

کاربست روش مک کورمک فشرده مرتبه چهارم با پیمایش زمانی رونگه-کوتا چهار مرحله‌ای برای مسئله تنظیم راسبی غیرخطی ناپایا

رضا جوان‌نژاد^۱، و سرمد قادر^{۲*}

^۱دکترای تخصصی هواشناسی، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

^۲دانشیار، گروه فیزیک فضا، موسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران، تهران، ایران

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۰۲/۳۱، تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۰۵/۲۵)

چکیده

در پژوهش حاضر، به بررسی خطای بریدگی و آهنگ همگرایی روش مک کورمک فشرده مرتبه چهارم با پیمایش زمانی رونگه-کوتا چهار مرحله‌ای پرداخته می‌شود. برای انجام این تحلیل از معادله فرارفت خطی یک‌بعدی استفاده شده است که دارای حل تحلیلی است. خطای بریدگی برای روش‌های مک کورمک مرتبه دوم، مک کورمک فشرده مرتبه چهارم با پیمایش زمانی مرتبه دوم و مک کورمک فشرده مرتبه چهارم با پیمایش زمانی رونگه-کوتا چهار مرحله‌ای استخراج و بیان شده است. برای به‌دست آوردن خطای بریدگی از معادله فرارفت خطی یک‌بعدی با ضریب ثابت استفاده شده است. همچنین برای بررسی دقت آهنگ همگرایی برای روش‌های متفاوتی از جمله لکس‌وندرف، لیپ‌فراگ، بیم‌وارمینگ و همچنین روش‌های مک کورمک کلاسیک با گسسته‌سازی‌های مکانی مرتبه دوم و فشرده مرتبه چهارم و گسسته‌سازی زمانی رونگه-کوتا چهار مرحله‌ای به‌دست آمده است. نتایج نشان می‌دهد آهنگ همگرایی به‌دست آمده برای مسئله خطی متناسب با آهنگ همگرایی نظری می‌باشد. در ادامه نتایج حل عددی برای مسئله تنظیم راسبی غیرخطی ناپایا و برای حالت‌های یک‌بعدی و دو بعدی با استفاده از روش مک کورمک فشرده مرتبه چهارم با پیمایش زمانی رونگه-کوتا چهار مرحله‌ای مورد بررسی قرار گرفته است. مقایسه نتایج به‌دست آمده از روش مذکور برای دو مسئله یک و دو بعدی با نتایج حاصل از کارهای سایر محققان گویای عملکرد مناسب این روش است به‌ویژه هنگامی که میدان حل با ناپیوستگی همراه باشد.

واژه‌های کلیدی: روش مک کورمک فشرده، دقت عددی، خطای بریدگی، تنظیم راسبی غیرخطی

۱ مقدمه

روش‌های فشرده از جمله روش‌های تفاضل متناهی هستند که ابزاری مناسب برای شبیه‌سازی دقیق مسائل دینامیک شاره‌ها محسوب می‌شوند. در این روش‌ها، خود تابع و مشتقات آن به صورت توابعی مجهول در نظر گرفته می‌شوند. ایده روش‌های فشرده به کارهای انجام‌شده توسط نیومروف (۱۹۲۴) و فاکس و گودوین (۱۹۴۹) در نیمه اول قرن بیستم میلادی برمی‌گردد. با این وجود، معرفی این روش‌ها تحت عنوان روش فشرده و کاربرد آن در شبیه‌سازی‌ها پس از تحقیقات کریس و اولیگر (۱۹۷۲) و هیرش (۱۹۷۵) رواج یافت و در طی چند سال بسیاری از محققان از جمله ل (۱۹۹۲)، انواع مختلفی از روش‌های فشرده با خواص تفکیک متفاوت را معرفی کردند. روش‌های مذکور علاوه بر سایر شاخه‌های مکانیک شاره‌ها در حوزه دینامیک شاره‌های ژئوفیزیکی نیز مورد توجه قرار گرفته‌اند.

با توجه به عملکرد امیدوارکننده روش‌های فشرده، در سال‌های اخیر گرایش به به‌کارگیری این روش‌ها در شبیه‌سازی‌های جوی و اقیانوسی با توجه به پیچیدگی ذاتی این شارش‌ها افزایش یافته است (به‌طور مثال نیون و ریفاگن، ۱۹۷۹؛ اصفهانیان و همکاران، ۲۰۰۵؛ محب الحجه و دریچل، ۲۰۰۷؛ قادر و همکاران، ۲۰۰۹ و ۲۰۱۲؛ قادر و نوردشترم، ۲۰۱۵؛ جوان‌نژاد و همکاران، ۲۰۱۶؛ میرزایی و همکاران، ۱۳۹۶).

یکی از مسائل بنیادی هواشناسی تنظیم زمینگرد است که درک ما را از فیزیک شاره‌های چرخان توسعه می‌دهد. تحقیقات زیادی در خصوص مسئله تنظیم زمینگرد صورت پذیرفته است (به‌طور مثال کان، ۱۹۴۵؛ گیل، ۱۹۷۶؛ باس و تامپسون، ۱۹۹۴؛ کو و پولوانی، ۱۹۹۷؛ هلفریش و همکاران، ۱۹۹۹؛ ویک و همکاران، ۲۰۰۴؛ ریواس، ۲۰۰۵؛ هلفریش، ۲۰۰۶). اغلب پدیده‌های بزرگ

مقیاس جوی و اقیانوسی بعد از یک ناپایداری اولیه در میدان تکانه یا ناپیوستگی اولیه در میدان جرم (معمولاً به‌صورت اختلاف ارتفاع یا چگالی) تمایل دارند که در نهایت به‌صورت زمینگرد یا راسبی پایا تنظیم شوند. اصولاً فرایند تنظیم زمینگرد با تبدیل انرژی پتانسیل به انرژی جنبشی و تولید موج همراه است، که در این بین کسری از انرژی پتانسیل اولیه به انرژی جنبشی نهایی تبدیل می‌شود. به‌بیان‌دیگر تنظیم راسبی یکی از ویژگی‌های برجسته پدیده‌های بزرگ‌مقیاس جوی و اقیانوسی به شمار می‌رود (گیل، ۱۹۸۲). با توجه به اینکه تنظیم راسبی به دو مرحله گذرا و پایا تقسیم می‌شود، برای اینکه بتوان درک بهتری از پدیده تنظیم راسبی به‌دست آورد بایستی بخش گذرای آن هم مورد بررسی قرار گیرد. از طرفی معادلات حاکم در مرحله پایا ماهیت خطی و مستقل از زمان داشته و تحقیقات اولیه بیشتر مربوط به این مرحله بوده است. ولی برای درک بهتر این پدیده بایستی ماهیت غیرخطی و وابسته به زمان معادلات حاکم در مرحله گذرا با توجه به عدم وجود حل تحلیلی معادلات در این مرحله، مورد بررسی قرار گیرد. بر همین اساس از روش‌های عددی برای حل معادلات حاکم استفاده می‌شود. برای حل عددی معادلات حاکم در مرحله گذرا، ابتدا شکل اولیه ناپیوستگی میدان جرم و یا تکانه تعیین می‌شود. در ادامه با استفاده از یک روش عددی اقدام به حل عددی این پدیده می‌شود.

حل عددی مسئله تنظیم راسبی غیرخطی ناپایا در حالت یک و دو بعدی با استفاده از روش فشرده مک-کورمک مرتبه چهارم با پیمایش زمانی مرتبه‌دوم توسط قادر و همکاران (۱۳۸۹) انجام شده است. همچنین میرزایی و همکاران (۱۳۹۶) به حل عددی معادلات آب کم‌عمق در حالت دوبعدی و غیرخطی با روش مک‌کورمک فشرده مرتبه چهارم پرداختند. در واقع باید اشاره نمود که

۲-۱ فرمول بندی روش

شکل عمومی خانواده روش های فشرده برای برآورد مشتق مرتبه اول یک تابع دلخواه را می توان به صورت زیر نوشت:

$$[B]\{D\} = \frac{1}{\Delta x}[C]\{f\}, \quad (1)$$

که Δx فاصله شبکه ای، D عملگر مشتق مکانی تابع f ، $[C]$ ماتریس ضرایب برای تابع f و $[B]$ ماتریس ضرایب عملگر مشتق D است. اکنون برای رسیدن به روابط روش فشرده مک کورمک، عملگر ضمنی D را باید به دو عملگر پیش رو و پس رو به صورت زیر تجزیه کرد:

$$\{D\} = \frac{\{D^F\} + \{D^B\}}{2}, \quad (2)$$

که از بالانویس F برای نمایش عملگر پیش رو و از بالانویس B برای نمایش عملگر پس رو استفاده شده است. برای رسیدن به روشی با دقت مکانی مرتبه چهارم شکل گسسته مشتق اول مکانی یک سوی پس رو و پیش رو، برای تابع دلخواه ϕ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\begin{aligned} aD_{i-1}^B + (1-a)D_i^B &= \left(\frac{1}{\Delta x}\right)(\phi_i - \phi_{i-1}), \\ aD_{i+1}^F + (1-a)D_i^F &= \left(\frac{1}{\Delta x}\right)(\phi_{i+1} - \phi_i). \end{aligned} \quad (3)$$

که ضریب $a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}$ ، اندیس i مربوط به نقاط شبکه و D^B و D^F به ترتیب عملگرهای پیش رو و پس رو مکانی Δt است. این روش تحت عنوان طرح واره ۴/۲ (هیکسون و تورکل، ۲۰۰۰) نام گذاری می شود. جمع این دو عملگر عبارتی با دقت مرتبه چهارم است.

مقدار مورد نظر عملگرها در مرزها با استفاده از روش صریح پنج نقطه ای یک سویه همانند روش هیکسون و

کار حاضر در ادامه تحقیقات قادر و همکاران (۱۳۸۹)، جوان نژاد و همکاران (۲۰۱۶) و همچنین میرزایی و همکاران (۱۳۹۶) می باشد؛ با این تفاوت که در کار حاضر تمرکز بر بررسی دقت روش های مک کورمک می باشد (از جمله محاسبه خطای بریدگی و همچنین بررسی آهنگ همگرایی). به علاوه در کار حاضر روش مک کورمک فشرده همراه با پیمایش زمانی رونگه-کوتا به مسئله های تنظیم راسبی یک بعدی و دو بعدی که در شرایط اولیه همراه با ناپیوستگی هستند، اعمال می شود.

در روش شناسی ابتدا فرمول بندی روش مک کورمک فشرده مرتبه چهارم با پیشروی زمانی رونگه-کوتا چهار مرحله ای (MCRK4) به طور خلاصه بیان می شود. سپس برای سنجش توانایی و دقت خطای بریدگی روش مک کورمک مرتبه دوم (MC2) و مک کورمک فشرده مرتبه چهارم با پیمایش زمانی مرتبه دوم (MC4) با روش MCRK4 مقایسه می شود. در ادامه آهنگ همگرایی روش مذکور با استفاده از معادله فرارفت خطی یک بعدی که دارای حل تحلیلی است به همراه روش های متفاوتی از جمله لکس و ندرف، لیپ فراگ، بیم وارمینگ و همچنین MC2 و MC4 به دست می آید. در انتها نیز نتایج حل عددی معادلات تنظیم راسبی غیرخطی ناپایا برای دو حالت یک و دو بعدی آورده می شود.

۲ روش MCRK4

نحوه به دست آوردن و جزئیات فرمول بندی روش های M2 و MC4 توسط هیکسون و تورکل (۲۰۰۰) و همچنین فلاحت (۱۳۸۷) و روش MCRK4 را هیکسون و تورکل (۲۰۰۰)، جوان نژاد (۱۳۹۵) و همچنین میرزایی و همکاران (۱۳۹۶) به صورت مشروح بیان کرده اند. در اینجا فقط فرمول بندی روش MCRK4 به صورت خلاصه بیان می شود.

که \mathbf{V} متغیر پیش‌یابی و \mathbf{G} تابعی از \mathbf{V} است و با توجه به تعداد بُعدهای مسئله رابطه (۸) می‌تواند از یک تا سه بعد داشته باشد. این تابع همچنین شامل مشتق اول در راستای محورهای مختصات مختلف است. شکل گسسته زمانی رابطه (۸) با استفاده از روش MCRK4 در روابط زیر آمده است (هیگسون و تورکل، ۲۰۰۰):

$$\begin{aligned} \mathbf{h}^{(1)} &= -\Delta t D^F[\mathbf{G}(\mathbf{V}^n)] \\ \mathbf{h}^{(2)} &= -\Delta t D^B[\mathbf{G}(\mathbf{V}^n + \alpha_2 \mathbf{h}^{(1)})] \\ \mathbf{h}^{(3)} &= -\Delta t D^F[\mathbf{G}(\mathbf{V}^n + \alpha_3 \mathbf{h}^{(2)})], \\ \mathbf{h}^{(4)} &= -\Delta t D^B[\mathbf{G}(\mathbf{V}^n + \alpha_4 \mathbf{h}^{(3)})] \\ \mathbf{V}^{n+1} &= \mathbf{V}^n + \beta_1 \mathbf{h}^{(1)} + \beta_2 \mathbf{h}^{(2)} + \beta_3 \mathbf{h}^{(3)} + \beta_4 \mathbf{h}^{(4)} \end{aligned} \quad (9)$$

که مقدار $\mathbf{h}^{(1)}$ تا $\mathbf{h}^{(4)}$ متغیرهای کمکی هستند. همچنین ضرایب در روابط (۹) به ترتیب $\alpha_2 = \frac{1}{2}$ ، $\alpha_3 = \frac{1}{2}$ ، $\alpha_4 = 1$ ، $\beta_1 = \frac{1}{6}$ ، $\beta_2 = \frac{1}{3}$ ، $\beta_3 = \frac{1}{3}$ ، $\beta_4 = \frac{1}{6}$ هستند. همان‌طور که در رابطه (۹) مشاهده می‌شود، روش MCRK4 روشی چهار مرحله‌ای است. عملگرهای پیش‌رو و پیش‌رو مورد استفاده در این روش عملگرهای رابطه (۳) می‌باشند.

همان‌گونه که در رابطه (۹) مربوط به مراحل پیش-بینی‌کننده روش مک کورمک مشاهده می‌شود، برای برآورد مشتق به ترتیب از عملگرهای پیش‌رو، پیش‌رو و پس‌رو استفاده شده است. چنین ترکیب جایگشتی از عملگرها با نماد $FBFB$ نام‌گذاری می‌شود. در عمل بهتر است هنگام حل عددی و به خصوص در زمان حل عددی با شکل‌های متقارن (به‌طور مثال حساب گرم در جو خنثی) علاوه بر استفاده از ترکیب ذکر شده از ترکیب‌های دیگر همانند $BFBF$ ، $BBBB$ و $FFFF$ برای گام‌های زمانی متوالی استفاده شود (به‌طور مثال قادر و همکاران، ۱۳۸۹ و ۱۳۹۰؛ جوان‌نژاد و همکاران، ۲۰۱۶) این نکته در هنگام حل عددی معادلات حاکم برای حل

تورکل (۲۰۰۰) انجام می‌شود. در این روش مقادیر عملگرها در مرز با دقتی از مرتبه‌ای برابر با عملگرهای پیش‌رو و پس‌رو تقریب زده می‌شود. شرایط مرزی برای مرزهای سمت چپ و راست مربوط به عملگرهای پیش‌رو و پس‌رو طبق روابط (۴) تا (۷) است (هیگسون و تورکل، ۲۰۰۰).

$$D_1^F = \left(-\frac{25}{12} + \frac{17}{12\sqrt{3}}\right)\phi_1 + \left(4 - \frac{25}{6\sqrt{3}}\right)\phi_2 - \left(3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\phi_3 + \left(\frac{4}{3} + \frac{13}{6\sqrt{3}}\right)\phi_4 - \left(\frac{1}{4} - \frac{5}{12\sqrt{3}}\right)\phi_5, \quad (4)$$

$$D_m^F = \left(\frac{25}{12} + \frac{17}{12\sqrt{3}}\right)\phi_m - \left(4 + \frac{25}{6\sqrt{3}}\right)\phi_{m-1} + \left(3 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\phi_{m-2} - \left(\frac{4}{3} + \frac{13}{6\sqrt{3}}\right)\phi_{m-3} + \left(\frac{1}{4} + \frac{5}{12\sqrt{3}}\right)\phi_{m-4}, \quad (5)$$

$$D_m^B = \left(\frac{25}{12} - \frac{17}{12\sqrt{3}}\right)\phi_m - \left(4 - \frac{25}{6\sqrt{3}}\right)\phi_{m-1} + \left(3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\phi_{m-2} - \left(\frac{4}{3} - \frac{13}{6\sqrt{3}}\right)\phi_{m-3} + \left(\frac{1}{4} - \frac{5}{12\sqrt{3}}\right)\phi_{m-4}, \quad (6)$$

$$D_m^B = \left(\frac{25}{12} - \frac{17}{12\sqrt{3}}\right)\phi_m - \left(4 - \frac{25}{6\sqrt{3}}\right)\phi_{m-1} + \left(3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\phi_{m-2} - \left(\frac{4}{3} - \frac{13}{6\sqrt{3}}\right)\phi_{m-3} + \left(\frac{1}{4} - \frac{5}{12\sqrt{3}}\right)\phi_{m-4}, \quad (7)$$

که زیرنویس ۱، مربوط به نقطه ابتدایی شبکه (مرز سمت چپ) و زیرنویس m ، مربوط به نقطه انتهایی شبکه (مرز سمت راست) است.

۲-۲ پیمایش زمانی

برای پیمایش زمانی از روش رونگه-کوتا چهار مرحله‌ای استفاده می‌شود. صورت کلی شکل پایستار معادلات حاکم را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{G}(\mathbf{V}) = 0, \quad (8)$$

$$U_i^{n+1} = \frac{1}{2} \left\{ U_i^n + U_i^* - \Delta t \delta^B (F(U_i^*)) \right\}, \quad (12)$$

که U_i^* مقدار موقتی U_i^n در زمان $n+1$ است. با جایگذاری رابطه (۱۱) در (۱۲) رابطه (۱۳) به صورت زیر حاصل می شود:

$$U_i^{n+1} = \frac{1}{2} \left\{ U_i^n + \left(U_i^n - \Delta t \delta^F (F(U_i^n)) \right) - \Delta t \delta^B (F(U_i^n)) \right\}. \quad (13)$$

که در ادامه رابطه زیر به دست می آید:

$$U_i^{n+1} = \frac{1}{2} \left\{ U_i^n + U_i^n - \left(\Delta t \delta^F (cU_i^n) \right) - \Delta t \delta^B (cU_i^n) \right\}. \quad (14)$$

حال با اعمال عملگرهای پیشرو و پسرو مکانی در رابطه (۱۴) رابطه زیر به دست می آید:

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{c\Delta t}{2\Delta x} (U_{i+1}^n + U_{i-1}^n) + \frac{c^2\Delta t^2}{2\Delta x^2} (U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n). \quad (15)$$

در نهایت با استفاده از بسط سری تیلور برای $U(t+\Delta t)$ و $U(x+\Delta x)$ و رابطه (۱۵) خطای بریدگی روش MC2 به صورت زیر به دست می آید:

$$\Delta t U_t + \frac{\Delta t^2}{2} U_{tt} + \frac{\Delta t^3}{6} U_{ttt} + \frac{\Delta t^4}{24} U_{tttt} + \dots = -c\Delta t U_x + \frac{c^2\Delta t^2}{2} U_{xx} + \frac{c\Delta t}{6} \Delta x^2 U_{xxx} + \frac{c^2\Delta t^2\Delta x^2}{24} U_{xxxx} + \dots \quad (16)$$

از طرفی با توجه به رابطه (۱۶) رابطه زیر به دست می آید:

$$U_t = -cU_x, \quad U_{tt} = c^2U_{xx}, \quad U_{ttt} = -cU_{xxx}. \quad (17)$$

حال با جایگذاری رابطه (۱۷) در رابطه (۱۶) خطای بریدگی روش MC2 به صورت زیر به دست می آید:

$$U_t + cU_x = -\frac{\Delta t^2}{6} U_{ttt} - \frac{c\Delta x^2}{6} U_{xxx} + \dots \quad (18)$$

عددی مسئله تنظیم راسبی غیرخطی دو بعدی در تحقیق حاضر نیز رعایت شده است.

۳ بررسی دقت

در این بخش قبل از ارائه نتایج حل عددی به بررسی دقت روش MCRK4 در مقایسه با روش MC2 و MC4 پرداخته می شود. برای این منظور خطای بریدگی روش های MC2، MC4 و MCRK4 برای معادله فرارفت خطی یک بعدی که دارای حل تحلیلی می باشد، به دست آمده است. همچنین آهنگ همگرایی برای روش های متفاوتی از جمله لکس و ندرف، لیب فراگ، بیم وارمینگ و همچنین روش های MC2، MC4 و MCRK4 به دست آمده است.

۳-۱ خطای بریدگی

در این بخش خطای بریدگی روش های MC2، MC4 و MCRK4 برای معادله فرارفت خطی یک بعدی به دست آمده است. مقایسه این خطا می تواند یک معیار نظری ریاضی برای بررسی مرتبه دقت هر یک از روش ها باشد. برای به دست آوردن خطای بریدگی، ابتدا معادله فرارفت خطی یک بعدی با ضریب ثابت به صورت زیر در نظر گرفته می شود (هیکسون و تورکل، ۲۰۰۰):

$$U_t + \{F(U)\}_x = 0, \quad F(U) = cU \quad (10)$$

۳-۱-۱ روش MC2

شکل گسسته زمانی رابطه (۱۰) با استفاده از روش MC2 به صورت زیر است:

مرحله پیش بینی کننده:

$$U_i^* = U_i^n - \Delta t \delta^F (F(U_i^n)). \quad (11)$$

مرحله مصحح:

۲-۳ آهنگ همگرایی

اکنون با استفاده از حل عددی معادله فرارفت خطی یک-بعدی دقت روش‌های MC2، MC4 و MCRK4 در مقایسه با سایر روش‌ها همانند لکس و ندرف و لیب فراگ و بیم‌وارمینگ با دقت مرتبه دوم و مرتبه چهارم سنجیده می‌شود. برای بررسی دقت روش‌های عددی نیاز به حل دقیق معادلات مورد استفاده برای حل عددی است. بر همین اساس در این بخش با استفاده از معادله فرارفت خطی یک‌بعدی که حل دقیق آن موجود است به بررسی دقت و آهنگ همگرایی این روش‌ها می‌پردازیم. معادله فرارفت با ضریب ثابت به صورت زیر بیان می‌شود (هیکسون و تورکل، ۲۰۰۰):

$$U_t + U_x = 0. \quad (22)$$

که شرط اولیه رابطه بالا به صورت زیر است:

$$U(x, t) = \frac{1}{2} \exp\left(-\ln(2)\left(\frac{x}{3}\right)^2\right). \quad (23)$$

شبهه انتخابی برای حل عددی یکنواخت و محدوده تغییرات x به صورت $-20 \leq x \leq 450$ است. در مرز سمت چپ ($i=1$)، از شرط مشتق مرتبه اول تابع برابر با صفر و در مرز سمت راست از روابط مرزی که در قسمت معرفی روش مک کورمک آمده، استفاده می‌شود. اکنون با استفاده از نرم l_2 و همچنین محاسبه آهنگ همگرایی (Convergence rate) برای این روش‌ها به بررسی دقت پرداخته می‌شود. نرم l_2 به صورت زیر تعریف می‌شود (به طور مثال استراکا و همکاران، ۱۹۹۳؛ سالاری و ناپ، ۲۰۰۰؛ روی و همکاران، ۲۰۰۲ و ۲۰۰۴):

$$l_2 = \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [Q(i) - Q_{ref}(i)]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (24)$$

همان‌طور که در رابطه (۱۸) مشاهده می‌شود، دقت مکانی و زمانی روش MC2 از مرتبه دوم است.

۲-۱-۳ روش‌های MC4 و MCRK4

عملگرهای پیشرو و پس‌رو در روش مک کورمک فشرده مرتبه چهارم به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} a\delta_{i-1}^B + (1-a)\delta_i^B &= \frac{1}{\Delta x} (F(U_i^n) - F(U_{i-1}^n)) \\ a\delta_{i+1}^F + (1-a)\delta_i^F &= \frac{1}{\Delta x} (F(U_{i+1}^n) - F(U_i^n)) \end{aligned}, \quad (19)$$

که $a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}$ است. پس از انجام محاسبات ریاضی همانند روش MC2، خطای بریدگی روش MC4 به صورت زیر به دست می‌آید:

$$U_t + cU_x = -\frac{\Delta t^2}{6} U_{ttt} + \frac{c\Delta x^4}{180} U_{xxxx} + \dots \quad (20)$$

برای به دست آوردن خطای بریدگی روش MCRK4 همانند روش MC4 عمل کرده با این تفاوت که در این روش به جای استفاده از دو گام و دو عملگر بایستی چهار گام و چهار عملگر در طی محاسبات استفاده شود. خطای بریدگی روش MCRK4 به صورت زیر است:

$$U_t + cU_x = \frac{c\Delta x^4}{180} U_{xxxx} + \frac{c^5 \Delta t^4}{120} U_{tttt} \dots, \quad (21)$$

با توجه به رابطه (۲۰) دقت مکانی روش MC4 از مرتبه چهارم و دقت زمانی آن از مرتبه دوم است. همچنین با توجه به رابطه (۲۱) روش MCRK4 دارای دقت مکانی و زمانی از مرتبه چهارم است.

در جدول‌های ۱ و ۲ آهنگ همگرایی هر یک از روش‌ها برای فاصله شبکه‌ای $\Delta x = 1$ ، $\Delta x = 0.5$ و $\Delta x = 0.25$ ارائه شده است. گام زمانی مود استفاده برای روش‌های عددی مختلف یکسان و برابر $\Delta t = 0.5 \times 10^{-7}$ انتخاب شده است. نتایج حاصل از این دو جدول مطابقت خوبی با نتایج نظری هر یک از روش‌ها دارد. همچنین مشاهده می‌شود دو روش MC4 و MCRK4 دارای مرتبه دقت مکانی یکسانی هستند.

جدول ۱. آهنگ همگرایی، q برای مرتبه دوم مرکزی.

Δx	بیم‌وارمینگ	لیپ‌فراگ	لکس‌وندروف	MC2
1.0	1.887	1.887	1.887	1.887
0.5	1.929	1.929	1.929	1.929
0.25	1.950	1.950	1.950	1.950

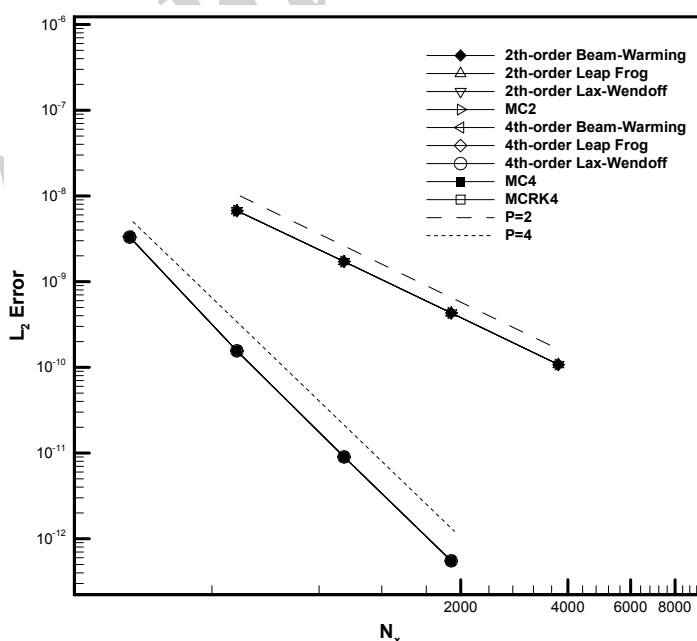
جدول ۲. آهنگ همگرایی، q برای فشرده مرتبه چهارم.

Δx	بیم‌وارمینگ	لیپ‌فراگ	لکس‌وندروف	MC4	MCRK4
1.0	4.436	4.408	4.408	4.436	4.436
0.5	4.273	4.259	4.259	4.273	4.273
0.25	4.191	4.182	4.182	4.191	4.191

که N تعداد نقاط و Q مقدار به‌دست‌آمده برای تابع با استفاده از روش عددی و Q_{ref} مقدار دقیق تابع است. همچنین مقدار همگرایی از رابطه زیر به‌دست می‌آید (به‌طور مثال، سالاری و ناپ، ۲۰۰۰؛ روی و همکاران ۲۰۰۲ و ۲۰۰۴؛ ویلیامسون و همکاران ۱۹۹۲):

$$q = \frac{\log_{10} \left(\frac{l_2(Q)_{grid1}}{l_2(Q)_{grid2}} \right)}{\log_{10} \left(\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} \right)}, \quad (25)$$

که $l_2(Q)_{grid1}$ و $l_2(Q)_{grid2}$ به‌ترتیب مقدار نرم l_2 حاصل از حل عددی و برای فاصله شبکه‌ای Δx_1 و Δx_2 است. شکل ۱ نرم مکانی حاصل از روش‌های لکس‌وندروف (لکس و ندروف، ۱۹۶۰؛ دوزن، ۲۰۱۰) و لیپ‌فراگ و بیم‌وارمینگ (بیم و وارمینگ، ۱۹۷۶؛ سیسی و همکاران، ۲۰۰۵) برای مرتبه دوم، فشرده مرتبه چهارم و همچنین روش‌های MC2، MC4 و MCRK4 را نشان می‌دهد.



شکل ۱. نرم مکانی برای مرتبه دوم و فشرده مرتبه چهارم.

که L^* مقیاس طول در راستای محور x^* می‌باشد. با جایگذاری کمیت‌های بی‌بعد ذکر شده رابطه (۲۸) در رابطه (۲۶) و بعد از حذف علامت پریم از کمیت‌های بی‌بعد، دستگاه معادلات رابطه (۲۶) به شکل زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x} - \varepsilon v &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \alpha u \frac{\partial v}{\partial x} + \varepsilon u &= 0 \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha \frac{\partial(\eta u)}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (29)$$

که پارامترهای بی‌بعد α و ε به صورت زیر هستند:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\eta_0}{H} \\ \varepsilon &= \frac{fL}{\sqrt{gH}} \end{aligned} \quad (30)$$

که پارامتر α ماهیت خطی و غیرخطی بودن و پارامتر ε ماهیت چرخشی و غیر چرخشی بودن مسئله را بیان می‌کنند. محدوده تغییرات α بین صفر و یک در نظر گرفته می‌شود، به طوری که اگر α به سمت صفر میل کند، مسئله ماهیت خود را به حالت کاملاً خطی تغییر می‌دهد و بالعکس. همچنین مقدار $\varepsilon = 0$ معادل با حالت غیر چرخشی و $\varepsilon = 1$ معادل با حالت چرخشی سیستم می‌باشد.

۱-۴ نتایج و بحث حل عددی مسئله تنظیم راسبی غیرخطی در یک بعد

شبکه انتخاب شده برای حل عددی این مسئله یک شبکه یکنواخت با تفکیک $n = 1601$ و مکان بی‌بعد شده آن در بازه $-15 \leq x \leq 15$ قرار دارد. مسئله برای چهار حالت خطی و غیر چرخان، غیرخطی و غیر چرخان، خطی و

۴ مسئله تنظیم راسبی غیرخطی در یک بعد معادلات انتخاب شده برای بررسی عددی این پدیده معادلات آب کم‌عمق در صفحه f است (کو و پولوانی، ۱۹۹۷):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + g^* \frac{\partial h^*}{\partial x^*} - f^* v^* &= 0 \\ \frac{\partial v^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + f^* u^* &= 0 \\ \frac{\partial h^*}{\partial t^*} + \frac{\partial(h^* u^*)}{\partial x^*} &= 0 \end{aligned} \quad (26)$$

که بالانویس ستاره (*) نشان‌دهنده پارامترهای با بعد است. همچنین در این روابط u و v به ترتیب نشان‌دهنده مؤلفه‌های سرعت در دو راستای x و y ، t بیان کننده زمان، h عمق شاره، f پارامتر کوریولیس و g نیز شتاب گرانی است. شرایط اولیه انتخاب شده برای مطالعه، یک ناپیوستگی در میدان ارتفاع شاره در حال سکون است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} u^*(x^*, t^* = 0) &= 0 \\ v^*(x^*, t^* = 0) &= 0 \\ h^*(x^*, t^* = 0) &= \begin{cases} H^* + \eta_0^* & x^* < 0 \\ H^* - \eta_0^* & x^* > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (27)$$

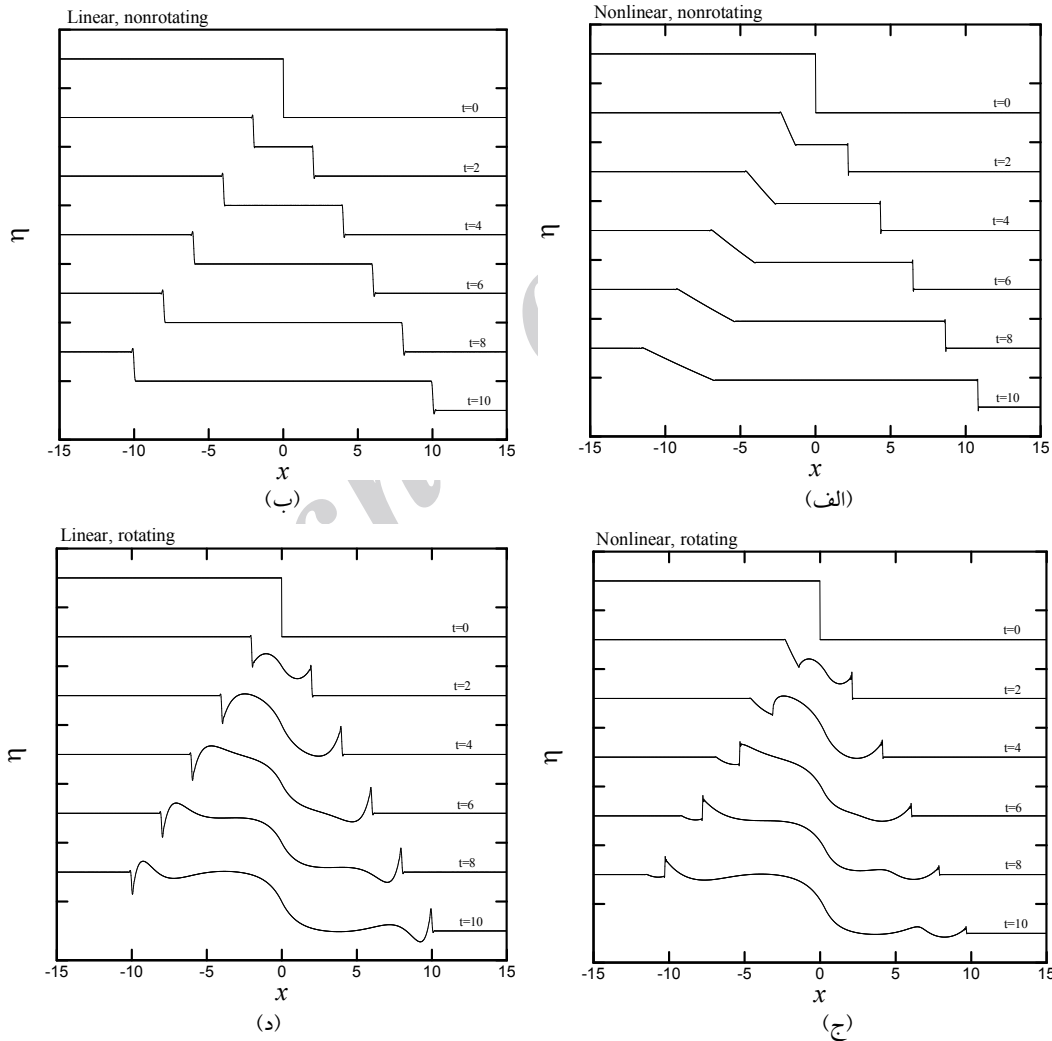
که H^* ارتفاع میانگین لایه در زمان $t^* = 0$ و η_0^* انحراف از میانگین می‌باشد. با توجه به شرایط اولیه که راستای محور x^* می‌باشد، معادلات حاکم در تمام زمان‌ها یعنی $t^* > 0$ مستقل از y^* در نظر گرفته می‌شود. اکنون دستگاه معادلات (۲۶) را با استفاده از روابط زیر بی‌بعد می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \eta^* &= \eta_0^* \eta' \\ u^* &= \frac{\eta_0^*}{H^*} \sqrt{g^* H^*} u' \\ v^* &= \frac{\eta_0^*}{H^*} \sqrt{g^* H^*} v' \\ x^* &= L^* x' \\ t^* &= \left(\frac{L^*}{\sqrt{g^* H^*}} \right) t' \end{aligned} \quad (28)$$

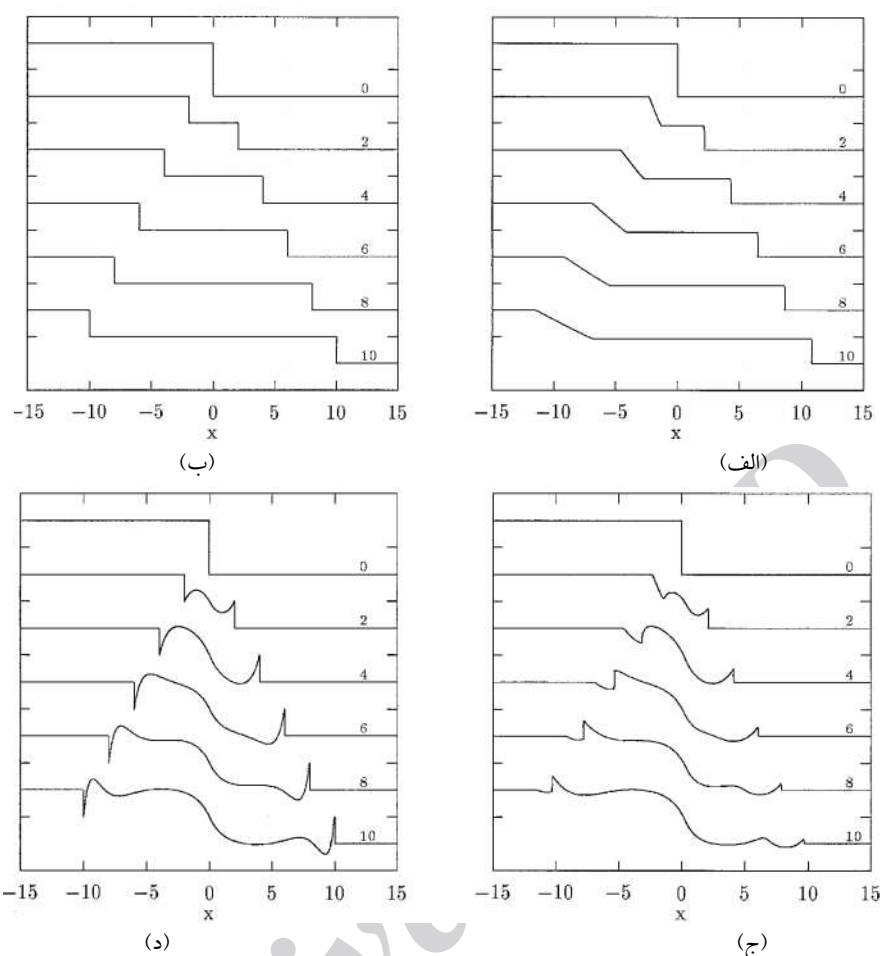
این حالت در شکل ۲-ب نشان داده شده است. نتایج مربوط به حالت خطی و چرخشی یعنی $\varepsilon = 1$ و مقدار α نزدیک به صفر در شکل ۲-ج و حالت غیرخطی و چرخشی که در آن $\varepsilon = 1$ و $\alpha = 0.3$ می باشد در شکل ۲-د نشان داده شده است. همچنین نتایج کار کو و پولوانی (۱۹۹۷) در شکل ۳ نشان داده شده است. مقایسه کیفی نتایج به دست آمده با کار کو و پولوانی (۱۹۹۷) صحت نتایج به دست آمده با استفاده از روش MCRK4 را نشان می دهد.

چرخان و در نهایت غیرخطی و چرخان مورد بررسی قرار می گیرد.

در حالتی که چرخشی وجود ندارد پارامتر $\varepsilon = 0$ می باشد. اکنون با انتخاب مقدار α برابر با عددی بسیار نزدیک به صفر مسئله تبدیل به حالت خطی، غیر چرخان می شود. نتایج حل عددی با استفاده از روش مک کورمک فشرده مرتبه چهارم با پیمایش زمانی رونگه-کوتا چهار مرحله ای در شکل ۲-الف نشان داده شده است. در مرحله بعدی با در نظر گرفتن مقدار $\alpha = 0.3$ مسئله به حالت غیرخطی و غیر چرخشی تبدیل می شود. نتایج مربوط به



شکل ۲. میدان ارتفاع مسئله تنظیم راسی یک بعدی حاصل از روش MCRK4 برای: (الف) حالت خطی و غیر چرخان، (ب) حالت غیرخطی و غیر چرخان، (ج) حالت خطی و چرخان، و (د) حالت غیرخطی و چرخان.



شکل ۳. نتایج کار کو و پولوانی (۱۹۹۷) برای میدان ارتفاع مسئله تنظیم راسبی یک بعدی. (الف) حالت خطی و غیر چرخان، (ب) حالت غیر خطی و غیر چرخان، (ج) حالت خطی و چرخان، (د) حالت غیر خطی و چرخان.

برای بررسی عددی و تحلیل فیزیکی پدیده تنظیم راسبی در دو بعد بیان شده است و به ترتیب شامل معادله تکانه در راستای محور x^* ، معادله تکانه در راستای محور y^* و معادله پیوستگی است.

مدلی که در این تحقیق استفاده شده است عبارت از یک شاره تراکم ناپذیر، همگن و ناوشکسان است که در یک کانال چرخان با سطح مقطع مستطیل شکل محدود می شود. سطح زیرین این کانال مسطح و سطح بالایی آن آزاد است. در این کانال چرخان تنها دیواره های راستای محور x^* (در مسئله تنظیم راسبی غیر خطی) سخت در نظر گرفته می شود و باعث می شود سرعت عمود بر آن u^*

۵ مسئله تنظیم راسبی غیر خطی دو بعدی در یک کانال چرخان

معادلات حاکم برای مسئله تنظیم راسبی دو بعدی به صورت زیر هستند (هلفریش و همکاران، ۱۹۹۹):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} - f^* v^* + g^* \frac{\partial h^*}{\partial x^*} &= 0 \\ \frac{\partial v^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + f^* u^* + g^* \frac{\partial h^*}{\partial y^*} &= 0, \quad (31) \\ \frac{\partial h^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial h^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial h^*}{\partial y^*} + h^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + h^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} &= 0 \end{aligned}$$

که معادلات آب کم عمق دو بعدی هستند. در این روابط برای پارامترهای با بعد از $*$ استفاده شده است. این روابط

$$\lambda^2 \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) - v = - \frac{\partial d}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + u = - \frac{\partial d}{\partial y} \quad (35)$$

$$\frac{\partial d}{\partial t} + u \frac{\partial d}{\partial x} + v \frac{\partial d}{\partial y} + d \frac{\partial u}{\partial x} + d \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

که d ضخامت لایه می‌باشد. رابطه (۳۲) و یا به عبارت دیگر شرایط اولیه حاکم بر مسئله در شکل بی بعد خود نیز به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$u(x, y, t = 0) = 0$$

$$v(x, y, t = 0) = 0$$

$$d(x, y, t = 0) = \begin{cases} 1 & y < 0 \\ \frac{1}{2} & y > 0 \end{cases} \quad (36)$$

در این مقاله مشابه با کار هلفریش و همکاران (۱۹۹۹)، برای حل عددی رابطه (۳۵) با شرایط اولیه رابطه (۳۶) مقدار $\lambda = 1$ در نظر گرفته شده است. برای حل عددی رابطه (۳۵) می‌بایست از شکل پایستار معادلات حاکم که به صورت زیر بیان می‌شوند، استفاده نمود:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial z} = R \quad (37)$$

که بردارهای مربوط به رابطه (۳۷) به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$U = \begin{pmatrix} ud \\ vd \\ d \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} u^2 d + \frac{1}{2} d^2 \\ uvd \\ ud \end{pmatrix} \quad (38)$$

$$G = \begin{pmatrix} uvd \\ v^2 d + \frac{1}{2} d^2 \\ vd \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} vd \\ -ud \\ 0 \end{pmatrix}$$

همچنین رابطه (۳۷) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + Q(U) = 0 \quad (39)$$

که $Q(U)$ به صورت زیر است:

همواره صفر در نظر گرفته شود. شرایط دیواره اولیه انتخاب شده برای مسئله تنظیم راسبی غیرخطی در کانال چرخان شرایط اولیه انتخاب شده به صورت یک ناپیوستگی در میدان ارتفاع شاره در حال سکون در نظر گرفته می‌شود. شرایط اولیه میدان ارتفاع به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$u^*(x^*, y^*, t^* = 0) = 0$$

$$v^*(x^*, y^*, t^* = 0) = 0$$

$$h^*(x^*, y^*, t^* = 0) = \begin{cases} z^* & y^* < 0 \\ \frac{z^*}{2} & y^* > 0 \end{cases} \quad (32)$$

برای اینکه درک بهتری از مسئله تنظیم راسبی غیرخطی در یک کانال چرخان حاصل شود، رابطه (۳۲) با استفاده از روابط زیر بی بعد می‌شود:

$$x' = \frac{x^*}{\sqrt{g^* z^*} / f^*}, \quad y' = \frac{y^*}{L^*}$$

$$d' = \frac{h^*}{z^*}, \quad u' = \frac{u^*}{\lambda \sqrt{g^* z^*}} \quad (33)$$

$$v' = \frac{v^*}{\sqrt{g^* z^*}}, \quad t' = \frac{t^*}{L^* / \sqrt{g^* z^*}}$$

که پارامتر بی بعد λ برابر است با:

$$\lambda = \frac{\sqrt{g^* z^*}}{f^* L^*} \quad (34)$$

λ از دیدگاه فیزیکی نسبت شعاع دگرشکلی (radius of deformation) راسبی به مقیاس طول L^* در راستای محور y^* است. با جایگذاری کمیت‌های بی بعد ذکر شده رابطه (۳۳) در رابطه (۳۲) و بعد از حذف علامت پریم از کمیت‌های بی بعد، رابطه به شکل زیر بازنویسی می‌شود:

۱-۵ نتایج و بحث حل عددی مسئله تنظیم

راسبی غیرخطی دو بعدی در یک کانال چرخان

در این بخش نتایج حاصل از حل عددی مسئله تنظیم راسبی غیرخطی در دو بعد آورده شده است. در این پژوهش یک ناحیه مستطیلی شکل با عرض بی‌بعد در $L=50$ در راستای محور y و طول بی‌بعد $w=1$ در راستای محور x مورد نظر است. در این حالت که طول کانال برابر با $w=1$ است، از تفکیک (101×5001) در حل عددی استفاده شده است. گام زمانی انتخاب شده نیز برابر با $\Delta t = 0.001$ است. برای کنترل ناپایداری غیرخطی ناشی از اندرکنش‌های غیرخطی پارامتر $\nu = 0.005$ در نظر گرفته شده است.

در شکل ۴ تحول زمانی میدان ارتفاع شبیه‌سازی شده مربوط به مسئله تنظیم راسبی غیرخطی دو بعدی در یک کانال چرخان در سه زمان $4s$ ، $12s$ و $20s$ با طول $w=1$ و ضخامت $d_0 = 0.25$ حاصل از حل عددی و به کمک روش MCRK4 و همچنین در شکل ۵ نتایج هلفریش و همکاران (۱۹۹۹) نشان داده شده است. همان‌طور که در شکل ۵ مشاهده می‌شود از لحاظ کیفی مطابقت مناسبی بین نتایج عددی حاصل از روش MCRK4 و نتایج عددی هلفریش و همکاران (۱۹۹۹) وجود دارد.

در شکل ۴ بلافاصله بعد از شکستن سد یک شوک تولید شده و به پایین‌سوی جریان منتشر می‌شود. همچنین موج بازشونده کلون هم به بالاسوی جریان منتشر می‌شود. بین شوک و موج کلون یک ناحیه منبسط قرار دارد که امواج پوانکاره در این ناحیه حضور دارند.

در شکل ۶ مشابه با کار انجام شده توسط هلفریش و همکاران (۱۹۹۹) میدان ارتفاع، میدان سرعت افقی و میدان تاوایی پتانسیلی برای در زمان ۲۰ ثانیه با طول $w=1$ و $d = 0.25$ نشان داده شده است.

$$Q(U) = \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial z} - R \quad (40)$$

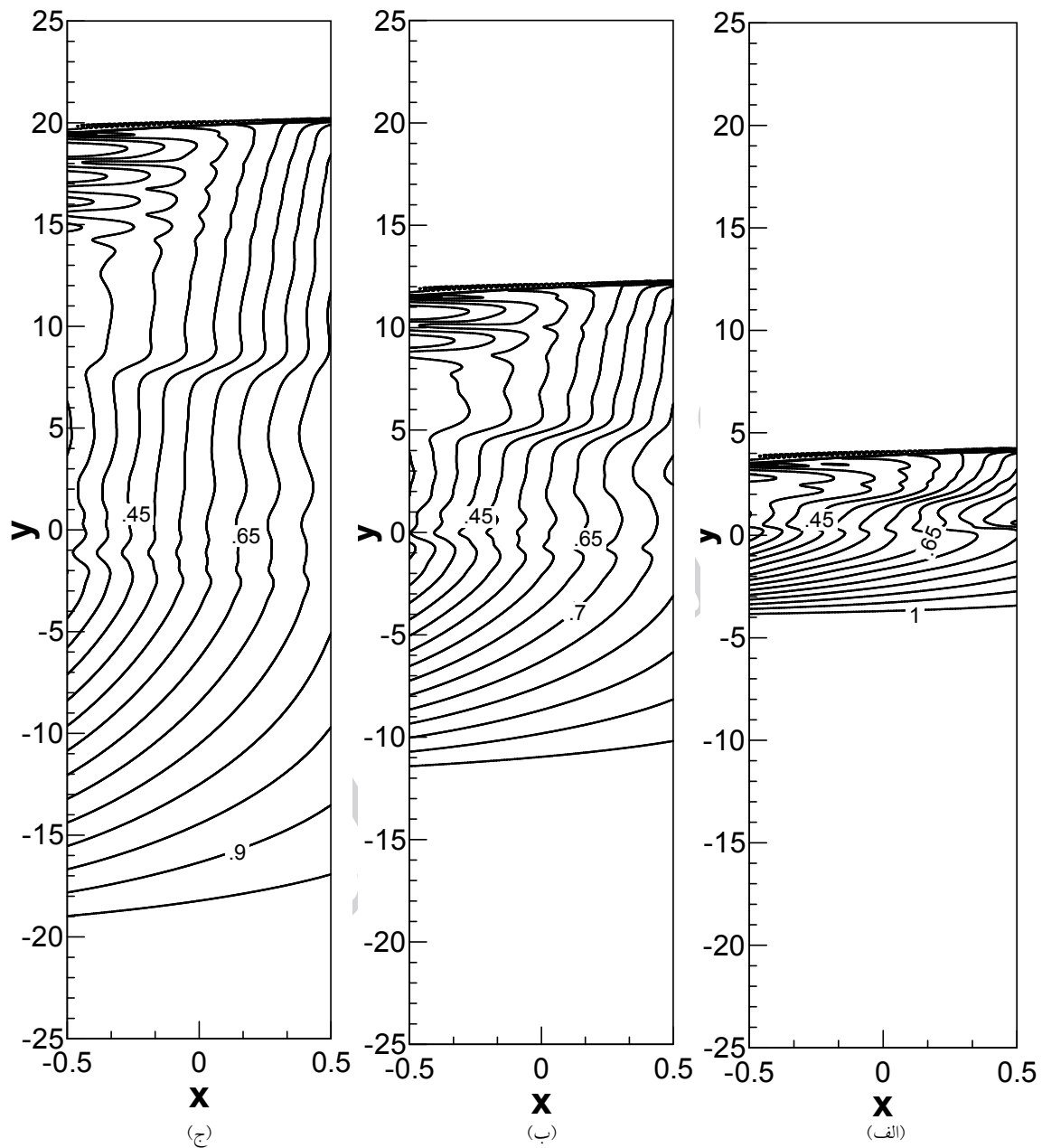
شکل گسسته رابطه (۳۹) با استفاده از روش MCRK4، به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} h^{(1)} &= -\Delta t \delta_x^F [E(U_{i,k}^n)] - \Delta t \delta_z^B [G(U_{i,k}^n)] \\ &\quad + \frac{\Delta t}{2} [R(U_{i,k}^n)] \\ h^{(2)} &= -\Delta t \delta_x^F [E(U_{i,k}^n + \alpha_2 h^{(1)})] \\ &\quad - \Delta t \delta_z^B [G(U_{i,k}^n + \alpha_2 h^{(1)})] + \frac{\Delta t}{2} [R(U_{i,k}^n + \alpha_2 h^{(1)})] \\ h^{(3)} &= -\Delta t \delta_x^F [E(U_{i,k}^n + \alpha_3 h^{(2)})] \\ &\quad - \Delta t \delta_z^B [G(U_{i,k}^n + \alpha_3 h^{(2)})] + \frac{\Delta t}{2} [R(U_{i,k}^n + \alpha_3 h^{(2)})] \\ h^{(4)} &= -\Delta t \delta_x^F [E(U_{i,k}^n + \alpha_4 h^{(3)})] \\ &\quad - \Delta t \delta_z^B [G(U_{i,k}^n + \alpha_4 h^{(3)})] + \frac{\Delta t}{2} [R(U_{i,k}^n + \alpha_4 h^{(3)})] \\ U_{i,j}^{n+1} &= U_{i,j}^n + \beta_1 h^{(1)} + \beta_2 h^{(2)} + \beta_3 h^{(3)} + \beta_4 h^{(4)} \end{aligned} \quad (41)$$

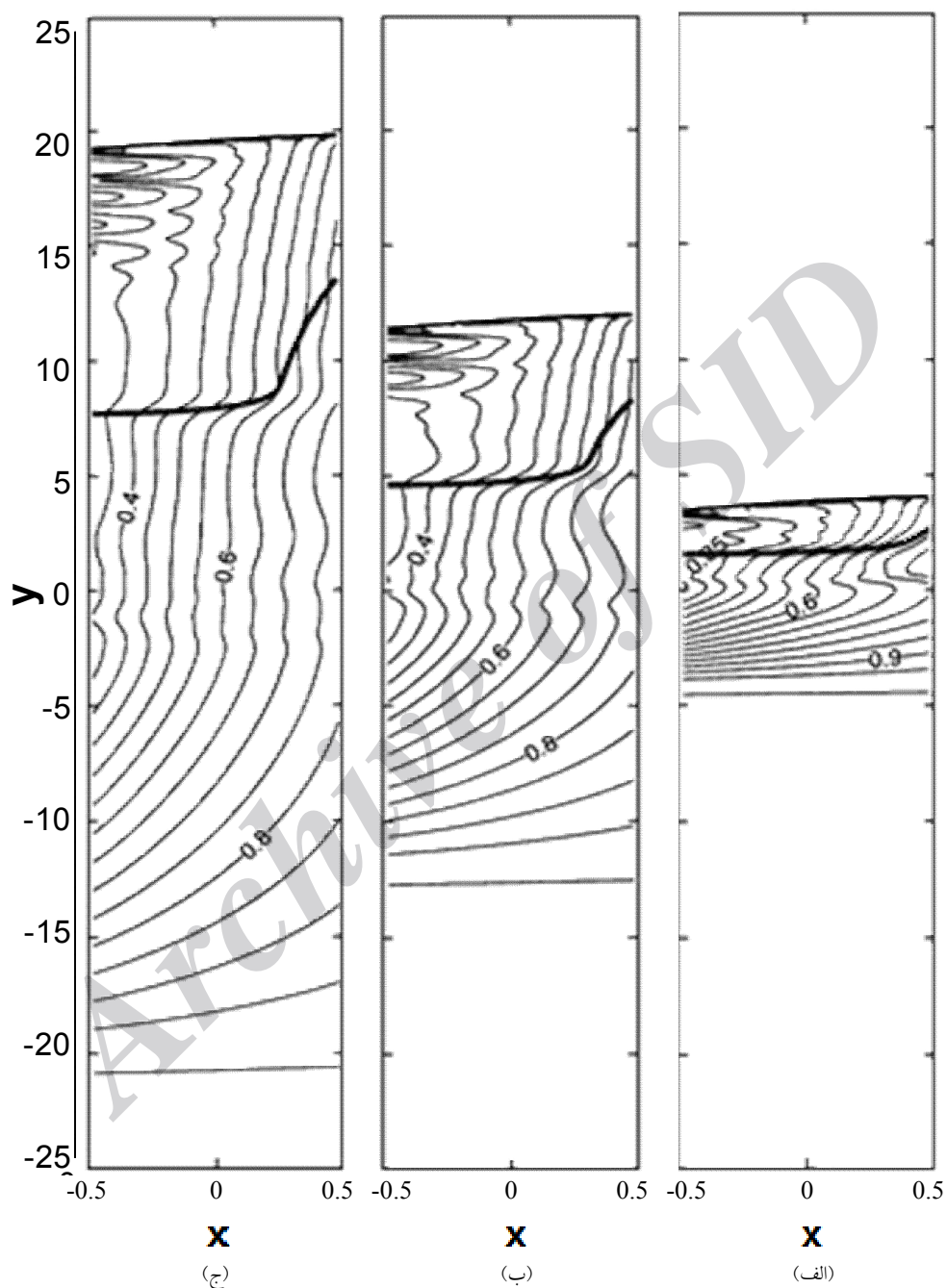
در زمان انتگرال‌گیری شکل اولی معادلات حاکم بر شار به اثر اندرکنش غیرخطی، ناپایداری غیرخطی ناشی از خطای دگر نامیدن به وجود می‌آید. این ناپایداری غیرخطی را می‌توان با روش‌های مختلفی از جمله افزودن جمله‌ای میرا کننده به معادله مهار کرد. از طرفی روش مک کورمک دارای یک میرایی ذاتی است و این میرایی بخشی از اندرکنش‌های غیرخطی را کنترل می‌کند. با وجود این به علت پیچیدگی میدان شار در شارش‌های غیر هیدروستاتیک و تراکم‌پذیر از جمله میرایی به صورت زیر استفاده شده است (به طور مثال استراکا و همکاران، ۱۹۹۳؛ هلفریش و همکاران، ۱۹۹۹؛ احمد و لیندرمن، ۲۰۰۷):

$$\begin{aligned} F_u &= \nu \nabla \cdot (d \nabla u) \\ F_v &= \nu \nabla \cdot (d \nabla v) \end{aligned} \quad (42)$$

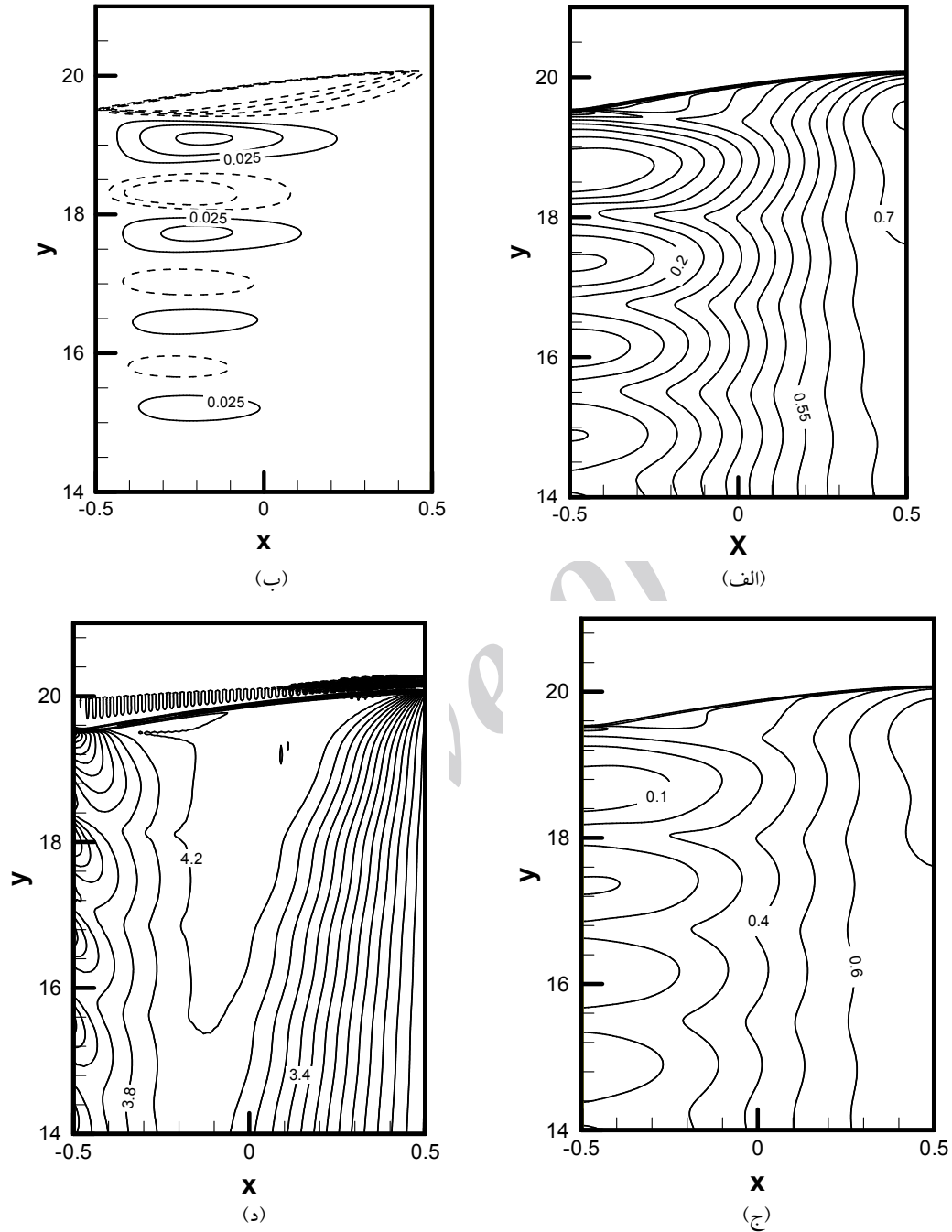
که ν ضریب میرایی است. این ضریب با آزمایش عددی به دست آمده و با توجه به تفکیک انتخاب شده در حل عددی تغییر می‌کند. هنگام حل عددی رابطه (۴۲) به سمت راست رابطه (۳۹) اضافه می‌شود. برای محاسبه عملگرهای $\nabla \cdot$ و ∇ در رابطه (۴۲) می‌توان از عملگرهای پیش‌رو و پس‌رو استفاده کرد.



شکل ۴. تحول زمانی میدان ارتفاع شبیه‌سازی مسئله تنظیم راسی غیرخطی دو بعدی در یک کانال چرخان با استفاده از روش MCRK4 در سه زمان: (الف) ۴s، (ب) ۱۲s و (ج) ۲۰s برای طول $w = 1$ ، ضخامت $d_0 = 0.25$ ، پربندهای هم‌ضخامت در بازه صفر تا ۱ قرار دارند. اختلاف بین دو پربند متوالی برابر با ۰/۰۵ است.



شکل ۵. نتایج هلفریش و همکاران (۱۹۹۹) برای حل عددی مسئله تنظیم راسی غیرخطی در یک کانال چرخان در سه زمان: (الف) ۴ ثانیه، (ب) ۱۲ ثانیه و (ج) ۲۰ ثانیه برای طول $w = 1$ ، ضخامت $d_0 = 0.25$. پربندهای هم‌ضخامت در بازه صفر تا ۱ قرار دارند.



شکل ۶. شبیه‌سازی مسئله تنظیم راسی غیرخطی دو بعدی در یک کانال چرخان در زمان ۲۰ ثانیه با طول $w=1$ و $d=0.25$. (الف) میدان ارتفاع، (ب) مؤلفه افقی میدان سرعت در راستای محور x ، (ج) مؤلفه افقی میدان سرعت در راستای محور y و (د) میدان تاوایی پتانسیلی می‌باشد. خط‌چین‌ها نشان‌دهنده پریشیدگی منفی می‌باشد.

۶ نتیجه‌گیری

در کار حاضر برای بررسی دقت عددی، ابتدا خطای بریدگی روش‌های MC2، MC4 و MCRK4 برای معادله فرارفت خطی یک‌بعدی با ضریب ثابت که دارای حل تحلیلی می‌باشد، به‌دست آمد. در ادامه آهنگ همگرایی برای روش‌های متفاوتی از جمله لکس‌وندرف، لیپ-فراگ، بیم‌وارمینگ و همچنین روش‌های MC2، MC4 و MCRK4 به‌دست آمد که نتایج حاصل گویای مطابقت خوبی با مبانی نظری است. همچنین مشاهده شد دو روش MC4 و MCRK4 دارای مرتبه دقت مکانی یکسانی هستند. از طرفی با حل عددی معادله فرارفت به‌عنوان یک مسئله خطی معلوم به همراه محاسبه خطای بریدگی و آهنگ همگرایی معلوم شد که روش مک کورمک فشرده مرتبه چهارم نسبت به روش مک کورمک مرتبه دوم از عملکرد و دقت بالاتری برخوردار است. به‌علاوه در این پژوهش به حل عددی مسئله تنظیم راسبی غیرخطی ناپایای یک‌بعدی و دو بعدی با استفاده از MCRK4 پرداخته شد. با توجه به عدم وجود حل تحلیلی در یک‌بعد و برای اینکه مقایسه کمی بین نتایج عددی حاصل از روش MCRK4 برای تحول زمانی میدان ارتفاع مسئله تنظیم راسبی یک‌بعدی صورت گیرد، مشابه با کار انجام شده توسط کو و پولوانی (۱۹۹۷)، میدان ارتفاع مسئله تنظیم راسبی به‌دست آمد. با توجه به اینکه معادلات مسئله تنظیم راسبی در دو بعد فاقد حل تحلیلی هستند، لذا برای مقایسه کیفی جواب‌ها، مشابه با کار انجام شده توسط هلفریش و همکاران (۱۹۹۹)، میدان ارتفاع شبیه‌سازی مسئله تنظیم راسبی غیرخطی دو بعدی در یک کانال چرخان با استفاده از روش MCRK4 به‌دست آمد. با مقایسه نتایج حل عددی عرضه شده برای شبیه‌سازی مسئله تنظیم راسبی غیرخطی ناپایا با استفاده از روش مک کورمک فشرده مرتبه چهارم با پیمایش زمانی رونگه‌کوتا چهار مرحله‌ای با کار هلفریش و همکاران (۱۹۹۹) و همچنین قادر و

همکاران (۱۳۸۹) گویای توانمند بودن این روش در حل عددی معادلات دو بعدی است. با توجه به اینکه روش مک کورمک فشرده مرتبه چهارم دارای دقت بیشتری در گسسته‌سازی زمان و مکان و همچنین پخش عددی کمتر می‌باشد، می‌توان از این روش برای مدل‌های عددی پیش-بینی عددی وضع هوا به‌ویژه مدل‌های میان‌مقیاس با اثرات جبهه‌ای شامل گسستگی در میدان شارش استفاده کرد.

منابع

جوان‌نژاد، ر.، مشکواتی، ا. ح.، قادر، س.، و احمدی‌گیوی، ف.، ۱۳۹۵، حل عددی شکل پایستار معادلات تراکم‌پذیر دو بعدی و غیر هیدروستاتیک ایستایی جو با روش فشرده مک کورمک: مجله ژئوفیزیک ایران، ۱۰(۱)، ۲۸-۴۶.

قادر، س.، بیدختی، ع. ع. و فلاحت، س.، ۱۳۸۹، حل عددی مسئله تنظیم راسبی غیرخطی ناپایای دو بعدی با استفاده از روش فشرده مک کورمک مرتبه چهارم: مجله فیزیک زمین و فضا، ۳۶(۳)، ۱۵۱-۱۷۳.

قادر، س.، بیدختی، ع. ع. و فلاحت، س.، ۱۳۹۰، حل عددی شکل پایستار معادلات تراکم‌پذیر دو بعدی و غیر هیدروستاتیک جو با استفاده از روش مک کورمک مرتبه دوم: مجله فیزیک زمین و فضا، ۳۷(۲)، ۱۷۱-۱۹۱.

میرزایی شیری، ر.، قادر، س.، مزرعه‌فراهانی، م. و بیدختی، ع. ع.، ۱۳۹۶، حل عددی معادلات آب کم‌عمق با روش مک کورمک فشرده مرتبه چهارم: مجله فیزیک زمین و فضا، ۴۳(۱)، ۲۰۹-۲۲۸.

Ahmad, N. and Lindeman, J., 2007, Euler solution using flux-based wave decomposition: International Journal for Numerical Methods in Fluids, 54, 47-72.

- Dynamics of Atmospheres and Oceans, **41**, 149–171.
- Hirsch, S. R., 1975, Higher order accurate difference solution of fluid mechanics problems by a compact differencing technique: *Journal of Computational Physics*, **19**, 99-109.
- Hixon, R., and Turkel, E., 2000, Compact implicit Mac Cormack-type scheme with high accuracy: *Journal of Computational Physics*, **158**, 51-70.
- JavanNezhad, R., Meshkatee, A. H., Ghader, S., and Ahmadi-Givi, F., 2016, High-order compact MacCormack scheme for two-dimensional compressible and non-hydrostatic equations of the atmosphere: *Dynamics of Atmospheres and Oceans*, **75**, 102–117.
- Kreiss, H. O., and Oliger, J., 1972: Comparison of accurate method for the integration of hyperbolic equation, *Tellus*, **24**, 199-215.
- Kuo, A. C. and polvani, L. M., 1997, Time-dependent fully nonlinear geostrophic adjustment: *Journal of Physical Oceanography*, **27**, 1614-1634.
- Kuo, A. C. and polvani, L. M., 1997, Time-dependent fully nonlinear geostrophic adjustment: *Journal of Physical Oceanography*, **27**, 1614-1634.
- Lax, P., Wendroff, B., 1960, Systems of conservation laws: *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **13**, 217–237.
- Lele, S. K., 1992, Compact finite difference schemes with spectral like resolution, *Journal of Computational Physics*, **103**, 16-42.
- Mohebalhojeh, A. R., and Dritschel, D. G., 2007, Assessing the numerical accuracy of complex spherical shallow water flows: *Monthly Weather Review*, **135**, 3876-3894.
- Navon, I. M., and Riphagen H. A., 1979, An implicit compact fourth-order algorithm for solving the shallow water equation in conservative-law form: *Monthly Weather Review*, **107**, 1107-1127.
- Numerov, B. V., 1924, A method of extrapolation of perturbations, *Roy. Astron. Monthly notices of the Royal Astronomical Society*, **84**, 592-601.
- Roy, C. J., Smith, T. M., and Ober, C. C., 2002, Verification of a compressible CFD code using the method of manufactured solutions: AIAA Paper, 2002-3110.
- Roy, C. J., Nelson, C. C., Smith, T. M., and Ober, C. C., 2004, Verification of Euler/Navier–Stokes codes using the method of
- Boss, E., and Thompson, L., 1994, Energetics of nonlinear geostrophic adjustment: *Journal of Physical Oceanography*, **25**, 1521-1529.
- Beam, R. M., and Warming, R. F., 1976, An implicit finite difference algorithm for hyperbolic systems in conservative-law form: *Journal of Computational Physics*, **22**, 87–116.
- Cahn, A., 1945, An investigation of the free oscillations of a simple current system: *Journal of Meteorology*, **2**, 113-119.
- Cebeci, T., Shao, J. P., Kafyke, F., and Laurendeau, E., 2005, *Computational Fluid Dynamics for Engineers*: Springer.
- Esfahanian, V., Ghader, S., and Mohebalhojeh, A. R., 2005, On the use of super compact scheme for spatial differencing in numerical models of the atmosphere: *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, **131**, 2109-2130.
- Fox, L., and Goodwin, E. T., 1949, Some new method for the numerical integration of ordinary differential equation: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **45**, 373-388.
- Ghader, S., Mohebalhojeh, A. R., and Esfahanian, V., 2009, On the Spectral convergence of the supercompact finite-difference schemes for the f-plane shallow-water equations: *Monthly Weather Review*, **137** (7), 2393–2406.
- Ghader, S., and Nordström, J., 2015, High-order compact finite difference schemes for the vorticity-divergence representation of the spherical shallow water equations: *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **78**, 709-738.
- Ghader, S., Ghasemi, A., Banazadeh, M. R., and Mansoury, D., 2012, High-order compact scheme for Boussinesq equations: Implementation and numerical boundary condition issue: *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **69**, 590–605.
- Gill, A. E., 1976, Adjustment under gravity in a rotating channel: *Journal Fluid Mechanics*, **77**, 603–621.
- Gill, A. E., 1982, *Atmosphere-Ocean Dynamics*: Academic Press.
- Helfrich, K. R., Kuo, A. C. and Prat, L. J., 1999, Nonlinear Rossby adjustment in a channel: *Journal Fluid Mechanics*, **390**, 187-222.
- Helfrich, K. R., 2006, Nonlinear adjustment of a localized layer of buoyant, uniform potential vorticity fluid against a vertical wall:

- Density Current: A Benchmark Solution and Comparisons: *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **17**, 1-22.
- Williamson, D. L., Drake, J. B., Hack, J. J., Jakob-Chien, R., and Swarztrauber, P. N., 1992, A standard test set for numerical approximations to the shallow water equations in spherical geometry: *Journal of Computational Physics*, **102**, 211-224.
- Wake, G. W., Ivey, G. N., Imberger, J., McDonald, 2004, The temporal evolution of a geostrophic flow in a rotating stratified basin: *Dynamics of Atmospheres and Oceans*, **39**, 189-210.
- manufactured solutions: *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **44**, 599-620.
- Rivas, D., Fuentes, O. U., and Ochoa, J., 2005, Topographic effects on the dynamics of gravity currents in a rotating system: *Dynamics of Atmospheres and Oceans*, **39**, 227-249.
- Salari, K., and Knupp, P., 2000, Code Verification by the Method of Manufactured Solutions, Sandia National Laboratories, Albuquerque, NM 87185-0825.
- Straka, J. M., Wilhelmson, R. B., Wicker, L. J., Anderson, J. R., and Droegemeier, K. K., 1993, Numerical Solutions of a Non-linear

Archive of SID

Application of the fourth-order compact MacCormack scheme with a four-stage Runge–Kutta time marching for numerical solution of unsteady and non-linear Rossby adjustment problem

Reza JavanNezhad¹, and Sarmad Ghader^{2*}

¹Ph. D. of Meteorology, Science and Research branch, Islamic Azad university, Tehran, Iran

²Associate Professor, Space Physics Department, Institute of Geophysics, University of Tehran, Tehran, Iran

(Received: 21 May 2017, Accepted: 16 August 2017)

Summary

By increasing the computing power of computers, the advantage of high-resolution numerical methods for numerical simulation of the governing equations of fluid flow is further emphasized. Recently, increasing the accuracy of numerical methods used for simulation of fluid dynamics problems, particularly the geophysical fluid dynamics problems (e.g., shallow water equations) has been the subject of many research works.

The compact finite difference schemes can provide a simple way to reach the main objectives in the development of numerical algorithms, i.e., having a low cost on the one hand and a highly accurate computational method on the other hand. These methods have also been used for numerical simulation of some geophysical fluid dynamics problems.

However, by splitting the derivative operator of a compact central method into one-sided forward and backward operators, a family of compact MacCormack-type schemes can be derived (Hixon and Turkel, 2000). While these classes of compact methods are as accurate as the original compact central methods used to derive the one-sided forward and backward operators, they need less computational work per grid point.

The present work is devoted to the assessment of the accuracy of different methods. The one-dimensional advection equation with the known analytical solution is employed as a prototype model. Also, the truncation error of the traditional second-order MacCormack scheme, the standard fourth-order compact MacCormack scheme, and a fourth-order compact MacCormack scheme with a four-stage Runge–Kutta time marching method are studied. Furthermore, to be able to examine the accuracy, the Lax–Wendroff, the leap-frog and the Beam–Warming methods combined with the second-order and fourth-order compact finite difference methods for spatial differencing are also used. In addition, the convergence rates of different methods are studied. It can be seen that the convergence rates are in agreement with the theoretical order of convergence.

In this work, the traditional second-order MacCormack scheme (MC2), the standard fourth-order compact MacCormack scheme (MC4) developed by Hixon and Turkel (2000) and a fourth-order compact MacCormack scheme with a four-stage Runge–Kutta time marching method (MCRK4) are used for numerical solution of the unsteady and non-linear Rossby adjustment problem (one- and two-dimensional cases). In the one-dimensional case, a single layer shallow water model is used to study the unsteady and nonlinear Rossby adjustment problem. The conservative form of the two-dimensional shallow water equations is used to study the unsteady and nonlinear Rossby adjustment problem in the two-dimensional case. For both cases, the time evolution of a fluid layer initially at rest with a discontinuity in height field is considered for numerical simulations.

Keywords: compact MacCormack scheme, numerical accuracy, truncation error

*Corresponding author: