Iranian Journal of Irrigation and drainage
No. 1, Vol. 4, Spring 2010, p. 22-30

مجله آبیاری و زهکشی ایران
شماره ۱، جلد۴، بهار ۱۳۸۹، ص. ۳۰-۲۲

روش تحلیلی محاسبهٔ نشت از کانال نیمه بیضی به روش نگاشت کانفرمال

سید حسین مجتهدی[۱]، محمود فغفور مغربی[۲*]

چکیده

در این مقاله، راه‌حل تحلیلی برای محاسبهٔ نشت حالت پایدار محصور نشده از یک کانال منحنی شکل با مقطع نیمه بیضی ارائه شده است. راه‌حل تحلیلی محاسبهٔ نشت از کانال‌های منحنی شکل به دلیل مشکل بودن نگاشت کانفرمال پروفیل سطح مقطع این‌گونه کانال‌ها عمومیت نیافته است. در کار حاضر از هدوگراف سرعت و تبدیل شوارتز-کریستوفل استفاده شده است. در بدست آوردن نگاشت پروفیل سطح مقطع کانال از روشی به نام روش معکوس استفاده می‌شود که در آن مرز پروفیل سطح مقطع واقعی کانال در امتداد یک دایره در صفحهٔ هدوگراف سرعت نگاشت می‌شود. محاسبات در حالت نشت پایدار از کانال نیمه بیضی که در زیر آن یک لایهٔ زهکش در عمق محدود در زیر بستر کانال قرار گرفته است، انجام می‌شود. از این روش می‌توان مقدار نشت، با فرض قرارگیری لایهٔ زهکش در عمق بی‌نهایت را نیز بدست آورد. از راه‌حل ارائه شده میزان دبی نشت، معادلات پارامتریک برای نشان دادن مکان هندسی منحنی سطح آزاد و مقدار عرض نشت در لایهٔ زهکش را می‌توان بدست آورد. همچنین می‌توان گفت که دقت روش معکوس در مقایسه با روش‌های تحلیلی سایر محققین نظیر کازنی قابل قبول بوده و محدودیت آن یعنی غیر عملی بودن شکل مقطع کانال با نسبت‌های کوچک عرض سطح آب به عمق را نخواهد داشت.

واژه‌های کلیدی: نشت، نگاشت کانفرمال، روش معکوس، لایهٔ زهکش، منحنی سطح آزاد

مقدمه

مطالعات صورت گرفته در زمینهٔ محاسبات نشت از کانال‌های بدون گوشه، چه روش‌های تحلیلی و چه روش‌های عددی، توسط محققین مختلف با بکار بردن روش‌های متفاوتی انجام گرفته است. کازنی (نقل از هار، ۱۹۶۲)، نشت از یک کانال منحنی شکل را با بکار بردن روش تابع ژاکوفسکی تحقیق کرد و دریافت که شکل پروفیل کانال بدست آمده دارای شکل گردنده (فرفره‌ای) است. آناخائف (۲۰۰۴) راه‌حلی را برای آبراهه‌های منحنی شکل بدست آورد. در این روش وی شکل آبراهه را در صفحهٔ ژاکوفسکی توسط معادلهٔ خانواده‌ای از لمنیسکات‌ها با روش نگاشت کانفرمال ارائه نمود و نشان داد که حالت خاصی از آن به شکل گردندهٔ کازنی تبدیل می‌شود. هالک و اسوک (۱۹۷۹) نشت از یک مقطع سهمی شکل را با استفاده از تابع ژاکوفسکی و روش معکوس بدست آوردند. وریگین (نقل از کوواکس، ۱۹۸۱) به‌صورت تحلیلی راه‌حل تقریبی‌ای را برای نشت از یک مقطع دایره‌ای بر حسب سری‌های به‌سرعت همگرا بدست آورد.

کاسیموف (۲۰۰۳) اشکالات روش وی را متذکر گردیده است. ایلینسکی و کاسیموف (۱۹۸۴) شکل بهینهٔ یک کانال آبیاری منحنی شکل را از دیدگاه حداقل اتلاف نشت ، با بکار بردن روش مسائل مقدار مرزی معکوس بدست آوردند. سوامی و کاشیاپ (۲۰۰۱) نشت از کانال‌های بدون گوشه شامل کانال دایره‌ای را در حالت گسترش نامحدود محیط متخلخل (لایهٔ زهکش در عمق بی‌نهایت) با بکار بردن روش عددی تفاضلات محدود بدست آوردند که روش آن‌ها منجر به دیاگرام‌هایی گردید که توسط کاسیموف (۲۰۰۳) با جزئیات بیشتری توضیح داده شده است. همچنین سوامی و کاشیاپ (۲۰۰۴) نشت از کانال‌های بدون گوشه شامل کانال دایره‌ای را در حالت وجود یک لایهٔ زهکش در عمق محدود در زیر بستر کانال، ارائه نمودند. راه‌حل‌های تقریبی برای یافتن مقدار نشت از کانال توسط روش‌های عددی (تفاضل محدود، المان محدود، انتگرال مرزی و ...) به دلیل دسترسی آسان به رایانه‌های دیجیتال با سرعت‌های بالا همراه با نرم افزارهای تخصصی، بدست آمده‌اند. محققینی نظیر رمسون و همکاران (۱۹۷۱)، هویاکورن و پیندر (۱۹۸۳) و لیگت و لیو (۱۹۸۳) (نقل از چاهار، ۲۰۰۷) در زمینهٔ روش‌های عددی محاسبهٔ نشت، مطالعاتی را انجام داده‌اند.

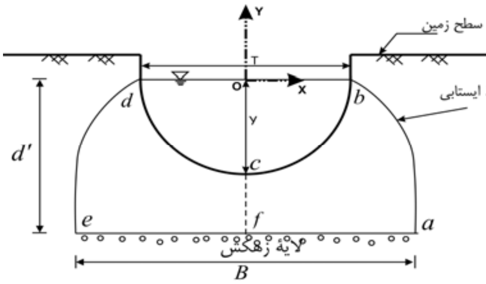
با توجه به بررسی نتایج مطالعات روش‌های تحلیلی که توسط

۱- کارشناس ارشد سازه‌های هیدرولیکی
۲- دانشیار دانشگاه فردوسی مشهد
(* - نویسنده مسئول : Email: maghrebi@ferdowsi.um.ac.ir)

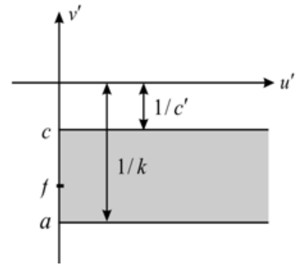
محققین قبلی ارائه گردیده است، ملاحظه شد که نتایج برخی از کارهای انجام گرفته دارای ضعف‌ها و یا محدودیت‌هایی می‌باشند و یا این‌که برخی از نتایج جانبی دیگر از آن‌ها استخراج نشده است. همچنین انجام راه‌حل تحلیلی محاسبهٔ نشت از مقطع مشخصی نظیر مقطع نیمه بیضی توسط روش هدوگراف سرعت و تبدیل شوارتز- کریستوفل، در کارهای محققین قبلی مشاهده نمی‌شود. بنابراین انجام راه‌حل تحلیلی حالت مذکور و بررسی این‌که آیا راه‌حل بکار گرفته شده و نتایج حاصل شده دارای محدودیت‌های مطالعات پیشین است یا نه، جزء مهم‌ترین اهداف مطالعهٔ حاضر می‌باشد.

راه‌حل تحلیلی

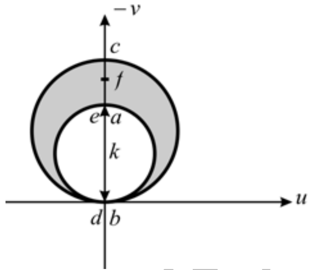
مقطع مورد استفاده برای کانال منحنی شکل، یک مقطع نیمه بیضی می‌باشد که قطر بزرگتر آن، عرض سطح آب یعنی T و قطر کوچکتر، دو برابر عمق آب در کانال یعنی y می‌باشد. الگوی نشت مطابق شکل (۱) درنظر گرفته می‌شود. محیط متخلخل زیرین کانال، محیطی همگن، همسانگرد و با عمق نامحدود است. از اثرات موئینگی، تراوش و تبخیر صرف‌نظر و فرض می‌گردد که جریان حالت پایدار دارد و قانون دارسی را ارضاء می‌نماید. به دلیل طول قابل توجه کانال، جریان نشت بصورت دو بعدی در صفحهٔ قائم در نظر گرفته می‌شود. راه‌حل ابتدا برای حالت وجود لایهٔ زهکش در عمق محدود در زیر بستر کانال انجام می‌گیرد. به دلیل تقارن قائم محدودهٔ جریان نشت، راه‌حل برای نیمی از محدوده نشت یعنی $abcfa$ انجام می‌شود. پتانسیل مختلط بصورت $w = f(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$ تعریف می‌شود که در آن، ϕ پتانسیل سرعت (m^2/s) و ψ نیز تابع جریان (m^2/s) می‌باشند. اگر صفحهٔ فیزیکی مسأله بصورت $Z = X + iY$ تعریف شود، سپس قانون دارسی، سرعت در جهات X و Y را به‌ترتیب برابر $u = \partial\phi/\partial X = -k(\partial h/\partial X)$ و $v = \partial\phi/\partial Y = -k(\partial h/\partial Y)$ نتیجه خواهد داد. در این روابط h برابر هد (m) و k برابر نفوذپذیری (m/s) می‌باشند. در صفحهٔ هدوگراف سرعت $(dw/dZ = u - iv)$ خط ایستابی یعنی ab در امتداد یک دایره به شعاع k و مرکز $(0, -k/2)$ نگاشت می‌شود. نکتهٔ مهمی که در این بخش باید به آن اشاره شود این است که شکل دقیق نگاشت مرز کانال یعنی bcd مشخص نمی‌باشد. بنابراین روشی که در اینجا اتخاذ می‌شود، روش معکوس نام دارد. در ناحیهٔ dw/dZ (هدوگراف سرعت)، شکل مرز کانال bcd مطابق شکل (۲) بصورت یک دایره انتخاب می‌شود که بر روی محور v قرار دارد. این فرض در راه حل ذکر شده معرفی می‌شود و فقط بعد از اتمام کلیهٔ عملیات ریاضی و محاسبات لازم و بدست آوردن معادلهٔ پروفیل کانال با این روش و مقایسهٔ آن با شکل سطح مقطع درنظر گرفته شده برای کانال مسأله، می‌توان تصمیم گیری کرد که فرض درنظر گرفته شده برای نگاشت مرز bcd قابل قبول است یا باید فرض دیگری را برای نگاشت آن انتخاب نمود. پس با توضیحات داده شده می‌توان فرض کرد که مرز مذکور مطابق شکل (۲- الف) در امتداد یک دایره به قطر c' در صفحهٔ هدوگراف سرعت نگاشت می‌شود.



(شکل ۱)- صفحهٔ فیزیکی مسأله (صفحهٔ Z)

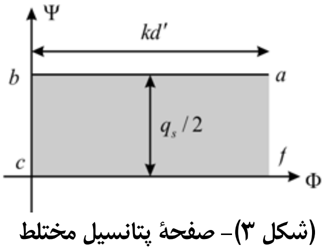


(الف)



(ب)

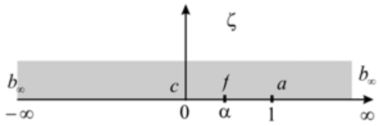
(شکل ۲)- (الف) صفحهٔ هدوگراف سرعت و (ب) معکوس آن



(شکل ۳)- صفحهٔ پتانسیل مختلط

صفحهٔ معکوس هدوگراف سرعت و صفحهٔ پتانسیل مختلط به‌ترتیب در اشکال ۲- (ب) و (۳) نشان داده شده‌اند. شکل این صفحات با انجام گام‌های استاندارد ارائه شدهٔ هار (۱۹۶۲) و

پولوبارینوا-کوچینا (۱۹۶۲) کشیده می‌شوند. صفحهٔ dZ/dw و صفحهٔ w توسط تبدیل شوارتز-کریستوفل بر روی نیمهٔ بالایی صفحهٔ کمکی ζ مطابق شکل (۴) نگاشت خواهند شد.



(شکل ٤)- صفحهٔ کمکی

با نگاشت صفحهٔ پتانسیل مختلط بر روی صفحهٔ ζ معادلهٔ زیر بدست می‌آید:

$$= \frac{iq_s}{4K(1-\alpha)}\int_0^{\zeta}\frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(t-\alpha)}} \qquad (۱)$$

که در این رابطه $K(1-\alpha)$ انتگرال بیضوی کامل نوع اول با مدول $1-\alpha$، q_s دبی نشت (متر مربع بر ثانیه) و t متغیر مجازی می‌باشد. بطور مشابه با نگاشت صفحهٔ dZ/dw بر روی صفحهٔ ζ خواهیم داشت:

$$\frac{dZ}{dw} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{c'}\right)\int_0^{\zeta}\frac{dt}{\sqrt{t(t-1)}} - \frac{i}{c'} \qquad (۲)$$

حال برای بدست آوردن نگاشت صفحهٔ فیزیکی مسأله یعنی Z، با استفاده از قانون مشتق‌گیری زنجیری $dZ/d\zeta = (dZ/dw)(dw/d\zeta)$ خواهیم داشت:

$$Z = \frac{iq_s}{2\pi K(1-\alpha)}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{c'}\right)\int_0^{\zeta}\frac{-\sinh^{-1}\sqrt{-t}}{\sqrt{t(1-t)(t-\alpha)}}dt + \frac{q_s}{4c'K(1-\alpha)}\int_0^{\zeta}\frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(t-\alpha)}} - iy \qquad (۳)$$

اکنون برای ادامهٔ محاسبات و بدست آوردن دبی نشت و برخی از مقادیر لازم، شرط نقطهٔ b در صفحات ζ و Z بر معادلهٔ (۳) اعمال می‌شود ($b(\zeta=-\infty, Z=T/2)$):

$$= \frac{iq_s}{2\pi K(1-\alpha)}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{c'}\right)\int_0^{-\infty}\frac{-\sinh^{-1}\sqrt{-t}}{\sqrt{t(1-t)(t-\alpha)}}dt + \frac{q_s}{c'K(1-\alpha)}\int_0^{-\infty}\frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(t-\alpha)}} - iy \qquad (۴)$$

که در این رابطه با محاسبهٔ دومین انتگرال، جایگذاری آن در معادله و جدا کردن بخش‌های موهومی و حقیقی، روابط زیر بدست خواهند آمد:

$$T = \frac{q_s}{c'}$$

$$y = \frac{q_s}{2\pi K(1-\alpha)}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{c'}\right)\int_0^{-\infty}\frac{-\sinh^{-1}\sqrt{-t}}{\sqrt{t(1-t)(t-\alpha)}}dt \qquad (۵)$$

بنابراین با استفاده از روابط بالا می‌توان دبی نشت یعنی q_s را بدست آورد:

$$q_s = k\left(T + \frac{2\pi yK(1-\alpha)}{\int_0^{-\infty}\frac{-\sinh^{-1}\sqrt{-t}}{\sqrt{t(1-t)(t-\alpha)}}dt}\right) \qquad (۶)$$

حال می‌توان تابع نشت را بصورت $F_s = T/y + 2\pi K(1-\alpha)\Big/\int_0^{-\infty}\frac{-\sinh^{-1}\sqrt{-t}}{\sqrt{t(1-t)(t-\alpha)}}dt$ تعریف کرد و دبی نشت را با رابطهٔ $q_s = kyF_s = kB$ نشان داد. حال با جای‌گذاری مقادیر بدست آمدهٔ اخیر در معادلهٔ (۳) می‌توان معادلهٔ مذکور را به شکل زیر تبدیل نمود:

$$Z = \frac{iy}{\int_0^{-\infty}\frac{-\sinh^{-1}\sqrt{-t}}{\sqrt{t(1-t)(t-\alpha)}}dt}\int_0^{\zeta}\frac{-\sinh^{-1}\sqrt{-t}}{\sqrt{t(1-t)(t-\alpha)}}dt + \frac{T}{4K(1-\alpha)}\int_0^{\zeta}\frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(t-\alpha)}} - iy \qquad (۷)$$

با اعمال شرایط سطح آزاد یعنی ab که $1 \le \zeta < \infty$ است در معادلهٔ (۷) معادلهٔ سطح آزاد نیز بدست خواهد آمد:

$$Z = iy\int_{\infty}^{\zeta}\frac{\cosh^{-1}\sqrt{t}}{\sqrt{t(1-t)(t-\alpha)}}dt\Big/\int_0^{-\infty}\frac{-\sinh^{-1}\sqrt{-t}}{\sqrt{t(1-t)(t-\alpha)}}dt + 1/4K(1-\alpha)\left(T + 2\pi yK(1-\alpha)\Big/\int_0^{-\infty}\frac{-\sinh^{-1}\sqrt{-t}}{\sqrt{t(1-t)(t-\alpha)}}dt\right)\times \int_{\infty}^{\zeta}\frac{1}{\sqrt{t(1-t)(t-\alpha)}}dt + T/2 \qquad (۸)$$

جهت کنترل معادله‌ای که پروفیل کانال را ارائه می‌کند از فرض روش معکوس استفاده می‌شود. برای این منظور از معادلهٔ (۷) کمک گرفته خواهد شد. شرط مرز پروفیل کانال یعنی شرط مرز bc بر این معادله اعمال می‌شود. در این مرز $-\infty < \zeta \le 0$ است. بنابراین رابطهٔ (۷) بصورت زیر تبدیل می‌گردد:

$$Z=\frac{T}{4K(1-\alpha)}\int_0^{\zeta}\frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(t-\alpha)}}+ i\left[y\int_0^{\zeta}\frac{-\sinh^{-1}\sqrt{-t}\,dt}{\sqrt{t(1-t)(t-\alpha)}}\Bigg/\int_0^{-\infty}\frac{-\sinh^{-1}\sqrt{-t}\,dt}{\sqrt{t(1-t)(t-\alpha)}}-y\right];\quad -\infty\le\zeta\le 0 \qquad (۹)$$

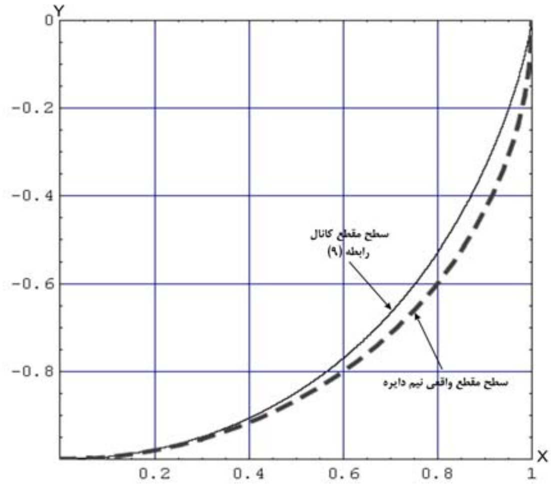
حال برای محاسبهٔ مقدار دبی نشت، مختصات معادلهٔ سطح آزاد و پروفیل کانال بایستی مقدار پارامتر مجهول α محاسبه گردد. برای این منظور با اعمال شرط نقطهٔ $a(\zeta=1, Z=B/2-id')$ در معادلهٔ (۷) داریم:

$$\frac{d'}{y}=1-\left(1\Bigg/\int_0^{-\infty}\frac{-\sinh^{-1}\sqrt{-t}}{\sqrt{t(1-t)(t-\alpha)}}dt\right)\int_0^{\alpha}\frac{-\sinh^{-1}\sqrt{-t}}{\sqrt{t(1-t)(t-\alpha)}}dt-\frac{T}{4K(1-\alpha)}\int_0^{\alpha}\frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(t-\alpha)}} \qquad (۱۰)$$

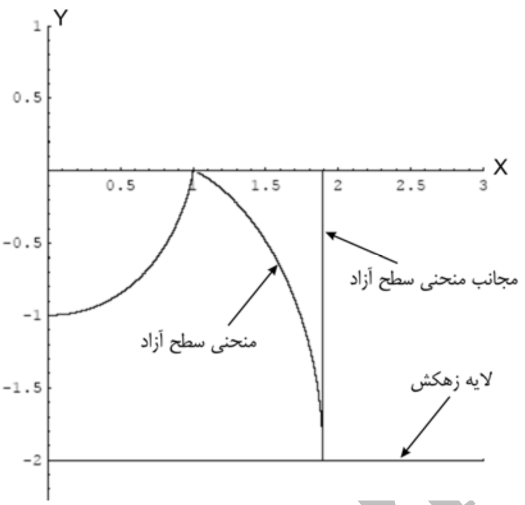
$$\frac{B}{2}=\frac{T}{4K(1-\alpha)}\int_{\alpha}^{1}\frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(t-\alpha)}}+\left(iy\Bigg/\int_0^{-\infty}\frac{\sinh^{-1}\sqrt{-t}}{\sqrt{t(1-t)(t-\alpha)}}dt\right)\int_{\alpha}^{1}\frac{\sinh^{-1}\sqrt{-t}}{\sqrt{t(1-t)(t-\alpha)}}dt \qquad (۱۱)$$

با داشتن d' یعنی مقدار عمق لایهٔ زهکش نسبت به سطح آب کانال، مقدار پارامتر مجهول از رابطهٔ (۱۰) محاسبه خواهد شد و سپس B یعنی عرض نشت در لایهٔ زهکش از رابطهٔ (۱۱) بدست خواهد آمد.

در این بخش با رسم معادلهٔ (۹) برای یک مقطع نیم دایره، ملاحظه می‌شود که فرض روش معکوس صحیح بوده و حداکثر خطا بین شعاع سطح مقطع معادلهٔ (۹) و شعاع سطح مقطع نیم دایرهٔ واقعی ۴/۱۸ درصد می‌باشد. شکل (۵) مقایسهٔ ذکر شده بین سطح مقطع واقعی نیم دایره و سطح مقطع حاصل شده از معادلهٔ (۹) را نشان می‌دهد. در شکل (۶) نیز سطح مقطع پروفیل کانال با $T/y=2$ در حالت وجود لایهٔ زهکشی به عمق $d'=2\,m$ از سطح آب کانال و منحنی سطح آزاد همراه با مجانب آن رسم شده است. مقدار پارامتر α در حالت مذکور برابر ۰/۲۲ می‌باشد.



(شکل ۵)- مقایسهٔ پروفیل سطح مقطع معادلهٔ (۹) با پروفیل سطح مقطع نیم دایرهٔ واقعی



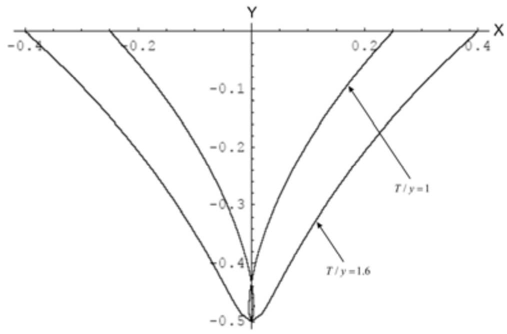
(شکل ٦)- دیاگرام شکل پروفیل و خط فریاتیک کانال در حالت $d'=2\,m$ و $T/y=2$

اما همان‌طور که از مطالعات محققین قبلی ملاحظه می‌شود، معادلهٔ پروفیل کانال بدست آمده توسط کازنی و یا ودرنیکف-پاولوفسکی دارای این محدودیت است که نمی‌توان از آن‌ها در حالت عمیق استفاده نمود. در واقع در کانال عمیق، شکل کانال خودش را قطع می‌کند و کاربرد فیزیکی خود را از دست می‌دهد. این موضوع با رسم معادلهٔ پروفیل کانال مذکور که بصورت معادلهٔ (۱۲) است در شکل (۷) نشان داده شده است.

$$\pm X = y\sin\left[\cos^{-1}\left(\frac{Y}{y}\right)\right]-\frac{y(2+T/y)}{\pi}\cos^{-1}\left(\frac{Y}{y}\right) \qquad (۱۲)$$

حال اگر نسبت T/y از مقدار حدی $\pi-2$ کوچکتر باشد، شکل کانال خودش را قطع می‌کند و نمی‌توان از آن برای مقاصد

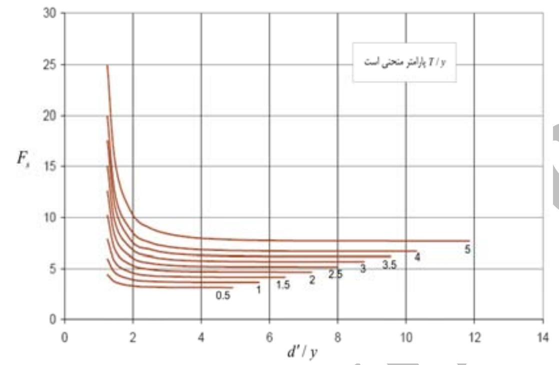
عملی بهره جست. محدودیت فوق الذکر در مورد معادلهٔ پروفیل کانال که توسط معادلهٔ (۹) بدست آمده وجود ندارد و می‌توان آن را برای یک کانال عریض تا یک کانال عمیق و در حالت وجود لایهٔ زهکش در زیر بستر کانال در نظر گرفت. در مطالعات محققین یاد شده از روش تابع ژاکوفسکی برای محاسبهٔ نشت و نیز بدست آوردن معادلهٔ پروفیل کانال استفاده شده است. در مورد روش هالک و اسوک (۱۹۷۹) که در واقع راه‌حل دقیق‌تری از مسألهٔ نشت ودرنیکف- پاولوفسکی برای یک مقطع سهمی شکل با بکار بردن تابع ژاکوفسکی می‌باشد، مختصات پروفیل سطح مقطع بدست آمده، دقیق‌تر است و در حین انجام محاسبات نشت تعیین می‌گردد. بنابراین می‌توان گفت که محدودیت معادلهٔ کازنی را نخواهد داشت اما همان‌طور که گفته شد راه‌حل مسأله برای یک کانال منحنی شکل با مقطع سهموی بکار گرفته شده است.



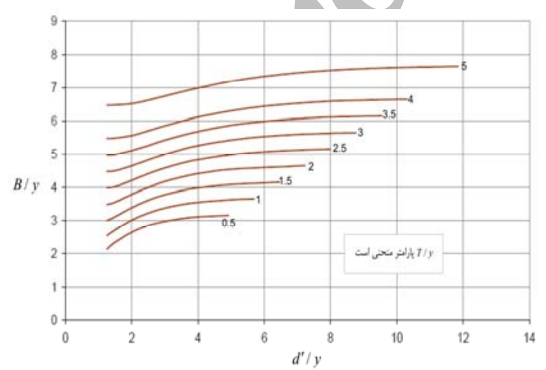
(شکل ۷)- شکل کانال کازنی برای دو حالت مختلف T/y

در اشکال (۸) و (۹) منحنی تغییرات تابع نشت و عرض نشت به عمق با تغییرات d'/y نشان داده شده است. پارامتر منحنی، نسبت T/y است که از ۰/۵ تا ۵ در نظر گرفته شده است. با داشتن مقدار T/y و به ازای نسبت‌های مختلف d'/y می‌توان از شکل (۸) مقدار تابع نشت و از شکل (۹) مقدار نسبت B/y را بدست آورد و مطابق رابطهٔ $q_s = kyF_s = kB$ مقدار دبی نشت را نتیجه گرفت. دیاگرام‌های ذکر شده برای دیگر نسبت‌های T/y و با در نظر گرفتن مقادیر مختلف d'/y قابل ترسیم است. همچنین منحنی تغییرات d'/y نسبت به تغییرات پارامتر α نیز در شکل (۱۰) نشان داده شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود در حالت حدی $\alpha = 1$ می‌توان گفت که لایهٔ زهکش در عمق بسیار زیاد قرار دارد و یا این‌که محیط متخلخل گسترش نامحدود دارد که در این حالت نقطهٔ f و a از ناحیهٔ نشت هر دو بر روی نقطهٔ $\zeta = 1$ در صفحهٔ کمکی نگاشت خواهند شد.

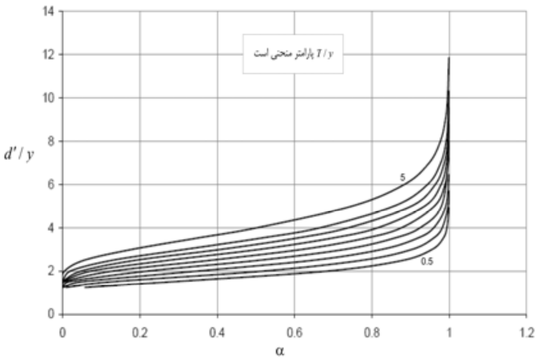
حال دراین بخش جهت مقایسهٔ مقدار نشت مقطع نیمه بیضی مطالعهٔ حاضر با سایر محاسبات مقدار نشت کانال‌های منحنی شکل که توسط محققین مختلف انجام گرفته است، می‌توان ابتدا روش کازنی و ودرنیکف- پاولوفسکی را در نظر گرفت. با توجه به این‌که راه‌حل تحلیلی انجام شده توسط محققین مذکور در حالت گسترش نامحدود محیط متخلخل است پس مقدار نشت مطالعهٔ حاضر نیز در این حالت محاسبه می‌شود. با فرض $T/y = 5$ مقدار بدون بعد نشت یعنی q_s/k برای مقطع ودرنیکف- پاولوفسکی برابر ۷/۰۰ و برای مقطع نیمه بیضی از رابطهٔ $q_s = kyF_s = kB$ برابر ۷/۶۹۳۸ خواهد شد که مقطع نیمه بیضی در حدود ۱۰ درصد نشت بیشتری را تخمین می‌زند. اما اگر مقطع سهمی شکل هالک و اسوک برای مقایسه در نظر گرفته شود در حالت $T/y = 2$ مقدار q_s/k برابر ۴/۵ و برای مقطع نیمه بیضی در این حالت، مقدار q_s/k برابر ۴/۶۹۳۸ خواهد شد. بنابراین مشاهده می‌شود که روش محاسبهٔ نشت در مورد مقطع نیمه بیضی، میزان نشت را در حدود ۴/۳ درصد بیشتر از روش هالک و اسوک تخمین می‌زند و برای محاسبهٔ نشت از یک کانال سهمی شکل نیز می‌تواند بکار برده شود و دقت مناسبی دارد. البته با توجه به توضیحات گفته شده، روش هالک و اسوک برای محاسبهٔ نشت از یک کانال با مقطع سهمی شکل دقیق‌تر می‌باشد.



(شکل ۸)- منحنی تغییرات تابع نشت با تغییرات d'/y



(شکل ۹)- منحنی تغییرات نسبت عرض نشت به عمق با تغییرات d'/y

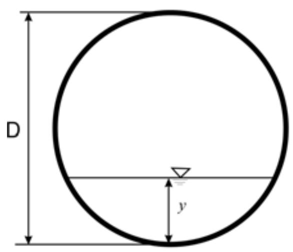


(شکل ۱۰)- منحنی تغییرات d'/y` نسبت به پارامتر α به‌ازای نسبت‌های مختلف T/y

اما مهم‌ترین مقایسه در این بخش این است که دقت روش عددی تفاضل محدود سوامی و کاشیاپ (۲۰۰۱ و ۲۰۰۴) در مورد یک مقطع دایره‌ای با روش تحلیلی مطالعهٔ حاضر سنجیده می‌شود. سوامی و کاشیاپ (۲۰۰۱) ابتدا نشت را برای یک مقطع دایره‌ای در حالت گسترش نامحدود محیط متخلخل بدست آوردند. رابطهٔ عرض نشت B در مقالهٔ سوامی و کاشیاپ (۲۰۰۱) بصورت معادلهٔ زیر است:

$$B = D\left\{\begin{array}{l}\left[2\sqrt{\eta(1-\eta)} + 6.24\left(\eta^{-1}-1\right)^{-1.65}\right]^{-0.5} + \\ 0.584\left[1+3.55\left(\eta^{-1}-1\right)^{0.8}\right]^{-0.5}\end{array}\right\}^{-2} \qquad (۱۳)$$

که در این رابطه D قطر مقطع دایره‌ای، y عمق مقطع و $\eta = y/D$ می‌باشند. مقطع در نظر گرفته شده توسط سوامی و کاشیاپ (۲۰۰۱) بصورت شکل (۱۱) می‌باشد.



(شکل ۱۱)- مقطع دایره‌ای در نظر گرفته شده توسط سوامی و کاشیاپ

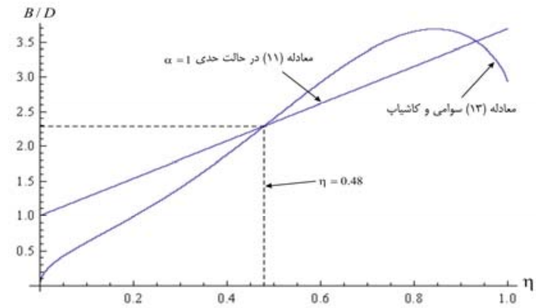
عرض نشت روش تحلیلی در حالت گسترش نامحدود محیط متخلخل یعنی زمانی‌که $\alpha = 1$ و نقاط a و f هر دو بر روی نقطهٔ $\zeta = 1$ نگاشت می‌شوند، بصورت رابطهٔ زیر بیان می‌شود:

$$B = T + \frac{\pi^2 y}{4G} \qquad (۱۴)$$

حال برای مقطع با قوس دایره‌ای، می‌توان عرض نشت را از دو رابطهٔ (۱۳) و (۱۴) به ترتیب در دو حالت عددی و تحلیلی با هم مقایسه کرد. با فرض $\eta = y/D = 0.5$، مقدار عرض نشت به عرض سطح آب از رابطهٔ (۱۳) برابر ۲/۴ و از رابطهٔ (۱۴) برابر ۲/۳۴۶۹ خواهد شد. در واقع می‌توان گفت که راه‌حل عددی سوامی و کاشیاپ (۲۰۰۱) عرض نشت را در حدود ۲/۲۶ درصد بیشتر از روش تحلیلی ارائه شده، تخمین می‌زند. در شکل (۱۲) نمودار دو رابطهٔ (۱۳) و (۱۴) رسم شده است.

با توجه به مقدار اختلاف و وجود خطا در نتایج دو معادلهٔ اخیر در حالت مقطع با قوس دایروی، نقطهٔ تقاطع دو منحنی علیرغم انتظار در $\eta = 0.5$ نمی‌باشد بلکه در $\eta = 0.48$ رخ می دهد.

سوامی و کاشیاپ (۲۰۰۴) روابطی را برای محاسبهٔ عرض نشت از مقطع دایره‌ای در حالت وجود یک لایهٔ زهکش به عمق d از سطح آزاد آب در کانال، ارائه دادند. رابطهٔ عرض نشت برای یک مقطع دایره‌ای مطابق رابطهٔ (۱۵) می‌باشد. با فرض $T/y = 2$ و قرار داشتن لایهٔ زهکشی در عمق ۲ متری از سطح آب کانال می‌توان نشت در دو حالت رابطهٔ (۱۳) و رابطهٔ (۱۱) را محاسبه و مقایسه نمود؛



(شکل ۱۲)- مقایسهٔ عرض نشت مقطع با قوس دایروی در دوحالت عددی و تحلیلی

$$B = D\left[\left(\frac{0.87\eta^{-0.08}+1}{(d/y-1)^{0.5}}\right)^{6.25} + \left(\frac{B_\infty}{D}\right)^{6.25}\right]^{0.16} \qquad (۱۵)$$

با قرار دادن $B_\infty = 4.8m$، $\eta = 0.5$، $D = 2m$، $\alpha = 0.22$ و $d/y = 2$ در رابطهٔ بالا $B = 4.973\,m$ بدست می‌آید و با استفاده از رابطهٔ (۱۱) و قرار دادن مقادیر معلوم در آن نیز مقدار عرض نشت $B = 3.793\,m$ حاصل خواهد شد.

مشاهده می‌شود که تخمین رابطهٔ (۱۱) از مقدار عرض نشت، کمتر از مقدار متناظر رابطهٔ (۱۵) می‌باشد. در واقع رابطهٔ سوامی و کاشیاپ (۲۰۰۴) عرض نشت را در حدود ۳۱/۱۳ درصد بیشتر از راه‌حل تحلیلی مطالعهٔ حاضر تخمین می‌زند که البته این مقدار، تخمین دست بالایی می‌باشد.

بررسی نتایج

پس از انجام محاسبات لازم و حل معادلات شامل انتگرال‌های پیچیده و نامتعارف، نتایجی از قبیل معادلات نشان دهندهٔ پروفیل سطح مقطع کانال، معادلات منحنی سطح آزاد نشت و معادلهٔ مقدار دبی نشت حاصل می‌گردد. ابتدا با رسم معادلهٔ پروفیل سطح مقطع کانال یعنی معادلهٔ (۹)، فرض روش معکوس بکار رفته، کنترل گردیده و سپس معادلهٔ منحنی سطح آزاد نشت نیز همراه با معادلهٔ پروفیل سطح مقطع کانال برای یک حالت خاص در شکل (۶) رسم می‌گردد. در این شکل معادلات حاصل شده توسط روش تحلیلی بکار گرفته شده در قالب یک مثال خاص رسم می‌شوند تا معادلات بدست آمده حالت ملموس‌تری را داشته باشند. سپس محدودیت روش‌های کازنی و نیز ودرنیکف- پاولوفسکی در مورد کانال مطالعهٔ حاضر بررسی شد. این محدودیت در شکل (۷) نشان داده شد که در حالت عمیق کاربرد عملی خود را از دست می‌دهد.

منحنی‌های بدون بعد شکل‌های (۸) الی (۱۰) نیز برای محاسبهٔ مقدار تابع نشت و عرض نشت در لایهٔ زهکش بر حسب تغییرات عمق لایهٔ زهکش و نیز تغییرات عرض سطح آب رسم شدند. از منحنی‌های بدست آمده مشاهده می‌شود که در حالت کلی دبی نشت از کانالی که در زیر آن لایهٔ زهکش در عمق محدودی قرار گرفته است در مقایسه با حالتی‌که لایهٔ مذکور در عمق بسیار زیاد قرار دارد بیشتر می‌باشد. با افزایش نسبت T/y، تابع نشت افزایش می‌یابد. اما این موضوع در مورد تغییرات دبی نشت فرق می‌کند یعنی برحسب افزایش و یا کاهش هر کدام از پارامترهای T یا y و ثابت بودن دیگری متفاوت می‌باشد. در واقع با ثابت بودن عمق و افزایش عرض سطح آب، هرچه نسبت T/y افزایش یابد دبی نشت هم افزایش خواهد یافت. همچنین با فرض ثابت بودن عرض سطح آب و تغییر عمق، هرچه نسبت T/y کاهش یابد دبی نشت افزایش خواهد یافت. در واقع در حالت دوم نسبت معکوسی بین تغییرات T/y و دبی نشت وجود دارد. همین بحث انجام گرفته در مورد تغییرات B/y نسبت به تغییرات d'/y نیز وجود دارد. طبیعی است هرچه مقدار دبی نشت از کانالی بیشتر باشد عرض نشت آن‌هم بیشتر است در حالی‌که ممکن است مقدار B/y آن در مقایسه با کانالی که مقدار دبی نشت آن کمتر است، کمتر باشد. برای یک مقدار معلوم T/y با افزایش مقدار d'/y، مقدار تابع نشت کاهش و مقدار پارامتر α افزایش خواهد یافت و به سمت یک میل می‌کند. برای یک مقدار معلوم d'/y نیز با افزایش مقدار T/y مقدار تابع نشت افزایش و مقدار پارامتر α کاهش می‌یابد و به مقدار صفر نزدیک می‌گردد. همچنین لازم به ذکر است که وقتی $d'/y=1$ باشد یعنی لایهٔ زهکش به بستر کانال برسد، مقدار دبی نشت حداکثر مقدار خود را خواهد داشت.

نتیجه‌گیری

از انجام راه‌حل تحلیلی برای محاسبهٔ نشت از یک کانال منحنی شکل به روش هدوگراف سرعت و تبدیل شوارتز- کریستوفل و بررسی روابط و منحنی‌های بدست آمده می‌توان به نتایج ذیل اشاره کرد:

۱- فرض در نظر گرفته شده در ابتدای راه‌حل تحلیلی در مورد نگاشت پروفیل سطح مقطع کانال بر روی صفحهٔ هدوگراف سرعت قابل قبول است.

۲- روند تغییرات منحنی سطح آزاد به عنوان بالاترین خط جریان در محدودهٔ جریان نشت، روند قابل قبولی دارد و به خوبی نشان دهندهٔ منحنی سطح آزاد برای حالت نشت در نظر گرفته شده می‌باشد.

۳- با توجه به معادلهٔ پروفیل بدست آمده برای کانال مذکور، این کانال محدودیت کانال کازنی را ندارد و می‌تواند در حالت عمیق تا عریض مورد استفاده واقع شود.

۴- در مقایسه با میزان نشت از کانال سوامی و کاشیاپ (۲۰۰۱) برای یک مقطع دایره‌ای، کانال مطالعه شده در حالت مقطع نیم‌دایره، نشت کمتری را تخمین می‌زند. در این حالت، می‌توان گفت که تا مقدار $\eta = 0.48$ مقدار نشت از مقطع نیمه بیضی با T/y یکسان با مقطع دایره‌ای سوامی و کاشیاپ (۲۰۰۱) بیشتر است. این بیشتر بودن مقدار نشت تا مقدار η ذکر شده ادامه دارد. در این مقدار، عرض نشت در دو حالت بر هم منطبق می‌شوند و در حالت مقطع نیم دایره ($\eta = 0.5$)، عرض نشت روش سوامی و کاشیاپ (۲۰۰۱) بیشتر از روش تحلیلی خواهد شد.

۵- در حالت مقایسهٔ مقطع مورد مطالعه با معادلات بدست آمده توسط سوامی و کاشیاپ (۲۰۰۴) بر روی مقطع دایره‌ای وقتی لایهٔ زهکش در عمق محدودی قرار دارد، می‌توان گفت مقطع منحنی شکل مطالعهٔ حاضر، تخمین کمتری را از عرض نشت خواهد داشت. با توجه به این‌که روش انجام گرفته در مطالعهٔ حاضر یک روش تحلیلی محسوب می‌شود که در آن از بحث توابع مختلط استفاده شده است و تمام محاسبات انجام شده در حل معادلات و بدست آوردن روابط موجود بصورت تحلیلی و با استفاده از نرم افزار Mathematica 5.1 (ولفرم، ۲۰۰۳) صورت گرفته است، طبیعی است که دقت آن از روش عددی تفاضلات محدود سوامی وکاشیاپ (۲۰۰۱ و ۲۰۰۴) بیشتر باشد و با توجه به شرایط جریان نشت جواب‌های دقیق‌تری را ارائه دهد. ضمن این‌که با رسم معادلات بدست آمده مثل پروفیل سطح مقطع کانال و منحنی سطح آزاد و بررسی روند تغییرات آن‌ها می‌توان پی برد که روش تحلیلی انجام شده از دقت کافی برخوردار است.

۶- هدف اصلی در کار حاضر بدست آوردن یک رابطهٔ تحلیلی جهت محاسبهٔ نشت بوده است در عین حال با تهیهٔ گراف‌های بدون

بعد مانند اشکال (۸) و (۹)، نتایج بصورت کاربردی‌تری در آمدند بطوریکه در کارهای عملی می‌توان بدون استفاده از ابزار و تجهیزات میدانی پیشرفته و تنها با برداشت برخی از اطلاعات سطحی هندسی و هیدرولیکی، تخمین نسبتاً دقیقی از میزان نشت و یا عرض آن در عمق خاک زیر بستر بدست آورد.

مراجع

Anakhaev, K. N. (2004), "Free percolation and seepage flows from water-courses" J. Fluid Dyn., Vol.39, No.5, 756-761.

Chahar, B. R. (2001), "Extension of Vedernikov's graph for seepage from canals" Ground Water, Vol.39, No.2, 272-275.

Chahar, B.R., "Analysis of seepage from polygon channels ", J. of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol.133, No.4, 451-460, 2007.

Halek, V. and J. Svec (1979), "Groundwater Hydraulics", Elsevier Scientific Publishing Company.

Harr, M. E. (1962), "Groundwater and Seepage" McGraw-Hill Inc., New York, N.Y.

Huyakorn, P. S. and G. F. Pinder (1983), "Computational methods in subsurface flow" Elsevier, New York.

Ilyinskii, N. B. and A. R. Kacimov (1984), "Seepage limitation optimization of the shape of an irrigation channel by the inverse boundary value problem method" J. Fluid Dyn., Vol.19, No.4, 404-410.

Kacimov, A. R. (2003), "Discussion of "Design of minimum seepage loss non-polygonal canal sections" by Prabhata K. Swamee and Deepak Kashyap" , J. of Irrigation and Drainage Engineering, ASCE, Vol. 129, No. 1, 68-70.

Kovacs, G., “Seepage Hydraulics ", Elsevier Scientific Publishing Company, 1981.

Liggett, J. A. and P. L. F. Liu (1983), "The boundary integral equation method for porous media flow" Allen and Unwin, St. Leonards, N. S. W., Australia.

Polubarinova-Kochina, P. Y. (1962), "Theory of groundwater movement" Princeton University Press, Princeton, N.J.

Remson, I., G. M. Hornberger and F. J. Molz (1971), "Numerical methods in subsurface hydrology" Wiley-Interscience, Hoboken, N. J.

Swamee, P.K. and D. Kashyap (2001), "Design of minimum seepage loss non-polygonal canal sections ", J. of Irrigation and Drainage Engineering, ASCE, Vol.127, No.2, 113-117.

Swamee, P. K. and D. Kashyap (2004) "Design of minimum seepage loss nonpolygonal canal sections with drainage layer at shallow depth", J. of Irrigation and Drainage Engineering, ASCE, Vol.130, No.2, 166-170.

Wolfram, S. (2003), "Mathematica. A system for doing mathematics by Computer" Addison-Wesley, Redwood City, Calif.

تاریخ دریافت: ۸۸/۵/۲۶
تاریخ پذیرش: ۸۸/۱۱/۱٤

Iranian Journal of Irrigation and drainage
No. 1, Vol. 4, Spring 2010, p. 22-30

مجله آبیاری و زهکشی ایران
شماره ۱، جلد۴، بهار ۱۳۸۹، ص. ۳۰-۲۲

Analytical method in seepage computation from a canal with a semi-elliptic section using conformal mapping

H. Mojtaheddi[1] and M.F. Maghrebi[2*]

Abstract

In this article the analytical solution has been presented for computing the unconfined steady state seepage from a curved canal with semi-elliptic cross section. The analytical solution of seepage from curved canals has not generalized because of the difficulty of conformal mapping of their cross sections. In the present study, velocity hodograph and Schwarz-Christoffel transformation have been used. Also the inverse method is used to obtain the mapping of canal cross section profile in which the profile boundary of actual canal cross section is mapped along a circle in the velocity hodograph plane.Computations are performed for the steady seepage from semi-elliptic canal in which a drainage layer has lied in limited depth below the bed of the canal. From this method, one could obtain the quantity of seepage discharge with the assumption of resting the drainage layer at infinite depth. From the presented solution also some of the items such as, seepage discharge, parametric equations for presenting the loci of phreatic line and the quantity of seepage width at drainage layer could be obtained. Moreover, the accuracy of inverse method in comparison to the analytical methods of other researchers such as Kozeny is acceptable and does not have the limitation of Kozeny's method, in other words, Kozeny's method is impracticable in canal cross sections with small ratio of free water surface width to depth.

Key Words: seepage, conformal mapping, inverse method, drainage layer, phreatic line.

1 - Senior Eng., hydraulic structure
2- Assoc. prof. Ferdowsi Univ. of Mashhad
(* - Corresponding author Email: maghrebi@um.ac.ir