
<sup>2</sup> دانشیار، دانشکده مهندسی نقشه‌برداری و اطلاعات مکانی، پردیس دانشکده‌های فنی دانشگاه تهران، ایران

(تاریخ دریافت: 94/03/05، تاریخ پذیرش: 95/02/05)

### چکیده:

در طول دهه‌های گذشته، استفاده از سامانه تعیین موقعیت ماهواره‌ای (GPS) در بسیاری از فعالیت‌های ژئودزی، ژئوفیزیک و نقشه‌برداری توسعه پیدا کرده است. به کمک اندازه‌گیری‌های GPS، صرفه‌جویی در زمان، هزینه و نیروی کار حاصل می‌شود. از طرفی ارتفاع بیضوی به دست آمده از GPS، یک ارتفاع هندسی بوده و قادر به تأمین نیازهای کاربردی مهندسی نمی‌باشد و به همین دلیل تبدیل به نوع دیگری از ارتفاع به نام ارتفاع ارتومتریک نیاز است. برای انجام تبدیل بین ارتفاعات بیضوی و ارتفاعات ارتومتریک، سطح تصحیح ارتفاع ژئودتیک تعریف می‌گردد. با توجه به داده‌های دردسترس و همچنین دقت مورد نیاز، دو روش کلی برای انجام تبدیل بین ارتفاعات بیضوی و ارتومتریک وجود دارد که عبارتند از روش گرانی‌سنجی و روش هندسی. در روش گرانی‌سنجی از تلفیق داده‌های زمینی و مدل‌های ژئوپتانسیلی جهانی برای تعیین سطح تصحیح استفاده می‌گردد. در روش هندسی از داده‌های GPS/Leveling در یک سری نقاط پنج‌مارک استفاده، نوسانات ژئوئید در این نقاط محاسبه و سپس با به‌کارگیری روش‌های درون‌یابی، سطح تصحیح ارتفاع ژئودتیک محاسبه می‌شود. در تحقیق حاضر، از روش هندسی به منظور تعیین سطح تصحیح استفاده شده است. توابع پایه شعاعی یکی از روش‌های مورد استفاده برای درون‌یابی داده‌های پراکنده می‌باشند. این روش شامل کرنل‌های مختلفی بوده که در این تحقیق از کرنل‌های مولتی‌کوادریک و اسپلاین صفحه نازک استفاده گشته است. همچنین شبکه عصبی مصنوعی به‌عنوان روشی دیگر برای تبدیل ارتفاعات بیضوی به ارتفاعات ارتومتریک اعمال شده است. شبکه‌های عصبی نیز شامل انواع مختلفی هستند که با توجه به اینکه شبکه عصبی پرسپترون بیشترین کاربرد را برای درون‌یابی داراست، از این شبکه برای تعیین سطح تصحیح استفاده شده است. در نهایت به‌عنوان مطالعه موردی، داده‌های شهر تهران مورد بررسی قرار گرفته‌اند. از 147 نقطه مینا که به صورت پراکنده در محدوده شهر تهران توزیع یافته‌اند برای محاسبه نوسانات ژئوئید استفاده شده و سطح تصحیح ارتفاع ژئودتیک در شهر تهران به کمک روش‌های ذکر شده محاسبه گشته است. در نهایت مجذور میانگین مربعات (RMS) حاصل از روش‌ها با یکدیگر مقایسه شده و روش با کمترین مقدار RMS به‌عنوان دقیق‌ترین روش انتخاب شده است. با توجه به نتایج حاصل، اسپلاین صفحه نازک نتایج دقیق‌تری را برای داده‌های شهر تهران ارائه داده است.

**واژه‌های کلیدی:** GPS/leveling، درون‌یابی، تابع پایه شعاعی، مولتی‌کوادریک، اسپلاین صفحه نازک، شبکه عصبی مصنوعی

## 1 مقدمه

این دو روش شامل روش گرانی‌سنجی و روش هندسی می‌باشد. در روش اول ارتفاع ژئوئید از تلفیق داده‌های زمینی و مدل‌های ژئوپتانسیلی جهانی حاصل از مأموریت‌های ماهواره‌ای نظیر GOCE، CHAMP و GRACE، محاسبه می‌شود. برای تعیین ژئوئید در یک منطقه به‌نسبت کوچک می‌توان از تلفیق ارتفاعات حاصل از GPS و ارتفاعات ارتومتریک استفاده کرد که به این روش، روش هندسی گفته می‌شود. به این معنی که ابتدا در یک سری نقاط مبنا ارتفاعات بیضوی و ارتومتریک به‌دست آمده و با استفاده از رابطه (1)، ارتفاعات ژئوئید در این نقاط محاسبه می‌شوند. در نهایت، می‌توان به کمک درون‌یابی، ارتفاع ژئوئید را در هر نقطه دیگر به‌دست آورد و بدین ترتیب سطح تصحیح ارتفاع ژئودتیک حاصل می‌شود:

$$N = h - H, \quad (1)$$

که  $N$  ارتفاع ژئوئید،  $h$  ارتفاع بیضوی و  $H$  ارتفاع ارتومتریک است. ارتباط میان این سه ارتفاع را می‌توان در شکل 1 مشاهده کرد. به دلیل وجود عوامل مختلفی مانند بی‌ثباتی داده، خطاهای تصادفی و تأثیرات سامان‌مند در ارتفاعات به‌دست آمده، تأثیرات متغیر با زمان و همچنین تمامی فرضیه‌ها و تخمین‌هایی که در محاسبه سه ارتفاع به‌کار گرفته می‌شوند، تلفیق این سه نوع ارتفاع ناهمگون در عمل دقیقاً صفر نخواهد بود. در کاربردهای عملیاتی این ناهمگونی‌ها با استفاده از سطح تصحیح، مدل می‌شوند (رایزنر، 2008).

فناهای مختلفی برای تعیین سطح تصحیح به روش هندسی وجود دارند. از جمله این روش‌ها می‌توان کریچینگ، چندجمله‌ای، شبکه عصبی مصنوعی، توابع پایه شعاعی را نام برد که در هر یک از این زمینه‌ها تحقیقات بسیاری انجام گشته است. ادمن (2006) به

امروزه با توجه به پیشرفت فناوری، استفاده از سامانه تعیین موقعیت ماهواره‌ای (GPS)، برای تعیین موقعیت سه‌بعدی نقاط، بسیار گسترده شده است. GPS مختصات ژئودتیک نقاط شامل طول و عرض ژئودتیک و ارتفاع بیضوی را در اختیار قرار می‌دهد. ارتفاع بیضوی حاصل از GPS، یک ارتفاع هندسی و فاقد معنای فیزیکی بوده و در بسیاری از فعالیت‌های مهندسی از نوع دیگری ارتفاع به نام ارتفاع ارتومتریک که دارای معنای فیزیکی است، استفاده می‌شود. برای نمونه در مهندسی عمران از ارتفاعات ارتومتریک برای تعیین جهت جریان آب، ساخت‌وساز و طرح‌های زیرسازی استفاده می‌شود. همچنین تعیین دقیق ارتفاع در زمینه کشاورزی می‌تواند در هدایت مؤثرتر تجهیزات و اعمال کود، مورد استفاده قرار گیرد که منجر به صرفه‌جویی و کاهش تأثیر کودهای شیمیایی که به رودخانه‌ها و دریاچه‌های بزرگ راه پیدا می‌کنند، می‌گردد. ارتفاع ارتومتریک از تلفیق ترازیابی و اندازه‌گیری‌های گرانی به‌دست می‌آید. عملیات ترازیابی با وجود دارا بودن دقت بالا صرف زمان، هزینه و نیروی کار زیادی را موجب می‌شود. در نتیجه، می‌بایست به دنبال راه‌حلی بود تا بتوان ارتفاع بیضوی را به ارتفاع ارتومتریک تبدیل کرد.

برای انجام تبدیل بین ارتفاعات بیضوی و ارتفاعات ارتومتریک کفایت که نوسانات ژئوئید از بیضوی را بدانیم. مدل ژئوئید با دقت بالا برای تبدیل ارتفاعات بیضوی حاصل از GPS به ارتفاعات ارتومتریک کاربرد بسیاری دارد. تلفیق ارتفاعات بیضوی حاصل از GPS و مدل ژئوئید دقیق می‌تواند یک روش جدید جایگزین برای تعیین ارتفاعات ارتومتریک باشد (گولو و همکاران، 2011).

با توجه به میزان دردسترس بودن داده‌ها و دقت مورد نظر، دو روش کلی برای تعیین مدل ژئوئید وجود دارد.

مدل ژئوئید محلی را برای قسمتی از ترکیه با استفاده از داده‌های GPS/Leveling به دست آورده‌اند. سپس از روش درون‌یابی به کمک شبکه عصبی پرسپترون چندلایه که بیشترین کاربرد را نسبت به انواع دیگر شبکه‌های عصبی داراست، برای تبدیل ارتفاعات بیضوی به ارتفاعات ارتومتریک استفاده کرده و در نتیجه مدل ژئوئید محلی را با همان داده‌ها به دست آورده‌اند.

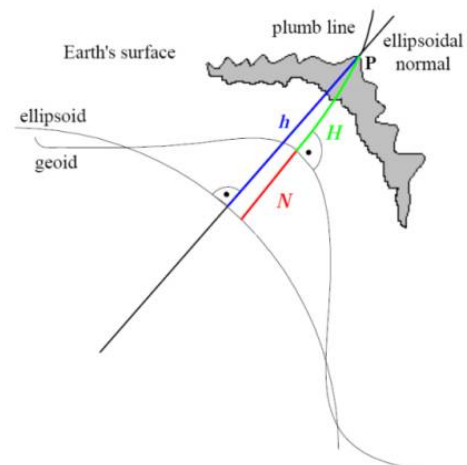
همچنین خضرائی و همکاران (1393) با استفاده از روش‌های وایزش چندجمله‌ای، شبکه عصبی و سامانه‌های استنتاجی فازی-عصبی به تعیین دقیق ژئوئید محلی در شاهین‌شهر اصفهان پرداخته و به دقت کمتر از یک سانتیمتر دست یافته‌اند. البته ریشه این دقت را می‌توان ابعاد کوچک منطقه مطالعاتی و تراکم ایستگاه‌های GPS/Leveling که داده‌های نمونه با کیفیتی برای این پژوهش فراهم ساخته، دانست.

در تحقیق حاضر، روش توابع پایه شعاعی نظیر مولتی‌کوادریک (MQ) و اسپلاین صفحه نازک (TPS) و همچنین شبکه عصبی پرسپترون به کار گرفته شده‌اند. ابتدا توضیحات کامل در مورد روش‌های مورد استفاده در تحقیق و روابط مربوط به آنها آمده است و در نهایت به‌عنوان مطالعه موردی، داده‌های شهر تهران مورد بررسی و نتایج به دست آمده مورد بحث قرار خواهند گرفت.

## 2 روش توابع پایه شعاعی

روش توابع پایه شعاعی را اولین بار هاردی برای درون‌یابی داده‌های سطح استفاده کرد. تابع پایه شعاعی به صورت جمع وزن‌دار تبدیلات تابع پایه متقارن شعاعی تعریف می‌شود (رایزنر، 2008). مجموعه‌ای از  $n_0$  نقطه داده متمایز  $x_k \in \mathbb{R}^n$  و مقادیر مشاهداتی مربوطه  $f(x_k)$  را در نظر بگیرید. تابع پایه شعاعی که برای درون‌یابی مورد استفاده قرار می‌گیرد مطابق رابطه (2) تعریف می‌شود (شریفی، 2006):

کمک روش مولتی‌کوادریک (MQ) و از تلفیق ارتفاعات ارتومتریک، بیضوی و گرانی‌سنجی، یک سطح مبنای ارتفاعی برای کشور هلند به دست آورد که امکان تبدیل ارتفاعات GPS به ارتفاعات ارتومتریک را فراهم نماید. ورونیز و همکاران (2006) مدل ژئوئید برزیل را به کمک شبکه عصبی پرسپترون چندلایه به دست آورده‌اند. رایزنر (2008) با به کارگیری مدل‌های پارامتری و تلفیق بهینه ارتفاعات ژئوئید، بیضوی و ارتومتریک، به تعیین سطح تصحیح ارتفاعی کانادا پرداخته و برای دستیابی به همبستگی مناسب بین پارامترهای مدل، از فرایند متعامدسازی گرام-اشمیت استفاده کرده و همچنین به عنوان روشی دیگر، از توابع پایه شعاعی برای تعیین مدل ژئوئید کانادا استفاده کرده است.



شکل 1. ارتباط میان ارتفاع بیضوی، ارتفاع ارتومتریک و ارتفاع ژئوئید (رایزنر، 2008).

کاکیر (2011) در دو منطقه کارامان و رایز، به ترتیب واقع در شمال و جنوب ترکیه که از نظر توپوگرافی کاملاً با یکدیگر متفاوت هستند، از روش‌های مولتی‌کوادریک و اسپلاین صفحه نازک برای تعیین ارتفاعات ارتومتریک توسط اندازه‌گیری‌های GPS استفاده کرده است. گولو و همکاران (2011) ابتدا به کمک روش‌های درون‌یابی از جمله روش چندجمله‌ای، کریجینگ و توابع پایه شعاعی

$$P^T \alpha = 0. \quad (7)$$

تلفیق شرط‌های درونیابی و معادلات اضافی منجر به ایجاد یک دستگاه خطی معادلات مطابق رابطه (8) می‌شود:

$$\begin{pmatrix} A & P \\ P^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

که A ماتریس طرح می‌باشد. انواع مختلفی از کرنل‌ها برای درونیابی به روش توابع پایه شعاعی وجود دارد که در این مقاله از روش مولتی‌کوادریک (MQ) و اسپلین صفحه نازک (TPS) استفاده شده است.

## 1-2 درونیابی به روش مولتی‌کوادریک

برای مجموعه‌ای از  $n_0$  داده متمایز درونیابی به روش مولتی‌کوادریک به کمک رابطه (9) بیان می‌شود (شریفی، 2006):

$$\begin{aligned} \tilde{f}^{MQ}(X) &= \sum_{k=1}^{n_0} \alpha_k \Phi_k(X, X_k, c^2) \\ &= \sum_{k=1}^{n_0} \alpha_k \sqrt{c^2 + \|X - X_k\|^2}, \end{aligned} \quad (9)$$

که  $\| \cdot \|$  بیانگر فاصله اقلیدسی و  $c^2$  پارامتر شکل می‌باشد. از آنجایی که مختصات ژئودتیک  $(\varphi, \lambda, h)$  نقاط در اختیار بوده و با توجه به مطالب مربوط به توابع پایه شعاعی افزوده می‌توان رابطه MQ را به صورت معادله (10) بیان کرد (ادمن، 2006):

$$\begin{aligned} N(\lambda, \varphi) &= \sum_{k=1}^{n_0} \alpha_k \Phi_k(\lambda, \varphi, \lambda_i, \varphi_i) + \\ &\sum_{i=1}^3 \beta_i p_i(\lambda, \varphi), \end{aligned} \quad (10)$$

که در رابطه بالا از تابع چندجمله‌ای درجه اول استفاده شده است. کرنل تابع شعاعی MQ با رابطه (11) تعریف

$$\tilde{f}^{RBF}(X) = \sum_{k=1}^{n_0} \alpha_k \Phi_k(\rho), \quad (2)$$

که  $\Phi_k(\rho)$  تابع کرنل درونیابی می‌باشد. این تابع تنها وابسته به فاصله اقلیدسی از مبدأ  $X_i$ ، داده  $i$ ام می‌باشد:

$$\begin{aligned} \rho &= X - X_i = \\ &\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}, \end{aligned} \quad (3)$$

$i = 1, \dots, n_0$

که  $\alpha_k$  ضرایب نامعلوم بسط و هر کدام متعلق به یکی از مراکز داده هستند و از طریق دستگاه معادلات خطی (4) با مقادیر ورودی  $a_{ij} = \Phi_i(\rho_j) = X_i - X_j$  قابل محاسبه هستند (شریفی، 2006):

$$A_{n_0 \times n_0} \alpha_{n_0 \times 1} = I_{n_0 \times 1}. \quad (4)$$

برخلاف رابطه (2) که مجموع شعاعی خالص یا به عبارتی تابع پایه شعاعی اصلی نام دارد، تابع پایه شعاعی افزوده به صورت رابطه تعریف می‌شود (شریفی، 2006):

$$\tilde{f}^{aug}(X) = \sum_{k=1}^{n_0} \alpha_k \Phi_k(\rho) + \sum_{i=1}^{u_m} \beta_i p_i(X), \quad (5)$$

که  $p_i(X)$  تابع چندجمله‌ای درجه  $m$  می‌باشد. در کنار ضرایب شعاعی،  $u_m$  ضریب مجهول چندجمله‌ای نیز باید تعیین شوند. در نتیجه دستگاه خطی درونیابی یک دستگاه فرومعین با  $n_0$  معادله و  $n_0 + u_m$  مجهول خواهد بود. به همین دلیل به  $u_m$  معادله اضافی دیگر نیاز داریم تا یک دستگاه خطی معین تشکیل شود.  $u_m$  معادله اضافی برای به دست آوردن راه حل یکتا به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که رابطه (6) برقرار باشد (شریفی، 2006):

$$\sum_{k=1}^{n_0} \alpha_k p_i(X_k) = 0, \quad (6)$$

یا به صورت ماتریسی،

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \dots & \Phi_{1n} & 1 & \lambda_1 & \varphi_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Phi_{n1} & \dots & \Phi_{nn} & 1 & \lambda_n & \varphi_n \\ 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n & 0 & 0 & 0 \\ \varphi_1 & \dots & \varphi_n & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

قسمت بالای سمت چپ ماتریس  $\mathbf{A}$  شامل توابع پایه شعاعی برای درون‌یابی می‌باشد. در نتیجه بردار ضرایب  $\alpha$  به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\alpha = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{N}. \quad (17)$$

درون‌یابی به روش MQ دارای پارامتری تحت عنوان پارامتر شکل می‌باشد که کاربر آن را انتخاب می‌کند. در واقع دقت درون‌یابی به روش تابع پایه شعاعی تحت تأثیر تعیین پارامتر شکل می‌باشد. یک معیار برای ارزیابی پارامتر شکل، استفاده از روش cross validation می‌باشد. در این روش بدین صورت عمل می‌شود (رایزنر، 2008): مختصات یک نقطه  $P_i$  و مقدار مشاهداتی آن (ارتفاع ژئوئید  $N$ )، از مجموعه داده‌ها کنار گذاشته می‌شود. به کمک سایر نقاط، ضرایب مجهول محاسبه شده و از طریق ضرایب محاسبه شده، مقدار جدید  $\hat{l}_i$  برای نقطه حذف شده به دست آورده می‌شود. اختلاف ارتفاع واقعی و برآورد شده، خطای درون‌یابی  $\Delta_i = \hat{l}_i - l_i$  در نقطه  $P_i$  است. همین مراحل را برای  $n_0$  نقطه داده تکرار کرده و بردار  $\Delta^{\text{cross}} = (\Delta_1, \dots, \Delta_{n_0})^T$  به عنوان خطاهای درون‌یابی برای تمامی داده‌ها به دست می‌آید. مقدار مجذور میانگین مربعات (RMS) برابر است با (رایزنر، 2008):

$$\text{RMS} = \sqrt{\frac{1}{n_0} \sum_{i=1}^{n_0} (\hat{l}_{\text{estimatdValue}} - l_{\text{realValue}})^2}. \quad (18)$$

می‌شود (رایزنر، 2008):

$$\Phi^{\text{MQ}} = \sqrt{\rho^2 + c^2}, \quad (11)$$

که  $c^2$  پارامتر شکل تابع پایه شعاعی  $\Phi_k$  بوده و دقت توابع پایه را نشان می‌دهد.  $\rho$  نیز فاصله اقلیدسی است که با توجه به در اختیار داشتن مختصات ژئودتیک نقاط به کمک رابطه (12) قابل محاسبه می‌باشد (ادمن، 2006):

$$\rho_{P,P} = 2R \sin^{-1}(\sqrt{A+B}),$$

$$A = \sin^2\left(\frac{\varphi_P - \varphi_P}{2}\right), \quad (12)$$

$$B = \cos \varphi_P \cos \varphi_P \sin^2\left(\frac{\lambda_P - \lambda_P}{2}\right),$$

که  $R$  نصف طول اطول زمین و  $P$  نقاط داده می‌باشند. قسمت دوم رابطه (10) نشان‌دهنده تابع چندجمله‌ای است که ضرایب آن مطابق زیر هستند:

$$p_1 = 1, \quad p_2 = \lambda, \quad p_3 = \varphi. \quad (13)$$

ضرایب  $\alpha_k$  و  $\beta_i$  در رابطه (10) با حل معادله زیر به دست می‌آیند:

$$N(\lambda_j, \varphi_j) = \sum_{k=1}^{n_0} \alpha_k \Phi_k(\lambda_i, \varphi_i, \lambda_j, \varphi_j) + \sum_{i=1}^3 \beta_i p_i(\lambda_j, \varphi_j), \quad j = 1, \dots, n_0 \quad (14)$$

صورت ماتریسی رابطه بالا به شکل زیر است:

$$\mathbf{A}\alpha = \mathbf{N}, \quad (15)$$

که ماتریس  $\mathbf{A}$  مطابق زیر تعریف می‌شود (ادمن، 2006):

$$\Phi(\rho) = \rho^2 \log \rho, \quad (22)$$

که  $\rho$  فاصله اقلیدسی است. ماتریس مجهولات شامل ضرایب  $a_0, a_1, a_2$  و  $w_i$  می‌باشد که با حل معادله زیر به دست می‌آیند:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{Z}. \quad (23)$$

ماتریس  $\mathbf{x}$  نیز مطابق زیر بیان می‌شوند:

$$\mathbf{x}^T = [w_1, w_2, \dots, w_n, a_0, a_1, a_2]. \quad (24)$$

موقعیت نقاط کنترل  $(x_i, y_i)$  و ارتفاعات آنها جز معلومات بوده که می‌توان آنها را به صورت زیر بیان کرد:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & y_n \end{bmatrix}, \quad (25)$$

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (26)$$

ماتریس  $\mathbf{K}$  شامل توابع  $\Phi(\rho_{ij})$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \Phi(\rho_{11}) & \Phi(\rho_{12}) & \dots & \Phi(\rho_{1n}) \\ \Phi(\rho_{21}) & \Phi(\rho_{22}) & \dots & \Phi(\rho_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi(\rho_{n1}) & \Phi(\rho_{n2}) & \dots & \Phi(\rho_{nm}) \end{bmatrix}. \quad (27)$$

در نتیجه ماتریس  $\mathbf{A}$  با رابطه (28) بیان می‌شود:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{P} \\ \mathbf{P}^T & 0 \end{bmatrix}, \quad (28)$$

در نهایت پارامتر شکلی که به ازای آن مقدار RMS کمتری به دست آید به عنوان پارامتر شکل بهینه انتخاب خواهد شد و درون‌یابی به کمک آن صورت خواهد گرفت.

## 2-2 درون‌یابی به روش اسپلاین صفحه نازک

اسپلاین صفحه نازک فنی برای درون‌یابی هموار میان مجموعه‌ای از نقاط کنترل می‌باشد. این روش یک سطح را از نقاط کنترل عبور می‌دهد. با در نظر گرفتن  $n$  نقطه متمایز  $\{(x_i, y_i), i = 1, \dots, n\}$ ، با مقادیر مشاهداتی  $z_i$ ، به منظور درون‌یابی در سایر نقاط، با فرض اینکه موقعیت نقاط  $(x_i, y_i)$  با یکدیگر متفاوت بوده و در یک خط مستقیم واقع نشده باشند، باید تابع  $F$  به گونه‌ای پیدا شود که در معادله زیر صدق کند (لمبرت، 2006):

$$F(x_i, y_i) = z_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (19)$$

تابع درون‌یاب TPS، انرژی خمشی  $I_f$  را کمینه می‌کند:

$$I(F) = \iint \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right)^2 dx dy, \quad (20)$$

و دارای رابطه (21) می‌باشد:

$$F(x_i, y_i) = a_0 + a_1 x + a_2 y + \sum_{i=1}^n w_i \Phi(\rho), \quad (21)$$

که سه جمله اول مربوط به قسمت خطی می‌شود که یک صفحه تخت را که به بهترین نحو بر نقاط کنترل منطبق باشد، تعریف می‌کند و  $a_i$  ضرایب قسمت صفحه‌ای اسپلاین است. جمله آخر مربوط به نیروهای خمشی ناشی از نقاط کنترل می‌شود و تابع  $\Phi$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

پنهان و خروجی می‌باشد. آموزش شبکه عصبی پرسپترون چندلایه را به کمک قاعده‌ای تحت عنوان پس‌انتشار می‌نامند. در آموزش شبکه عصبی پرسپترون، تنظیم وزن‌ها به گونه‌ای انجام می‌شود که خطای بین خروجی مطلوب و خروجی واقعی کاهش یابد. در واقع قاعده دلتا تلاش خود را به کاهش میانگین مربع خطا متمرکز می‌کند (لین، 2009). مقادیر  $x_1$  تا  $x_n$  ورودی‌های اصلی با مقادیر حقیقی خواهند بود. هر ورودی  $x_i$  وزن متناظر دارد که معرف اهمیت آن ورودی می‌باشد. این وزن‌ها مقادیر حقیقی دارند که می‌توانند مثبت یا منفی باشند. ورودی اضافی همیشه برابر با +1 در نظر گرفته می‌شود. وزن اضافی که به آن انحراف ثابت گفته می‌شود، به گونه‌ای تنظیم می‌شود که حاصل جمع آن با بقیه بتواند net و در نتیجه خروجی را به نحو صحیح تعیین نماید. پس از اعمال ورودی‌ها، مجموع وزن‌دار که net خوانده می‌شود به-کمک رابطه زیر محاسبه شده و سپس مقدار net از یک تابع خروجی عبور می‌کند:

$$\text{net} = \sum_{i=0}^n x_i w_i. \quad (29)$$

تابعی که اغلب در پرسپترون‌های چندلایه از آن به عنوان تابع خروجی استفاده می‌شود تابع سیگموئید با معادله‌ای به صورت زیر است (میرصالحی و تقی‌زاده، 1387):

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}, \quad (30)$$

برای شبکه نشان داده شده در شکل 2، روابط زیر برقرار است:

$$x_2(1) = f(\text{net}_2(1)), \quad (31)$$

$$\text{net}_2(1) = \sum_{i=0}^3 w_2(i,1) x_1(i). \quad (32)$$

مقدار خطای دلتا برای لایه خروجی به صورت زیر است:

و در نهایت ارتفاعات در سایر نقاط را می‌توان با استفاده از رابطه (21) به دست آورد (دوناتول و بلونگی، 2002).

### 3 شبکه عصبی مصنوعی (ANN)

شبکه‌های عصبی، شبکه‌ای از اجزای به هم مرتبط هستند که این اجزا از مطالعات سامانه‌های عصبی زیستی الهام گرفته‌اند. دو خاصیت از مهم‌ترین خواص شبکه‌های عصبی قابلیت فراگیری و تعمیم آنهاست. در واقع سامانه یاد می‌گیرد که الگوهای مشخصی را تشخیص دهد و به آنها پاسخ خروجی صحیح بدهد که به این کار آموزش یا فراگیری گفته می‌شود. همچنین سامانه باید این قابلیت را داشته باشد که با استفاده از مثال‌های داده شده، خواص کلی طبقات مختلف الگوها را استنتاج کند که به آن قابلیت تعمیم گفته می‌شود (میرصالحی و تقی‌زاده، 1387). شبکه‌های عصبی انواع مختلفی دارند که از جمله آنها می‌توان شبکه عصبی ادلاین، شبکه عصبی پرسپترون، شبکه عصبی هاپفیلد، شبکه عصبی بولی، شبکه عصبی تاخیر زمانی را نام برد. از آنجایی که برای درون‌یابی، شبکه عصبی پرسپترون بیشترین کاربرد را دارد، در این تحقیق به توضیح و شرح این نوع از شبکه عصبی پرداخته می‌شود.

### 1-3 شبکه عصبی پرسپترون

پرسپترون‌ها متداول‌ترین و شناخته‌شده‌ترین نوع از میان شبکه‌های عصبی هستند. این اصطلاح نخستین بار توسط فرانک رزنبلات برای تشریح انواع مختلفی از شبکه‌های عصبی به کار برده شد. ایده او این بود که به جای سعی در ساختن یک مدل فیزیکی از یاخته عصبی، توصیف عملی نحوه کارکرد یک یاخته عصبی را به صورت یک الگوریتم در نرم‌افزاری پیاده‌سازی کند (میرصالحی و تقی‌زاده، 1387). شکل 2 یک پرسپترون چندلایه نوعی را نشان می‌دهد. این پرسپترون شامل سه لایه ورودی،

مجموعه آموزش عمل می‌کند بر روی مجموعه آزمون عمل نمی‌کند. این پدیده به‌عنوان آموزش زیادی شناخته می‌شود. برای اجتناب از آموزش زیادی، مجموعه داده به سه مجموعه آموزش، مجموعه آزمون و مجموعه تأیید تقسیم می‌شوند. آموزش با استفاده از مجموعه آموزشی انجام می‌شود و خطا برای تنظیم وزن‌ها به کار گرفته می‌شود. با این وجود در حین آموزش داده آزمون نیز به شبکه نشان داده شده و خطا ثبت می‌شود (میرصالحی و تقی‌زاده، 1387).

همانطور که در شکل 3 نشان داده شده، خطای داده آزمون باید کاهش یابد. در مرحله‌ای از آموزش، کاهش خطای داده آزمون متوقف می‌شود و حتی ممکن است خطا افزایش یابد. این وقتی است که آموزش زیادی شروع می‌شود. اگر آموزش در نقطه‌ای که خطای داده آزمون شروع به افزایش می‌کند متوقف شود، آنگاه از آموزش زیادی می‌توان اجتناب نمود. بالاخره مجموعه تأیید به شبکه ارائه می‌شود و عملکرد آن بر مبنای این مجموعه که شامل داده مشاهده نشده قبلی است قضاوت می‌شود.

$$\delta_p = y_p(1 - y_p)(d - y_p), \quad (33)$$

که  $d$  مقدار خروجی مطلوب و  $y_p$  خروجی واقعی می‌باشد. پرسپترون‌های لایه پنهان که به‌طور مستقیم به خروجی متصل نیستند به تعریف دیگری برای دلتا نیاز دارند. برای مثال، در شکل 3 اگر هدف، تغییر  $w_2(1,2)$  باشد، آنگاه مقدار تغییر با استفاده از معادله زیر به دست می‌آید:

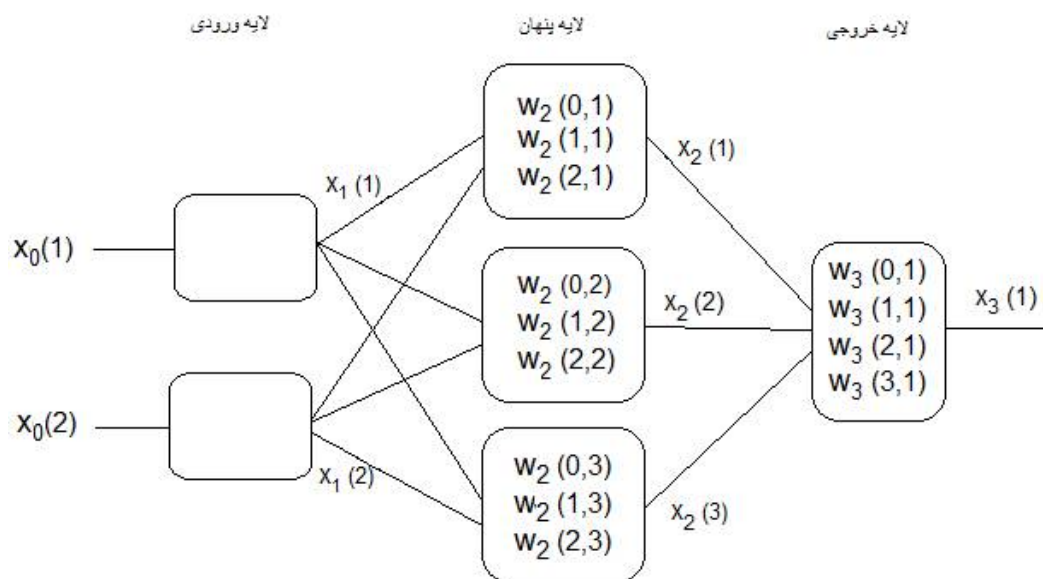
$$\Delta w_2(1,2) = \eta x_1(1) \delta_2(2), \quad (34)$$

که

$$\delta_2(2) = x_2(2)[1 - x_2(2)]w_3(2,1)\delta_3(1), \quad (35)$$

$$\delta_3(1) = x_3(1)[1 - x_3(1)][d - x_3(1)]. \quad (36)$$

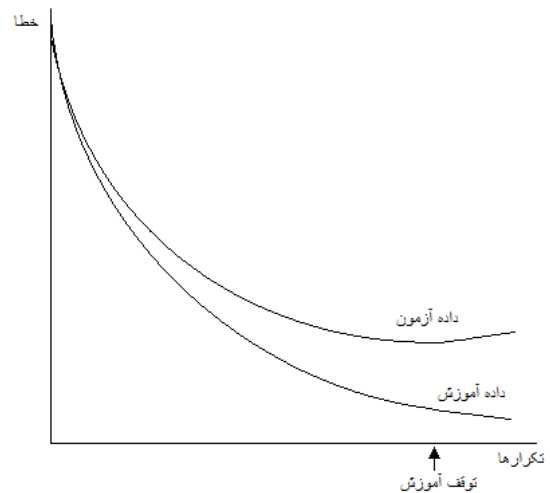
بدین ترتیب تمام معادلات لازم برای اعمال پس‌انتشار به یک پرسپترون چندلایه به دست می‌آید. در طی آموزش، خطای بین خروجی مطلوب و خروجی واقعی اندازه‌گیری می‌شود و هدف کاهش این خطا با تنظیم وزن‌هاست. اما شبکه هرگز به آن خوبی که بر روی



شکل 2. نمونه‌ای از یک پرسپترون تک‌خروجی سه‌لایه (میرصالحی و تقی‌زاده، 1387).



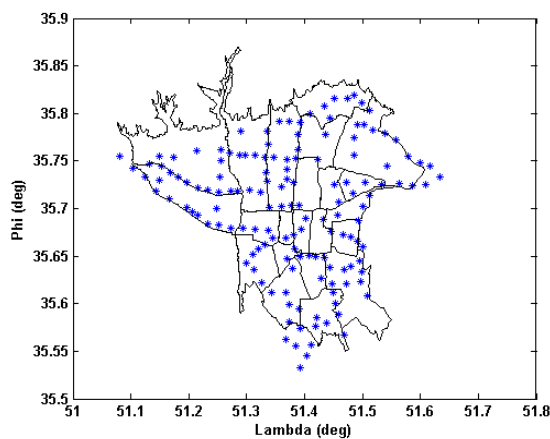
تهران و اختلاف ارتفاع در نقاط کنترل محاسبه گشته و نتایج حاصل از آنها در شکل 6 قابل مشاهده می‌باشند. به‌منظور محاسبه اختلاف ارتفاع در نقاط کنترل و همچنین مجذور میانگین مربعات به‌منظور مقایسه روش‌ها، هر بار یکی از نقاط را به‌عنوان نقطه کنترل در نظر گرفته و به کمک سایر نقاط، ضرایب مجهول را محاسبه نموده و به کمک ضرایب برآورد شده، ارتفاع جدید نقطه کنترل تعیین می‌گردد. درنهایت با استفاده از رابطه (18) می‌توان مقدار RMS را محاسبه کرده و روشی را که دارای RMS کمتری باشد به‌عنوان روش دقیق‌تر انتخاب کرد. مقدار RMS به دست آمده با روش MQ به ازای پارامتر شکل 500 برابر با 0/0268 متر می‌باشد.



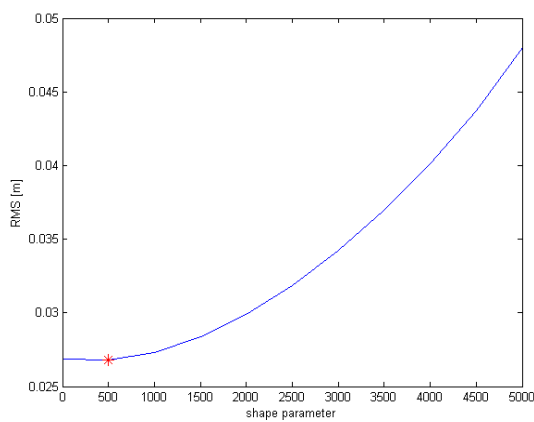
شکل 3. خطا در مجموعه‌های آموزش و آزمون (میرصالحی و تقی‌زاده، 1387).

#### 4 مطالعه موردی: شهر تهران

داده‌های شهر تهران شامل 147 نقطه بوده که دارای مختصات UTM هستند و ارتفاعات بیضوی حاصل از GPS و ارتفاعات ارتومتریک آنها مشخص می‌باشند. این داده‌ها در محدوده طول جغرافیایی  $51/08^{\circ}$  تا  $51/63^{\circ}$  و عرض جغرافیایی  $35/53^{\circ}$  تا  $35/82^{\circ}$  قرار گرفته‌اند. داده‌های تهران از طریق ایستگاه‌های ژئودتیک در مناطق 22 گانه شهرداری تهران، ایستگاه‌های GPS/Leveling سازمان نقشه‌برداری و ایستگاه‌های تعیین موقعیت شده به روش RTK و استاتیک در سطح شهر تهران اندازه‌گیری شده‌اند. موقعیت و تراکم نقاط مبنا در شهر در شکل 4 نشان داده شده است.



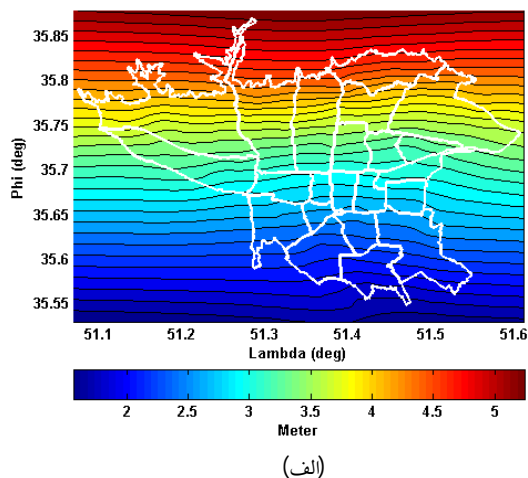
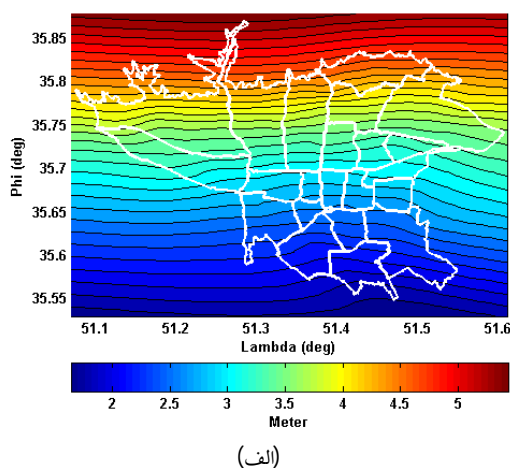
شکل 4. چگونگی توزیع نقاط مبنا در شهر تهران.



شکل 5. تعیین پارامتر شکل برای داده‌های شهر تهران..

ابتدا با بهره‌گیری از روش cross validation به تعیین پارامتر شکل بهینه پرداخته می‌شود. در شکل 5 مقادیر RMS به ازای مقادیر مختلف پارامتر شکل نشان داده شده است. همان‌طور که از شکل 5 پیداست پارامتر شکل 500 دارای کمترین مقدار RMS می‌باشد با در نظر گرفتن پارامتر شکل برابر 500 و با توجه به روابط مربوط به درونیابی MQ، سطح تصحیح ارتفاع ژئودتیک شهر

شبکه عصبی مورد استفاده برای تعیین سطح تصحیح به کمک شبکه عصبی پرسپترون سه‌لایه در شکل 8 نشان داده شده است. مطابق این شکل در هر مرحله، پس از اعمال ورودی‌ها که شامل طول و عرض ژئودتیک نقاط می‌باشد، هر ورودی در وزن متناظر خود ضرب شده و مجموع وزن‌دار (net) محاسبه می‌شود. در نهایت با عبور از تابع سیگموئید، مقدار خروجی جدید (ارتفاع جدید مورد نظر) حاصل می‌شود. با محاسبه اختلاف ارتفاع مطلوب و ارتفاع واقعی و همچنین اصلاح وزن‌ها، شبکه آموزش می‌بیند و در نتیجه با ارائه یک نمونه جدید می‌توان ارتفاع ژئوئید را در آن نقطه به دست آورد. نتایج حاصل از درون‌یابی در شکل 9 نشان داده شده است.

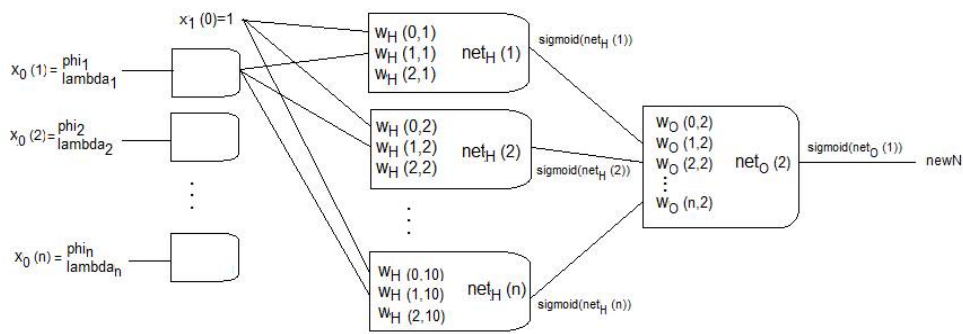


شکل 6. سطح تصحیح ارتفاع ژئودتیک در شهر تهران به روش MQ با  $\Delta=500$  (الف) سطح تصحیح ارتفاع ژئودتیک، (ب) اختلاف ارتفاع در نقاط کنترل.

در مرحله بعد با روش TPS، سطح تصحیح ارتفاعی تهران محاسبه می‌شود. نتایج حاصل از به‌کارگیری این روش و همچنین اختلاف ارتفاعات در نقاط کنترل در شکل 7 نشان داده شده است. مقدار RMS به دست آمده از طریق این روش برابر با 0/0262 متر می‌باشد.

برای محاسبه سطح تصحیح ارتفاع ژئودتیک به روش شبکه عصبی، از شبکه عصبی پرسپترون سه‌لایه مطابق شکل 8 استفاده شده است که در لایه پنهان آن 10 یاخته عصبی قرار دارند. 85 درصد داده‌ها، به‌عنوان داده‌های آموزش، 10 درصد داده‌ها به‌عنوان داده‌های آزمون و 5 درصد نیز به‌عنوان داده‌های تأیید در نظر گرفته شده‌اند.

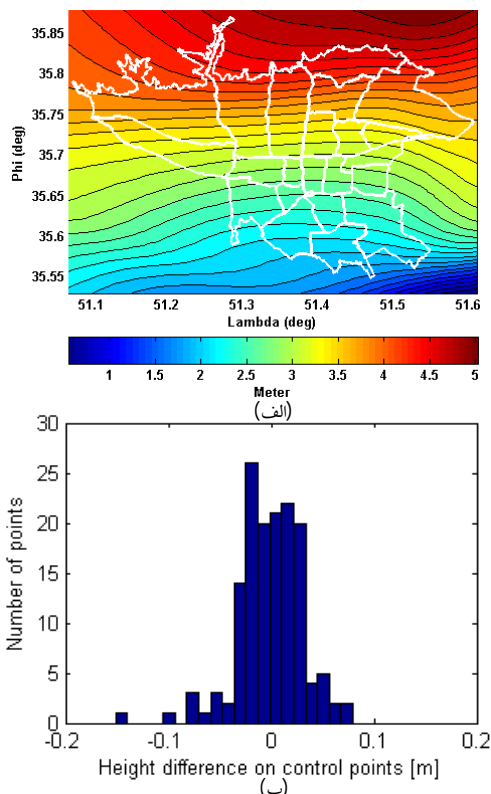
شکل 7. سطح تصحیح ارتفاع ژئودتیک شهر تهران به روش اسپلاین صفحه نازک. (الف) سطح تصحیح ارتفاع ژئودتیک، (ب) اختلاف ارتفاع در نقاط کنترل.



شکل 8. شبکه عصبی مورد استفاده برای تعیین سطح تصحیح ارتفاع ژئودتیک.

جدول 1. شاخص‌های آماری مربوط به اختلاف ارتفاع در نقاط کنترل شهر تهران.

| RMS (m) | واریانس اختلاف ارتفاع در نقاط کنترل (m) | میانگین اختلاف ارتفاع در نقاط کنترل (m) | max اختلاف ارتفاع در نقاط کنترل (m) | min اختلاف ارتفاع در نقاط کنترل (m) | روش مورد استفاده |
|---------|---|---|-------------------------------------|-------------------------------------|------------------|
| 0/0268  | 0/0007                                  | -0/0009                                 | 0/059                               | -0/097                              | MQ               |
| 0/0262  | 0/0006                                  | -0/0001                                 | 0/058                               | -0/066                              | TPS              |
| 0/0317  | 0/001                                   | -0/0008                                 | 0/079                               | -0/151                              | ANN              |



شکل 9. سطح تصحیح ارتفاع ژئودتیک شهر تهران به روش شبکه عصبی پرسپترون. (الف) سطح تصحیح ارتفاع ژئودتیک، (ب) اختلاف ارتفاع در نقاط کنترل.

در نهایت مقایسه‌ای میان دقت روش‌های به کار گرفته برای مدل‌سازی ژئوئید شهر تهران صورت گرفته است. همان‌طور که از جدول 1 پیداست، نتایج حاصل از روش‌های MQ و TPS بسیار نزدیک به هم هستند، با این حال RMS حاصل از روش TPS کمتر بوده و برای داده‌های شهر تهران، این روش از دقت بهتری برخوردار است.

همچنین به منظور بررسی دقت روش TPS، از این روش برای درون‌یابی داده‌های حاصل از گرانی‌سنجی استفاده شده است. ارتفاعات ژئوئید حاصل از گرانی‌سنجی به کمک نرم‌افزاری تحت عنوان IRGeoid10 تهیه گشته است. این نرم‌افزار ارتفاعات ژئوئید گرانی‌سنجی را بر اساس داده‌های ماهواره‌های CHAMP، GRACE، GOCE و ارتفاع‌سنجی ماهواره‌ای و داده‌های محلی در هر نقطه‌ای در محدوده ایران در اختیار قرار می‌دهد (حاتم و همکاران 2010). ابتدا یک شبکه 30×30 در محدوده تهران ایجاد شده و به کمک

بدین منظور می‌بایست ارتفاع بیضوی حاصل از GPS به ارتفاع ارتومتریک که یک ارتفاع فیزیکی بوده تبدیل گردد. این هدف با تعیین سطح تصحیح ارتفاع ژئودتیک تحقق می‌پذیرد. هدف از این تحقیق در واقع تعیین این سطح تصحیح بوده است.

در این تحقیق ابتدا در مورد روش‌های توابع پایه شعاعی شامل روش مولتی‌کوادریک و اسپلاین صفحه نازک توضیحات کامل داده شد. همچنین به بررسی شبکه‌های عصبی مصنوعی و به‌ویژه پرسپترون چندلایه پرداخته شد. سپس به‌عنوان مطالعه موردی، سطح تصحیح ارتفاع ژئودتیک برای شهر تهران با استفاده از روش‌های ذکر شده به‌دست آمد. مقدار RMS به‌دست آمده از روش‌های MQ و TPS و پرسپترون سه‌لایه به ترتیب برابر با 0/0268، 0/0262 و 0/0317 متر بوده است. با توجه به اینکه نتایج حاصل بسیار به هم نزدیک هستند، می‌توان نتیجه گرفت که در مورد شهر تهران روش TPS از مجذور میانگین مربعات کمتری برخوردار بوده و دقت بهتری را تولید می‌کند.

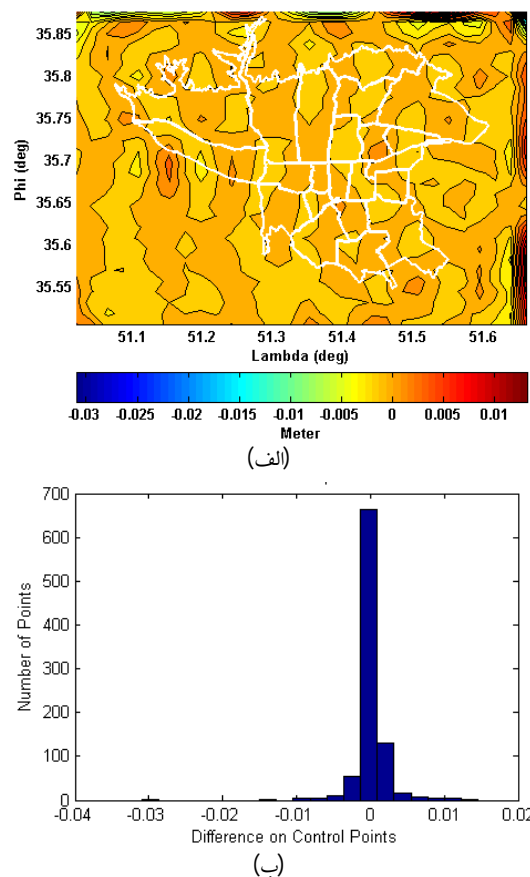
#### منابع:

خضرائی، س. م.، نفیسی، و.، منجمی، س. ا. ح.، عسگری، ج.، و امیری سیمکویی، ع.، 1393، مدلسازی ژئوئید محلی دقیق با استفاده از داده‌های GPS، ترازیبی و تکنیک‌های هوش مصنوعی (مطالعه موردی شاهین‌شهر اصفهان): مجله علوم و فنون نقشه‌برداری، دوره چهارم، شماره 3.

میرصالحی، م. و تقی‌زاده کاخکی، ح.، 1387، شبکه‌های عصبی: انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد.

Cakir, L., 2011, Modified quadratic shepard and radial basis functions interpolations for determination of orthometric heights from global positioning system (GPS) heights: International J. Physical Sciences, 6(36), 8183-8187.

آنها درون‌یابی صورت گرفته و ارتفاعات ژئوئید در سایر نقاط محدوده به دست می‌آیند. در نهایت ارتفاعات درون‌یابی شده با ارتفاعات ژئوئید گرانی‌سنجی مقایسه می‌گردد. RMS به‌دست آمده برابر با 2 میلیمتر می‌باشد. نتایج به‌دست آمده در شکل 10 ارائه شده است.



شکل 10. (الف) ارتفاعات درون‌یابی شده با روش TPS (ب) اختلاف ارتفاعات ژئوئید گرانی‌سنجی.

#### 4 نتیجه‌گیری

امروزه با توجه به پیشرفت فناوری، استفاده از GPS برای تعیین موقعیت سه‌بعدی نقاط، بسیار گسترده شده است. GPS مختصات ژئودتیک  $(\varphi, \lambda, h)$  را در اختیار قرار می‌دهد، در صورتی که بسیاری از فعالیت‌های مهندسی نیازمند ارتفاعی هستند که دارای معنای فیزیکی باشد.

- transformation: Asian Association on Remote Sensing, ACSR 2009, Beijing.
- Oudman, E., 2006, The Transformation of GPS into NAP Heights Combining NAP, GPS and Geoid Height to Compute a Height Reference Surface for the Netherlands: M. Sc. Thesis, Delft University of Technology.
- Raizner, C., 2008, A Regional Analysis of GNSS-Leveling: M. Sc Thesis, Stuttgart University.
- Sharifi, M. A., 2006, Satellite to Satellite Tracking in the Space-wise Approach, Ph. D. Thesis, Stuttgart University.
- Veronez, M. R., Thum, A. B., and Souza, G. C., 2006, A new method for obtaining geoidal undulations through artificial neural networks: 7<sup>th</sup> International Symposium on Spatial Accuracy Assessment in Natural Resources and Environmental Sciences.
- Donato1, G., and Belongie, S., 2002, Approximate thin plate spline mappings: Springer Verlag Berlin Heidelberg, Vol. **2352**, 21–31.
- Gullu, M., Yilmaz, M., and Yilmaz, I., 2011, Application of back propagation artificial neural network for modeling local GPS/Leveling geoid undulations: A comparative study: FIG Working Week, Bridging the Gap between Cultures.
- Hatam, Y., Bayer, R., Vanicek, P., Bonvalot, S., Daignieres, M., Diament, M., Djamour, Y., Panet, L., and Verdun, J., high resolution geoid model of Iran <IRGeoid10> software.
- Lambaert, H., 2006, Manual registration with thin plates: <http://step.polytml.ca/thinplates/>
- Lin, L. S., 2009, Application of neural network and least squares collocation to GPS height