

## حل عددی معادلات آب کم عمق دو لایه بر حسب متغیرهای فشارورد و کژ فشار با استفاده از روش فشرده مرتبه چهارم

حکیم گلشاهی<sup>۱\*</sup> و سرمد قادر<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> استادیار، گروه فیزیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد شوشتر، شوشتر، ایران  
<sup>۲</sup> دانشیار، موسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران، تهران، ایران

(تاریخ دریافت: ۹۵/۰۷/۱۳، تاریخ پذیرش: ۹۵/۱۰/۱۱)

### چکیده

در پژوهش حاضر، روش فشرده مرتبه چهارم برای حل عددی معادلات آب کم عمق دو لایه در صفحه  $f$  بر حسب متغیرهای تاوایی، واگرایی و ارتفاع به کار گرفته می شود. با در نظر گرفتن متغیرهای فشارورد و کژ فشار، این معادلات به دو بخش فشارورد و کژ فشار تقسیم می شوند، به گونه ای که هر بخش به طور مجزا حل می شود. برای گسسته سازی مکانی معادلات، علاوه بر روش فشرده مرتبه چهارم از روش مرتبه دوم مرکزی نیز استفاده شده است تا نتایج این دو روش با یکدیگر مقایسه شوند. برای فرمول بندی و گسسته سازی زمانی این معادلات، روش نیمه ضمنی سه ترازه به کار گرفته شده است. شرط اولیه کژ فشار به گونه ای انتخاب شده است که میدان جریان در لایه بالایی درست در خلاف جهت جریان لایه پایینی است و متغیرهای فشارورد در لحظه اولیه، صفر هستند. نتایج نشان دهنده قابلیت مدل در برقراری پایداری انرژی و جرم است. مقایسه نتایج، عملکرد بهتر روش فشرده مرتبه چهارم را در مقایسه با روش مرتبه دوم مرکزی نشان می دهد.

**واژه های کلیدی:** روش فشرده مرتبه چهارم، معادلات آب کم عمق، محیط دو لایه، شبکه  $Z$ ، متغیرهای فشارورد و کژ فشار.

## ۱ مقدمه

معادلات آب کم عمق به طور گسترده در زمینه‌های مختلف جوی و اقیانوسی به کار گرفته می‌شوند. با استفاده از معادلات آب کم عمق دو لایه می‌توان اثرات چینه‌بندی را نیز در نظر گرفت. در برخی از نواحی اقیانوسی یا دریاها می‌توان چینه‌بندی چگالی آب را با تقریب خوبی به صورت دو لایه فرض کرد و برای توصیف دینامیک چنین محیط‌هایی معادلات آب کم عمق دو لایه‌ای را به کار برد (کاسترو و همکاران، ۲۰۰۴؛ ماتسورا و فوجیتا، ۲۰۰۶؛ کوشمن - رویزین و همکاران، ۲۰۰۰). با توجه به ماهیت پیچیده میدان‌های جوی و اقیانوسی و گستردگی مقیاس در آن‌ها، از روش‌هایی با توانایی تفکیک زیاد (از جمله روش‌های طیفی و روش‌های فشرده) در شبیه‌سازی عددی استفاده می‌شود. با توجه به اینکه روش‌های تفاضل متناهی فشرده، کارایی مناسبی در حل معادلات حاکم بر دینامیک شاره‌ها از خود نشان داده‌اند (هرش، ۱۹۷۵؛ لیل، ۱۹۹۲؛ قادر و همکاران، ۲۰۰۹؛ قادر و همکاران، ۲۰۱۲؛ قادر و نوردستروم، ۲۰۱۵؛ جوان نژاد و همکاران، ۲۰۱۶)، پژوهش حاضر به اعمال روش فشرده مرتبه چهارم جهت گسسته‌سازی مکانی شکل غیرخطی معادلات آب کم عمق دو لایه بر حسب متغیرهای تاوایی، واگرایی و ارتفاع به شکل فشارورد و کژفشار در شبکه Z (رن‌دال، ۱۹۹۴) اختصاص دارد. با در نظر گرفتن متغیرهای فشارورد و کژفشار، دستگاه معادلات آب کم عمق دو لایه به دو دستگاه معادلات فشارورد و کژفشار تقسیم می‌شود، به گونه‌ای که هر یک از بخش‌های فشارورد و کژفشار در دستگاه معادلات حاصل، ترکیبی از معادلات مربوط به لایه‌های اول و دوم است. هنگام حل عددی این معادلات، بخش فشارورد و کژفشار جداگانه حل می‌شوند. این شیوه با شیوه متداول در حل عددی معادلات آب کم عمق چندلایه که در آن دستگاه معادلات مربوط به هر لایه به طور مجزا حل می‌شوند، متفاوت است. برای حل عددی

معادلات آب کم عمق غیرخطی دو لایه بر حسب میدان‌های مذکور، شرط اولیه کژفشاری در یک ناحیه مربع‌شکل با شرط مرزی دوره‌ای، در نظر گرفته شد. این شرط اولیه شبیه به شرط اولیه کژفشار کوتر و همکاران (۲۰۰۴) است؛ با این تفاوت که در آن به جای تقریب صفحه  $\beta$ ، از تقریب صفحه  $f$  استفاده شده و میدان تاوایی پتانسیلی آن کمی پیچیده تر انتخاب شده است. این میدان تاوایی پتانسیلی اولیه، برگرفته از شرط اولیه تک‌لایه (فشارورد) در ریچل و همکاران (۱۹۹۹) است که در اینجا برای محیطی دو لایه با شرایط اولیه کژفشار تعمیم داده شده است.

با توجه به نتایج مناسب به کارگیری روش‌های فشرده برای گسسته‌سازی مکانی شکل خطی شده معادلات آب کم عمق تک‌لایه (بلايو، ۲۰۰۰؛ اصفهانیان و همکاران، ۲۰۰۵) و دو لایه (قادر و همکاران، ۱۳۸۹؛ گلشاهی و همکاران، ۲۰۱۱)، در این پژوهش، عملکرد روش فشرده مرتبه چهارم در گسسته‌سازی مکانی شکل غیرخطی معادلات آب کم عمق دو لایه، بر حسب متغیرهای تاوایی، واگرایی و ارتفاع بررسی می‌شود و نتایج آن با روش مرتبه دوم مرکزی مقایسه می‌گردد. برای فرمول‌بندی و گسسته‌سازی بخش زمانی معادلات نیز روش نیمه‌ضمنی سه ترازه به کار می‌رود.

## ۲ معادلات حاکم

معادلات آب کم عمق ناوشکسان در محیطی دو لایه با کف هموار، بدون اصطکاک و تنش باد در نظر گرفته می‌شوند که در آن لایه اول با چگالی کمتر بر روی لایه دوم با چگالی بیشتر قرار گرفته و چگالی ( $\rho$ ) و ارتفاع میانگین ( $H$ ) در هر لایه مقداری ثابت است (گیل، ۱۹۸۲). این معادلات بر حسب میدان‌های تاوایی ( $\zeta$ )، واگرایی ( $\delta$ ) و ارتفاع ( $h$ ) در شبکه Z به صورت زیر است:

که زیرنویس های  $bc$  و  $bt$  به ترتیب معرف بخش های فشارورود و کژفشار هستند؛ به گونه ای که

$$\delta_{bt} = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_2) \quad , \quad \zeta_{bt} = \frac{1}{2}(\zeta_1 + \zeta_2)$$

و

$$h'_{bt} = \frac{1}{2}(h'_1 + h'_2)$$

برای بخش فشارورود و

$$\delta_{bc} = \frac{1}{2}(\delta_1 - \delta_2) \quad , \quad \zeta_{bc} = \frac{1}{2}(\zeta_1 - \zeta_2)$$

و

$$h'_{bc} = \frac{1}{2}(h'_1 - h'_2)$$

برای بخش کژفشار تعریف شده اند و

$$\mathbf{u}_{bt} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2)$$

جریان فشارورود و

$$\mathbf{u}_{bc} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)$$

جریان کژفشار هستند و

$$\mathcal{H}_{bc} = \frac{g'}{2} H_1 \nabla^2 - f_o^2 \quad \text{و} \quad \mathcal{H}_{bt} = \left( gH - \frac{g'}{2} H_1 \right) \nabla^2 - f_o^2$$

عملگرهای هلمهولتز هستند؛ به گونه ای که  $H = H_1 + H_2$  ارتفاع میانگین کل در این محیط دولایه است.

### ۳ فرمول بندی حل عددی

برای حل عددی دستگاه معادلات (۲) از روش نیمه ضمنی استفاده شده است، به گونه ای که تنها معادلات مربوط به گرایش زمانی واگرایی و ارتفاع به صورت نیمه ضمنی فرمول بندی می شوند. در گسسته سازی بخش زمانی معادلات، روش سه ترازای لپ فراگ و در گسسته سازی مکانی، روش های مرتبه دوم مرکزی (E2S) و فشرده مرتبه چهارم (C4S) به کار رفته اند. جدول ۱، فرمول بندی طرح واره های به کار گرفته شده برای محاسبه مشتق های اول و دوم در نقاط گره از شبکه ای را نشان می دهد که دارای فاصله شبکه ای  $d$  است (هرش، ۱۹۷۵؛ لیل، ۱۹۹۲).

با استفاده از طرح واره سه ترازای لپ فراگ برای گسسته سازی بخش زمانی معادلات و طبق فرمول بندی نیمه ضمنی داریم:

$$\begin{cases} \frac{\delta_{bt}^{n+1} - \delta_{bt}^{n-1}}{2\Delta t} + \mathcal{H}_{bt} \left( \frac{h'_{bt}^{n+1} + h'_{bt}^{n-1}}{2} \right) = S_{\delta_{bt}}^n \\ \frac{h'_{bt}^{n+1} - h'_{bt}^{n-1}}{2\Delta t} + \frac{\delta_{bt}^{n+1} + \delta_{bt}^{n-1}}{2} = S_{h'_{bt}}^n \end{cases} \quad (۳)$$

$$\begin{cases} \frac{\delta_{bc}^{n+1} - \delta_{bc}^{n-1}}{2\Delta t} + \mathcal{H}_{bc} \left( \frac{h'_{bc}^{n+1} + h'_{bc}^{n-1}}{2} \right) = S_{\delta_{bc}}^n \\ \frac{h'_{bc}^{n+1} - h'_{bc}^{n-1}}{2\Delta t} + \frac{\delta_{bc}^{n+1} + \delta_{bc}^{n-1}}{2} = S_{h'_{bc}}^n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \zeta_1}{\partial t} = -\nabla \cdot [(\zeta_1 + f_o) \mathbf{u}_1] \\ \frac{\partial \delta_1}{\partial t} + g H_1 \nabla^2 h'_1 = f_o \zeta_1 \\ -g H_2 \nabla^2 h'_2 + 2J(u_1, v_1) - \nabla \cdot (\delta_1 \mathbf{u}_1) \\ \frac{\partial h'_1}{\partial t} + \delta_1 = -\nabla \cdot (h'_1 \mathbf{u}_1) \end{cases} \quad (۱)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \zeta_2}{\partial t} = -\nabla \cdot [(\zeta_2 + f_o) \mathbf{u}_2] \\ \frac{\partial \delta_2}{\partial t} + (g + g') H_2 \nabla^2 h'_2 = f_o \zeta_2 \\ -g H_1 \nabla^2 h'_1 + 2J(u_2, v_2) - \nabla \cdot (\delta_2 \mathbf{u}_2) \\ \frac{\partial h'_2}{\partial t} + \delta_2 = -\nabla \cdot (h'_2 \mathbf{u}_2) \end{cases}$$

که  $f_o$  پارامتر کوریولیس،  $\mathbf{u} = (u, v)^T$  بردار سرعت افقی،  $g$  شتاب گرانی،  $g' = g(\rho_2 - \rho_1) / \rho_2$  گرانیه کاهیده،  $h_2 = H_2(1 + h'_2)$  و  $h_1 = H_1(1 + h'_1)$  اندیس های ۱ و ۲ معرف لایه های اول و دوم هستند. با استفاده از جمع و تفاضل معادلات هر لایه با لایه دیگر، دستگاه معادلات فوق به صورت فشارورود و کژفشار زیر در می آید:

$$\begin{cases} \frac{\partial \zeta_{bt}}{\partial t} = -\frac{1}{2} \nabla \cdot [(\zeta_1 + f_o) \mathbf{u}_1 + (\zeta_2 + f_o) \mathbf{u}_2] \\ \frac{\partial \delta_{bt}}{\partial t} + \mathcal{H}_{bt} h'_{bt} = f_o (\zeta_{bt} - f_o h'_{bt}) \\ + \frac{1}{2} \left[ \begin{aligned} & (2J(u_1, v_1) - \nabla \cdot (\delta_1 \mathbf{u}_1)) \\ & + (2J(u_2, v_2) - \nabla \cdot (\delta_2 \mathbf{u}_2)) \end{aligned} \right] \\ - \left( g(H_1 - H_2) - \frac{g'}{2} \right) \nabla^2 h'_{bc} = S_{\delta_{bt}} \\ \frac{\partial h'_{bt}}{\partial t} + \delta_{bt} = -\frac{1}{2} \nabla \cdot (h'_1 \mathbf{u}_1 + h'_2 \mathbf{u}_2) = S_{h'_{bt}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \zeta_{bc}}{\partial t} = -\frac{1}{2} \nabla \cdot [(\zeta_1 + f_o) \mathbf{u}_1 - (\zeta_2 + f_o) \mathbf{u}_2] \\ \frac{\partial \delta_{bc}}{\partial t} + \mathcal{H}_{bc} h'_{bc} = f_o (\zeta_{bc} - f_o h'_{bc}) \\ + \frac{1}{2} \left[ \begin{aligned} & (2J(u_1, v_1) - \nabla \cdot (\delta_1 \mathbf{u}_1)) \\ & - (2J(u_2, v_2) - \nabla \cdot (\delta_2 \mathbf{u}_2)) \end{aligned} \right] \\ - \frac{g'}{2} H_1 \nabla^2 h'_{bt} = S_{\delta_{bc}} \\ \frac{\partial h'_{bc}}{\partial t} + \delta_{bc} = -\frac{1}{2} \nabla \cdot (h'_1 \mathbf{u}_1 - h'_2 \mathbf{u}_2) = S_{h'_{bc}} \end{cases} \quad (۲)$$

پس از حل این دو معادله، می‌توان  $\overline{\delta_{bc}}$  و  $\overline{\delta_{bt}}$  را از رابطه (۴) به دست آورد. در انتها، مقادیر کمیت‌های فشارورد  $\delta_{bc}^{n+1}$  و  $\delta_{bt}^{n+1}$  و کمیت‌های کثرفشار  $h_{bc}^{n+1}$  و  $h_{bt}^{n+1}$  با روابط زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{cases} \delta_{bt}^{n+1} = 2\overline{\delta_{bt}} - \delta_{bt}^{n-1} \\ h_{bt}^{n+1} = 2\overline{h_{bt}} - h_{bt}^{n-1} \\ \delta_{bc}^{n+1} = 2\overline{\delta_{bc}} - \delta_{bc}^{n-1} \\ h_{bc}^{n+1} = 2\overline{h_{bc}} - h_{bc}^{n-1} \end{cases} \quad (۶)$$

گسسته‌سازی بخش زمانی در معادله تاوایی نیز با روش لیپ‌فراگ انجام گرفته و فرمول‌بندی آن به شکل زیر است:

$$\begin{cases} \zeta_{bt}^{n+1} = \zeta_{bt}^{n-1} - \Delta t \nabla \cdot \begin{bmatrix} (\zeta_1 + f_o) \mathbf{u}_1 \\ (\zeta_2 + f_o) \mathbf{u}_2 \end{bmatrix} \\ \zeta_{bc}^{n+1} = \zeta_{bc}^{n-1} - \Delta t \nabla \cdot \begin{bmatrix} (\zeta_1 + f_o) \mathbf{u}_1 \\ -(\zeta_2 + f_o) \mathbf{u}_2 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (۷)$$

هنگامی که از روش لیپ‌فراگ برای گسسته‌سازی بخش زمانی معادله تاوایی استفاده می‌شود، جملات غیرخطی موجود در آن، از زمان قبل محاسبه می‌شوند؛ به‌گونه‌ای که اندرکنش بین جملات غیرخطی موجب ایجاد خطای دگرنامیدن و در نتیجه ناپایداری غیرخطی می‌گردد. یکی از روش‌های متداول برای جلوگیری از این ناپایداری، افزودن مقداری پخش عددی در هنگام حل معادله تاوایی است (دریچل و همکاران، ۱۹۹۹؛ قادر و اصفهانیان، ۱۳۸۵؛ قادر و همکاران، ۱۳۹۱). با توجه به اینکه این معادلات براساس متغیرهای فشارورد و کثرفشار بیان شده‌اند، جمله پخش مربوط به معادله تاوایی فشارورد براساس مقادیر تاوایی فشارورد و جمله پخش مربوط به معادله تاوایی کثرفشار براساس مقادیر تاوایی کثرفشار محاسبه شده‌اند. برای نمونه در معادله تاوایی فشارورد، داریم:

که با استفاده از تعاریف  $\overline{\delta} = (\delta^{n+1} + \delta^{n-1})/2$  و  $\overline{h'} = (h'^{n+1} + h'^{n-1})/2$  به شکل زیر بازنویسی می‌شوند:

$$\begin{cases} \overline{\delta_{bt}} - \frac{\delta_{bt}^{n-1}}{\Delta t} + \mathcal{H}_{bt} \overline{h'_{bt}} = S_{\delta_{bt}}^n \\ \overline{h'_{bt}} - \frac{h'^{n-1}_{bt}}{\Delta t} + \overline{\delta_{bt}} = S_{h_{bt}}^n \\ \overline{\delta_{bc}} - \frac{\delta_{bc}^{n-1}}{\Delta t} + \mathcal{H}_{bc} \overline{h'_{bc}} = S_{\delta_{bc}}^n \\ \overline{h'_{bc}} - \frac{h'^{n-1}_{bc}}{\Delta t} + \overline{\delta_{bc}} = S_{h_{bc}}^n \end{cases} \quad (۴)$$

با حذف  $\overline{\delta_{bc}}$  و  $\overline{\delta_{bt}}$  معادلات فوق به دو معادله هلمهولتز زیر تبدیل می‌شوند:

$$\begin{cases} \nabla^2 \overline{h'_{bt}} + B_{bt} \overline{h'_{bt}} = R_{bt} \\ \nabla^2 \overline{h'_{bc}} + B_{bc} \overline{h'_{bc}} = R_{bc} \\ B_{bt} = -\frac{2}{2gH - g'H_1} \left( \frac{1}{\Delta t^2} + f^2 \right) \\ B_{bc} = -\frac{2}{g'H_1} \left( \frac{1}{\Delta t^2} + f^2 \right) \\ R_{bt} = \frac{2}{2gH - g'H_1} \left[ \left( S_{\delta_{bt}}^n + \frac{\delta_{bt}^{n-1}}{\Delta t} \right) - \frac{1}{\Delta t} \left( S_{h_{bt}}^n + \frac{h'^{n-1}_{bt}}{\Delta t} \right) \right] \\ R_{bc} = \frac{2}{g'H_1} \left[ \left( S_{\delta_{bc}}^n + \frac{\delta_{bc}^{n-1}}{\Delta t} \right) - \frac{1}{\Delta t} \left( S_{h_{bc}}^n + \frac{h'^{n-1}_{bc}}{\Delta t} \right) \right] \end{cases} \quad (۵)$$

جدول ۱. فرمول‌بندی روش‌های E2S، C4S برای محاسبه مشتق‌های اول و دوم در نقاط گره.

روش	فرمول‌بندی
E2S	$\begin{cases} F'_j = \frac{1}{2d}(F_{j+1} - F_{j-1}) \\ F''_j = \frac{1}{d^2}(F_{j+1} - 2F_j + F_{j-1}) \end{cases}$
C4S	$\begin{cases} \frac{1}{6}F'_{j+1} + \frac{2}{3}F'_j + \frac{1}{6}F'_{j-1} = \frac{1}{2d}(F_{j+1} - F_{j-1}) \\ \frac{1}{12}F''_{j+1} + \frac{5}{6}F''_j + \frac{1}{12}F''_{j-1} = \frac{1}{d^2}(F_{j+1} - 2F_j + F_{j-1}) \end{cases}$

تاوایی پتانسیلی اولیه برای لایه اول معرف یک جت مداری است که برگرفته از شرط اولیه فشارورود دریچل و همکاران (۱۹۹۹) برای یک محیط تک لایه است. بر این اساس، میدان تاوایی پتانسیلی اولیه  $q_1$  در لایه اول طبق رابطه زیر تعریف می شود:

$$q_1 = \begin{cases} \bar{q}_1 + Q \operatorname{sgn}(\bar{y})(0.5 - \|\bar{y}\| - 0.5) & |\bar{y}| < 1 \\ \bar{q}_1 & |\bar{y}| \geq 1, \end{cases} \quad (10)$$

$$\bar{y} = y + c_m \sin mx + c_n \sin nx$$

که  $Q = 2f_0$  دامنه پرنشیدگی تاوایی پتانسیلی است و ضرایب  $c_m = -0.1$  و  $c_n = 0.1$  به ازای  $m = 2$  و  $n = 3$  در نظر گرفته شده اند.

برای تعیین میدان ارتفاع اولیه  $h_1$ ، باید شرایط  $\mathbf{u}_1 = -\mathbf{u}_2$  و  $H_1 = H_2 = 1$  در دستگاه معادلات (۱) اعمال شود. در این صورت، رابطه زیر به دست می آید:

$$g' \nabla^2 h_1 = 2f_0 \zeta_1 \quad (11)$$

که به ازای  $\zeta_1 = q_1 h_1 - f_0$  به معادله هلمهولتز زیر تبدیل می شود:

$$\nabla^2 h_1 - \frac{2f_0 q_1}{g'} h_1 = \frac{2f_0^2}{g'} \quad (12)$$

بنابراین، با حل این معادله، میدان ارتفاع اولیه  $h_1$  به گونه ای تعیین می شود که ارتفاع میانگین لایه اول  $H_1 = 1$  باقی بماند، بدون اینکه میدان تاوایی پتانسیلی اولیه  $q_1$  طبق رابطه (۱۰) تغییر کند. میانگین تاوایی پتانسیلی لایه اول  $\bar{q}_1$  به گونه ای تعیین می شود که میانگین تاوایی نسبی در کل ناحیه صفر باشد ( $\bar{\zeta}_1 = 0$ ) و در عین حال  $H_1 = 1$  و معادله هلمهولتز (رابطه ۱۲) نیز برقرار باشد. در اینجا برای سادگی، میدان واگرایی اولیه  $\delta_1 = 0$  در نظر گرفته شده است.

$$\frac{\partial \zeta_{bt}}{\partial t} = -\frac{1}{2} \nabla \cdot [(\zeta_1 + f_0) \mathbf{u}_1 + (\zeta_2 + f_0) \mathbf{u}_2] - v_{bt} (-\nabla^2)^\kappa \zeta_{bt} \quad (8)$$

که توان  $\kappa$  یک عدد صحیح است و ضریب پخش  $v_{bt}$  بسته به تعداد نقاط شبکه  $n_g$  به صورت زیر محاسبه می شود:

$$v_{bt} = \frac{Q}{k_{max}^{2\kappa}}, \quad Q = \max |\zeta_{bt}|, \quad k_{max} = \frac{n_g}{2} \quad (9)$$

#### ۴ شرایط اولیه

در این پژوهش، شرط اولیه کژفشار به صورت  $\mathbf{u}_1 = -\mathbf{u}_2$  (و در نتیجه  $\delta_1 = -\delta_2$  و  $\zeta_1 = -\zeta_2$ ) در یک ناحیه مربعی شکل  $-\pi < x < \pi$  و  $-\pi < y < \pi$  با مرزهای دوره ای تعریف شده است که ارتفاع میانگین لایه های اول و دوم با هم برابرند ( $H_1 = H_2 = 1$ ) و با در نظر گرفتن تقریب مرزسخت (به صورت  $h_1 + h_2 = 2$ )،  $h'_1 = -h'_2$  می باشد. به این ترتیب، در لحظه اولیه کمیت های فشارورود صفر هستند، در حالی که کمیت های کژفشار با مقادیر لایه اول برابرند.  $g = 2\pi^2$  و گرانی-کاهیده  $g' = g/400$  در نظر گرفته شده است. به ازای پارامتر کوریولیس  $f_0 = \pi/10$ ، هر واحد از زمان  $f_0/4\pi = 0.025$  روز است، به گونه ای که زمان  $t = 150$  معادل با 3.75 روز است. شعاع تغییر شکل راسبی خارجی  $\lambda_{ext} = \sqrt{gH}/f_0 = 20$  داخلی  $\lambda_{int} = \sqrt{g'H_1H_2}/f_0 = 0.5$  انتخاب شده اند. این شرط اولیه شبیه به شرط اولیه کژفشار کوتر و همکاران (۲۰۰۴) است؛ با این تفاوت که در مطالعه حاضر از میدان تاوایی پتانسیلی اولیه پیچیده تری استفاده شده است. برای تعیین مقادیر اولیه میدان های تاوایی ( $\zeta_i$ )، واگرایی ( $\delta$ ) و ارتفاع ( $h$ ) در این محیط دولایه، میدان

## ۵ نتایج حل عددی

در حل عددی معادلات آب کم عمق دو لایه برحسب متغیرهای فشارورد و کژفشار، شرط اولیه به کار گرفته شده تنها شامل کمیت‌های کژفشار است و مقدار کمیت‌های فشارورد صفر هستند، ولی با گذشت زمان، کمیت‌های فشارورد نیز مقدار پیدا می‌کنند؛ بنابراین گام زمانی  $\Delta t$  طبق شرط پایداری  $\sqrt{gH}\Delta t / \Delta x \leq 1$  (در مد فشارورد) تعیین می‌شود که در آن فاصله شبکه‌ای  $\Delta x$  در هر دو راستای  $x$  و  $y$  یکسان در نظر گرفته شده است. برای هر دو روش E2S و C4S از سه شبکه با تفکیک‌های  $64 \times 64$ ،  $128 \times 128$  و  $256 \times 256$  به ترتیب با گام‌های زمانی  $0.01$ ،  $0.005$  و  $0.0025$  استفاده شده است. شکل‌های ۱ و ۲ تحول زمانی میدان‌های تاوایی نسبی فشارورد و کژفشار را به ترتیب برای روش‌های E2S و C4S در شبکه‌ای با تفکیک  $256 \times 256$  و گام زمانی  $\Delta t = 0.0025$  در لحظات  $t = 0, 50, 100, 150$  نشان می‌دهند. همان‌گونه که در این شکل‌ها مشاهده می‌شود، میدان کژفشار اولیه با گذشت زمان به ساختارهای ریزتر شکسته می‌شود و تاوایی نسبی فشارورد  $k_{bt}$  که در لحظه اولیه وجود نداشت، در محیط ظاهر می‌شود و لحظه به لحظه، الگوی آن به الگوی تاوایی نسبی کژفشار  $k_{bc}$  شباهت بیشتری پیدا می‌کند. شکل‌های ۳ و ۴ میدان‌های تاوایی پتانسیلی متناظر آن‌ها را در لایه‌های اول و دوم نشان می‌دهند. مطابق این شکل‌ها، آشفتگی خطوط هم‌تاوایی پتانسیلی در روش E2S به مراتب بیشتر از روش C4S است که به صورت کیفی عملکرد بهتر روش C4S را نشان می‌دهند. برای ارزیابی کمی عملکرد این دو روش عددی، پایداری انرژی و پایداری جرم نیز بررسی شد.

در تحلیل پایداری انرژی، مقدار انرژی در لحظات مختلف و خطای آن نسبت به مقدار اولیه محاسبه می‌شود. انرژی جنبشی  $E_{kin}$  و انرژی پتانسیل در دسترس  $E_{ap}$  در

مدل آب کم عمق دو لایه به صورت زیر تعریف می‌شوند (کوشمن-رویزین و بکر، ۲۰۰۹):

$$E_{kin} = \iint \left[ \frac{1}{2} \rho_1 h_1 (u_1^2 + v_1^2) + \frac{1}{2} \rho_2 h_2 (u_2^2 + v_2^2) \right] dx dy, \quad (13)$$

$$E_{ap} = \iint \left[ \frac{1}{2} \rho_1 g (h_1 + h_2)^2 - H^2 + \frac{1}{2} (\rho_2 - \rho_1) g (h_2^2 - H_2^2) \right] dx dy. \quad (14)$$

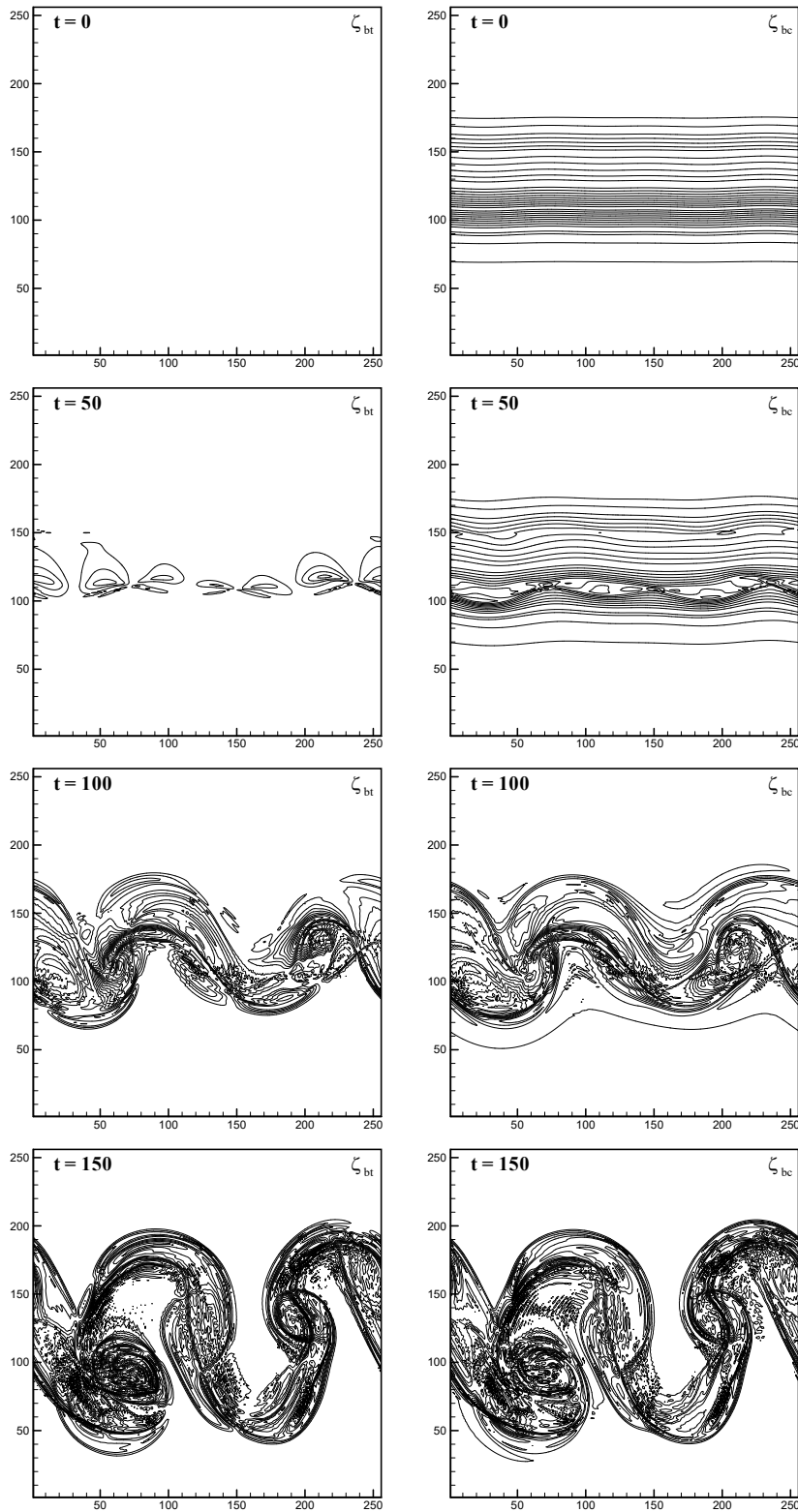
پس از ساده‌سازی و استفاده از شرایط  $\iint h_1' dx dy = 0$  و  $\iint h_2' dx dy = 0$  برای برقراری  $H_1 = H_2 = 1$ ، می‌توان روابط (۱۳) و (۱۴) را به شکل ساده‌تر بیان کرد:

$$E_{kin} = \rho_2 \iint \left[ \frac{1}{2} \frac{\rho_1}{\rho_2} h_1 (u_1^2 + v_1^2) + \frac{1}{2} h_2 (u_2^2 + v_2^2) \right] dx dy, \quad (15)$$

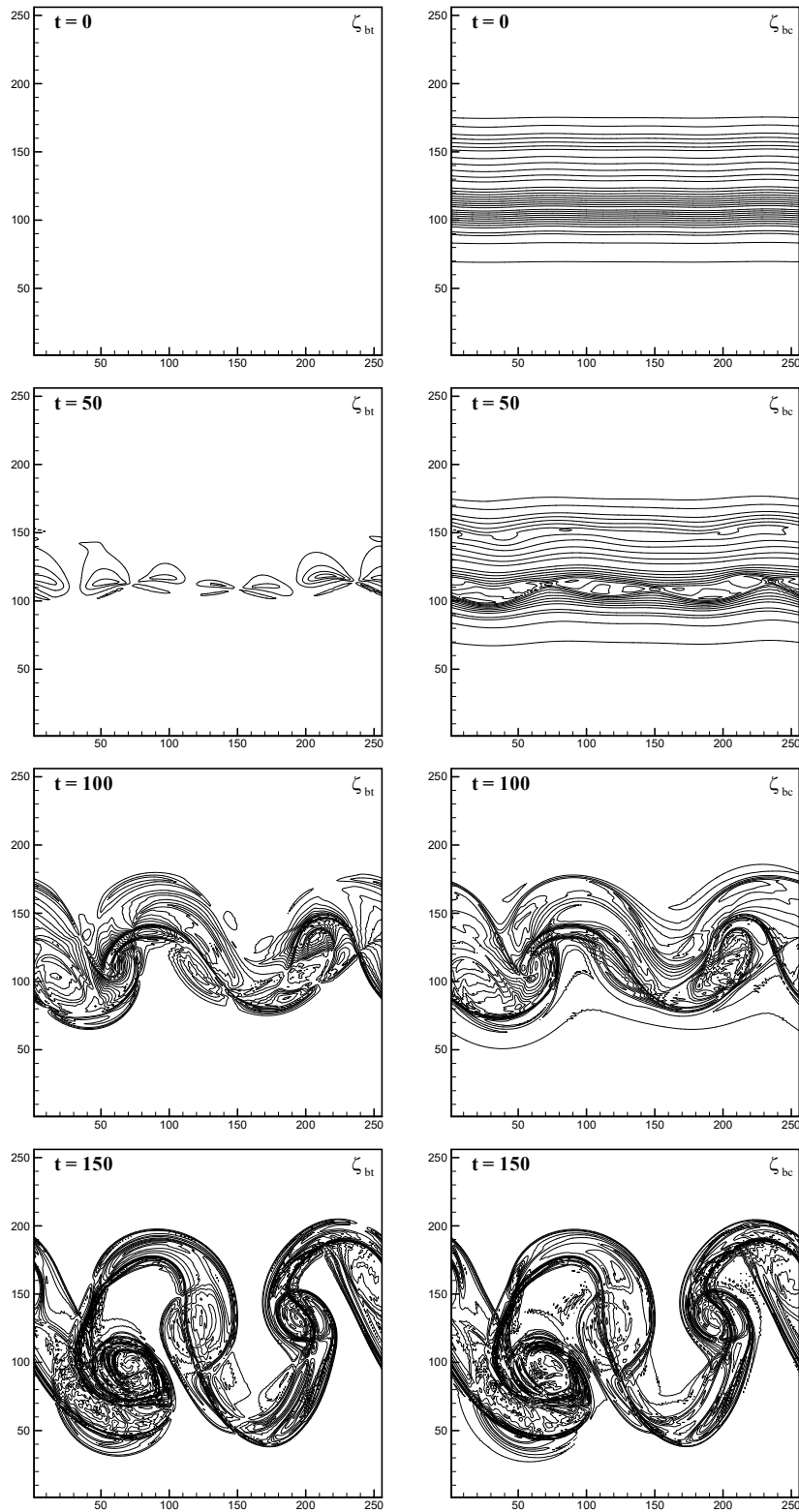
$$E_{ap} = \rho_2 \iint \left[ \frac{1}{2} \frac{\rho_1}{\rho_2} g (H_1 h_1' + H_2 h_2')^2 + \frac{1}{2} g' (H_2 h_2')^2 \right] dx dy, \quad (16)$$

که در آن  $\rho_1 / \rho_2 = 1 - g' / g$  است.

برای برقراری پایداری انرژی، باید انرژی کل  $E_t = E_{kin} + E_{ap}$  در لحظه  $t$  برابر با انرژی کل اولیه  $E_0 = E_{t=0}$  باشد. شکل‌های ۵-الف و ۵-ب منحنی‌های  $E_t / E_0$ ،  $E_{ap} / E_0$ ،  $E_{kin} / E_0$  را به ازای تفکیک شبکه  $256 \times 256$  به ترتیب برای روش‌های E2S و C4S نشان می‌دهند. با گذشت زمان و افزایش انرژی جنبشی، انرژی پتانسیل کاهش می‌یابد، به گونه‌ای که انرژی کل با خطای کمی، پایسته باقی می‌ماند. این، نشان‌دهنده قابلیت مدل در برقراری پایداری انرژی است. شکل ۵-ج خطای نسبی

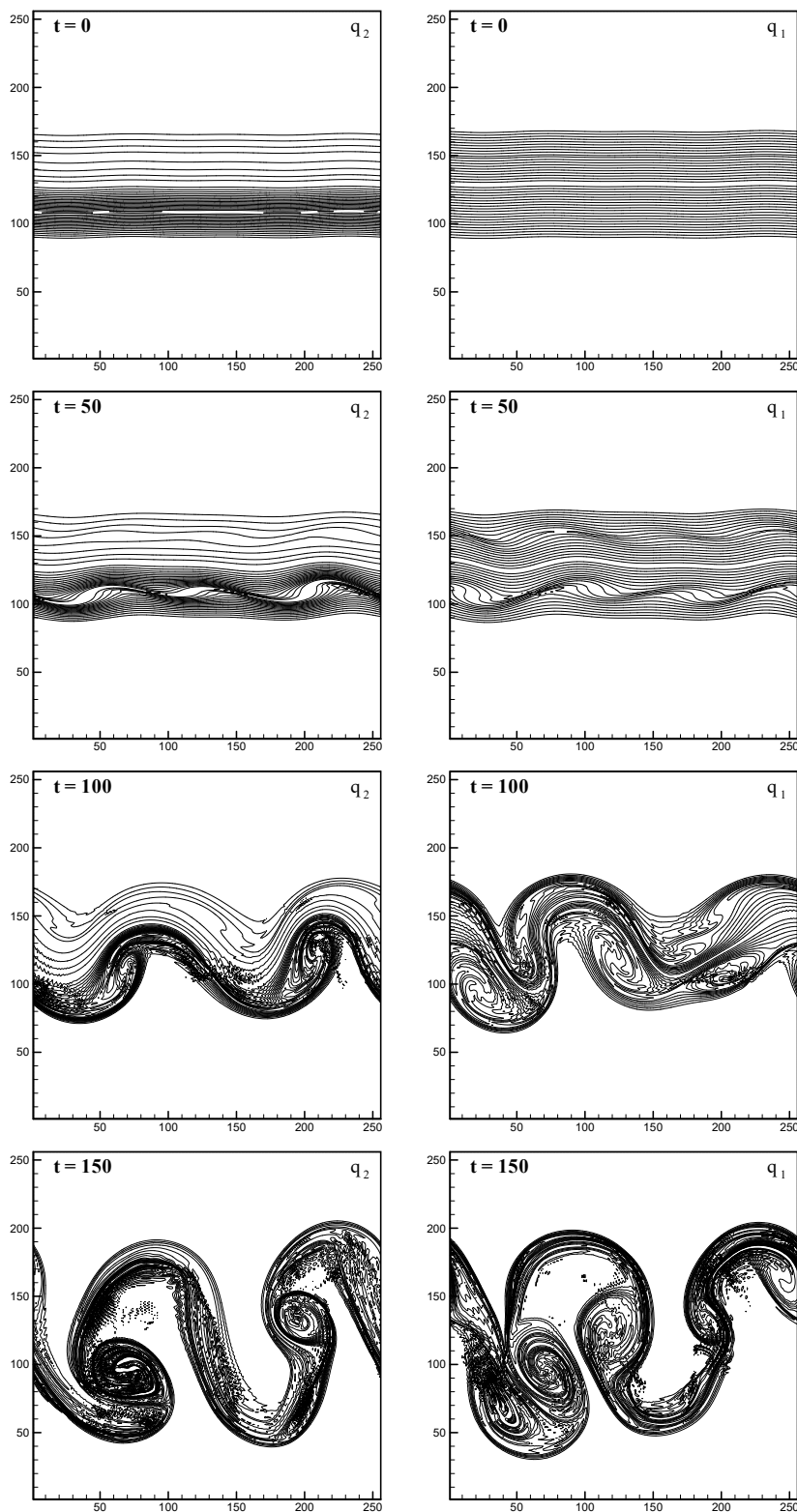


شکل ۱. تحول زمانی  $\zeta_{bc}$  و  $\zeta_{bt}$  برای روش E2S در شبکه‌ای با تفکیک  $256 \times 256$  و گام زمانی  $\Delta t = 0.0025$  (زمان در مقیاس  $\frac{1}{40}$  روز است).

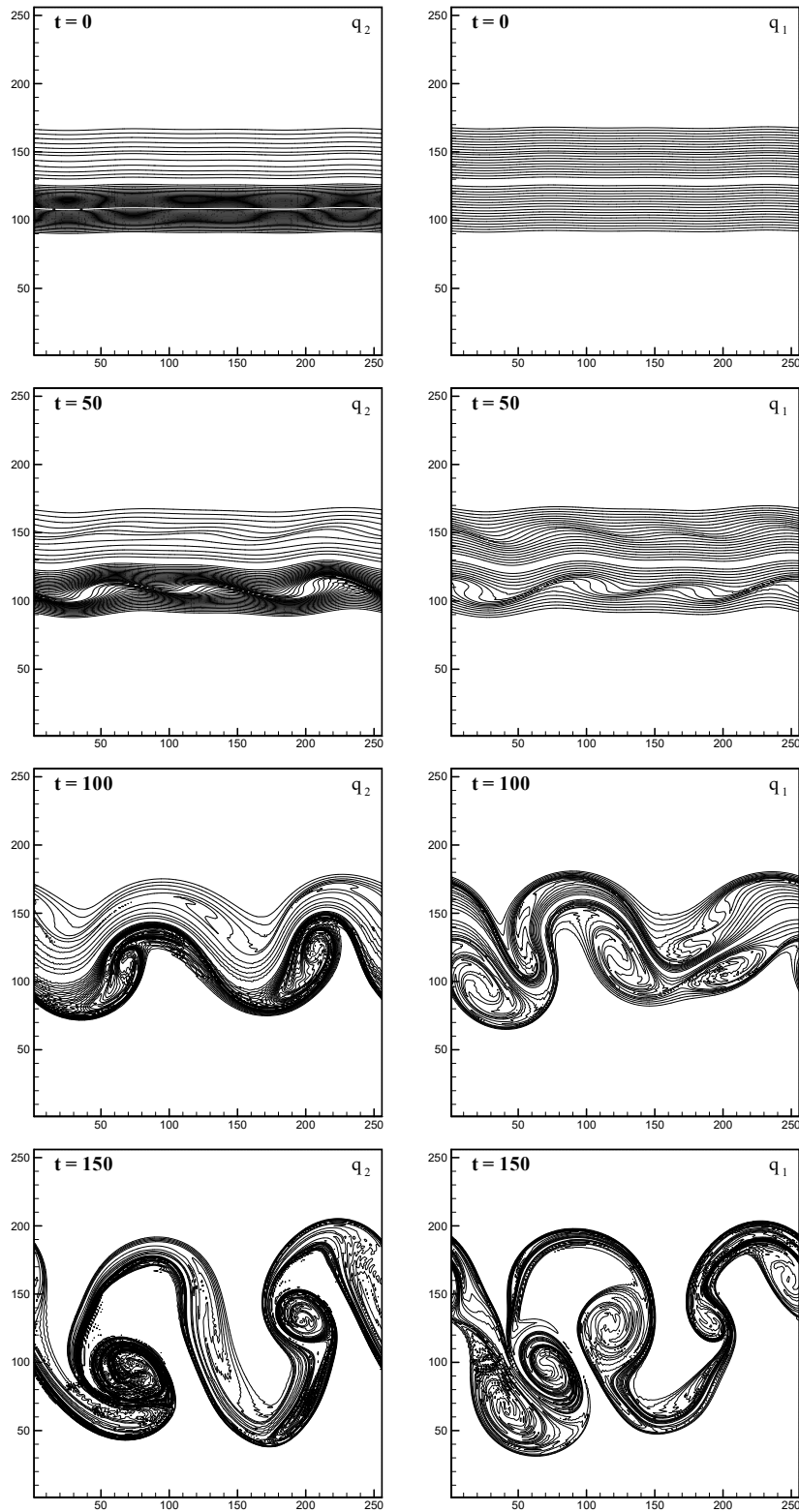


شکل ۲. مشابه شکل ۱ ولی با استفاده از روش C4S.

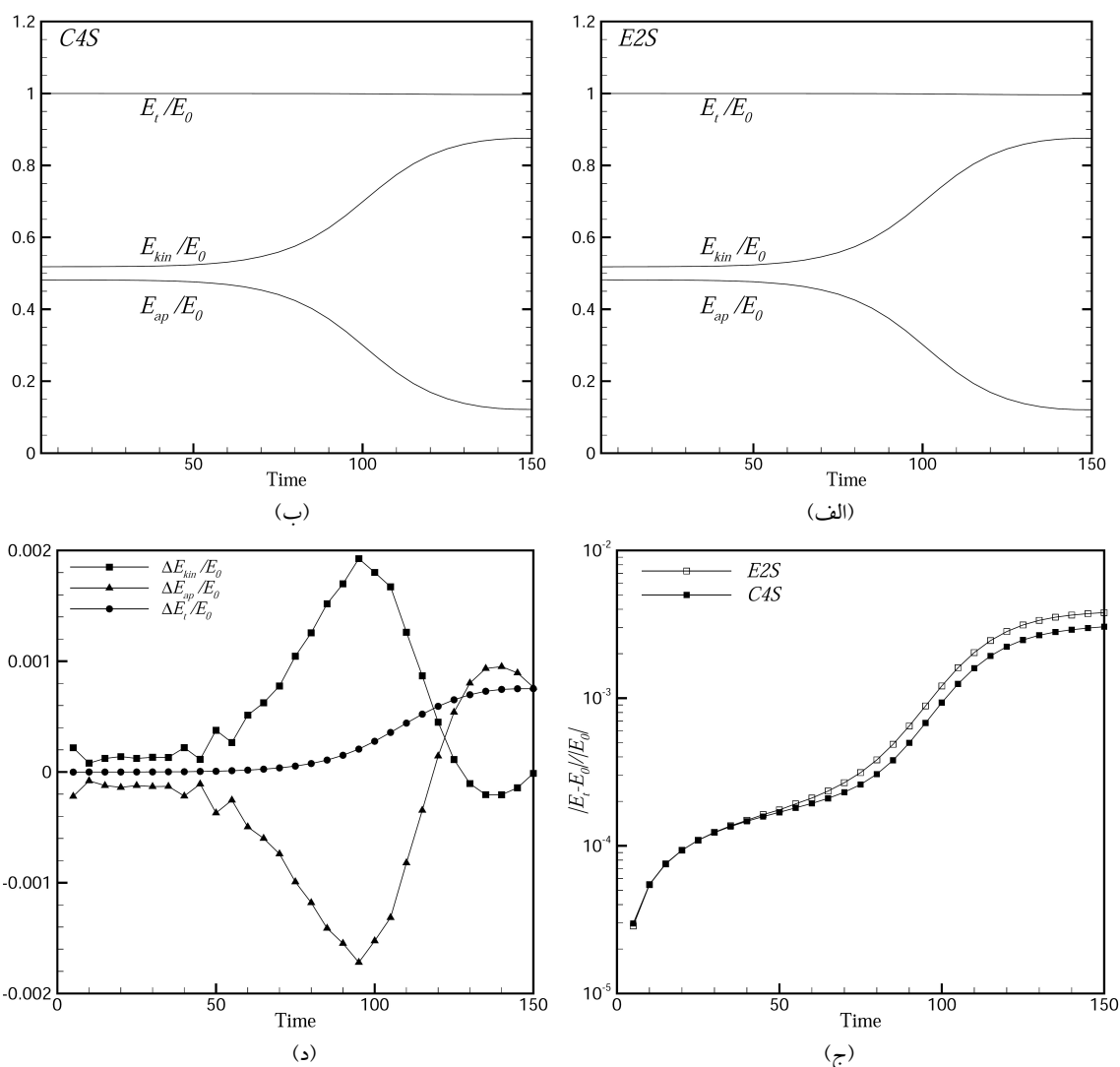




شکل ۳. تحول زمانی  $q_1$  و  $q_2$  برای روش E2S در شبکه‌ای با تفکیک  $256 \times 256$  و گام زمانی  $\Delta t = 0.0025$  (زمان در مقیاس  $\frac{1}{40}$  روز است).



شکل ۴. مشابه شکل ۳ ولی با استفاده از روش C4S.

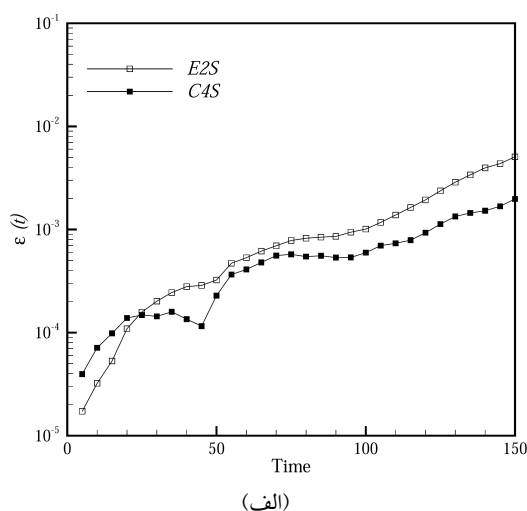


شکل ۵. (الف) و (ب) منحنی‌های  $E_t/E_0$  و  $E_{ap}/E_0$ ،  $E_{kin}/E_0$  برحسب زمان به ترتیب برای روش‌های E2S و C4S. (ج) منحنی خطای نسبی انرژی  $|E_t - E_0|/|E_0|$  برای هر دو روش E2S و C4S. (د) منحنی‌های  $\Delta E_{kin}/E_0$ ،  $\Delta E_{ap}/E_0$  و  $\Delta E_t/E_0$  که بیانگر اختلاف انرژی‌های تخمین زده شده در روش C4S در مقایسه با روش E2S است. (همه این منحنی‌ها به‌ازای تفکیک شبکه 256×256 هستند).

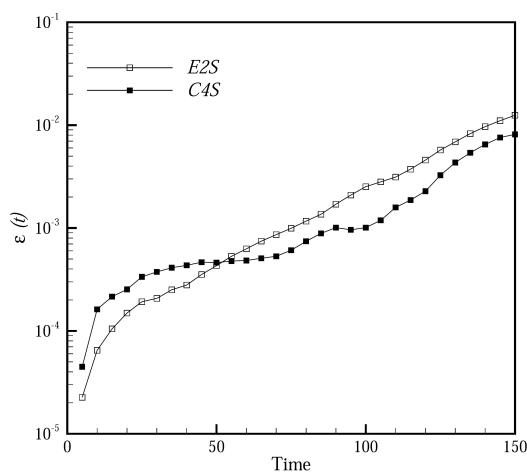
اندازه‌گیری شد. شکل ۵-د، منحنی‌های  $\Delta E_{kin}/E_0$ ،  $\Delta E_{ap}/E_0$  و  $\Delta E_t/E_0$  را به‌ازای تفکیک شبکه 256×256 نشان می‌دهد. مطابق این شکل، تا حدود  $t = 120$  استفاده از روش C4S در مقایسه با روش E2S، منجر به تخمین انرژی جنبشی بیشتر و تخمین انرژی پتانسیل در دسترس کمتر می‌شود و پس از آن، این روند وارون می‌گردد. با وجود این، تخمین انرژی کل  $E_t$  در روش C4S همواره بیشتر از روش E2S است که با

انرژی  $|E_t - E_0|/|E_0|$  را برای روش‌های E2S و C4S به‌ازای تفکیک شبکه 256×256 نشان می‌دهد. این شکل بیانگر عملکرد بهتر روش C4S در مقایسه با روش E2S در پایسته نگه‌داشتن انرژی است. برای ارزیابی بهتر منحنی‌های خطای نسبی انرژی این دو روش، اختلاف انرژی جنبشی  $\Delta E_{kin} = E_{kin C4S} - E_{kin E2S}$ ، اختلاف انرژی پتانسیل در دسترس  $\Delta E_{ap} = E_{ap C4S} - E_{ap E2S}$  و اختلاف انرژی کل  $\Delta E_t = E_{t C4S} - E_{t E2S}$  نیز

انجام گرفته است. طبق نتایج، با گذشت زمان، میدان‌های کژ فشار اولیه به ساختارهای ریزتر شکسته می‌شوند و میدان‌های فشارورد که در لحظه اولیه وجود ندارند، به صورت تدریجی ظاهر می‌شوند. تحلیل پایداری انرژی و جرم نشان می‌دهد که این مدل در پایداری نگاه داشتن انرژی و جرم از قابلیت خوبی برخوردار است. برای بررسی دقت این دو روش عددی، خطاهای انرژی و جرم اندازه‌گیری شد. تحلیل منحنی‌های خطا بیانگر آن است که روش C4S در مقایسه با روش E2S از عملکرد بهتری برخوردار است.



(الف)



(ب)

شکل ۶. خطای جرم برای روش‌های E2S و C4S برحسب زمان به ازای تفکیک شبکه  $256 \times 256$ : (الف) در لایه اول، (ب) در لایه دوم.

گذشت زمان این روند با شدت بیشتری نیز همراه است. برای تعیین خطای جرم، توانایی هر یک از روش‌ها در پایسته نگاه داشتن میزان جرم بین دو تراز هم‌تاوایی پتانسیلی مقایسه می‌شود و خطای هر روش با توجه به اندازه خطای جرم میان این دو تراز تعریف می‌شود. توضیحات بیشتر نحوه محاسبه خطای جرم در دریچل و همکاران (۱۹۹۹) ارائه شده است. شکل ۶، خطاهای جرم در لایه‌های اول و دوم را برای روش‌های E2S و C4S برحسب زمان به ازای تفکیک شبکه  $256 \times 256$  نشان می‌دهد. در تعیین خطای جرم برای هر لایه از میدان‌های تاوایی پتانسیلی و ارتفاع همان لایه استفاده شده است. همان‌گونه که مشاهده می‌شود، در ابتدا خطای جرم روش E2S کمتر از روش C4S است ولی با گذشت زمان خطای روش E2S در مقایسه با C4S با افزایش بیشتری همراه است. این مسئله در تفکیک‌های شبکه  $64 \times 64$  و  $128 \times 128$  نیز مشاهده می‌شود (که در اینجا ارائه نشده‌اند). شکل ۷، خطاهای جرم در لایه‌های اول و دوم را برحسب تعداد نقاط شبکه در  $t = 150$  نشان می‌دهد. با افزایش تعداد نقاط شبکه از ۶۴ به ۱۲۸، کاهش خطای روش C4S بیشتر از روش E2S است؛ اما در ادامه، با افزایش تفکیک شبکه از ۱۲۸ به ۲۵۶، روند کاهشی خطا در هر دو روش تقریباً یکسان است. به علاوه، در هر دو روش، خطای جرم در لایه دوم (لایه پایینی) به مراتب بیشتر از خطای جرم در لایه اول (لایه بالایی) است.

## ۶ نتیجه‌گیری

در این پژوهش، حل عددی معادلات آب کم‌عمق غیرخطی دو لایه برحسب متغیرهای فشارورد و کژ فشار در شبکه Z در یک ناحیه مربع‌شکل با عمق ثابت و شرط مرزی دوره‌ای بررسی شد. گسسته‌سازی مکانی معادلات با استفاده از روش‌های E2S و C4S و گسسته‌سازی زمانی (با بهره‌گیری از روش لپ‌فراگ) به صورت نیمه‌ضمنی

قادر، س.، احمدی گیوی، ف. و گلشاهی، ح.، ۱۳۹۱، حل عددی معادلات آب کم عمق با استفاده از روش فشرده ترکیبی مرتبه ششم، مجله ژئوفیزیک ایران، ۴(۴)، ۳۵-۴۹.

قادر، س. و اصفهانیان، و.، ۱۳۸۵، حل معادلات آب کم عمق با استفاده از روش فشرده ترکیبی تعمیم یافته: دهمین کنفرانس دینامیک شارها، دانشگاه یزد، گروه مکانیک، ۹ تا ۱۱ آبان ۱۳۸۵.

Blayo, E., 2000, Compact finite difference schemes for ocean models: 1.ocean waves: Journal of Copmutational Physics, **164**, 241-257.

Castro, M. J., Garcia-Rodriguez, J. A., Gonzalez-Vida, J. M., Macias, J., and Pares, C., 2004, Numerical simulation of two-layer shallow water flows through channels with irregular geometry: Journal of Copmutational Physics, **195**, 202-235.

Cotter, C. J., Frank, J., and Reich, S., 2004, Hamiltonian particle-mesh method for two-layer shallow-water equations subject to the rigid-lid approximation: SIAM Journal of Applied Dynamical Systems, **3**(1), 69-83.

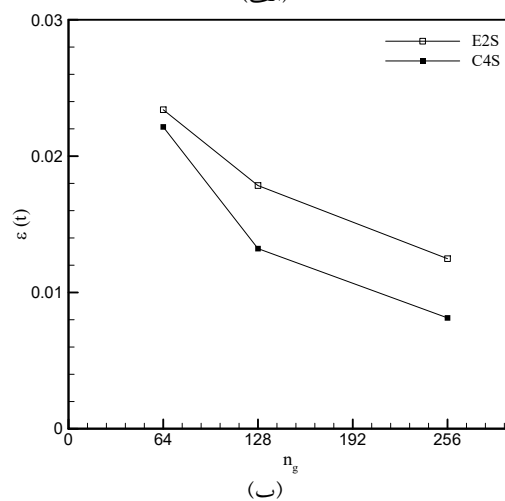
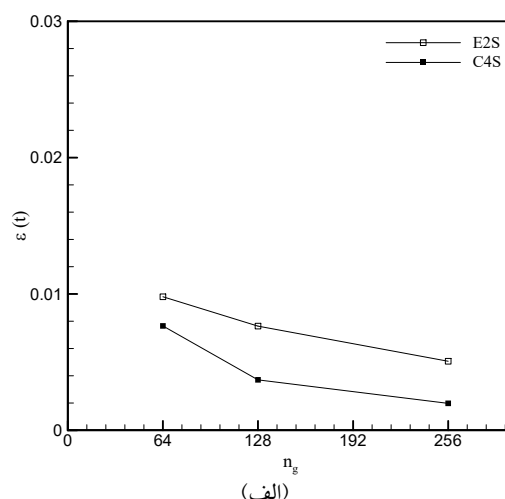
Cushman-Roisin, B., and Beckers, J. M., 2009, Introduction to Geophysical Fluid Dynamics: Physical and Numerical Aspects: Academic Press.

Cushman-Roisin, B., Esenkov, O. E., and Mathias, B. J., 2000, A particle-in-cell method for the solution of two-layer shallow-water equations: International Journal for Numerical Methods in Fluids, **32**, 515-543.

Dritschel, D. G., Polvani, L. M., and Mohebalhojeh, A. R., 1999, The contour-advective semi-Lagrangian algorithm for the shallow water equations: Monthly Weather Review, **127**, 1552-1565.

Esfahanian, V., Ghader, S., and Mohebalhojeh, A. R., 2005, On the use of super compact scheme for spatial differencing in numerical models of the atmosphere: Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society, **131**, 2109-2130.

Ghader, S., Mohebalhojeh, A. R., and Esfahanian, V., 2009, On the spectral convergence of the super compact finite-difference schemes for the f-plane shallow water equations: Monthly Weather Review, **137**, 2393-2406.



شکل ۷. خطای جرم برای روش های E2S و C4S بر حسب تعداد نقاط شبکه در  $t = 150$ ؛ (الف) در لایه اول و (ب) در لایه دوم.

## سپاس‌گزاری

نویسندگان مقاله از دانشگاه آزاد اسلامی واحد شوشتر و دانشگاه تهران، به دلیل حمایت از این پژوهش تشکر می‌کنند.

## منابع

قادر، س.، احمدی گیوی، ف. و گلشاهی، ح.، ۱۳۸۹، مقایسه عملکرد روش های فشرده و فشرده ترکیبی مرتبه ششم در گسسته‌سازی مکانی مدل آب کم عمق دو لایه‌ای: نمایش امواج گرانی-لختی و راسبی خطی، مجله ژئوفیزیک ایران، ۴(۲)، ۴۹-۶۹.

- problems by a compact differencing technique: *Journal of Computational Physics*, **19**, 90-109.
- JavanNezhad, R., Meshkatee, A. H., Ghader, S., and Ahmadi-Givi, F., 2016, High-order compact MacCormack scheme for two-dimensional compressible and non-hydrostatic equations of the atmosphere: *Dynamics of Atmospheres and Oceans*, **75**, 102-117.
- Lele, S. k., 1992, Compact finite difference scheme with spectral-like resolution: *Journal of Computational Physics*, **103**, 16-42.
- Matsuura, T., and Fujita, M., 2006, Two different aperiodic phases of wind-driven ocean circulation in a double-gyre, two-layer shallow-water model: *Journal of Physical Oceanography*, **36**, 1265-1286.
- Randall, D. A., 1994, Geostrophic adjustment and the finite-difference shallow water equations: *Monthly Weather Review*, **122**, 1371-1377.
- Ghader, S., Ghasemi, A., Banazadeh, M. R., and Mansoury, D., 2012, High-order compact scheme for Boussinesq equations: Implementation and numerical boundary condition issue: *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **69**(3), 590-605.
- Ghader, S., and Nordström, J., 2015, High-order compact finite difference schemes for the vorticity-divergence representation of the spherical shallow water equations: *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **78**, 709-738.
- Gill, A. E., 1982, *Atmosphere-Ocean Dynamics*: Academic Press.
- Golshahy, H., Ghader, S., and Ahmadi-Givi, F., 2011, Accuracy assessment of the super compact and combined compact schemes for spatial differencing of a two-layer oceanic model: presentation of linear inertia-gravity and Rossby waves: *Ocean Modelling*, **37**, 49-63.
- Hirsh, R. S., 1975, Higher order accurate difference solutions of fluid mechanics

## Numerical solution of two-layer shallow water equations in terms of barotropic and baroclinic variables using fourth-order compact method

Hakim Golshahy<sup>1\*</sup>, and Sarmad Ghader<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Assistant Professor, Physics Department, Islamic Azad University, Shoushtar Branch, Shoushtar, Iran

<sup>2</sup>Associate Professor, Institute of Geophysics, University of Tehran, Tehran, Iran

(Received: 04 October 2016, Accepted: 31 December 2016)

### Summary

Two-dimensional shallow water equations are commonly used to study the dynamics of large-scale flows in the atmosphere and oceans that are nearly horizontal. Over the past years, the numerical solution of multi-layer shallow water systems has been widely researched. In stratified geophysical flows, two-layer shallow water equations are proper models for the simulation of certain phenomena in the atmosphere and oceans. In this model, the fluid is assumed to be composed of two shallow layers of immiscible fluids in which the superposed layers differ in velocity and density in a two-dimensional domain. The constant density of upper layer is less than the density of the lower one.

For the solution of shallow water equations, high order compact finite difference schemes have been widely used owing to their good accuracy compared with standard finite difference schemes for a large range of wave numbers and a low numerical diffusion with small dispersion errors.

In this research, fourth-order compact finite-difference method was used for spatial differencing of f-plane two-layer shallow-water equations in the vorticity-divergence formulation for a rectangular domain with periodic boundaries; the results were compared to those of conventional second order finite difference method. For time integration, a three-level semi-implicit formulation was applied with the Robert-Asselin time filter which prevents the numerical instability caused by the computational mode of the three-time-level scheme. The equations were derived in terms of barotropic and baroclinic variables such that they were split into two coupled systems (barotropic and baroclinic systems) consisting of all variables of both upper and lower layers in each system. These systems are different than standard two-layer shallow water systems.

A perturbed unstable zonal jet, in a two-layer shallow-water flow, was considered for initial value problem with baroclinic instabilities. The two-layer baroclinic initial values were extracted from a one-layer initial condition such that the potential vorticity of one-layer initial condition was equal to the upper layer potential vorticity; other initial values of the two-layer shallow water equations were determined by taking the definition of baroclinic initial condition, in the situation where the initial current in the upper layer is opposite to one in the lower layer such that the initial barotropic variables are all zero. Over time, the initial state broke up into smaller barotropic and baroclinic vortices.

To control the numerical nonlinear instability due to the interaction of nonlinear terms of the vorticity equations and subsequently produce the aliasing errors, the barotropic and baroclinic planetary vorticities were explicitly damped by adding the hyperdiffusion operator acting on the same vorticity equations.

There exist myriad methods for assessing the accuracy of numerical schemes such as the conservation of total mass and energy. The ability of each simulation to conserve the total energy on the total layer-depth (i.e. energy error) and mass between isolevels of the potential vorticity (i.e. mass error) within each layer, was measured in order to assess the numerical accuracy. Results showed that this model meets the conservation laws of mass and energy in the test problem considered here. The fourth-order compact finite-difference method entailed less energy error than the second order finite difference method during the time integration of two-layer shallow water equations; additionally, it is more accurate regarding the conservation of mass for a long time integration.

**Keywords:** fourth-order compact method, shallow-water equations, two-layer basin, Z grid, barotropic and baroclinic variables

\*Corresponding author:

h.golshahi@iau-shoushtar.ac.ir