

چندجمله‌ای درون‌یاب هرمیت درجه سوم یکنوا و کاربرد آن در تبدیل مختصات برای مدل‌های پیش‌بینی عددی وضع هوا

علی محمدی^۱، علیرضا محب‌الحجه^{۲*}، و مجید مزرعه‌فراہانی^۳

^۱مربی، گروه هواشناسی، دانشگاه علوم دریایی امام خمینی (ره)، نوشهر، مازندران، ایران

^۲استاد، گروه فیزیک فضا، موسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران، تهران، ایران

^۳دانشیار، گروه فیزیک فضا، موسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران، تهران، ایران

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۰۴/۳۱، تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۰۷/۲۳)

چکیده

درون‌یابی یکی از ابزارهای ضروری برای پژوهش‌های هواشناسی است. کاربرد روش‌های درون‌یابی در پیش‌بینی عددی پرننگ‌تر است به‌گونه‌ای که از ارکان اصلی حل معادلات با روش‌های لاگرانژی و نیمه‌لاگرانژی است. یکی از مشکلات عمده در اختصاص یک چندجمله‌ای به تابع مورد نظر برای درون‌یابی، نایکنوایی است. معمولاً در یک چندجمله‌ای، هنگام درون‌یابی در بازه بین دو نقطه، بیشینه و کمینه نسبی ایجاد می‌شود، مگر آنکه تابع یکنوا باشد. تولید بیشینه و کمینه نسبی در این بازه، سبب می‌شود که مقدار درون‌یابی شده در خارج از بازه داده‌ها قرار گیرد که این عامل، باعث بروز خطای فاحش در محاسبات عددی می‌شود. به‌همین دلیل، پژوهشگران تلاش‌های زیادی را برای حذف بیشینه و کمینه‌های نسبی در بازه‌های مورد درون‌یابی کرده‌اند که عمده آنها برای چندجمله‌ای هرمیت درجه سوم انجام شده است.

یکنوا کردن تابع درون‌یابی، با استفاده از تغییر مشتق در نقاط اصلی صورت می‌گیرد. با تغییر مشتق، مقدار خطای درون‌یابی نیز تغییر می‌کند؛ بنابراین ایده اصلی برای کم کردن خطا این است که برای نیل به یکنوایی، مشتق کمترین تغییر ممکن را داشته باشد. در این پژوهش، از چندجمله‌ای درجه سوم هرمیت برای درون‌یابی یکنوا استفاده می‌شود و با اعمال کمترین تغییرات روی مشتق، میزان خطای یکنواسازی به حداقل ممکن کاهش می‌یابد. سپس نتایج با سایر روش‌های درون‌یابی یکنوا مقایسه می‌شود. بهبود عملکرد با حفظ خمیدگی در بازه مورد درون‌یابی، از نتایج این پژوهش است.

واژه‌های کلیدی: درون‌یابی، یکنوا، چندجمله‌ای هرمیت، تبدیل مختصات

۱ مقدمه

چندجمله‌ای‌های درجه سوم قطعه‌ای، از پُرکاربردترین چندجمله‌ای‌ها بین توابع درون‌یاب به‌شمار می‌روند. از مهم‌ترین چندجمله‌ای‌های درجه سوم می‌توان به چندجمله‌ای‌های هرمیت و اسپلاین اشاره کرد که در تمامی زمینه‌های علوم از جمله هواشناسی کاربرد دارند. از جمله کاربردهای مهم آنها در هواشناسی، انتقال داده‌ها از یک دستگاه مختصات به دستگاه مختصات دیگر است.

مهم‌ترین چالش در درون‌یابی داده‌ها، حفظ یکنوایی در داده‌های درون‌یابی شده است. یکنوایی به معنای وجود نداشتن کمینه و بیشینه در فاصله بین داده‌هاست. وقتی که نقاط کمینه و بیشینه بین داده‌های مورد درون‌یابی وجود نداشته باشد، درون‌یابی حاصل از داده‌های افزایشی (کاهشی)، فقط افزایشی (کاهشی) است.

همان‌طور که گفته شد، تبدیل دستگاه مختصات در هواشناسی، یکی از مهم‌ترین نمونه‌های استفاده از چندجمله‌ای‌های درون‌یاب است. با توجه به افت‌وخیز شدید در داده‌های هواشناسی و وجود شیب‌های شدید در این داده‌ها، همواره نوسان‌های اضافی و مراکز بیشینه و کمینه محلی در توابع درون‌یاب اتفاق می‌افتد. در یک تبدیل دستگاه مختصات سه‌بعدی، کمیت‌های زیادی درون‌یابی می‌شوند. چنانچه روش استفاده شده یکنوا نباشد، نتیجه نهایی به‌دست آمده در دستگاه مختصات جدید با خطای زیاد همراه خواهد بود و موجب رفتارهایی اشتباه خواهد شد که به‌طور نمونه می‌توان به برخورد سطوح مختصه با هم اشاره کرد. از دیگر نمونه‌های مهم کاربرد چندجمله‌ای‌های درون‌یاب در هواشناسی، استفاده از آنها در الگوریتم‌های نیمه‌لاگرنژی است. استفاده از چندجمله‌ای‌های درجه سوم معمول، منجر به تولید مقادیر منفی در مناطق با گرادیان شدید متغیر مورد نظر می‌شود. برای جلوگیری از ایجاد مقادیر منفی، لازم است از چندجمله‌ای‌های درون‌یاب یکنوا استفاده شود.

پژوهش‌های زیادی در حوزه درون‌یابی یکنوا با چندجمله‌ای‌های مختلف انجام شده است. اولین پژوهش‌ها مربوط به چیشف در سال ۱۸۷۶ برای ساخت تنظیم‌کننده موتور بخار است (بیتسون و ولکوویچ، ۱۹۸۹). مهم‌ترین و تأثیرگذارترین پژوهش‌ها در حوزه درون‌یابی یکنوا مربوط به فریچ و کارلسون (۱۹۸۰) است که شرایط لازم و کافی را برای یکنوا شدن چندجمله‌ای درون‌یاب استخراج کردند و نشان دادند چگونه با تغییر مقدار مشتق روی داده‌های اولیه، شرایط لازم و کافی برای یکنوا شدن به‌دست می‌آید. فریچ و بوتلند (۱۹۸۴)، روشی ساده‌تر را نسبت به روش فریچ و کارلسون (۱۹۸۰) توسعه دادند. برنامه‌های رایانه‌ای به زبان فرترن به‌نام‌های PCHIP و PCHIM برای روش یاد شده در Netlib (www.netlib.org) - که مجموعه‌ای از نرم‌افزارها، مقالات و پایگاه‌داده‌های ریاضی است - ارائه شده است. در حال حاضر، این دو برنامه فرترن، از گزینه‌های مورد اعتماد برای درون‌یابی یکنوا هستند و در نرم‌افزار متلب (MATLAB) نیز تابعی با عنوان pchip برای درون‌یابی یکنوا براساس برنامه‌های موجود در Netlib، ایجاد شده است.

الگوریتم‌های درون‌یابی یکنوای دیگری نیز براساس روش فریچ و کارلسون (۱۹۸۰) پیشنهاد شده‌اند (کستتینی، ۱۹۸۷، ۱۹۸۸). روش دیگری غیر از تغییر دادن مقادیر مشتق نیز پیشنهاد شده است که از نقاط اضافی بین داده‌ها استفاده می‌کند. در این روش، وجود نقاط اضافی بین داده‌ها سبب تنظیم شیب و خمیدگی منحنی می‌شود (کستتینی، ۱۹۸۸ و پروس، ۱۹۹۳).

تغییر مشتق در داده‌های مورد درون‌یابی سبب می‌شود خمیدگی بین دو نقطه تغییر کند. به‌طور کلی، بی‌نهایت خَم گذرنده از دو نقطه داده مجاور با خاصیت یکنوایی متصور است. از معایب روش فریچ و کارلسون (۱۹۸۰) این است که خمیدگی خَم گذرنده از دو نقطه را بسیار کاهش

$$P(x) = \left[\frac{\Delta_i (\alpha_i + \beta_i - 2)}{h_i^2} \right] (x - x_i)^3 + \left[\frac{\Delta_i (-2\alpha_i - \beta_i + 3)}{h_i} \right] (x - x_i)^2 + \Delta_i \alpha_i (x - x_i) + f_i, \quad (1)$$

که $\Delta_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i}$ ، $h_i = x_{i+1} - x_i$ ، f مقدار تابع و d مشتق آن در نقاط داده است. دلیل اینکه چندجمله‌ای (۱) به نام چندجمله‌ای هرمیت درجه سوم نامیده می‌شود، این است که این چندجمله‌ای را می‌توان براساس توابع پایه هرمیت مکعبی H_0, H_1, H_2 و H_3 به صورت زیر بازنویسی کرد (ولبرگ و آلفی، ۲۰۰۲):

$$P(x) = H_0 \left(\frac{x - x_i}{h_i} \right) f_i + H_1 \left(\frac{x - x_i}{h_i} \right) f_{i+1} + h_i H_2 \left(\frac{x - x_i}{h_i} \right) d_i + h_i H_3 \left(\frac{x - x_i}{h_i} \right) d_{i+1}, \quad (2)$$

که توابع پایه H_0, H_1, H_2 و H_3 به صورت زیر در بازه $0 \leq u \leq 1$ تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} H_0(u) &= 2u^3 - 3u^2 + 1, \\ H_1(u) &= -2u^3 + 3u^2, \\ H_2(u) &= u^3 - 2u^2 + u, \\ H_3(u) &= u^3 - u^2. \end{aligned} \quad (3)$$

برای یکنوا شدن درون‌یابی، لازم است شرط

$$\text{sgn}(d_i) = \text{sgn}(d_{i+1}) = \text{sgn}(\Delta_i), \quad (4)$$

برقرار باشد که در آن sgn نماد تابع علامت است. بنابراین هرگاه شیب (Δ_i) صفر باشد، برای یکنوایی لازم است که:

$$d_i = d_{i+1} = 0. \quad (5)$$

مشتق‌های اول و دوم تابع درون‌یاب درجه سوم هرمیت به صورت زیر تعریف می‌شوند:

می‌دهد. این امر می‌تواند بر دقت چندجمله‌ای درون‌یاب اثر منفی بگذارد. ولبرگ و آلفی (۱۹۹۹ و ۲۰۰۲) با استفاده از مقادیر مجاز مشتق برای یکنوایی و با استفاده از شرط کمینه انرژی خمیدگی، ضرایب چندجمله‌ای درجه سوم را محاسبه کردند و خم هموارتری را به دست آوردند. بنابه تعریف، انرژی خمیدگی، انتگرال خمیدگی منحنی در بازه میان دو نقطه است.

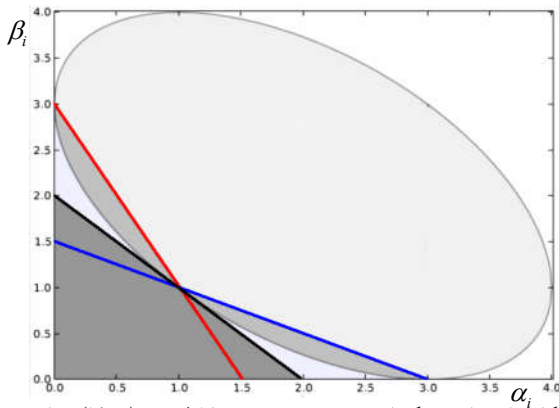
روش‌های درون‌یابی که اخیراً توسعه داده شده‌اند، از توابع گویای درجه سوم با ضرایب مجهول استفاده می‌کنند و مقدار این ضرایب، تعیین‌کننده یکنوایی داده‌های درون‌یابی است. معیارهای زیادی برای تعیین بهینه ضرایب چندجمله‌ای‌های گویا پیشنهاد شده است. وابستگی بیش از حد درون‌یابی به مقدار ضرایب و روش نیمه‌تجربی در محاسبه ضرایب، از معایب این روش‌ها است (سرفراز و همکاران، ۲۰۱۱؛ کریم و کونگ، ۲۰۱۴؛ کریم و وون پنگ، ۲۰۱۶ و ابراهیم و همکاران، ۲۰۱۲).

در بخش دوم مقاله، مبانی نظری یکنوایی در چندجمله‌ای‌های درجه سوم هرمیت معرفی و شرایط یکنوایی بررسی می‌شود. با توجه به شرایط لازم و کافی برای یکنوایی، مشتق‌ها تغییر داده می‌شوند و درون‌یابی یکنوا به دست می‌آید. بخش سوم، اختصاص به کاربرد روش معرفی شده برای درون‌یابی داده‌های ساختگی و نیز داده‌های «سامانه پیش‌بینی جهانی» موسوم به GFS از روی سطوح قائم فشاری به سطوح قائم سیگما و دمای پتانسیلی دارد.

هدف از انجام پژوهش حاضر، توسعه روشی برای درون‌یابی یکنواست با این شرط که حداقل تغییرات روی مشتق‌ها اجرا شود. روش معرفی شده در این پژوهش برای درون‌یابی داده‌های هواشناسی در آینده استفاده خواهد شد.

۲ مبانی نظری

با تعریف $\beta_i = d_{i+1} / \Delta_i$ و $\alpha_i = d_i / \Delta_i$ چندجمله‌ای درون‌یاب هرمیت به صورت زیر تعریف می‌شود (فریچ و کارلسون، ۱۹۸۰):



شکل ۱. نواحی یکنوا در روش فریج و کارلسون (۱۹۸۰) برای چندجمله‌ای هرمیت درجه سوم. $\alpha_i + \beta_i < 3 + \sqrt{\alpha_i \beta_i}$ ، ناحیه محدود به بیضی و محورهای مختصات؛ $2\alpha_i + \beta_i - 3 \leq 0$ ، ناحیه محدود به خط قرمز و محورهای مختصات؛ $\alpha_i + 2\beta_i - 3 \leq 0$ ، ناحیه محدود به خط آبی و محورهای مختصات و $\alpha_i + \beta_i - 2 < 0$ ، ناحیه محدود به خط ضخیم سیاه و محورهای مختصات است (دوپریز و مار، ۲۰۱۳).

چنانچه x^* در خارج از بازه $[x_i, x_{i+1}]$ قرار گیرد، یکنوایی مشتق تضمین می‌شود. برای اینکه x^* از x_i کوچک‌تر شود، لازم است جمله دوم سمت راست رابطه (۸) منفی شود (شکل ۱). این جمله در صورتی منفی است که:

$$2\alpha_i + \beta_i - 3 < 0. \quad (9)$$

باشد؛ زیرا فرض شده که جمله مخرج در حالت سوم مثبت است. برای اینکه x^* بزرگ‌تر از x_{i+1} شود، لازم است شرط زیر برقرار باشد:

$$2\alpha_i + \beta_i - 3 \geq 3(\alpha_i + \beta_i - 2) \Rightarrow \alpha_i + 2\beta_i - 3 \leq 0. \quad (10)$$

اگر x^* در بازه $[x_i, x_{i+1}]$ قرار بگیرد، کمینه دارد و چنانچه با محور x برخورد کند، شرط یکنوایی را از دست خواهد داد؛ بنابراین، برای یکنوایی لازم است $P'(x)$ در بازه $[x_i, x_{i+1}]$ ریشه نداشته باشد. با توجه به اینکه $P'(x)$ یک عبارت درجه دوم است، شرط نداشتن ریشه در بازه $[x_i, x_{i+1}]$ ، این است که دلتای معادله درجه دوم $(B^2 - 4AC)$ کوچک‌تر از صفر شود:

$$P'(x) = \left[\frac{3\Delta_i(\alpha_i + \beta_i - 2)}{h_i^2} \right] (x - x_i)^2 + \left[\frac{2\Delta_i(-2\alpha_i - \beta_i + 3)}{h_i} \right] (x - x_i) + d_i, \quad (6)$$

$$P''(x) = \left[\frac{6\Delta_i(\alpha_i + \beta_i - 2)}{h_i^2} \right] (x - x_i) + \left[\frac{2\Delta_i(-2\alpha_i - \beta_i + 3)}{h_i} \right]. \quad (7)$$

با استفاده از مشتق اول و دوم چندجمله‌ای، حالت‌های زیر نتیجه‌گیری می‌شود:

حالت اول: $\alpha_i + \beta_i - 2 = 0$. در این حالت، $P(x)$ از درجه دوم و $P'(x)$ خطی است. چون مشتق خطی است، بنابراین یکنوا است و چنانچه شرط (۴) برقرار باشد، چندجمله‌ای $P(x)$ نیز یکنوا خواهد شد؛

حالت دوم: $\alpha_i + \beta_i - 2 < 0$. در این حالت، $P'(x)$ یک چندجمله‌ای درجه دوم است که به ازای Δ_i مثبت، کاوی (تقعر) آن به سمت پایین و به ازای Δ_i منفی، کاوی آن به سمت بالا است. به این ترتیب، در بازه $[x_i, x_{i+1}]$ به ازای Δ_i مثبت، $P'(x)$ مثبت و به ازای Δ_i منفی، $P'(x)$ منفی خواهد بود. در نتیجه عدم تغییر علامت $P'(x)$ ، چنانچه شرط (۴) برقرار باشد، چندجمله‌ای (۱) یکنوا خواهد شد (مثلث پُررنگ در شکل ۱)؛

حالت سوم: $\alpha_i + \beta_i - 2 > 0$. در این حالت، $P'(x)$ یک چندجمله‌ای درجه دوم است که به ازای Δ_i مثبت، کاوی آن به سمت بالا و به ازای Δ_i منفی، کاوی آن به سمت پایین است. پس ممکن است $P'(x)$ محور x را قطع کند و تغییر علامت دهد. در این حالت، $P'(x)$ یک نقطه کمینه در بازه $[x_i, x_{i+1}]$ دارد که با مساوی صفر قرار دادن مشتق آن، $P''(x)$ ، مکان هندسی نقطه کمینه چنین به دست می‌آید:

$$x^* = x_i + \frac{h_i}{3} \left[\frac{2\alpha_i + \beta_i - 3}{\alpha_i + \beta_i - 2} \right], \quad (8)$$

دو شرط فوق سبب می‌شود مشتقات تغییر یافته روی

خط $\beta_i = 0$ (روی محور مختصات α_i) قرار گیرند.

(ب) اگر $\alpha_i < 0$ و $\beta_i < 0$ باشد، در این حالت، هر دو

مقدار مشتق را صفر در نظر می‌گیریم: $d_i = d_{i+1} = 0$.

(ج) اگر $\alpha_i < 0$ و $\beta_i > 0$ باشد، مانند حالت الف

به صورت زیر عمل می‌کنیم:

ج-۱) چنانچه $\beta_i > 3$ باشد، $d_{i+1} = 3\Delta$ و $d_i = 0$

ج-۲) چنانچه $\beta_i < 3$ باشد، $d_{i+1} = \beta_i \Delta$ و $d_i = 0$.

(د) اگر $\alpha_i > 0$ و $\beta_i > 0$ باشد، این حالت می‌تواند شامل

ناحیه M و خارج از آن باشد. با استفاده از شرط زیر

می‌توان تشخیص داد آیا نقطه (α_i, β_i) در ناحیه M هست

یا نه (ولبرگ و آلفی، ۲۰۰۲):

$$\alpha_i^2 + \alpha_i(\beta_i - 6) + (\beta_i - 3)^2 = 0$$

$$(\alpha_i + \beta_i)^2 - 6(\alpha_i + \beta_i) + 9 - \alpha_i\beta_i = 0 \quad .$$

$$[(\alpha_i + \beta_i) - 3]^2 = \alpha_i\beta_i \quad (13)$$

$$\alpha_i + \beta_i = 3 + \sqrt{\alpha_i\beta_i}$$

در نتیجه، اگر $\alpha_i + \beta_i < 3 + \sqrt{\alpha_i\beta_i}$ شود، نقطه در

ناحیه M است و چنانچه $\alpha_i + \beta_i > 3 + \sqrt{\alpha_i\beta_i}$ شود،

نقطه خارج از ناحیه M قرار دارد. در این پژوهش،

در صورتی که نقطه خارج از ناحیه M باشد، از خط واصل

بین نقطه (α_i, β_i) و مبدأ برای آوردن نقطه روی ناحیه

بیضی به صورت زیر استفاده می‌شود:

$$h = \frac{\beta_i}{\alpha_i} \Rightarrow \beta_i = h\alpha_i \quad (14)$$

که رابطه فوق، معادله خط واصل نقطه α_i و β_i و مبدأ

مختصات است. حال رابطه (۱۳) را در معادله بیضی ناحیه

M قرار می‌دهیم:

$$\alpha_i^2 + \alpha_i(h\alpha_i - 6) + (h\alpha_i - 3)^2 = 0 \quad (15)$$

$$(1+h+h^2)\alpha_i^2 - (6+6h)\alpha_i + 9 = 0$$

با حل معادله درجه دوم بالا، دو مقدار برای α_i به دست می‌آید:

$$B^2 - 4AC < 0 \Rightarrow \quad (11)$$

$$\alpha_i^2 + \alpha_i(\beta_i - 6) + (\beta_i - 3)^2 < 0.$$

معادله بالا، معادله یک بیضی است که در نقاط $\alpha_i = 3$

و $\beta_i = 3$ با محورهای مختصات α و β برخورد می‌کند. با

توجه به مطالب فوق، شرط یکنوایی چندجمله‌ای درجه سوم

هرمیت به صورت زیر به دست می‌آید:

الف) اگر $\alpha_i + \beta_i - 2 \leq 0$ شود، تابع $P_i(x)$ در

صورتی یکنوا است که شرط (۴) برقرار شود؛

ب) اگر $\alpha_i + \beta_i - 2 > 0$ شود، تابع $P_i(x)$ در صورتی

یکنوا است که شرط (۴) و یکی از شرط‌های زیر برقرار شود:

$$2\alpha_i + \beta_i - 3 \leq 0,$$

$$\alpha_i + 2\beta_i - 3 \leq 0,$$

$$\alpha_i^2 + \alpha_i(\beta_i - 6) + (\beta_i - 3)^2 < 0. \quad (12)$$

ناحیه یکنوایی (M) با توجه به شرط (ب)، بیضی نشان

داده شده در شکل (۱) است.

برای یکنوا کردن چندجمله‌ای $P_i(x)$ ، لازم است

مشق‌ها به گونه‌ای تغییر کنند که α_i و β_i در ناحیه یکنوایی

(M) قرار بگیرند. شایان ذکر است که ناحیه $\alpha_i < 0$ و $\beta_i < 0$

شرط یکنوایی را برآورده نمی‌کند؛ زیرا ناقض مهم‌ترین

شرط برای یکنوایی تابع $P_i(x)$ ، یعنی شرط (۴) است.

روش‌های مختلفی برای تغییر مشتق و قرارداد α_i و β_i

در ناحیه یکنوایی وجود دارد که در اینجا روش رسیدن به

یکنوایی با انجام دادن کمترین تغییر روی مقادیر مشتق،

معرفی می‌شود. انتظار می‌رود که این کار علاوه بر

یکنوایی، منجر به دستیابی به دقت مطلوب‌تری نسبت به

سایر روش‌ها شود:

الف) اگر $\alpha_i > 0$ و $\beta_i > 0$ باشد، این حالت ناقض شرط

(۴) است. بنابراین نزدیک‌ترین نقطه از ناحیه M به نقطه

(α_i, β_i) به صورت زیر انتخاب می‌شود:

الف-۱) چنانچه $\alpha_i > 3$ باشد، $d_i = 3\Delta$ و $d_{i+1} = 0$ ؛

الف-۲) چنانچه $\alpha_i < 3$ باشد، $d_i = \alpha_i \Delta$ و $d_{i+1} = 0$.

شرایط الف، ب و ج را سایر پژوهشگران استفاده کرده‌اند (رجوع کنید به مقدمه) ولی شرط (د) در این مقاله معرفی و استفاده شده است. این شرط موجب می‌شود خمیدگی تابع درون‌یاب در بیشینه مقدارش برای یکنوایی قرار گیرد. با استفاده از این روش پیشنهادی، می‌توان کمترین تغییر در مقادیر مشتق را اعمال کرد به گونه‌ای که از دقت درون‌یابی نیز کاسته نشود. در بخش بعدی از آزمایش‌های عددی استاندارد برای آزمایش روش پیشنهادی استفاده خواهد شد.

$$\alpha_i = \frac{3(1+h \pm \sqrt{h})}{1+h+h^2}, \quad (16)$$

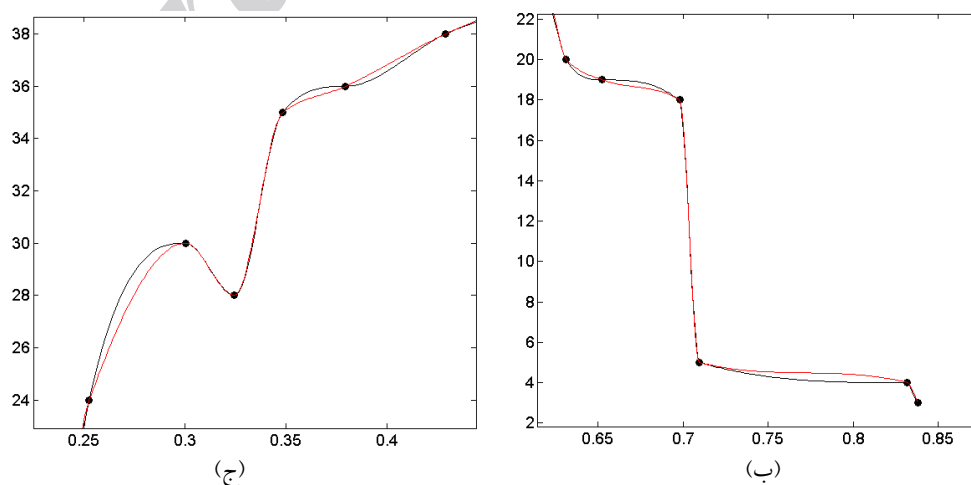
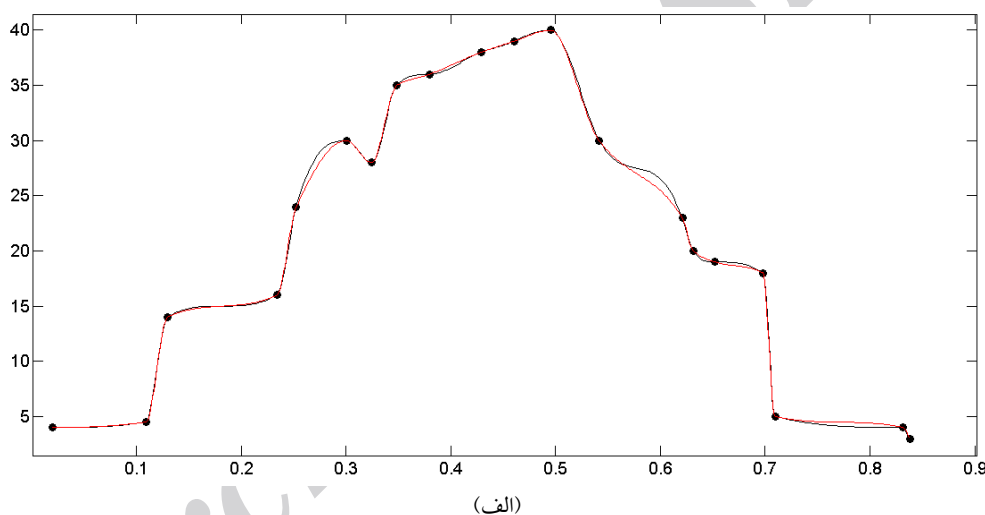
برای اینکه میزان تغییرات در مشتق به کمترین مقدار برسد، ریشه بزرگ‌تر را انتخاب می‌کنیم تا در مرز خارجی ناحیه M قرار بگیرد. بنابراین شرط (د) به‌طور خلاصه عبارتست از:

$$\alpha_i + \beta_i < 3 + \sqrt{\alpha_i \beta_i} \quad \text{و} \quad \beta_i > 0, \quad \alpha_i > 0 \quad (د)$$

باشد، یکنوایی در صورتی ایجاد می‌شود که

$$\alpha_i = \max\left(\frac{3(1+h+\sqrt{h})}{1+h+h^2}, \frac{3(1+h-\sqrt{h})}{1+h+h^2}\right) \quad (17)$$

$$\beta_i = h\alpha_i,$$



شکل ۲. درون‌یابی داده‌های آزمایش اول با روش شرح داده شده در این مقاله (خط سیاه) و روش فریچ و کارلسون (۱۹۸۰) (خط قرمز).

۳ بحث و نتایج

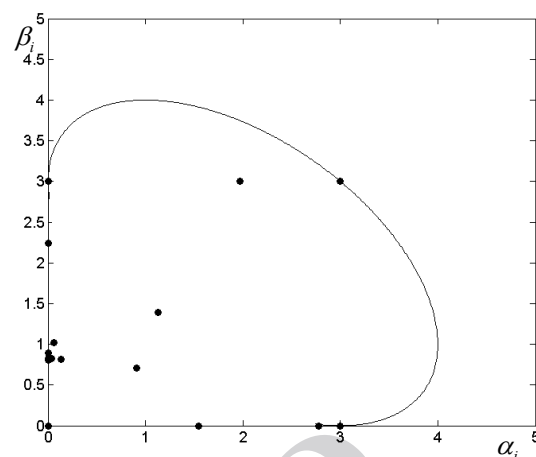
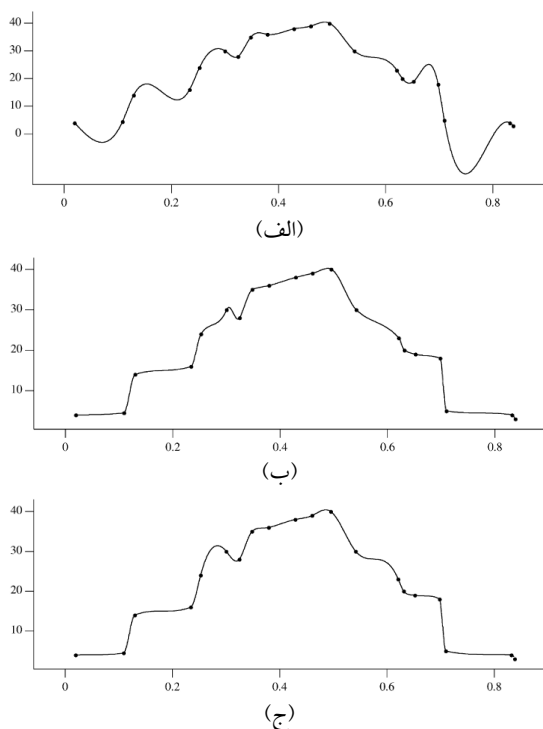
۳-۱ ارزیابی روش درون‌یابی

در بخش قبل، درباره مبانی نظری روش‌های یکنوا بحث شد و روشی با حداقل تغییرات روی مقادیر مشتق برای یکنواسازی درونیابی پیشنهاد شد. براساس روش پیشنهادی، مشتق‌هایی که خارج از ناحیه یکنوا قرار دارند، از نزدیک‌ترین مسیر، روی مرزهای ناحیه یکنوا قرار می‌گیرند. قرار گرفتن مشتق‌ها روی مرزهای ناحیه یکنوا، سبب می‌شود که تغییر مقادیر مشتق، به کمترین مقدار برسد. برای بررسی کارکرد روش پیشنهادی، در ابتدا از نتایج اجرای آن روی داده‌های پیشنهادی ولبرگ و آلفی (۲۰۰۲) استفاده می‌شود. مختصات این داده‌ها به صورت زیر است و از این پس، این داده‌ها را داده‌های آزمایش اول می‌نامیم:

x	y	x	y	x	y
0.0196	4	0.3484	35	0.6313	20
0.1090	4.5	0.3795	36	0.6522	19
0.1297	14	0.4289	38	0.6979	18
0.2340	16	0.4603	39	0.7095	5
0.2526	24	0.4952	40	0.8318	4
0.3003	30	0.5417	30	0.8381	3
0.3246	28	0.6210	23		

در شکل ۲، طرحواره‌های پیشنهادی (خط سیاه) و PCHIP (خط قرمز) - طرحواره درون‌یاب فریج و کارلسون (۱۹۸۰) که تبدیل به استاندارد برای درون‌یابی شده است - روی داده‌های آزمایش اول اجرا شده است. این شکل نشان می‌دهد این داده‌ها تغییرات شدیدی دارند اما درون‌یابی اجرا شده با طرحواره پیشنهادی آنها، خاصیت یکنوایی دارد و نوسان اضافی بین داده‌ها ایجاد نکرده است. همین عملکرد برای برنامه PCHIP نیز صادق است. تفاوت بین دو طرحواره در شکل‌های ۲-ب و ۲-ج نشان داده شده است. در این شکل‌ها، دیده می‌شود که درون‌یابی با روش طرحواره پیشنهادی، علاوه بر حفظ یکنوایی، خمیدگی بیشتری را نیز در بازه بین داده‌ها سبب شده است.

وجود خمیدگی بیشتر می‌تواند به خطای کوچک‌تر برای درون‌یابی منجر شود (ارتباط بین خمیدگی و خطا در بخش تحلیل خطا توضیح داده می‌شود). در شکل ۴-ج که درون‌یابی با روش ولبرگ و آلفی (۲۰۰۲) اجرا شده است، این حالت دیده می‌شود. ولبرگ و آلفی (۲۰۰۲) با استفاده از روش اسپلاین یکنوا، مقادیر α_i و β_i را براساس کمینه‌سازی خمیدگی بین دو نقطه محاسبه کردند و بنابراین در بعضی از بازه‌ها خمیدگی بیشتری حفظ شده است. این حالت را می‌توان از مقایسه عملکرد طرحواره بوتلند و فریج (۱۹۸۴) (شکل ۴-ب) و طرحواره ولبرگ و آلفی (۲۰۰۲) (شکل ۴-ج) دریافت. مقایسه شکل‌های ۴-ب و ۴-ج نشان می‌دهد برای یکنوا شدن درون‌یابی، خمی که کمینه خمیدگی دارد (شکل ۴-ج)، خمیدگی بیشتری نسبت به شکل ۴-ب دارد که در آن، مشتق‌ها داخل ناحیه یکنوا قرار گرفته‌اند. مقادیر α_i و β_i به کار رفته برای شکل‌های ۴-ب و ۴-ج در شکل‌های ۴-د و ۴-ه نشان داده شده است و می‌تواند با مقادیر α_i و β_i حاصل از طرحواره پیشنهادی در این مقاله (شکل ۳) مقایسه شوند. حفظ کمینه خمیدگی منجر به بخش مقادیر α_i و β_i درون ناحیه یکنوا شده است و حتی تعدادی از مقادیر α_i و β_i در نزدیکی مرزهای ناحیه یکنوا قرار گرفته‌اند، درحالی‌که مقادیر α_i و β_i در روش بوتلند و فریج (۱۹۸۴) در قسمت درونی ناحیه یکنوا قرار گرفته‌اند. محدود کردن تمامی مقادیر مشتق و قرار دادن آنها درون ناحیه یکنوا، موجب از دست رفتن بخش زیادی از خمیدگی در طرحواره بوتلند و فریج (۱۹۸۴) و PCHIP شده است. مقادیر α_i و β_i برای روش پیشنهادی در این مقاله، در شکل ۳ نشان داده شده است. مقادیر α_i و β_i در این پژوهش، مانند مقادیر ولبرگ و آلفی (۲۰۰۲) (شکل ۴-د) در نواحی نزدیک به مرزهای ناحیه یکنوا متمرکز شده است. در این حالت، مشتق‌ها به گونه‌ای محدود شده‌اند که اجازه وجود اندکی خمیدگی را در بازه درون‌یابی شده می‌دهد.



شکل ۳. مقادیر α_i و β_i در شکل ۲ برای روش پیشنهادی در این مقاله.

آزمایش دوم روی داده‌های زیر اجرا شد:

x	y	x	y	x	y
0	0	4.5	13	9	19
1	1	6	14	10	23
3	6	7	15.5	11	24.1
4	8	7.3	18		

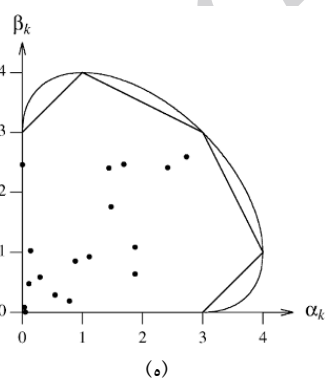
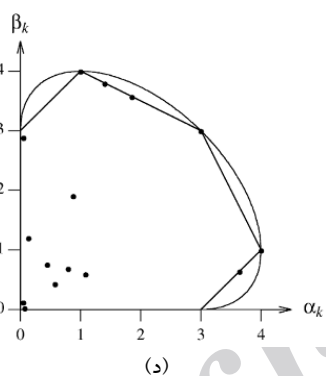
نتایج، کمابیش مشابه حالت قبل است و باز هم شاهد خمیدگی بیشتر برای نتایج روش پیشنهادی این مقاله (خط سیاه در شکل ۵-الف) نسبت به روش PCHIP (خط قرمز در شکل ۵-الف) هستیم. مقادیر α_i و β_i نیز در قسمت‌های نزدیک به مرز ناحیه یکنوا قرار گرفته‌اند که تا حدودی شبیه روش ولبرگ و آلفی (۲۰۰۲) است.

در آزمایش سوم، ارزیابی به کمک داده‌های زیر اجرا شد:

x	y	x	y
0	10	9	10.5
2	10	11	15
3	10	12	50
5	10	14	60
8	10	15	85

و در آزمایش چهارم از داده‌های زیر استفاده شد:

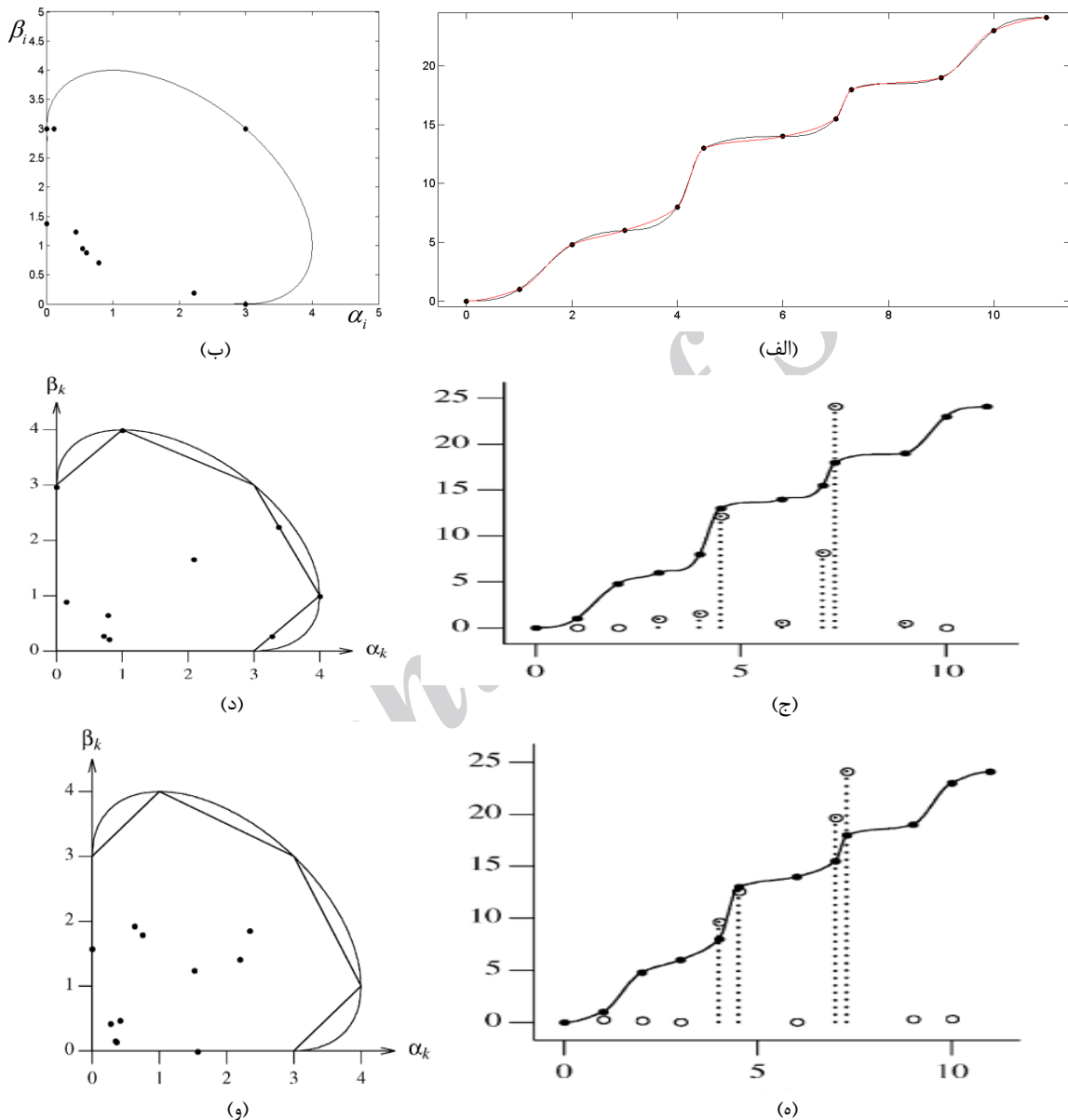
x	y	x	y	x	y
7.99	0	8.17	0.1691	12	0.9986
8.09	2.7642E-5	9.2	0.4694	15	0.999919
8.19	4.3749E-5	10	0.9437	20	0.999994



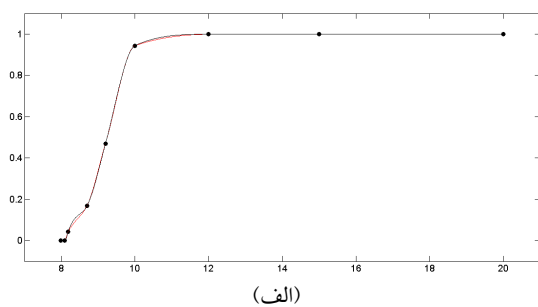
شکل ۴. درون‌یابی داده‌های آزمایش اول. (الف) روش اسپلاین، (ب) روش فریج و بارتون (۱۹۸۴)، (ج) روش اسپلاین یکنوا (ولبرگ و آلفی، ۲۰۰۲). (د) مقادیر α_i و β_i برای روش اسپلاین یکنوا (ولبرگ و آلفی، ۲۰۰۲)، (ه) مقادیر α_i و β_i برای روش فریج و بوتلند (۱۹۸۴).

روش معرفی شده در این مقاله، خمیدگی در بازه درون‌یابی شده به میزان بیشتری حفظ شده است.

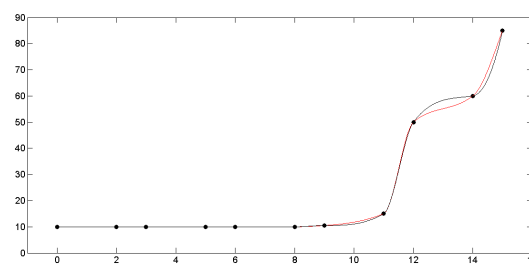
نتایج این آزمایش‌ها در شکل‌های ۶-الف و ۷-الف نشان داده شده است. مقادیر β_i و α_i نیز در شکل‌های ۶-ب و ۷-ب رسم شده است. نتیجه، باز هم مشابه قبل است: در



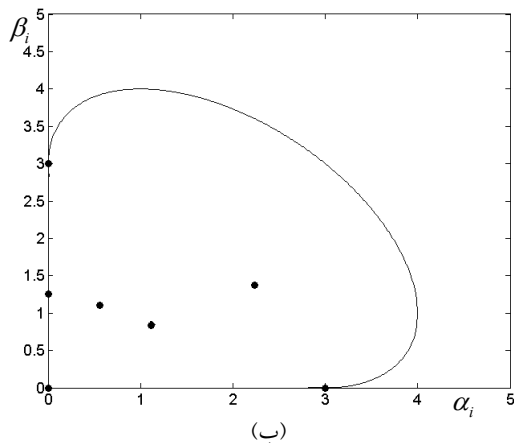
شکل ۵. درون‌یابی داده‌های آزمایش دوم. (الف) روش پیشنهادی این مقاله (خط سیاه) و روش فریچ و کارلسون (خط قرمز)، (ب) مقادیر β_i و α_i برای دو روش شکل الف، (ج) روش ولبرگ و آلفی (۲۰۰۲)، (د) مقادیر β_i و α_i برای روش ولبرگ و آلفی (۲۰۰۲)، (ه) روش فریچ و بوتلند (۱۹۸۴)، (و) مقادیر β_i و α_i برای روش فریچ و بوتلند (۱۹۸۴).



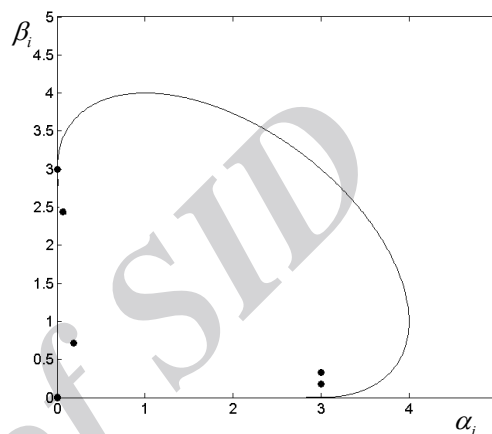
(الف)



(الف)



(ب)



(ب)

شکل ۷. مانند شکل ۶، برای داده‌های آزمایش چهارم.

شکل ۶. درون‌یابی داده‌های آزمایش سوم. (الف) روش فریچ و کارلسون (۱۹۸۰) (خط قرمز) و روش پیشنهادی در این مقاله (خط سیاه). (ب) مقادیر α_i و β_i برای روش پیشنهادی.

در آزمایش چهارم، حفظ بیشینه خمیدگی نتیجه مطلوبی ایجاد کرده است به طوری که در هیچ یک از نقاط، یکنوایی ضعیف دیده نمی‌شود و مقادیر α_i و β_i نیز بیشتر در مرکز ناحیه یکنوایی تجمع یافته‌اند. میزان یکنوایی با حفظ بیشترین خمیدگی به نوع داده‌ها نیز بستگی دارد؛ چنانکه برای داده‌های آزمایش‌های اول و چهارم، نتیجه مطلوب است ولی برای داده‌های آزمایش‌های دوم و سوم، در بعضی از نقاط یکنوایی ضعیف دیده می‌شود. بنابراین خمیدگی بین نقاط نباید در بیشترین مقدار ممکن حفظ‌کننده یکنوایی قرار گیرد.

در روش پیشنهادی، کمترین تغییرات روی مشتق اعمال می‌شود؛ بنابراین بیشترین خمیدگی بین نقاط حفظ شده است به طوری که اندکی خمیدگی بیشتر، به نایکنوایی درون‌یابی منجر می‌شود. برای تنظیم میزان خمیدگی بین

در نقطه $x=14$ ، نتیجه آزمایش سوم اختلاف فاحشی با نتیجه روش PCHIP دارد که دلیل آن، حفظ بیشینه خمیدگی بین نقاط است. هرچند در نقطه $x=14$ یکنوایی وجود دارد، تغییرات افزایشی مقادیر y حول این نقطه کوچک است. این عامل نشان می‌دهد که مشتق در نقطه $x=12$ باید اندکی کمتر شود و در نقطه $x=14$ اندکی افزایش یابد تا حاشیه امنیت برای یکنوایی برقرار شود. بنابراین می‌توان گفت حفظ بیشینه خمیدگی ممکن است سبب افزایش دقت شود اما می‌تواند یکنوایی ضعیفی را ایجاد کند و به افزایش مقادیر کوچک تابع در شیب‌های افزایشی منجر شود. مقادیر α_i و β_i در آزمایش سوم، در نزدیکی مرزهای ناحیه یکنوایی قرار گرفته است که نشان‌دهنده ضعف حفظ بیشترین خمیدگی در این آزمایش است.

روش PCHIP منطبق شود. با این کار می‌توان دقت روش درون‌یابی پیشنهادی را با روش PCHIP مقایسه کرد و خمیدگی‌ای را انتخاب کرد که به نتایج بهتری بیانجامد. شرط‌های الف، ب، ج، د بیشترین خمیدگی ممکن برای وجود یکنوایی بین داده‌ها را حفظ می‌کنند ولی شرط‌های ه، و، ز خمیدگی را در بین نقاط درون‌یابی کاهش می‌دهند. در این پژوهش، سه حالت بررسی شده است:

- ۱) شرط‌های الف، ب، ج و د برای بیشینه خمیدگی بین نقاط درون‌یابی شده؛
- ۲) شرط‌های ه، و، ز برای کمینه خمیدگی بین نقاط درون‌یابی شده؛
- ۳) حالت میانگین بین شرایط فوق.

برای ارزیابی میزان دقت طرحواره پیشنهادی در این مقاله، لازم است تحلیل خطا انجام شود. برای تحلیل خطا از تابع $y = \exp(-x^2)$ (هایمن، ۱۹۸۳ و هیونه، ۱۹۹۳) استفاده شده است که نقاط اولیه برای درون‌یابی (n) در فواصل منظم $\Delta x = 3.6/(n-1)$ در بازه $x \in [-1/\sqrt{7}, 1/\sqrt{9}]$ قرار گرفته‌اند. بیشینه تابع $y = \exp(-x^2)$ یک است و در نقطه $x=0$ قرار دارد. دقت شود که بازه استفاده شده برای تحلیل خطا، به صورت نامتقارن حول نقطه بیشینه انتخاب شده است. تحلیل خطا براساس این تابع، وابستگی زیادی به تعداد نقاط اولیه برای درون‌یابی دارد. با توجه به اینکه تابع مذکور، هموار است و گرادیان شدید ندارد، هر قدر تعداد نقاط اولیه برای درون‌یابی کمتر باشد، نوسان‌های اضافی را در تابع درون‌یاب بهتر می‌توان دید و ارزیابی کرد. برای مثال، تابع $y = \exp(-x^2)$ با $n=5$ نقطه اولیه در شکل ۸- الف نشان داده شده است. هرچه تعداد نقاط اولیه برای درون‌یابی افزایش یابد، تابع حاصل از درون‌یابی، به صورت ذاتی، یکنوا است و در نتیجه، اجرای خواص یکنوایی الف تا ز، موجب افزایش خطا می‌شود. برای مثال، در شکل ۸- ب، تعداد ۹ نقطه اولیه برای

داده‌های اولیه که برای درون‌یابی استفاده می‌شوند، می‌توان از روش‌های زیر استفاده کرد:

ه) کاهش افت‌وخیز مشتق. برای هموارسازی خم درون‌یابی شده و کاهش خمیدگی بین نقاط، باید افت‌وخیزهای مشتق را در نقاط بیشینه و کمینه تابع مشتق کاهش داد. این عمل را می‌توان با روش‌های متنوعی انجام داد ولی در این پژوهش، از میانگین‌گیری وزنی با نقطه قبلی و بعدی در نقاط بیشینه و کمینه استفاده شده است. وزن مشتق در نقاط بیشینه و کمینه را می‌توان به طور دلخواه در میانگین‌گیری تنظیم کرد. ضرایب کوچک‌تر برای مشتق در نقاط بیشینه و کمینه به معنای هموارسازی بیشتر و کاهش خمیدگی بین نقاط است؛

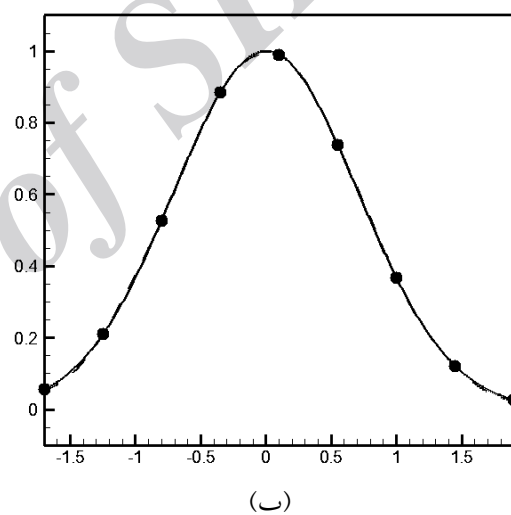
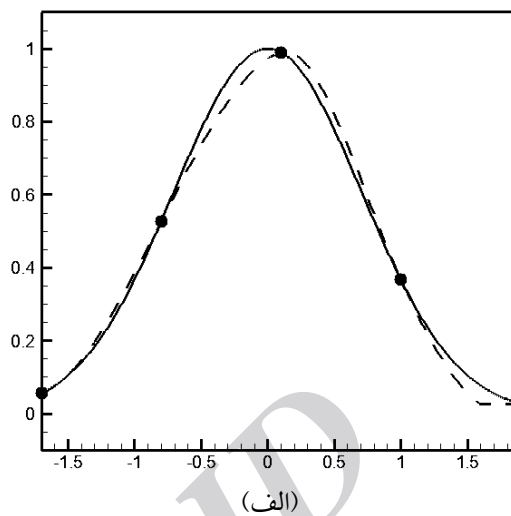
و) صفر کردن مشتق برای نقاط با $\Delta_{i-1} \Delta_i < 0$. روش معرفی شده برای یکنوایی در این مقاله، به صورت خودکار این شرط را برآورده می‌کند اما ممکن است در بعضی از نقاط که مقدار مشتق بسیار کوچک ولی مخالف صفر است، این شرط برآورده نشود و مقدار بسیار کوچک مشتق، منجر به خمیدگی اضافی بین نقاط شود؛

ز) قرار دادن مشتق غیرصفر برای نقاط با $\Delta_{i-1} \Delta_i > 0$. چنانچه $\Delta_{i-1} \Delta_i > 0$ شود، به معنای آن است که مشتق در نقطه i با مشتق در نقطه $i+1$ و $i-1$ هم‌علامت است. حال اگر در چنین نقطه‌ای مشتق صفر باشد، خمیدگی کمتر در نقطه i و خمیدگی بیشتر در نقاط $i-1$ و $i+1$ وجود خواهد داشت. پس می‌توان از میانگین‌گیری مشتق در نقاط $i+1$ و $i-1$ برای تقریب مشتق در نقطه i استفاده کرد.

استفاده از این سه روش منجر به کاهش دلخواه خمیدگی بین نقاط بازه درون‌یابی می‌شود. حتی می‌توان با سخت‌تر کردن شرایط فوق، منحنی درون‌یابی شده را به خط واصل بین نقاط نزدیک کرد. در این مقاله، با استفاده از سه روش فوق، خمیدگی بین نقاط به گونه‌ای تنظیم شد که خمیدگی درون‌یاب بر خم حاصل از به کارگیری

می‌شود و اگر تعداد نقطه‌ها برای درونیابی زیاد باشد، مثلاً بیشتر از ۹ نقطه باشد، روش‌های یکنوا به دلیل تغییر دادن مشتق، خطای بیشتری را نسبت به روش‌های معمول مانند اسپلاین ایجاد می‌کنند. بنابراین این آزمایش می‌تواند عملکرد روش پیشنهادی را برای توابع با گرادین شدید و هموار، ارزیابی کند.

در جدول ۱، مقدار ریشه میانگین مربع خطا (Root Mean Square Error) برای درونیابی با $n=5, 9, 17, 33$ (هایمن، ۱۹۸۳) و $n=8, 16, 32, 64$ (هیونه، ۱۹۹۳) نشان داده شده است. تحلیل خطای جدول ۱ نشان می‌دهد برای $n=5$ که نوسان اضافی در درونیابی اتفاق می‌افتد، مطابق انتظار، با در نظر گرفتن بیشترین خمیدگی (شرط‌های الف تا د)، میزان خطا نسبت به شرایط کمترین خمیدگی، $12/5$ درصد و نسبت به طرحواره PCHIP، 50 درصد کمتر است. پس با این آزمایش می‌توان نتیجه گرفت که با حداکثر خمیدگی مجاز برای یکنوایی، می‌توان خطای درونیابی را کاهش داد. مقایسه خطا برای ۵ نقطه با نتایج ارائه شده در کار هایمن (۱۹۸۳) و هیونه (۱۹۹۳) نشان می‌دهد که عملکرد طرحواره پیشنهادی در این مقاله، قابل مقایسه با روش‌های پرهزینه محاسباتی (چندجمله‌ای‌های مرتبه پنج و بالاتر با محدودکننده‌های مرتبه چهارم) و در بسیاری از موارد، بهتر از آنهاست. برای بیشتر از ۵ نقطه، نوسانی در درونیابی اتفاق نمی‌افتد؛ بنابراین طرحواره PCHIP، که همچنان تغییراتی را در مشتق ایجاد می‌کند، خطای بیشتری نسبت به طرحواره پیشنهادی دارد. برای مثال، با ۶۴ نقطه اولیه برای درونیابی، میزان خطای طرحواره PCHIP دو مرتبه بزرگ‌تر از طرحواره پیشنهادی در این مقاله است. در ضمن، با افزایش تعداد نقاط اولیه برای درونیابی، به دلیل حذف ذاتی نوسان اضافی، تغییر در میزان خمیدگی منحنی درونیاب تأثیری بر کاهش خطای درونیابی ندارد.



شکل ۸. نمودار تابع $y = \exp(-x^2)$ (خط سیاه)، خط حاصل از درونیابی با چندجمله‌ای هرمیت (خط چین سیاه) و نقاط اولیه برای درونیابی با (الف) پنج نقطه، (ب) نه نقطه.

درونیابی نشان داده شده است. با توجه به کاهش بازه درونیابی، یکنوایی ذاتی اتفاق افتاده است و درونیابی با چندجمله‌ای هرمیت بدون محدودکننده مشتق نیز خواص یکنوایی دارد. بنابراین خاصیت آزمایش مذکور این است که در تعداد نقاط کم مانند ۵ نقطه، خواص یکنوایی غالب است و درونیابی با روش‌های یکنوا منجر به کاهش خطا

$$\left. \begin{aligned} g(\sigma) \rightarrow 0, \\ f(\sigma) \rightarrow 0, \quad g(\sigma) \rightarrow 1, \\ g(\sigma) > 0. \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \sigma \rightarrow \sigma_s \\ \sigma \rightarrow \sigma_T \\ \frac{\partial g}{\partial \sigma} > 0 \end{aligned} \quad (19)$$

در روابط فوق، σ_s و σ_T مقادیر σ در سطح زمین و بام مدل هستند به طوری که:

$$\xi = \begin{cases} \text{const}, & \sigma = \sigma_s \\ \theta, & \sigma = \sigma_T \end{cases} \quad (20)$$

تابع g با شرایط مورد نظر، از پیش تعیین f نیز برای تضمین یکنوایی ξ ($\partial \eta / \partial \sigma > 0$)، محاسبه می‌شود. برای محاسبه f دو کمیت θ_{\min} و $(\partial \theta / \partial \sigma)_{\min}$ به‌عنوان دو کران پایین برای دمای پتانسیلی و پایداری ایستایی، معرفی و در معادله زیر جایگذاری می‌شوند:

$$\frac{df}{d\sigma} + \frac{dg}{d\sigma} \theta_{\min} + g \left(\frac{\partial \theta}{\partial \sigma} \right)_{\min} = 0. \quad (21)$$

پس از محاسبه f از معادله فوق، مختصه قائم ξ به‌دست می‌آید. ملاحظه می‌شود که با انتخاب تابع g و شکل $\sigma = \sigma(p, p_s)$ ، نسخه‌های جدیدی از این مختصه قائم تعمیم یافته به‌دست می‌آید.

برای تعریف مختصه قائم ترکیبی $\theta - \sigma$ ، ابتدا برای حالت میانگین جو - که حاصل میانگین کروی روی سطوح فشاری و میانگین زمانی است - از رابطه $p(\eta) = a(\eta)p_0 + b(\eta)p_s$ استفاده می‌شود. در اینجا $\eta = p/p_s$ ، فشار مرجع برابر با 10^5 پاسکال و p_s ، فشار سطح زمین برای حالت میانگین است. جزئیات بیشتر و ضرایب a و b را می‌توان در پیوست (ب) یابلونوسکی و ویلیامسون (۲۰۰۶) یافت. برای تعیین حالت میانگین هم از همین مرجع استفاده شده است. با در دست داشتن p و θ روی سطوح η می‌توان با استفاده از رابطه (۱۸)، مقدار ξ را

جدول ۱. ریشه میانگین مربع خطا برای تابع $y = \exp(-x^2)$.

تعداد نقاط اولیه برای درون‌یابی	بیشینه خمیدگی شرایط الف، ب، ج، د، ه، و، ز	کمینه خمیدگی شرایط الف، ب، ج، د، ه، و، ز	طرحواره PCHIP
$n = 5$	2.69×10^{-2}	3.08×10^{-2}	4.24×10^{-2}
$n = 8$	1.36×10^{-2}	1.36×10^{-2}	1.37×10^{-2}
$n = 9$	3.92×10^{-3}	3.92×10^{-3}	8.15×10^{-3}
$n = 16$	1.78×10^{-4}	1.78×10^{-4}	1.36×10^{-3}
$n = 17$	1.31×10^{-4}	1.31×10^{-4}	2.42×10^{-3}
$n = 32$	7.20×10^{-6}	7.20×10^{-6}	3.92×10^{-4}
$n = 33$	6.30×10^{-6}	6.30×10^{-6}	2.20×10^{-4}
$n = 64$	3.94×10^{-7}	3.94×10^{-7}	5.31×10^{-5}

۲-۳ کاربرد درون‌یابی یکنوا در تبدیل مختصه قائم داده‌های هواشناسی

از کاربردهای مهم درون‌یابی یکنوا، تبدیل مختصه قائم برای داده‌های هواشناسی است. داده‌های هواشناسی عموماً روی سطوح فشاری تعریف می‌شوند ولی برای کاربردهای خاص، لازم است داده‌های هواشناسی روی سطوح سیگما، سطوح ترکیبی سیگما و فشار، سطوح دمای پتانسیلی و غیره محاسبه شوند. محب‌الحجه و همکاران (۲۰۱۶)، معادلات بسیط را در نمایش (شبه)تاوایی پتانسیلی، ضخامت فشاری و واگرایی با استفاده از مختصه قائم ترکیبی دمای پتانسیلی و سیگما یا $\sigma - \theta$ - در آزمون یابلونوسکی و ویلیامسون (۲۰۰۶)، برای چرخه زندگی یک ناپایداری کژفشار حل کردند. برای توسعه مدل، لازم است داده‌های واقعی روی این سطوح ترکیبی، درون‌یابی و مدل با آنها اجرا شود. مختصه قائم ترکیبی $\theta - \sigma$ (کونور و آرکاوا، ۱۹۹۷) به‌صورت زیر است:

$$\eta \equiv F(\theta, \sigma) = f(\sigma) + g(\sigma)\theta. \quad (18)$$

که $\sigma = \sigma(p, p_s)$ ، تابع دلخواه یکنوا و افزایشی نسبت به ارتفاع است. f و g دو تابع دلخواه هستند که شرایط لازم را برآورده می‌کنند. این شرایط به‌صورت زیر خلاصه می‌شود:

در این پژوهش، علاوه بر تبدیل داده‌ها در راستای قائم، به دلیل جابه‌جایی شبکه افقی به کار رفته به اندازه نیم فاصله شبکه‌ای نسبت به قطب و نیز استفاده از تفکیک دو برابر در راستای نصف‌النهار نسبت به راستای مداری (محب‌الحجه و دریچل، ۲۰۰۷)، لازم بود که در راستای افقی نیز روی شبکه ۲۵۶ در ۲۵۶ نقطه در راستای مداری و نصف‌النهار، درون‌یابی انجام شود. بنابراین در ابتدا، میزان دقت در انتقال داده روی شبکه افقی ارزیابی شده است. برای این کار، درباره نمونه داده‌های ساعت ۰۰ روز ۱۴ فوریه ۲۰۱۷، فشار تراز دریا یک بار از شبکه ۳۶۰ نقطه در راستای مداری و ۱۸۱ نقطه در راستای نصف‌النهار به شبکه ۲۵۶ نقطه مداری و ۲۵۶ نقطه نصف‌النهار تبدیل شد سپس دوباره به شبکه ۳۶۰ نقطه در راستای مداری و ۱۸۱ نقطه در راستای نصف‌النهار برگردانده و میزان خطا با کسر میدان نهایی به دست آمده از میدان اولیه، محاسبه شده است.

با استفاده از PCHIP، میزان خطا $1/63$ پاسکال به دست آمد که با توجه به مقدار میانگین 10^5 پاسکال، خطای نسبی در حدود 0.00163% به دست آمده است. با استفاده از روش پیشنهادی در این مقاله، با بیشترین کاهش در خمیدگی، خطای نسبی 0.00149% به دست می‌آید که حکایت از حدود $1/85$ کاهش خطا دارد. با افزایش اندک خمیدگی - افزایش وزن نقطه i در میانگین‌گیری مشتق با نقطه قبل و بعد - خطای محاسبه شده تا $1/45$ پاسکال هم کاهش می‌یابد. شایان ذکر است که در اینجا مشتق مرتبه سوم محاسبه شده است و چنانچه مشتق از مرتبه چهارم در نظر گرفته شود، خطا به ترتیب $1/46$ و $1/42$ خواهد شد. پس می‌بینیم با تنظیم خمیدگی و افزایش مرتبه مشتق، می‌توان خطای درون‌یابی را تا حدود ۱۵ درصد کاهش داد.

روش بعدی در آزمون روش پیشنهاد شده، انتقال داده‌های GFS به شبکه افقی ۲۵۶ در ۲۵۶ و سطوح سیگما و دمای پتانسیلی و محاسبه فشار سطوح قائم مدل است.

روی سطوح مختصه کسری تعیین کرد (جدول ۲) سپس با انجام مراحل زیر، داده‌های GFS را از سطوح استاندارد فشاری به سطوح ترکیبی منتقل کرد:

الف) دریافت داده‌های توپوگرافی و درون‌یابی در شبکه مدل گردش کلی با تفکیک افقی ۲۵۶ در ۲۵۶ نقطه؛

ب) درون‌یابی قائم فشار سطح زمین روی توپوگرافی سطح؛

ج) محاسبه دمای پتانسیلی و سیگما $\sigma \equiv (p - p_s) / (p_s - p_t)$ روی سطوح استاندارد فشاری مدل GFS؛

د) محاسبه $F(\theta, \sigma) = f(\sigma) + \theta g(\sigma)$ روی سطوح استاندارد فشاری مدل GFS؛

ه) درون‌یابی فشار از سطوح داده‌های GFS به سطوح ξ .

جدول ۲. مقادیر ξ و ترازهای فشاری معادل با آن.

ترازهای فشاری	ترازهای ترکیبی $\sigma - \theta$
1000.00	198.25
985.12	200.33
956.00	204.39
903.30	211.73
831.02	221.86
744.38	234.18
649.20	248.16
551.84	263.28
469.07	277.18
398.72	290.17
338.92	302.47
288.09	314.24
244.88	325.62
208.15	336.71
176.93	347.58
150.39	358.52
127.84	370.48
108.66	384.87
92.37	402.99
78.51	425.69
61.61	468.61
44.62	540.95
29.84	649.11
18.05	799.64
9.88	990.42
4.90	1223.23
2.19	1511.78

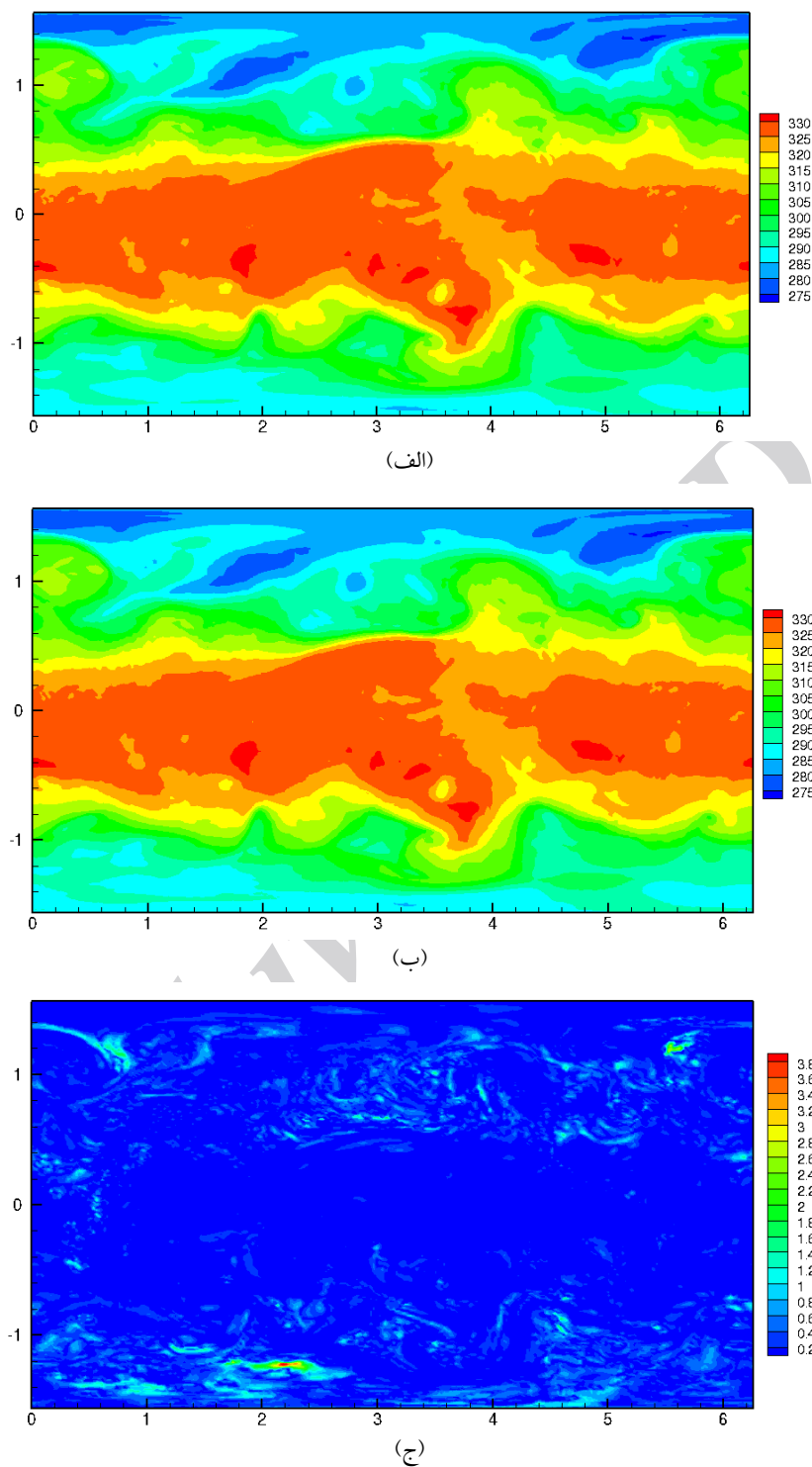
ترازهای قائم ترکیبی کمتر شده و درنهایت با حذف شرایط یکنوایی، نتیجه غلط کمتر بودن فشار سطح بالایی لایه نسبت به تراز پایینی آن، به دست می‌آید.

جدول ۳. کمینه ضخامت فشاری لایه‌های مختصه قائم ترکیبی $\theta - \sigma$ برحسب پاسکال برای چند نمونه درون‌یاب در ساعت ۰۰ روز ۱۴ فوریه ۲۰۱۷. اگر $p_{I+1/2}$ فشار کف و $p_{I-1/2}$ فشار بام لایه باشد، ضخامت فشاری لایه I برابر است با $p_{I-1/2} - p_{I+1/2}$. کمینه ضخامت فشاری برابر با کمترین مقدار ضخامت لایه روی کلیه نقاط شبکه در راستای افقی است.

لایه	درون‌یاب با کمترین خمیدگی	درون‌یاب با خمیدگی متوسط	درون‌یاب با بیشترین خمیدگی ممکن	درون‌یاب نایکنوا
۱	572.4	572.4	572.4	572.3
۲	1135.8	1135.7	1135.5	1135.3
۳	2094.0	2093.8	2093.4	2071.7
۴	2956.3	2956.1	2955.4	2883.6
۵	3687.0	3686.6	3642.8	3536.0
۶	4210.1	4201.6	4132.6	4027.2
۷	4646.5	4639.7	4582.9	4489.1
۸	3469.2	3455.0	3418.4	3401.9
۹	2351.3	2283.3	2056.0	1926.2
۱۰	829.2	788.3	559.7	85.7
۱۱	669.7	494.2	160.4	-173.2
۱۲	616.2	472.1	179.1	-338.0
۱۳	294.7	224.6	127.7	-362.6
۱۴	182.7	176.3	120.1	-353.5
۱۵	482.5	379.1	94.1	-325.0
۱۶	285.0	286.7	157.5	-333.6
۱۷	502.1	400.1	103.4	53.0
۱۸	450.4	393.3	238.1	-220.0
۱۹	303.9	302.6	130.2	130.2
۲۰	944.7	953.9	906.3	860.0
۲۱	1300.1	1300.8	1267.3	1178.7
۲۲	740.5	685.1	597.2	570.3
۲۳	344.9	299.3	247.3	246.1
۲۴	288.2	288.1	287.6	287.0
۲۵	174.6	174.2	171.6	168.2
۲۶	108.2	107.4	102.2	102.2

محاسبه فشار سطوح قائم مدل، حساسیت زیادی به میزان یکنوایی روش استفاده شده برای درون‌یابی دارد. چنانچه روش استفاده شده یکنوا نباشد، سطوح قائم مدل یکدیگر را قطع می‌کنند که حاکی از رخداد خطا در روش درون‌یابی است. بنابراین با استفاده از فشار سطوح قائم مدل، می‌توان میزان عملکرد روش درون‌یاب را ارزیابی کرد. برای ارزیابی صحیح، از اختلاف فشار لایه بالایی با لایه پایینی استفاده شده است. چنانچه کمیت اختلاف فشار منفی شود، نشان‌دهنده برخورد سطوح قائم مدل با یکدیگر است.

در جدول ۳، میزان اختلاف فشار سطوح قائم ترکیبی (لایه بالایی با لایه پایینی) آورده شده است. در ستون اول، از تمامی شرط‌های الف، ب، ج، د، ه، و، ز استفاده شده است. پس کمینه خمیدگی بین نقاط درون‌یابی وجود داشته و درون‌یابی شبیه به روش PCHIP شده است. در ستون سوم، فقط از شرط‌های الف، ب، ج و د استفاده شده و بیشترین خمیدگی ممکن برای برقراری یکنوایی حفظ شده است. در ستون دوم، شرایط واسط بین ستون یک و دو آورده شده و خمیدگی کم بین نقاط درون‌یابی در شرایط نسبی بین کمینه و بیشینه حفظ شده است. در ستون چهارم، شرط‌های الف-۱ و ج-۱ (رجوع کنید به بخش مبانی نظری) به $d_{i+1} = 5d_i$ تبدیل شده‌اند؛ بنابراین شرط یکنوایی درون‌یابی از بین رفته است. مطابق جدول، هر قدر شرایط سخت‌گیرانه‌تری برای یکنوایی در نظر گرفته شود، فاصله بین سطوح مختصه قائم بیشتر می‌شود. برای مثال، در ردیف ۱۱ جدول ۳ برای شرایط الف، ب، ج، د فاصله تراز قائم ترکیبی ۱۲ با تراز ۱۱ برابر با $669/7$ (ستون اول) و برای تمامی شرط‌های الف، ب، ج، د، ه، و، ز این اختلاف $160/4$ (ستون سوم)، برای شرایط واسط $494/2$ (ستون دوم) و برای شرایط نایکنوایی $173/2$ - شده است. مشاهده می‌شود که هرچه از شرایط یکنوایی دورتر شویم (از ستون یک به ستون چهارم)، اختلاف فاصله بین



شکل ۹. میدان دمای پتانسیلی تراز ۵۰۰ هکتوپاسکال برای داده‌های GFS اولیه برای ساعت ۰۰ روز ۱۴ فوریه ۲۰۱۷، (ب) دو بار درونیابی (یک بار از ترازهای فشاری به ترازهای ترکیبی $\theta - \sigma$ و بار دوم از ترازهای ترکیبی به تراز فشاری ۵۰۰ هکتوپاسکال) روی داده‌های تبدیل شده، (ج) قدرمطلق اختلاف بین الف و ب.

۴ نتیجه‌گیری

درون‌یابی در بخش‌های مختلفی از هواشناسی ظاهر می‌شود. از مهم‌ترین موارد می‌توان به حل نیمه‌لاگرانژی و تبدیل دستگاه‌های مختصات اشاره کرد. حل نیمه‌لاگرانژی در مدل‌های گردش کلی استفاده می‌شود و به دلیل نداشتن محدودیت شرط CFL و سادگی کاربرد آن روی کره، از محبوبیت زیادی برخوردار است. تبدیل دستگاه‌های مختصات نیز در تحلیل هم‌آنتروپی، درون‌یابی داده‌ها روی سطوح هم‌تاوایی پتانسیلی و انتقال داده‌های هواشناسی روی سطوح ترکیبی سیگما استفاده می‌شود.

طرحواره PCHIP، یکی از طرحواره‌های درون‌یابی است که در هواشناسی به آن توجه شده است (فریچ و کارلسون، ۱۹۸۰ و بوتلند و فریچ، ۱۹۸۴). در طرحواره PCHIP، خمیدگی در بازه درون‌یابی تا حد زیادی از بین رفته و خَم واصل بین نقاط در بازه درون‌یابی به سمت خط واصل بین نقاط میل می‌کند. برای رفع این نقیصه، طرحواره‌هایی پیشنهاد شده است که از جمله آنها می‌توان به طرحواره ولبرگ و آلفی (۲۰۰۲) اشاره کرد. در آن طرحواره، تغییرات مشتق به گونه‌ای است که میزان خمیدگی کمینه شود. بررسی‌ها نشان می‌دهد که کمینه خمیدگی بین دو نقطه در نتایج ولبرگ و آلفی (۲۰۰۲)، بیشتر از خمیدگی حاصل از نتایج فریچ و کارلسون (۱۹۸۰) و بوتلند و فریچ (۱۹۸۴) است. پس می‌توان نتیجه گرفت میزان کاهش خمیدگی در طرحواره PCHIP، بیش از حد مورد نیاز برای یکنواسازی درون‌یابی است. براین اساس، در طرحواره پیشنهادی در این مقاله، سعی شده است تا کمترین تغییرات روی مشتق صورت گیرد و خمیدگی خَم درجه سوم بین نقاط درون‌یابی، بیش از مقادیر مورد انتظار کاهش پیدا نکند. در طرحواره پیشنهادی، مقادیر مشتق که خارج از ناحیه یکنوا قرار می‌گیرند، از نزدیک‌ترین فاصله در ناحیه یکنوا محدود می‌شوند (شرایط الف، ب، ج، د) و در صورت لزوم، برای کاهش بیشتر خمیدگی، می‌توان از

برای نشان‌دادن عملکرد و میزان دقت طرحواره پیشنهاد شده در این مقاله، داده‌های GFS روی ترازهای ترکیبی قرار گرفته و سپس دمای پتانسیلی تراز ۵۰۰ هکتوپاسکال به کمک فن درون‌یابی پیشنهاد شده در این مقاله، با کمینه خمیدگی از ترازهای قائم ترکیبی، دوباره محاسبه (شکل ۹-ب) و با داده‌های اولیه GFS تراز ۵۰۰ هکتوپاسکال (شکل ۹-الف) مقایسه شده است. میزان اختلاف بین دمای پتانسیلی تراز ۵۰۰ هکتوپاسکال بین داده‌های GFS در شبکه افقی ۲۵۶ در ۲۵۶ با داده‌های حاصل از دو بار درون‌یابی قائم (یک‌بار از ترازهای فشاری به ترازهای $\sigma - \theta$ و بار دوم از ترازهای $\sigma - \theta$ به تراز فشاری ۵۰۰ هکتوپاسکال) در شکل ۹-ج نشان داده شده است. میزان خطا در حالت کمینه خمیدگی و خمیدگی متوسط تقریباً یکسان است ولی برای بیشترین خمیدگی ممکن، افزایش می‌یابد. میانگین دمای پتانسیلی داده‌های GFS روی تراز ۵۰۰ هکتوپاسکال، $۳۱۴/۷۱۷۷$ کلوین، میانگین دمای پتانسیلی با دو بار درون‌یابی در راستای قائم، $۳۱۴/۷۳۱۰$ کلوین، و میانگین خطا (اختلاف بین دو دمای پتانسیلی به دست آمده) $۰/۱۲۷۲$ کلوین است. نسبت میانگین خطا به میانگین دمای پتانسیلی تراز ۵۰۰ هکتوپاسکال برای GFS فقط $۰/۰۰۰۴$ و برای هر بار درون‌یابی، تقریباً $۰/۰۰۰۲$ به دست می‌آید که در مقایسه با خطای میدان فشار در درون‌یابی افقی، یک مرتبه بزرگی، بیشتر است. البته مهم‌تر از میانگین خطا، نِرم بیشینه خطا است که بنابر شکل ۹-ج در ناحیه فشرده‌ای واقع در عرض‌های پایین نیمکره جنوبی، مقدار آن به حدود $۳/۸$ کلوین می‌رسد. به‌طور کلی می‌توان گفت که خطای درون‌یابی قائم حدود ۱۰ برابر خطای درون‌یابی افقی است و به همین دلیل، کوچک‌ترین تغییر در خمیدگی درون‌یاب در راستای قائم، موجب تغییرات زیادی در نتیجه درون‌یابی می‌شود.

- Huynh, T., 1993, Accurate monotone cubic interpolation: *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **30**, 57–100.
- Hyman, J. M., 1983, Accurate monotonicity preserving cubic interpolation: *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, **4**, 645–654.
- Ibraheem, F., Hussain, M., Hussain, M. Z., and Bhatti, A. A., 2012, Positive data visualization using trigonometric function: *Journal of Applied Mathematics*, 1–19, doi: 10.1155/2012/247120.
- Jablonski, C., and Williamson, D. L., 2006, A baroclinic wave test case for dynamical cores of general circulation models: Model intercomparisons: NCAR Technical Note NCAR/TN-469+STR.
- Karim, S. A. A., and Kong, V. P., 2014, Monotonicity-preserving using rational cubic spline interpolation: *Research Journal of Applied Sciences*, **9**, 214–223.
- Karim, S. A. A., and Voon Pang, K., 2016, Shape preserving interpolation using C2 rational cubic spline: *Journal of Applied Mathematics*, **3**, 1–14, doi: 10.1155/2016/4875358.
- Konor, C.S., and Arakawa, A., 1997, Design of an atmospheric model based on a generalized vertical coordinate: *Monthly Weather Review*, **125**, 1649–1673.
- Mohebalhojeh, A. R., and Dritschel, D. G., 2007, Assessing the numerical accuracy of complex spherical shallow water flows: *Monthly Weather Review*, **135**, 3876–3894.
- Mohebalhojeh, A. R., Joghataei, M., and Dritschel, D. G., 2016, Towards a PV-based algorithm for the dynamical core of hydrostatic global models: *Monthly Weather Review*, **144**, 2481–2502.
- Pruess, S., 1993, Shape preserving C2 cubic spline interpolation: *IMA Journal of Numerical Analysis*, **13**, 493–507.
- Sarfraz, M., Hussain, M. Z., Shaikh, T. S., and Iqbal, R., 2011, Data visualization using shape preserving C2 rational spline: *Information Visualisation*, **4**, 528–533.
- Wolberg, G., and Alf, I., 1999, Monotonic cubic spline interpolation: *Proceedings of Computer Graphic International*, 1999, pp. 188–195.
- Wolberg, G., and Alf, I., 2002, An energy-minimization framework for monotonic cubic spline interpolation: *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **143**, 145–188.
- هموارسازی مشتق (شرایط ه، و، ز) استفاده کرد. نتایج اجرای طرحواره پیشنهادی نشان می‌دهد که مقادیر α_i و β_i تا حد زیادی به نتایج ولبرگ و آلفی (۲۰۰۲) شبیه است با این تفاوت که در پژوهش حاضر، این مقادیر به میزان بیشتری در نواحی مرزی پراکنده شده‌اند؛ بنابراین نسبت به روش ولبرگ و آلفی (۲۰۰۲)، خمیدگی درون‌یاب درجه سوم بیشتر حفظ می‌شود. حفظ خمیدگی موجب دقت بالاتر و درعین‌حال نایکنوایی درون‌یاب می‌شود. به‌همین دلیل، در این مقاله نشان داده شده است که حالت واسط بین بیشینه و کمینه خمیدگی به خطای کمتر در درون‌یابی منجر می‌شود.
- تحلیل خطای دو درون‌یابی افقی و قائم نشان می‌دهد که خطا در درون‌یابی قائم حدود ده برابر بیشتر از خطا در درون‌یابی افقی است. درون‌یابی قائم به میزان خمیدگی بین نقاط درون‌یابی شده حساسیت زیادی دارد و تنظیم نکردن مناسب آن، به نتایج نادرست می‌انجامد.

منابع

- Beatson, R. K., and Wolkowicz, H., 1989, Post-processing piecewise cubics for monotonicity: *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **26**, 480–502.
- Costantini, P., 1987, Co-monotone interpolating splines of arbitrary degree — a local approach: *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, **8**, 1026–1034.
- Costantini, P., 1988, An algorithm for computing shape-preserving interpolating splines of arbitrary degree: *Journal of Computational and Applied mathematics*, **22**, 89–136.
- Du Preez, P. F., and Maré, E., 2013, Interpolating yield curve data in a manner that ensures positive and continuous forward curves: *South African Journal of Economic and Management Sciences*, **16**, 395–406.
- Fritsch, F., and Butland, J., 1984, A method for constructing local monotone piecewise cubic interpolants: *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, **5**, 300–304.
- Fritsch, F. N., and Carlson, R. E., 1980, Monotone piecewise cubic interpolation: *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **17**, 238–246.

The monotone piecewise cubic Hermit interpolation and its application to coordinate transformation in numerical weather prediction models

Ali Mohammadi¹, Ali Reza Mohebalhojeh^{2*}, and Majid Mazraeh Farahani³

¹Instructor of Meteorology, Imam-Khomeini Marine University, Noshahr, Iran

²Professor, Space Physics Department, Institute of Geophysics, University of Tehran, Tehran, Iran

³Associate Professor, Space Physics Department, Institute of Geophysics, University of Tehran, Tehran, Iran

(Received: 22 July 2017, Accepted: 15 October 2017)

Summary

Interpolation is one of the essential tools for meteorological research. The most important meteorological application of interpolation is in semi-Lagrangian methods. In semi-Lagrangian methods, the departure points of the particles arriving at the regular grid are calculated and the scalar quantity is interpolated at the departure points. A common problem is the creation of spurious fluctuations in interpolation values in areas with strong gradients if polynomial interpolation of higher than first degree is used. In order to remove spurious fluctuation, it is necessary to use monotone interpolation. The concept of monotone interpolation requires that the value of the interpolation of the function at the interval between two neighboring grid points should not be greater or less than the maximum and minimum of the function at that interval, respectively. That is, no relative extrema should be produced in the interval.

The most famous method for monotone interpolation results from changing the derivatives used in cubic Hermit polynomial with respect to the slope of the function within the interpolation interval. By changing the derivatives, one can adjust the curvature of the interpolator between the beginning and the end of the interpolated interval.

The main idea of the change in derivatives is that the derivatives in each interval should not exceed by roughly three times the slope of the function on that interval. In this paper, the curvature of the cubic Hermit polynomial is adjusted between the maximum value still giving monotonicity and the minimum value, corresponding to linear interpolation between the two points. The Hermit functions need derivatives of the function on the grid points for interpolation. For this reason, the cubic Hermit was chosen for implementation of the monotonicity procedure. The monotone piecewise cubic interpolants are easy to use, of sufficient accuracy and have been widely used. This interpolation is of second order accuracy near strict local extrema due to the application of the monotonicity constraint. It is generally the case that most monotonicity-preserving methods sacrifice accuracy in order to obtain monotonicity.

Numerical experiments with this method show that the maximum curvature still giving monotonicity may bring the cubic Hermit function close to the relative maximum and minimum in the interval. The (weakly monotone) interpolant with minimum curvature between the two neighboring points may decrease the accuracy of the interpolation as the curve connecting the two points tends to a line. The best choice for curvature in terms of both accuracy and monotonicity is intermediate between the discussed maximum and minimum values.

For an important example of practical application in meteorology, the presented method is used in transforming meteorological data in horizontal and vertical directions. An error analysis suggests that interpolation in the vertical direction for transferring data from pressure to the hybrid $\sigma - \theta$, exhibits a large sensitivity to the amount of curvature used in the implementation. Maintaining maximum curvature in the interpolation function reduces the distance between vertical surfaces such that the crossing of vertical surfaces will result in error.

Keywords: interpolation, monotone, polynomial, cubic Hermit, coordinate transform

*Corresponding author: