حل عددی معادلات آب کمعمق دو لایه بر حسب متغیرهای فشارورد و کژفشار با استفاده از روش فشرده مرتبه چهارم

حکیم گلشاهی'* و سرمد قادر

^۱ استادیار، گروه فیزیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد شوشتر، شوشتر، ایران ^۲ دانشیار، موسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران، تهران ایران

(تاریخ دریافت: ۹۵/۰۷/۱۳، تاریخ پذیرش: ۹۵/۱۰/۱۱)

چکیدہ

در پژوهش حاضر، روش فشرده مرتبه چهارم برای حل عددی معادلات آب کم عمق دولایه در صفحه f برحسب متغیرهای تاوایی، واگرایی و ارتفاع به کار گرفته می شود. با درنظر گرفتن متغیرهای فشارورد و کژفشار، این معادلات به دو بخش فشاورد و کژفشار تقسیم می شوند، به گونهای که هر بخش به طور مجزا حل می شود. برای گسسته سازی مکانی معادلات، علاوه بر روش فشرده مرتبه چهارم از روش مرتبه دوم مرکزی نیز استفاده شده است تا نتایج این دو روش با یکدیگر مقایسه شوند. برای فرمول بندی و گسسته سازی زمانی این معادلات، روش نیمه ضمنی سه ترازه به کار گرفته شده است. شرط اولیه کژفشار به گونه ای انتخاب شده است که میدان جریان در لایه بالایی درست در خلاف جهت جریان لایه پایینی است و متغیرهای فشارورد در لحظه اولیه، صفر هستند. نتایج نشان دهنده قابلیت مدل در برقراری پایستگی انرژی و جرم است. مقایسه نتایج، عملکرد بهتر روش فشرده مرتبه چهارم را در مقایسه با روش مرتبه دوم مرکزی نشان می دهد.

واژههای کلیدی: روش فشرده مرتبه چهارم، معادلات آب کمعمق، محیط دولایه، شبکه Z، متغیرهای فشارورد و کژفشار.

معادلات آب کمعمق غیرخطی دو لایه برحسب میدانهای مذکور، شرط اولیه کژفشاری در یک ناحیه مربع شکل با شرط مرزی دورهای، در نظر گرفته شد. این شرط اولیه شبیه به شرط اولیه کژفشار کوتر و همکاران (۲۰۰۴) است؛ با این تفاوت که در آن به جای تقریب صفحه β ، از تقریب صفحه f استفاده شده و میدان تاوایی پتانسیلی آن کمی پیچیده تر انتخاب شده است. این میدان تاوایی پتانسیلی اولیه، بر گرفته از شرط اولیه تکلایه (فشارورد) دریچل و همکاران (۱۹۹۹) است که در اینجا برای محیطی دولایه با شرایط اولیه کژفشار تعمیم داده شده است.

با توجه به نتایج مناسب به کارگیری روش های فشرده برای گسسته سازی مکانی شکل خطی شده معادلات آب کم عمق تک لایه (بلایو، ۲۰۰۰؛ اصفهانیان و همکاران، ۲۰۰۵) و دولایه (قادر و همکاران، ۱۳۸۹؛ گلشاهی و همکاران، ۲۰۱۱)، در این پژوهش، عملکرد روش فشرده مرتبه چهارم در گسسته سازی مکانی شکل غیر خطی معادلات آب کم عمق دولایه، بر حسب متغیرهای تاوایی، واگرایی و ارتفاع بررسی می شود و نتایج آن با روش مرتبه دوم مرکزی مقایسه می گردد. برای فرمول بندی و گسسته سازی بخش زمانی معادلات نیز روش نیمه ضمنی سه ترازه به کار می رود.

۲ معادلات حاکم

معادلات آب کمعمق ناوشکسان در محیطی دولایه با کف هموار، بدون اصطکاک و تنش باد درنظر گرفته میشوند که در آن لایه اول با چگالی کمتر بر روی لایه دوم با چگالی بیشتر قرار گرفته و چگالی (م) و ارتفاع میانگین (H) در هر لایه مقداری ثابت است (گیل، میانگین (H) در هر لایه مقداری ثابت است (گیل، است (مادلات برحسب میدانهای تاوایی (ک)، واگرایی (۵) و ارتفاع (h) در شبکه Z به صورت زیر است: ۱ مقدمه

معادلات آب کمعمق بهطور گسترده در زمینههای مختلف جوی و اقیانوسی به کار گرفته می شوند. با استفاده از معادلات آب کمعمق دو لایه می توان اثرات چینهبندی را نیز در نظر گرفت. در برخی از نواحی اقیانوسی یا دریاها می توان چینهبندی چگالی آب را با تقریب خوبی بهصورت دولایه فرض کرد و برای توصیف دینامیک چنین محیطهایی معادلات آب کمعمق دولایهای را به کار برد (کاسترو و همکاران، ۲۰۰۴؛ ماتسورا و فوجیتا، ۲۰۰۶؛ کوشمن– رویزین و همکاران، ۲۰۰۰). با توجه به ماهیت پیچیده میدانهای جوی و اقیانوسی و گستردگی مقیاس در آنها، از روشهایی با توانایی تفکیک زیاد (ازجمله روش های طیفی و روش های فشرده) در شبیه سازی عددی استفاده می شود. با توجه به اینکه روشهای تفاضل متناهی فشرده، کارایی مناسبی در حل معادلات حاکم بر دینامیک شارهها از خود نشان دادهاند (هرش، ۱۹۷۵؛ لل، ۱۹۹۲؛ قادر و همکاران، ۲۰۰۹؛ قادر و همکاران، ۲۰۱۲؛ قادر و نوردستروم، ۲۰۱۵؛ جوان نژاد و همکاران، ۲۰۱۶)، پژوهش حاضر به اعمال روش فشرده مرتبه چهارم جهت گسستهسازی مکانی شکل غیرخطی معادلات آب کمعمق دولایه برحسب متغیرهای تاوایی، واگرایی و ارتفاع به شکل فشارورد و کژفشار در شبکه Z (رندال، ۱۹۹۴) اختصاص دارد. با در نظر گرفتن متغیرهای فشارورد و کژفشار، دستگاه معادلات آب کمعمق دولایه به دو دستگاه معادلات فشارورد و کژفشار تقسیم می شود، به گونهای که هر یک از بخش های فشارورد و کژفشار در دستگاه معادلات حاصل، ترکیبی از معادلات مربوط به لایه های اول و دوم است. هنگام حل عددی این معادلات، بخش فشارورد و کژفشار جداگانه حل می شوند. این شیوه با شیوه متداول در حل عددی معادلات آب کم عمق چندلایه که در آن دستگاه معادلات مربوط به هر لایه بهطور مجزا حل می شوند، متفاوت است. برای حل عددی

که زیرنویس های bc و bc به ترتیب معرف بخش های فشارورد و کژفشار هستند؛ به گونهای که $\delta_{bt} = \frac{1}{2} (\delta_1 + \delta_2)$, $\zeta_{bt} = \frac{1}{2} (\zeta_1 + \zeta_2)$ و $\delta_{bt} = \frac{1}{2} (\delta_1 + \delta_2)$, $h'_{bt} = \frac{1}{2} (\delta_1 - \zeta_2)$ و $\delta_{bc} = \frac{1}{2} (\delta_1 - \delta_2)$, $\zeta_{bc} = \frac{1}{2} (h'_1 + h'_2)$ و $\delta_{bc} = \frac{1}{2} (\delta_1 - \delta_2)$, $\zeta_{bc} = \frac{1}{2} (h'_1 - h'_2)$ و $\delta_{bc} = \frac{1}{2} (\delta_1 - \delta_2)$, $\delta_{bc} = \frac{1}{2} (h'_1 - h'_2)$ و $\delta_{bc} = \frac{1}{2} (h'_1 - h'_2)$ و $H_{bc} = \frac{1}{2} (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2)$ ف $h'_{bc} = \frac{1}{2} (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)$ $\mathcal{H}_{bc} = \frac{g'}{2} H_1 \nabla^2 - f_c^2$ و $\mathcal{H}_{bt} = (gH - \frac{g'}{2} H_1) \nabla^2 - f_c^2$ $H = H_1 + H_2$ کونه ای که d_{bt} ا $\delta_{bt} = h_1 + H_2$ (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)

۳ فرمول بندی حل عددی برای حل عددی دستگاه معادلات (۲) از روش نیمه ضمنی استفاده شده است، به گونه ای که تنها معادلات مربوط به گرایش زمانی واگرایی و ارتفاع به صورت نیمه ضمنی فرمول بندی می شوند. در گسسته سازی بخش زمانی معادلات، روش سه ترازی لیپ فراگ و در گسسته سازی مکانی، روش های مرتبه دوم مرکزی (E2S) و فشرده مرتبه چهارم (C4S) به کار رفته اند. جدول ۱، فرمول بندی طرحواره های به کار گرفته شده برای محاسبه مشتق های اول و دوم در نقاط گره از شبکه ای را نشان می دهد که دارای فاصله شبکه ای لست (هرش، ۱۹۷۵؛ لل، ۱۹۹۲).

با استفاده از طرحواره سهترازی لیپفراگ برای گسستهسازی بخش زمانی معادلات و طبق فرمولبندی نیمهضمنی داریم:

$$\begin{cases} \frac{\delta_{bt}^{n+1} - \delta_{bt}^{n-1}}{2\Delta t} + \mathcal{H}_{bt} \left(\frac{h'_{bt}^{n+1} + h'_{bt}^{n-1}}{2} \right) = S^{n}_{\delta_{bt}} \\ \frac{h'_{bt}^{n+1} - h'_{bt}^{n-1}}{2\Delta t} + \frac{\delta_{bt}^{n+1} + \delta_{bt}^{n-1}}{2} = S^{n}_{h_{bt}} \\ \frac{\delta_{bc}^{n+1} - \delta_{bc}^{n-1}}{2\Delta t} + \mathcal{H}_{bc} \left(\frac{h'_{bc}^{n+1} + h'_{bc}^{n-1}}{2} \right) = S^{n}_{\delta_{bc}} \\ \frac{h'_{bc}^{n+1} - h'_{bc}^{n-1}}{2\Delta t} + \frac{\delta_{bc}^{n+1} + \delta_{bc}^{n-1}}{2} = S^{n}_{h_{bc}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \zeta_{I}}{\partial t} = -\nabla \cdot \left[\left(\zeta_{I} + f_{o} \right) \mathbf{u}_{I} \right] \\ \frac{\partial \delta_{I}}{\partial t} + g H_{I} \nabla^{2} h_{I}' = f_{o} \zeta_{I} \\ -g H_{2} \nabla^{2} h_{2}' + 2J \left(u_{I}, v_{I} \right) - \nabla \cdot \left(\delta_{I} \mathbf{u}_{I} \right) \\ \frac{\partial h_{I}'}{\partial t} + \delta_{I} = -\nabla \cdot \left(h_{I}' \mathbf{u}_{I} \right) \\ \frac{\partial \zeta_{2}}{\partial t} = -\nabla \cdot \left[\left(\zeta_{2} + f_{o} \right) \mathbf{u}_{2} \right] \\ \frac{\partial \delta_{2}}{\partial t} + \left(g + g' \right) H_{2} \nabla^{2} h_{2}' = f_{o} \zeta_{2} \\ -g H_{I} \nabla^{2} h_{I}' + 2J \left(u_{2}, v_{2} \right) - \nabla \cdot \left(\delta_{2} \mathbf{u}_{2} \right) \\ \frac{\partial h_{2}'}{\partial t} + \delta_{2} = -\nabla \cdot \left(h_{2}' \mathbf{u}_{2} \right) \end{cases}$$
(1)

که f_{\circ} پارامتر کوریولیس، $\mathbf{u} = (u, v)^T$ بردار سرعت افقی، g شتاب گرانی، $\rho_2 = g(\rho_2 - \rho_1)/\rho_2$ گرانی کاهیده، $h_2 = H_2(1+h'_2)$ و $h_1 = H_1(1+h'_1)$ و اندیس های ۱ و ۲ معرف لایه های اول و دوم هستند.

با استفاده از جمع و تفاضل معادلات هر لایه با لایه دیگر، دستگاه معادلات فوق به صورت فشارورد و کژفشار زیر در میآید:

$$\begin{cases} \frac{\partial \zeta_{bt}}{\partial t} = -\frac{1}{2} \nabla \cdot \left[\left(\zeta_{I} + f_{o} \right) \mathbf{u}_{I} + \left(\zeta_{2} + f_{o} \right) \mathbf{u}_{2} \right] \\ \frac{\partial \delta_{bt}}{\partial t} + \mathcal{H}_{bt} h'_{bt} = f_{o} \left(\zeta_{bt} - f_{o} h'_{bt} \right) \\ + \frac{1}{2} \left[\left(2J \left(u_{I}, v_{I} \right) - \nabla \cdot \left(\delta_{I} \mathbf{u}_{I} \right) \right) \\ + \left(2J \left(u_{2}, v_{2} \right) - \nabla \cdot \left(\delta_{2} \mathbf{u}_{2} \right) \right) \right] \\ - \left(g \left(H_{I} - H_{2} \right) - \frac{g'}{2} \right) \nabla^{2} h'_{bc} = S_{\delta_{bt}} \\ \frac{\partial h'_{bt}}{\partial t} + \delta_{bt} = -\frac{1}{2} \nabla \cdot \left(h'_{I} \mathbf{u}_{I} + h'_{2} \mathbf{u}_{2} \right) = S_{h_{bt}} \\ \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{\partial \zeta_{bc}}{\partial t} = -\frac{1}{2} \nabla \cdot \left[\left(\zeta_{I} + f_{o} \right) \mathbf{u}_{I} - \left(\zeta_{2} + f_{o} \right) \mathbf{u}_{2} \right] \\ \frac{\delta_{bc}}{\partial t} + \mathcal{H}_{bc} h'_{bc} = f_{o} \left(\zeta_{bc} - f_{o} h'_{bc} \right) \\ + \frac{1}{2} \left[\left(2J \left(u_{I}, v_{I} \right) - \nabla \cdot \left(\delta_{I} \mathbf{u}_{I} \right) \right) \\ - \left(2J \left(u_{2}, v_{2} \right) - \nabla \cdot \left(\delta_{2} \mathbf{u}_{2} \right) \right) \right] \\ - \frac{g'}{2} H_{I} \nabla^{2} h'_{bt} = S_{\delta_{bc}} \\ \frac{\partial h'_{bc}}{\partial t} + \delta_{bc} = -\frac{1}{2} \nabla \cdot \left(h'_{I} \mathbf{u}_{I} - h'_{2} \mathbf{u}_{2} \right) = S_{h_{bc}} \end{cases}$$

www.SID.ir

(٢)

پس از حل این دو معادله، می توان $\overline{\delta_{bt}}$ و $\overline{\delta_{bt}}$ را از رابطه (۴) به دست آورد. در انتها، مقادیر کمیتهای فشارورد $h_{bt}^{\prime n+1}$ و کمیتهای کژفشار $h_{bt}^{\prime n+1}$ و δ_{bc}^{n+1} با روابط زیر محاسبه می شوند:

گلشاهی و قادر

$$\begin{cases} \delta_{bt}^{n+l} = 2\overline{\delta_{bt}} - \delta_{bt}^{n-l} \\ h_{bt}^{\prime n+l} = 2\overline{h_{bt}^{\prime}} - h_{bt}^{\prime n-l} \\ \delta_{bc}^{n+l} = 2\overline{\delta_{bc}} - \delta_{bc}^{n-l} \\ h_{bc}^{\prime n+l} = 2\overline{h_{bc}^{\prime}} - h_{bc}^{\prime n-l} \end{cases}$$
(?)

گسستهسازی بخش زمانی در معادله تاوایی نیز با روش لیپفراگ انجام گرفته و فرمولبندی آن به شکل زیر است:

$$\begin{cases} \zeta_{bt}^{n+1} = \zeta_{bt}^{n-1} - \Delta t \,\nabla \cdot \begin{bmatrix} \left(\zeta_{1} + f_{\circ}\right) \mathbf{u}_{1} \\ + \left(\zeta_{2} + f_{\circ}\right) \mathbf{u}_{2} \end{bmatrix}^{n} \\ \zeta_{bc}^{n+1} = \zeta_{bc}^{n-1} - \Delta t \,\nabla \cdot \begin{bmatrix} \left(\zeta_{1} + f_{\circ}\right) \mathbf{u}_{1} \\ - \left(\zeta_{2} + f_{\circ}\right) \mathbf{u}_{2} \end{bmatrix}^{n} \end{cases}$$
(V)

هنگامی که از روش لیپفراگ برای گسستهسازی بخش زمانی معادله تاوایی استفاده میشود، جملات غیرخطی موجود در آن، از زمان قبل محاسبه میشوند؛ به گونهای که اندرکنش بین جملات غیرخطی موجب ایجاد خطای دگرنامیدن و در نتیجه ناپایداری غیرخطی می گردد. یکی از روش های متداول برای جلو گیری از این می گردد. یکی از روش های متداول برای جلو گیری از این معادله تاوایی است (دریچل و همکاران، ۱۹۹۹؛ قادر و اصفهانیان، ۱۳۸۵؛ قادر و همکاران، ۱۳۹۱). با توجه به اسفهانیان، معادلات براساس متغیرهای فشارورد و کژفشار بیان شدهاند، جمله پخش مربوط به معادله تاوایی فشارورد براساس مقادیر تاوایی فشارورد و جمله پخش مربوط به معادله تاوایی کژفشار براساس مقادیر تاوایی کژفشار معادله تاوایی کژفشار براساس مقادیر تاوایی کژفشار

$$\begin{split} \overline{\delta} &= \left(\delta^{n+1} + \delta^{n-1} \right) / 2 \quad \text{explicit} \quad \overline{\delta} = \left(\delta^{n+1} + \delta^{n-1} \right) / 2 \\ \overline{\delta} &= \left(\delta^{n+1} + \delta^{n-1} \right) / 2 \\ \begin{cases} \overline{\delta_{bt}} &= \left(\delta^{n-1} + \delta^{n-1} + \delta^{n-1} \right) / 2 \\ \overline{\delta_{bt}} &= \delta^{n}_{\delta_{bt}} \\ \hline \frac{h_{bt}'}{\Delta t} - \frac{h_{bt}^{(n-1)}}{\Delta t} + \overline{\delta_{bt}} = S^{n}_{\delta_{bt}} \\ \hline \frac{\delta_{bc}}{\Delta t} - \frac{\delta^{n-1}_{bc}}{\Delta t} + \delta^{n-1}_{bc} = S^{n}_{\delta_{bc}} \\ \hline \frac{\delta_{bc}}{\Delta t} - \frac{\delta^{n-1}_{bc}}{\Delta t} + \delta^{n-1}_{bc} = S^{n}_{\delta_{bc}} \\ \hline \frac{h_{bc}'}{\Delta t} - \frac{h_{bc}^{(n-1)}}{\Delta t} + \overline{\delta_{bc}} = S^{n}_{\delta_{bc}} \end{split}$$
(F)

با حذف $\overline{\delta_{bt}}$ و $\overline{\delta_{bt}}$ ، معادلات فوق به دو معادله هلمهولتز زیر تبدیل میشوند:

$$\begin{cases} \nabla^{2} \overline{h_{bl}}^{2} + B_{bl} \overline{h_{bl}}^{'} = R_{bl} \\ \nabla^{2} \overline{h_{bc}}^{'} + B_{bc} \overline{h_{bc}}^{'} = R_{bc} \\ \end{cases} \\ \begin{cases} B_{bl} = -\frac{2}{2gH - g'H_{l}} \left(\frac{1}{\Delta t^{2}} + f^{2}\right) \\ B_{bc} = -\frac{2}{g'H_{l}} \left(\frac{1}{\Delta t^{2}} + f^{2}\right) \\ \end{cases} \\ \begin{cases} R_{bl} = \frac{2}{2gH - g'H_{l}} \left[\left(S_{\delta_{bl}}^{n} + \frac{\delta_{bl}^{n-l}}{\Delta t} \right) \\ & -\frac{1}{\Delta t} \left(S_{h_{bl}}^{n} + \frac{h_{bl}^{'n-l}}{\Delta t} \right) \right] \\ \end{cases} \\ \end{cases}$$

$$R_{bc} = \frac{2}{g'H_{l}} \left[\left(S_{\delta_{bc}}^{n} + \frac{\delta_{bc}^{n-l}}{\Delta t} \right) \\ & -\frac{1}{\Delta t} \left(S_{h_{bc}}^{n} + \frac{h_{bc}^{'n-l}}{\Delta t} \right) \right] \end{cases}$$

$$(\Delta)$$

جدول ۱. فرمولبندی روشهای E2S، C4S برای محاسبه مشتقهای اول و دوم در نقاط گره.

روش	فرمولبندي
E2S	$\begin{cases} F'_{j} = \frac{1}{2d} \left(F_{j+1} - F_{j-1} \right) \\ F''_{j} = \frac{1}{d^{2}} \left(F_{j+1} - 2F_{j} + F_{j-1} \right) \end{cases}$
C4S	$\begin{cases} \frac{1}{6}F'_{j+l} + \frac{2}{3}F'_{j} + \frac{1}{6}F'_{j-l} = \frac{1}{2d}(F_{j+l} - F_{j-l})\\ \frac{1}{12}F''_{j+l} + \frac{5}{6}F''_{j} + \frac{1}{12}F''_{j-l} = \frac{1}{d^2}(F_{j+l} - 2F_{j})\\ +F_{j-l}) \end{cases}$

تاوایی پتاسیلی اولیه برای لایه اول معرف یک جت مداری است که برگرفته از شرط اولیه فشارورد دریچل و همکاران (۱۹۹۹) برای یک محیط تکلایه است. بر این اساس، میدان تاوایی پتانسیلی اولیه q₁ در لایه اول طبق رابطه زیر تعریف می شود:

$$q_{I} = \begin{cases} \overline{q}_{I} + Q \operatorname{sgn}(\tilde{y})(0.5 - \|\tilde{y}\| - 0.5|) & |\tilde{y}| < I \\ \overline{q}_{I} & |\tilde{y}| \ge I, \end{cases}$$
$$\tilde{y} = y + c_{m} \operatorname{Sin} mx + c_{n} \operatorname{Sin} nx$$

که $Q = 2f_{\circ}$ دامنه پریشیدگی تاوایی پتانسیلی است و ضرایب $Q = 2f_{\circ}$ و $c_n = -0.1$ و m = -0.1 و ضرایب m = 3 و m = -0.1 و n = 3درنظر گرفته شدهاند. برای تعیین میدان ارتفاع اولیه h_1 ، باید شرایط برای تعیین میدان ارتفاع اولیه ا h_1 ، باید شرایط (۱) $H_1 = H_2 = 1$ و $H_1 = -\mathbf{u}_2$ اعمال شود. در این صورت، رابطه زیر به دست می آید:

$$g'\nabla^2 h_l = 2f_o \zeta_l \quad , \tag{11}$$

که به ازای $\zeta_1 = q_1 h_1 - f_\circ$ به معادله هلمهولتز زیر تبدیل می شود:

$$\nabla^2 h_I - \frac{2f_{\circ}q_I}{g'}h_I = \frac{2f_{\circ}^2}{g'}.$$
 (11)

بنابراین، با حل این معادله، میدان ارتفاع اولیه h_1 به گونهای تعیین می شود که ارتفاع میانگین لایه اول $H_1 = H$ باقی بماند، بدون اینکه میدان تاوایی پتانسیلی اولیه p_1 طبق رابطه (۱۰) تغییر کند. میانگین تاوایی پتانسیلی لایه اول \overline{p} به گونهای تعیین می شود که میانگین تاوایی نسبی در کل ناحیه صفر باشد (0 = $\overline{\zeta})$ و در عین حال 1 = H_1 و معادله هلمهولتز (رابطه ۱۲) نیز برقرار باشد. در اینجا برای سادگی، میدان واگرایی اولیه 0 = δ_1 در نظر گرفته شده است.

$$\frac{\partial \zeta_{bt}}{\partial t} = -\frac{1}{2} \nabla \cdot \left[\left(\zeta_1 + f_o \right) \mathbf{u}_1 + \left(\zeta_2 + f_o \right) \mathbf{u}_2 \right]$$

$$- v_{bt} \left(-\nabla^2 \right)^{\kappa} \zeta_{bt} ,$$
(A)

 V_{bi} که توان K یک عدد صحیح است و ضریب پخش V_{bi} بسته به تعداد نقاط شبکه n_g به صورت زیر محاسبه می شود:

$$v_{bt} = \frac{Q}{k_{max}^{2\kappa}}, \ Q = max \left| \zeta_{bt} \right|, \ k_{max} = \frac{n_g}{2}.$$
 (9)

۴ شرايط اوليه

 $\mathbf{u}_1 = -\mathbf{u}_2$ در این پژوهش، شرط اولیه کژفشار به صورت و در نتيجه $\delta_1 = -\delta_2$ و $\zeta_1 = -\zeta_2$ در يک ناحيه) مربع شکل $\pi < x < \pi$ و $\pi < y < \pi$ با مرزهای دورهای تعریف شده است که ارتفاع میانگین لایههای اول و دوم با هم برابرند ($H_1 = H_2 = 1$) و با درنظر گرفتن $h'_1 = -h'_2$ ، ($h_1 + h_2 = 2$ (به صورت) تقريب مرز سخت (به صورت) تقريب مي باشد. به اين ترتيب، در لحظه اوليه كميت هاي فشارورد صفر هستند، در حالي كه كميت هاي كژفشار با مقادير لايه g' = g/400 اول برابرند. $g = 2\pi^2$ و گرانی- کاهیده g' = g/400درنظر گرفته شده است. بهازای پارامتر کوریولیس روز $f_{\circ}/4\pi=0.025$ ، هر واحد از زمان $f_{\circ}=\pi/10$ است، به گونهای که زمان *t*=150 معادل با 3.75 روز است. شعاع تغییر شکل راسبی خارجی راسبی شکل راسبی $\lambda_{ext}=\sqrt{g\mathrm{H}}\,/\,f_{\circ}=20$ داخلى $\lambda_{\rm int} = \sqrt{g' {\rm H}_1 {\rm H}_2 \, / \, {\rm H}} \, / \, f_\circ = 0.5$ داخلى شدهاند. این شرط اولیه شبیه به شرط اولیه کژفشار کوتر و همکاران (۲۰۰۴) است؛ با این تفاوت که در مطالعه حاضر از میدان تاوایی پتانسیلی اولیه پیچیدهتری استفاده شده است. برای تعیین مقادیر اولیه میدانهای تاوایی ()، واگرایی (*S*) و ارتفاع (*h*) در این محیط دولایه، میدان

$$E_{kin} = \iiint \left[\frac{1}{2} \rho_1 h_1 (u_1^2 + v_1^2) + \frac{1}{2} \rho_2 h_2 (u_2^2 + v_2^2) \right] dx dy, \qquad (17)$$

$$E_{ap} = \iint \left[\frac{1}{2} \rho_I g \left((h_I + h_2)^2 - H^2 \right) + \frac{1}{2} (\rho_2 - \rho_I) g \left(h_2^2 - H_2^2 \right) \right] dx dy.$$
(14)

پس از سادهسازی و استفاده از شرایط $h'_1 dx dy = 0$ و $h'_1 dx dy = 0$ ، می توان $h_2 dx dy = 0$ ، $h_2 dx dy = 0$ ، می توان روابط (۱۳) و (۱۴) را به شکل ساده تر بیان کرد:

$$E_{kin} = \rho_2 \iint \left[\frac{1}{2} \frac{\rho_1}{\rho_2} h_1(u_1^2 + v_1^2) + \frac{1}{2} h_2(u_2^2 + v_2^2) \right] dxdy,$$
(10)

$$E_{ap} = \rho_2 \iiint \left[\frac{1}{2} \frac{\rho_1}{\rho_2} g(H_1 h_1' + H_2 h_2')^2 + \frac{1}{2} g'(H_2 h_2')^2 \right] dxdy,$$
(19)

که در آن $p_1/
ho_2=1-g'/g$ است.

برای برقراری پایستگی انرژی، باید انرژی کل $E_t = E_{kin} + E_{ap}$ در لحظه t برابر با انرژی کل اولیه $E_t = E_{kin} + E_{ap}$ در لحظه t برابر با انرژی کل اولیه $E_0 = E_{t=0}$ باشد. شکلهای ۵-الف و ۵-ب منحنیهای E_0 / E_0 به E_0 و E_0 / E_0 را بهازای تفکیک شبکه E_0 / E_0 و E_0 را بهازای تفکیک شبکه E_0 / E_0 و E_0 را بهازای تفکیک شبکه می دهند. با گذشت زمان و افزایش انرژی جنبشی، انرژی پتانسیل کاهش می یابد، به گونهای که انرژی کل با خطای کمی، پایسته باقی می ماند. این، نشان دهنده قابلیت مدل در برقراری پایستگی انرژی است. شکل ۵-ج خطای نسبی

در حل عددی معادلات آب کمعمق دولایه برحسب متغیرهای فشارورد و کژفشار، شرط اولیه به کار گرفته شده تنها شامل کمیتهای کژفشار است و مقدار کمیتهای فشارورد صفر هستند، ولی با گذشت زمان، کمیتهای فشارورد نیز مقدار پیدا میکنند؛ بنابراین گام زمانی *Δt* طبق شرط پایداری $1 \ge \sqrt{gH}\Delta t / \Delta x$ (در مد فشارورد) تعیین می شود که در آن فاصله شبکهای ∆x در هر دو راستای x و y یکسان در نظر گرفته شده است. برای هر دو روش E2S و C4S از سه شبکه با تفکیکهای 64×64، 128×128 و 256×256 به ترتیب با گامهای زمانی 0.01، 0.005 و 0.0025 استفاده شده است. شکل های ۱ و ۲ تحول زمانی میدانهای تاوایی نسبی فشارورد و کژفشار را به ترتیب برای روش های E2S و C4S در شبکه ای با تفکیک 256×256 و گامزمانی $\Delta t = 0.0025$ در لحظات t = 0, 50, 100, 150 نشان میدهند. همانگونه که در این شکلها مشاهده می شود، میدان کژفشار اولیه با گذشت زمان به ساختارهای ریزتر شکسته می شود و تاوایی نسبی فشارورد _مک که در لحظه اولیه وجود نداشت، در محیط ظاهر می شود و لحظه به لحظه، الگوی آن به الگوی تاوایی نسبی کژفشار _{bc} شباهت بیشتری پیدا می کند. شکل های ۳ و ۴ میدان های تاوایی پتانسیلی متناظر آنها را در لایههای اول و دوم نشان میدهند. مطابق این شکل ها، آشفتگی خطوط هم تاوایی پتانسیلی در روش E2S به مراتب بیشتر از روش C4S است که به صورت کیفی عملکرد بهتر روش C4S را نشان می دهند. برای ارزیابی کمی عملکرد این دو روش عددی، پایستگی انرژی و پایستگی جرم نیز بررسی شد.

در تحلیل پایستگی انرژی، مقدار انرژی در لحظات مختلف و خطای آن نسبت به مقدار اولیه محاسبه می شود. انرژی جنبشی E_{ap} و انرژی پتانسیل دردسترس E_{ap} در

۵ نتایج حل عددی



شکل ۱. تحول زمانی f_{bt} و f_{bc} برای روش E2S در شبکهای با تفکیک 256×256 و گام زمانی $\Delta t = 0.0025$ (زمان در مقیاس $\frac{1}{4}$ روز است).



شکل ۲. مشابه شکل ۱ ولی با استفاده از روش C4S.



شکل ۳. تحول زمانی q_1 و q_2 برای روش E2S در شبکهای با تفکیک 256×256 و گام زمانی $\Delta t = 0.0025$ (زمان در مقیاس $rac{1}{4}$ روز است).



شکل ٤. مشابه شکل ۳ ولی با استفاده از روش C4S.

1.2 1.2 E2S C4S E_{t}/E_{a} E_t/E_0 0.8 0.8 0.6 0.6 E_{kin}/E_0 E_{kin}/E_0 E_{ap}/E_0 E_{ap}/E_0 0.4 0.4 0.2 0.2 0 100 50 100 150 50 150 Time Time (الف) (ت) 0.002 10 $\begin{array}{c} \Delta E_{kin} / E_0 \\ \Delta E_{ap} / E_0 \\ \Delta E_t / E_0 \end{array}$ E2S C4S0.001 10 $|E_t - E_0|/|E_0|$ 10 -0.001 -0.002 L 10-50 100 100 50 150 ō 150 Time Time (د) (ج)

شکل ۵. (الف) و (ب) منحنیهای E2S و E4 (E_{ap} / E_{ap} / E_{ap} / E_{ap} / E_{ap} / E_{ap} / E_{ab} (ج) منحنی خطای نسبی انرژی $\left|E_{ab}\right| / \left|E_{ab}\right| - \left|E_{ab}\right| + \left|E_{ab}\right| - \left|E_$

اندازه گیری شد. شکل ۵-د، منحنیهای E_0 / E_0 ، $\Delta E_{kin} / E_0$ و $\Delta E_t / E_0$ را بهازای تفکیک شبکه $\Delta E_{ap} / E_0$ د مطابق این شکل، تا حدود 256×256 نشان میدهد. مطابق این شکل، تا حدود etal منجر به تخمین انرژی جنبشی بیشتر و تخمین انرژی پتانسیل دردسترس کمتر میشود و پس از آن، این روند وارون می گردد. با وجود این، تخمین انرژی کل E در وش E2S موارو شد 24 ما

 C4S انرژی $|E_t - E_0|/|E_0|$ را برای روش های E2S و E2S و E2S

 به ازای تفکیک شبکه 256×256 نشان می دهد. این شکل

 بیانگر عملکرد بهتر روش C4S در مقایسه با روش E2S

 در پایسته نگهداشتن انرژی است. برای ارزیابی بهتر

 مدر پایسته نگهداشتن انرژی است. برای ارزیابی بهتر

 منحنیهای خطای نسبی انرژی این دو روش، اختلاف

 منحنیهای خطای نسبی انرژی این دو روش، اختلاف

 انرژی چنبشی $\Delta E_{kin} = E_{kin C4S} - E_{kin E2S}$

 منحنیهای خطای نسبی انرژی این دو روش، اختلاف

 مارژی پتانسیل دردسترس $\Delta E_{ap} = E_{ap C4S} - E_{ap E2S}$

 نیز

 مانرژی کل $\Delta E_t = E_{tC4S} - E_{tE2S}$

 نیز

انجام گرفته است. طبق نتایج، با گذشت زمان، میدانهای کژفشار اولیه به ساختارهای ریزتر شکسته میشوند و میدانهای فشارورد که در لحظه اولیه وجود ندارند، بهصورت تدریجی ظاهر میشوند. تحلیل پایستگی انرژی و جرم نشان میدهد که این مدل درپایسته نگهداشتن انرژی و جرم از قابلیت خوبی برخوردار است. برای بررسی دقت این دو روش عددی، خطاهای انرژی و جرم اندازه گیری شد. تحلیل منحنیهای خطا بیانگر آن است که روش C4S در مقایسه با روش E2S از عملکرد بهتری برخوردار است.



شکل ٦. خطای جرم برای روش های E2S و C4S برحسب زمان بهازای تفکیک شبکه 256×256: (الف) در لایه اول، (ب) در لایه دوم.

گذشت زمان این روند با شدت بیشتری نیز همراه است.

برای تعیین خطای جرم، توانایی هر یک از روش ها در پایسته نگهداشتن میزان جرم بین دو تراز هم تاوایی پتانسیلی مقایسه می شود و خطای هر روش با توجه به اندازه خطای جرم میان این دو تراز تعریف می شود. توضیحات بیشتر نحوه محاسبه خطای جرم در دریچل و همکاران (۱۹۹۹) ارائه شده است. شکل۶، خطاهای جرم در لایههای اول و دوم را برای روشهای E2S و C4S برحسب زمان بهازای تفکیک شبکه 256×256 نشان میدهد. در تعیین خطای جرم برای هر لایه از میدانهای تاوایی پتانسیلی و ارتفاع همان لایه استفاده شده است. همان گونه که مشاهده می شود، در ابتدا خطای جرم روش E2S کمتر از روش C4S است ولی با گذشت زمان خطای روش E2S در مقایسه با C4S با افزایش بیشتری همراه است. این مسئله در تفکیکهای شبکه 64×64 و 128×128 نيز مشاهده مي شود (كه در اينجا ارائه نشدهاند). شکل۷، خطاهای جرم در لایههای اول و دوم را برحسب تعداد نقاط شبکه در t = 150 نشان می دهد. با افزایش تعداد نقاط شبکه از ۶۴ به ۱۲۸، کاهش خطای روش C4S بیشتر از روش E2S است؛ اما در ادامه، با افزایش تفکیک شبکه از ۱۲۸ به ۲۵۶، روند کاهشی خطا در هر دو روش تقريباً يكسان است. به علاوه، در هر دو روش، خطای جرم در لایه دوم (لایه پایینی) به مراتب بیشتر از خطای جرم در لايه اول (لايه بالايي) است.

۶ نتیجهگیری

در این پژوهش، حل عددی معادلات آب کمعمق غیرخطی دو لایه برحسب متغیرهای فشارورد و کژفشار در شبکه Z در یک ناحیه مربع شکل با عمق ثابت و شرط مرزی دورهای بررسی شد. گسسته سازی مکانی معادلات با استفاده از روش های E2S و C4S و گسسته سازی زمانی (با بهره گیری از روش لیپ فراگ) به صورت نیمه ضمنی قادر، س.، احمدی گیوی، ف. و گلشاهی، ح.، ۱۳۹۱، حل عددی معادلات آب کم عمق با استفاده از روش فشرده ترکیبی مرتبه ششم، مجله ژئوفیزیک ایران، ۶(۴)، ۲۵–۴۹. قادر، س. و اصفهانیان، و.، ۱۳۸۵، حل معادلات آب کم عمق با استفاده از روش فشرده ترکیبی تعمیم یافته: دهمین کنفرانس دینامیک شارهها، دانشگاه یزد، گروه مکانیک، ۹ تا ۱۱ آبان ۱۳۸۵.

- Blayo, E., 2000, Compact finite difference schemes for ocean models: 1.ocean waves: Journal of Copmutational Physics, **164**, 241-257.
- Castro, M. J., Garcia-Rodriguez, J. A., Gonzalez-Vida, J. M., Macias, J., and Pares, C., 2004, Numerical simulation of two-layer shallow water flows through channels with irregular geometry: Journal of Copmutational Physics, **195**, 202-235.
- Cotter, C. J., Frank, J., and Reich, S., 2004, Hamiltonian particle-mesh method for twolayer shallow-water equations subject to the rigid-lid approximation: SIAM Journal of Applied Dynamical Systems, **3**(1), 69-83.
- Cushman-Roisin, B., and Beckers, J. M., 2009, Introduction to Geophysical Fluid Dynamics: Physical and Numerical Aspects: Academic Press.
- Cushman-Roisin, B., Esenkov, O. E., and Mathias, B. J., 2000, A particle-in-cell method for the solution of two-layer shallow-water equations: International Journal for Numerical Methods in Fluids,**32**, 515-543.
- Dritschel, D. G., Polvani, L. M., and Mohebalhojeh, A. R., 1999, The contouradvective semi-Lagrangian algorithm for the shallow water equations: Monthly Weather Review, **127**, 1552-1565.
- Esfahanian, V., Ghader, S., and Mohebalhojeh, A. R., 2005, On the use of super compact scheme for spatial differencing in numerical models of the atmosphere: Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society, 131, 2109-2130.
- Ghader, S., Mohebalhojeh, A. R., and Esfahanian, V., 2009, On the spectral convergence of the super compact finite-difference schemes for the f-plane shallow water equations: Monthly Weather Review, **137**, 2393-2406.



شکل ۷. خطای جرم برای روش های E2S و C4S برحسب تعداد نقاط شبکه در ۱۵۰ = *t*؛ (الف) در لایه اول و (ب) در لایه دوم.

سپاسگزاری

نویسندگان مقاله از دانشگاه آزاد اسلامی واحد شوشتر و دانشگاه تهران، بهدلیل حمایت از این پژوهش تشکر میکنند.

منابع قادر، س.، احمدی گیوی، ف. و گلشاهی، ح.، ۱۳۸۹، مقایسه عملکرد روش های َوَافشرده و فشرده ترکیبی مرتبه ششم در گسستهسازی مکانی مدل آب کمعمق دو لایهای: نمایش امواج گرانی- لختی و راسبی خطی، مجله ژئوفیزیک ایران، ۲(۲)، ۴۹-۶۹.

problems by a compact differencing technique: Journal of Copmutational Physics, **19**, 90-109.

گلشاهي و قادر

- JavanNezhad, R., Meshkatee, A. H., Ghader, S., and Ahmadi-Givi, F., 2016, High-order compact MacCormack scheme for twodimensional compressible and nonhydrostatic equations of the atmosphere: Dynamics of Atmospheres and Oceans, **75**, 102–117.
- Lele, S. k., 1992, Compact finite difference scheme with spectral-like resolution: Journal of Copmutational Physics, **103**, 16-42.
- Matsuura, T., and Fujita, M., 2006, Two different aperiodic phases of wind-driven ocean circulation in a double-gyre, two-layer shallow-water model: Journal of Physical Oceanography, **36**, 1265-1286.
- Randall, D. A., 1994, Geostrophic adjustment and the finite-difference shallow water equations: Monthly Weather Review, **122**, 1371-1377.

- Ghader, S., Ghasemi, A., Banazadeh, M. R., and Mansoury, D., 2012, High-order compact scheme for Boussinesq equations: Implementation and numerical boundary condition issue: International Journal for Numerical Methods in Fluids, 69(3), 590-605.
- Ghader, S., and Nordström, J., 2015, High-order compact finite difference schemes for the vorticity-divergence representation of the spherical shallow water equations: International Journal for Numerical Methods in Fluids, **78**, 709–738.
- Gill, A. E., 1982, Atmosphere-Ocean Dynamics: Academic Press.
- Golshahy, H., Ghader, S., and Ahmadi-Givi, F., 2011, Accuracy assessment of the super compact and combined compact schemes for spatial differencing of a two-layer oceanic model: presentation of linear inertia-gravity and Rossby waves: Ocean Modelling, **37**, 49–63.
- Hirsh, R. S., 1975, Higher order accurate difference solutions of fluid mechanics

Numerical solution of two-layer shallow water equations in terms of barotropic and baroclinic variables using fourth-order compact method

Hakim Golshahy^{1*}, and Sarmad Ghader²

¹Assistant Professor, Physics Department, Islamic Azad University, Shoushtar Branch, Shoushtar, Iran ²Associate Professor, Institute of Geophysics, University of Tehran, Tehran, Iran

(Received: 04 October 2016, Accepted: 31 December 2016)

Summary

Two-dimensional shallow water equations are commonly used to study the dynamics of large-scale flows in the atmosphere and oceans that are nearly horizontal. Over the past years, the numerical solution of multi-layer shallow water systems has been widely researched. In stratified geophysical flows, two-layer shallow water equations are proper models for the simulation of certain phenomena in the atmosphere and oceans. In this model, the fluid is assumed to be composed of two shallow layers of immiscible fluids in which the superposed layers differ in velocity and density in a two-dimensional domain. The constant density of upper layer is less than the density of the lower one.

For the solution of shallow water equations, high order compact finite difference schemes have been widely used owing to their good accuracy compared with standard finite difference schemes for a large range of wave numbers and a low numerical diffusion with small dispersion errors.

In this research, fourth-order compact finite-difference method was used for spatial differencing of f-plane two-layer shallow-water equations in the vorticity-divergence formulation for a rectangular domain with periodic boundaries; the results were compared to those of conventional second order finite difference method. For time integration, a three-level semi-implicit formulation was applied with the Robert-Asselin time filter which prevents the numerical instability caused by the computational mode of the three-time-level scheme. The equations were derived in terms of barotropic and baroclinic variables such that they were split into two coupled systems (barotropic and baroclinic systems) consisting of all variables of both upper and lower layers in each system. These systems are different than standard two-layer shallow water systems.

A perturbed unstable zonal jet, in a two-layer shallow-water flow, was considered for initial value problem with baroclinic instabilities. The two-layer baroclinic initial values were extracted from a one-layer initial condition such that the potential vorticity of one-layer initial condition was equal to the upper layer potential vorticity; other initial values of the two-layer shallow water equations were determined by taking the definition of baroclinic initial condition, in the situation where the initial current in the upper layer is opposite to one in the lower layer such that the initial barotropic variables are all zero. Over time, the initial state broke up into smaller barotropic and baroclinic vortices.

To control the numerical nonlinear instability due to the interaction of nonlinear terms of the vorticity equations and subsequently produce the aliasing errors, the barotropic and baroclinic planetary vorticities were explicitly damped by adding the hyperdiffusion operator acting on the same vorticity equations.

There exist myriad methods for assessing the accuracy of numerical schemes such as the conservation of total mass and energy. The ability of each simulation to conserve the total energy on the total layer-depth (i.e. energy error) and mass between isolevels of the potential vorticity (i.e. mass error) within each layer, was measured in order to assess the numerical accuracy. Results showed that this model meets the conservation laws of mass and energy in the test problem considered here. The fourth-order compact finite-difference method entailed less energy error than the second order finite difference method during the time integration of two-layer shallow water equations; additionally, it is more accurate regarding the conservation of mass for a long time integration.

Keywords: fourth-order compact method, shallow-water equations, two-layer basin, Z grid, barotropic and baroclinic variables

*Corresponding author: