

## توسعه الگوهای ضمنی و صریح در شبیه‌سازی معادلات هیپربولیک سنت‌ونانت

محمد رضا حیدری توانی<sup>۱\*</sup>، مهدی فولادی پناه<sup>۲</sup>

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۱۲/۱۶ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۲/۳

### چکیده

مدل‌های عددی جدید توسعه یافته برای حل معادلات هیپربولیک سنت‌ونانت، ضمن داشتن ارزش علمی و تحقیقاتی نقش بسیار مهمی در طراحی سازه‌های و نیز مدیریت عملکرد سازه‌های هیدرولیکی دارند. در این پژوهش، ضمن توسعه دو الگوی گسسته‌سازی صریح معکوس و نیمه ضمنی بر اساس الگوی پرایزمن چهار نقطه‌ای، کاربرد آن‌ها برای روندیابی سیل در بازه‌ای از رودخانه دو آب صمصامی در زیرحوضه‌های کارون مورد مطالعه و ارزیابی قرار گرفته است. مدل صریح معکوس بر مبنای الگوی Priseman و الگوی نیمه ضمنی با به‌کارگیری الگوی پرایزمن برای مشتقات مکانی هم‌زمان با کاربرد الگوی Upwind توسعه یافته‌اند. شبیه‌سازی هیدروگراف خروجی جریان با ارزیابی عملکرد مدل‌ها با شاخص‌های ناش-ساتکلیف (NS)، ضریب تبیین ( $R^2$ )، مجذور میانگین مربعات خطا و مقدار استاندارد شده‌ی آن (RMSE) و (NRMSE) و شاخص اختلاف توسعه یافته نسبی (QDDR) با تعیین ضریب زبری مانینگ به‌عنوان پارامتر اصلاحی، در هر دو مدل در دوره‌ی واسنجی و صحت‌سنجی انجام شد. مقدار شاخص‌های مذکور برای مدل صریح معکوس و نیمه ضمنی در دوره صحت‌سنجی به ترتیب (۰/۹۳۵۲، ۰/۹۸۸۶، ۲/۶۰۴، ۲۴/۶، ۳/۱۴۶) و (۰/۹۸۴۳، ۰/۹۹۴۳، ۱/۲۸۳، ۱۲/۱، ۳/۹۰۹) به دست آمدند که نشان از کارکرد قابل اعتماد دو مدل همراه با برتری نسبی مدل نیمه ضمنی بود. برای اطمینان از عملکرد مدل‌ها، هیدروگراف دیگری نیز مورد شبیه‌سازی قرار گرفت به طوری که مقدار ضرایب NS، NRMSE و QDDR برای مدل نیمه ضمنی و صریح معکوس به ترتیب (۰/۹۷، ۸/۱۷۲، ۳/۷۱۳) و (۰/۹۳۳۹، ۱۲/۲۸، ۲/۶۱۲) محاسبه شدند. این مقادیر نیز قابلیت اعتماد و کارکرد دو مدل را تایید کردند. دقت مدل نیمه‌ضمنی در همه موارد بیشتر از مدل صریح معکوس بود. پایداری حل علاوه بر راندمان بالای محاسبات از جمله مزایای مدل نیمه‌ضمنی و تولید معادلات کوپلی پیچیده غیرخطی از محدودیت‌های آن می‌باشند.

**واژه‌های کلیدی:** روندیابی سیلاب، گسسته‌سازی، معادلات سنت‌ونانت، مدل عددی، الگوی پرایزمن

### مقدمه

پایه‌ی حل معادله‌ی پیوستگی همراه با معادله‌ی دبی-ذخیره است که به همین دلیل نسبت به روندیابی هیدرولیکی از دقت نسبی کمتری برخوردار است. با این حال، سهولت روش روندیابی هیدرولوژیکی باعث توسعه و افزایش کاربرد آن شده است. وایلی فن کنترل گذرا بر مبنای حل گر هیدرولیکی خصوصیات برای حل معادلات سنت‌ونانت را به کار گرفت (Wylie, 1969). فینیما و چاودری فن عددی صریح مک کورمک و گابوتی را بر مبنای روش اختلاف محدود در حل معادلات سنت‌ونانت ارائه دادند. آن‌ها همچنین شرایط پایداری حل، اعمال شرایط مرزی و تأثیرشان در همگرایی حل عددی را در راه‌حل خود بیان نمودند (Fennema and Chaudhry, 1990). یوست و روا الگوریتم شبکه‌ای چندگانه را به منظور حل معادلات یک‌بعدی سنت‌ونانت به کار گرفتند. آن‌ها الگوریتم پیشنهادی خود را با الگوی مک کورمک مرتبه‌ی دوم به صورت کوپلی ادغام کردند. روش پیشنهادی آن‌ها به خصوص در جریان‌های انتقالی مانند پرش هیدرولیکی نتایج رضایت‌بخشی داشت (Yost and Rao, 2000). کرایسویچ و همکاران با استفاده از الگوی ضمنی معادلات یک‌بعدی

تغییرات مکانی و زمانی جریان‌های متغیر ناپایدار برای اولین بار به صورت یک‌بعدی توسط سنت‌ونانت در سال ۱۸۷۱ در قالب دو معادله‌ی دیفرانسیل جزئی هیپربولیک پیوستگی و مومنتوم ارائه شد. روش تحلیلی و روش عددی دو راه‌حل برای معادلات سنت‌ونانت هستند که استفاده از روش‌های عددی، هم‌زمان با توسعه الگوهای گسسته‌سازی کاربرد بسیار زیادی بین محققان پیدا کرده است. روندیابی هیدرولوژیکی و روندیابی هیدرولیکی به کمک شماهای گسسته‌سازی صریح و ضمنی در زمره روش‌های حل عددی معادلات سنت‌ونانت هستند. روندیابی هیدرولوژیکی برخلاف روندیابی هیدرولیکی، که بر حل کامل معادلات سنت‌ونانت استوار است، بر

۱- استادیار گروه ریاضی، واحد رامهرمز، دانشگاه آزاد اسلامی، رامهرمز، ایران  
۲- استادیار گروه عمران، واحد رامهرمز، دانشگاه آزاد اسلامی، رامهرمز، ایران  
\* نویسنده مسئول: (Email: m.reza.h56@gmail.com)

به‌منظور حل معادلات سنت‌ونانت در بازه‌ای از رودخانه دو آب مصمومی در استان چهارمحال و بختیاری ارائه شده است.

### مواد و روش‌ها

شکل پایستار معادلات یک‌بعدی هیپربولیک پیوستگی و مومنتوم سنت‌ونانت به‌قرار زیر است:

$$X_t + Y_x + Z = 0 \quad (1)$$

که در این معادله  $X = \begin{bmatrix} A \\ Q \end{bmatrix}$ ,  $Y = \begin{bmatrix} Q \\ QU + gAy' \end{bmatrix}$  و  $Z = \begin{bmatrix} Q \\ -gA(S_0 - S_f) \end{bmatrix}$  می‌باشند. لازم به ذکر است در این عبارت‌ها  $Q$  بیانگر دبی،  $U$  بیانگر سرعت،  $g$  شتاب ثقل،  $A$  مساحت مقطع عرضی جریان،  $S_0$  شیب طولی مجرا و  $S_f$  شیب افت اصطکاکی هستند.

### مدل عددی صریح معکوس

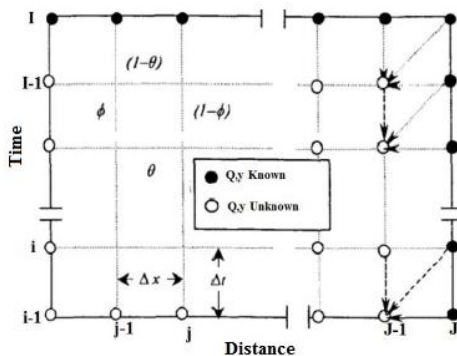
به‌منظور توسعه و کاربرد مدل صریح معکوس از روش پرایزمن چهار نقطه‌ای استفاده شده است. طبق الگوی پرایزمن می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \Phi \frac{f_{j,i+1} - f_{j-1,i}}{\Delta t} + (1-\Phi) \frac{f_{j,i} - f_{j-1,i}}{\Delta t} \quad (2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \theta \frac{f_{j,i+1} - f_{j-1,i}}{\Delta x} + (1-\theta) \frac{f_{j,i} - f_{j-1,i}}{\Delta x} \quad (3)$$

$$F(x,t) = \theta [\Phi f_{j,i+1} + (1-\Phi) f_{j,i}] + (1-\theta) [\Phi f_{j-1,i} + (1-\Phi) f_{j-1,i}] \quad (4)$$

که  $\Phi$  و  $\theta$  ضرایب وزنی هستند. شکل ۱ الگوی عددی صریح معکوس را به‌صورت شماتیک ارائه می‌دهد.



شکل ۱- نمای شماتیک از الگوی صریح معکوس

بر اساس الگوی پرایزمن، دو شرط مرزی در مرز پایین دست برای استفاده از گسسته‌سازی عددی صریح معکوس لازم است که شامل مقدار دبی و اشل در هر گام زمانی است. حل معادلات طبق شکل ۱ از گره سمت راست بالا در صفحه‌ی  $x-t$  شروع می‌شود. به‌کارگیری معادلات اختلاف محدود در هر گام زمانی منجر به دو معادله جبری با دو مجهول خواهد شد. این دو معادله برای هر دو گره مجاور یکدیگر به‌قرار زیر هستند:

سنت‌ونانت را حل نمودند. آن‌ها با استفاده از روش الگوی ضمنی آپویند موفق به افزایش دقت حل عددی و نیز بالا بردن راندمان مدل‌سازی سیستم معادلات هیپربولیک سنت‌ونانت شدند. روش آن‌ها مبتنی بر المان محدود خطی‌سازی شده بود (Kranjcevic et al., 2006). آرتیسویچ و سیمیکوویچ معادله‌ی جریان متغیر تدریجی غیردائمی را همراه با معادله‌ی انرژی با استفاده از تئوری لپشیتز حل نمودند (Artichowicz and Szymkiewicz, 2014). اکبری و فیروزی (۱۳۸۹) دو الگوی صریح و ضمنی را به‌منظور حل معادلات یک‌بعدی سنت‌ونانت در مجاری طبیعی ارائه دادند. آن‌ها الگوی پخشی لاکس و الگوی اختلاف محدود پرایزمن را در تحقیق خود استفاده کردند. اکبری و همکاران (۱۳۹۰) بررسی شمای مختلف روندیابی هیدرولوژیکی را در رودخانه کارون ارزیابی و نتایج حاصل از آن را با روندیابی هیدرولوژیکی مقایسه نمودند. نتایج تحقیقات نشان داد که شمای مورد مطالعه عموماً خروجی قابل قبولی در مقایسه با هیدروگراف مشاهداتی از خود نشان می‌دهند. همچنین اختلاف بین نتایج این شمای قابل ملاحظه نیست. نتایج محاسبه‌شده توسط روش‌های مورد مطالعه به‌طور قابل قبولی مشابه روش موج دینامیکی بود. برای و اکبری (۱۳۹۱) به ارزیابی مدل‌های هیدرولوژیکی در روندیابی سیلاب در رودخانه کارون پرداختند. نتایج پژوهش نشان داد در صورت فقدان داده‌های مورد نیاز برای به‌کارگیری مدل موج دینامیکی، استفاده از روش‌های هیدرولوژیکی ماسکینگ‌های خطی و غیرخطی نتایج رضایت‌بخشی به دنبال دارد. مطالعه‌ی دیگری توسط ولی‌سامانی و همکاران (۱۳۹۲) در به‌کارگیری روش الگوریتم ژنتیک و مقایسه آن با روندیابی هیدرولوژیکی ماسکینگ‌های انجام گرفته است. آن‌ها مطالعه‌ی خود را روی رودخانه‌های شریانی انجام دادند. استفاده از دو روش به کار گرفته شده نتایج رضایت‌بخشی داشت. حسن‌پور و شیخعلی‌پور (۱۳۹۳) در تحقیق خود به بررسی دقت مدل‌های هیدرولوژیکی از طریق مقایسه با مدل‌های شبکه عصبی در روندیابی سیلاب پرداختند. نتایج پژوهش آن‌ها نشان داد مدل‌های عصبی نسبت به مدل‌های هیدرولوژیکی از دقت بیشتری برخوردار هستند و هیدروگراف سیلاب را با خطای کمتری روندیابی می‌کنند. جاویدان و بهره‌مند (۱۳۹۵) بررسی حساسیت پارامترهای مؤثر بر روندیابی هیدروگراف سیل با روش موج پخشی دیفیوژن با مدل هیدرولوژیکی توزیعی WetSpa در حوضه‌ی آبخیز زیارت‌گران را مورد مطالعه قرار دادند. مطالعه‌ی آن‌ها نشان داد که تأثیر تغییر فراوانی سیل و ضریب زبری نسبت به آستانه‌ی شیب حداقل و آستانه‌ی سطح بر روی هیدروگراف خروجی و هیدروگراف واحد حوزه بیشتر است.

مرور منابع انجام گرفته مؤید این مطلب است که ارائه‌ی مدل‌های جدید عددی در حل معادلات سنت‌ونانت همچنان از جایگاه ارزشمندی بین محققان برخوردار است. در این مقاله نیز دو مدل عددی بر مبنای الگوی گسسته‌سازی صریح معکوس و نیمه ضمنی

$$f = \frac{1}{\tau} \theta \left( f_{i+\frac{1}{\tau}}^{n+1} + f_i^{n+1} \right) + \frac{1}{\tau} (1-\theta) \left( f_{i+\frac{1}{\tau}}^n + f_i^n \right) \quad (13)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\theta (f_{i+\frac{1}{\tau}}^{n+1} - f_i^{n+1})}{\Delta x} + \frac{(1-\theta)(f_{i+\frac{1}{\tau}}^n - f_i^n)}{\Delta x} \quad (14)$$

که در این معادله  $\Delta x$  گام زمانی،  $\theta$  پارامتر وزنی،  $f$  پارامتر وابسته،  $n$  و  $i$  به ترتیب مشخص کننده موقعیت مکانی و زمانی پارامتر  $f$  در میدان جریان هستند. به منظور حفظ شرایط پایداری حل، مقدار  $\theta$  بازه  $[0.5, 1]$  در نظر گرفته می‌شود. بنابراین معادلات (۱) و (۲) در بازه  $[0, L]$  در شبکه جابه‌جاشده گسسته خواهند شد که گره‌های آن با نمادهای  $x_i$  و  $x_{i+\frac{1}{\tau}}$  نمایش داده می‌شوند. در این حالت مقدار دبی یا سرعت در گره‌هایی با اندیس نیمه صحیح،  $Q_{i+\frac{1}{\tau}}$  و  $U_{i+\frac{1}{\tau}}$  تعریف خواهند شد در حالی که مقدار عمق جریان،  $y_i$ ، که در بازه  $[x_{i-\frac{1}{\tau}}, x_{i+\frac{1}{\tau}}]$  ثابت فرض می‌شود، دارای اندیس‌های صحیح خواهد بود. گام مکانی شبکه به صورت  $\Delta x_i = x_{i+\frac{1}{\tau}} - x_{i-\frac{1}{\tau}}$  و  $\Delta x_{i+\frac{1}{\tau}} = \frac{x_{i+1} + x_i}{\tau}$  تعریف می‌شوند. با انتگرال‌گیری از معادله‌ی پیوستگی جریان در بازه  $[x_{i-\frac{1}{\tau}}, x_{i+\frac{1}{\tau}}]$  می‌توان نوشت:

$$\int_{x_{i-\frac{1}{\tau}}}^{x_{i+\frac{1}{\tau}}} (A_T + Q_X) dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_{x_{i-\frac{1}{\tau}}}^{x_{i+\frac{1}{\tau}}} A dx + \frac{\partial}{\partial x} \int_{x_{i-\frac{1}{\tau}}}^{x_{i+\frac{1}{\tau}}} Q dx = 0 \quad (15)$$

معادله‌ی (۱۵) به فرم زیر قابل ساده‌سازی است:

$$\frac{\partial}{\partial t} V_i(\eta_i) + [(Q(i+\frac{1}{\tau}) - Q(i-\frac{1}{\tau}))] = 0 \quad (16)$$

که در این معادله  $V_i(\eta_i)$  حجم آب در حدفاصل دو گره  $[x_{i-\frac{1}{\tau}}, x_{i+\frac{1}{\tau}}]$  است. فرم نیمه ضمنی حجم آب در گره نام در لحظه‌ی  $n+1$  به فرم زیر قابل نوشتن است:

$$V_i \left( \eta_i^{n+1} \right) = V_i \left( \eta_i^n \right) - \Delta t [Q_{i+\frac{1}{\tau}}^{n+0} - Q_{i-\frac{1}{\tau}}^{n+0}] \quad (17)$$

که در این معادله  $V_i(\eta_i)$  تابعی غیرخطی از  $\eta$  است. همچنین طبق تعریف می‌توان نوشت:

$$Q^{n+0} = \theta Q^{n+1} + (1-\theta) Q^n \quad (18)$$

معادله‌ی (۱۸) توصیف کننده فرم گسسته شده اصل بقای حجم سیال است. چون مقادیر تراز سطح آب،  $\eta$ ، و نیز تراز بستر،  $h$ ، در گره‌هایی با اندیس صحیح تعریف می‌شوند، ولی مقدار دبی در گره نیمه صحیح باید تعریف شود، لازم است تراز سطح آب و تراز

کف به صورت صریح در گره  $i + \frac{1}{\tau}$  محاسبه شوند. بدین منظور الگوی Upwind زیر بر اساس علامت  $Q_{i+\frac{1}{\tau}}$  به منظور تعریف  $\eta$  استفاده می‌شود:

$$L_1 Q_{j-1} + M_1 Q_j + R_1 y_{j-1} + S_1 y_j + T_1 = 0 \quad (5)$$

$$L_2 Q_{j-1} + M_2 Q_j + R_2 y_{j-1} + S_2 y_j + T_2 = 0 \quad (6)$$

که در این معادلات  $Q_{j-1}$  و  $y_{j-1}$  به ترتیب مقدار دبی و عمق آب در گام زمانی  $i-1$  تا  $i$  در گره  $j-1$ ،  $Q_j$  و  $y_j$  مقدار دبی و عمق آب در گره  $j$  و  $L_1, M_1, R_1, S_1, T_1, L_2, M_2, R_2, S_2, T_2$  ضرایب محاسبه شده با مقادیر معلوم پارامترهای  $Q$  و  $y$  در گام زمانی  $i$  هستند. لازم به ذکر است مقدار عمق جریان در هر گره که منطبق بر مقطع عرضی برداشت شده از مسیر جریان می‌باشد از تفاضل تراز سطح آب،  $\eta$ ، و تراز بستر،  $h$ ، حاصل خواهد شد. فرم گسسته شده معادله‌ی (۱) بر اساس الگوی صریح معکوس با روش پرایزنم به قرار زیر خواهد بود:

$$\frac{\theta}{\Delta x} (Q_j^{i-1} - Q_{j-1}^{i-1}) + \frac{1-\theta}{\Delta x} (Q_j^i - Q_{j-1}^i) + \frac{\phi}{\Delta t} (A_{j-1}^i - A_{j-1}^{i-1}) + \frac{1-\phi}{\Delta t} (A_j^i - A_j^{i-1}) = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\phi}{\Delta t} (Q_j^i - Q_{j-1}^i) + \frac{1-\phi}{\Delta t} (Q_j^{i-1} - Q_{j-1}^{i-1}) + \frac{\tau Q}{A} \left[ \frac{\theta}{\Delta x} (Q_j^{i-1} - Q_{j-1}^{i-1}) + \frac{1-\theta}{\Delta x} (Q_j^i - Q_{j-1}^i) \right] \quad (8)$$

$$- \frac{Q^{\tau}}{A^{\tau}} \left[ \frac{\theta}{\Delta x} (y_j^{i-1} - y_{j-1}^{i-1}) + \frac{1-\theta}{\Delta x} (y_j^i - y_{j-1}^i) \right] + gy \left[ \left\{ \frac{\theta}{\Delta x} (y_j^{i-1} - y_{j-1}^{i-1}) + \frac{1-\theta}{\Delta x} (y_j^i - y_{j-1}^i) \right\} - S_o + S_f \right] = 0 \quad (9)$$

که در این معادلات ضرایب ثابت به قرار  $M_1 = \frac{\theta}{\Delta x} L_1 = -\frac{\theta}{\Delta x} L_2$

$$T_1 = \frac{1-\theta}{\Delta x} (Q_j^i - Q_{j-1}^i) + \frac{\phi}{\Delta t} y_{j-1}^i + \frac{1-\phi}{\Delta t} y_j^i, \quad S_1 = \frac{1-\phi}{\Delta t}, \quad R_1 = -\frac{\phi}{\Delta t}$$

$$\text{و } S_2 = \frac{\theta}{\Delta x} gy - \frac{\theta}{\Delta x} \frac{Q^2}{A^2}, \quad M_2 = -\frac{1-\phi}{\Delta t} + \frac{\tau Q}{\Delta x A}, \quad L_2 = -\frac{\phi}{\Delta t} - \frac{\theta}{\Delta x} \frac{\tau Q}{A}$$

هستند. اگر تعداد کل گره‌های محاسباتی  $Z$  باشد تعداد متغیرهای محاسباتی  $Z-1$  خواهد بود. با مشخص بودن مقدار  $Q_j$  و  $y_j$  در دو گام زمانی در مرز پایین دست، مقدار دبی و عمق آب در گره  $i-1$  از روابط زیر قابل محاسبه خواهد بود:

$$Q_{j-1} = \frac{R_1 (M_2 Q_j + S_2 y_j + T_2) - R_2 (M_1 Q_j + S_1 y_j + T_1)}{L_1 R_2 - R_1 L_2} \quad (10)$$

$$y_{j-1} = \frac{R_1 (M_2 Q_j + S_2 y_j + T_2) - L_2 (M_1 Q_j + S_1 y_j + T_1)}{L_1 R_2 - R_1 L_2} \quad (11)$$

به منظور حفظ شرایط پایداری حل، از معیار کورانت، فردریک و لووی که به قرار زیر است استفاده می‌شود:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{U_o + c} = \frac{\Delta x}{U_o + \sqrt{gy_o}} \quad (12)$$

### مدل عددی نیمه ضمنی

در این بخش مدل نیمه ضمنی برای حل معادلات هیپربولیک سنت‌ونانت ارائه شده است. بدین منظور از الگوی چهار نقطه‌ای پرایزنم برای گسسته‌سازی مشتقات مکانی استفاده شده است. طبق این روش می‌توان نوشت:

i باید مشخص باشند با کمک روش Upwind از معادله زیر تعیین خواهد شد:

$$(UQ)_i^n = \frac{Q_{i+\frac{1}{2}}^n + Q_{i-\frac{1}{2}}^n}{\tau} \begin{cases} U_{i-\frac{1}{2}}^n & \text{if } \frac{Q_{i+\frac{1}{2}}^n + Q_{i-\frac{1}{2}}^n}{2} \geq 0 \\ U_{i+\frac{1}{2}}^n & \text{if } \frac{Q_{i+\frac{1}{2}}^n + Q_{i-\frac{1}{2}}^n}{2} < 0 \end{cases} \quad (23)$$

### الگوریتم حل معادلات

در هر گام زمانی مجهولات  $F_{i+\frac{1}{2}}^n$  و  $\eta_i^{n+1}$  در معادلات (۸) و (۱۱) مجموعه‌ای از معادلات غیرخطی را در شبکه محاسباتی تشکیل خواهند داد. به منظور تسهیل در حل و همچنین کاهش حجم محاسبات می‌توان با جاگذاری عبارت  $Q_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}$  از معادله‌ی (۱۰) در معادله‌ی (۷) سیستم معادلات را به سیستم یک مجهولی برحسب تراز آب،  $\eta_i^{n+1}$  به فرم زیر بیان کرد:

$$V_i(\eta_i^{n+1}) + p_{i-\frac{1}{2}}^n(\eta_{i-1}^{n+1}) + d_i^n(\eta_i^{n+1}) + p_{i+\frac{1}{2}}^n(\eta_{i+1}^{n+1}) = f_i^n \quad (24)$$

که در این معادلات  $d_i^n$ ،  $p_{i\pm\frac{1}{2}}^n$  و  $f_i^n$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$p_{i\pm\frac{1}{2}}^n = -\frac{g(\theta\Delta t)^\gamma A_{i\pm\frac{1}{2}}^n}{\Delta x_{i\pm\frac{1}{2}} \left(1 + \gamma^n \frac{\Delta t}{\tau}\right)} d_i^n = -p_{i+\frac{1}{2}}^n - p_{i-\frac{1}{2}}^n \quad (25)$$

$$F_i^n = V_i(\eta_i^n) - (1-\theta)\Delta t \left[ Q_{i+\frac{1}{2}}^n - Q_{i-\frac{1}{2}}^n \right] - \theta\Delta t \left[ \frac{F_{i+\frac{1}{2}}^n}{\left(1 + \gamma^n \frac{\Delta t}{\tau}\right)} - \frac{F_{i-\frac{1}{2}}^n}{\left(1 + \gamma^n \frac{\Delta t}{\tau}\right)} \right] \quad (26)$$

سیستم معادلات ارائه شده در هر گام زمانی n در معادله‌ی (۲۶) را می‌توان در قالب ماتریسی زیر خلاصه‌نویسی نمود:

$$V(\eta) + M\eta = f \quad (27)$$

که در این معادله  $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)^T$  بردار مجهولات است. تعاریف عبارات معادله‌ی (۲۷) به قرار زیر است:

$$V(\eta) = \begin{bmatrix} V_1(\eta_1) \\ V_2(\eta_2) \\ \dots \\ V_N(\eta_N) \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} d_1 & p_{\frac{1}{2}} & \dots & 0 \\ p_{\frac{1}{2}} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & p_{N-\frac{1}{2}} \\ 0 & \dots & p_{N-\frac{1}{2}} & d_N \end{bmatrix} \quad f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_N \end{bmatrix} \quad (28)$$

سیستم معادلات (۲۷)، سیستم غیرخطی است. ماتریس ضرایب M متقارن و سه قطری است که تمام درایه‌های قطر اصلی آن مثبت

$$\eta_{i+\frac{1}{2}}^n = \begin{cases} \eta_i & \text{if } Q_{i+\frac{1}{2}} \geq 0 \\ \eta_{i+1} & \text{if } Q_{i+\frac{1}{2}} < 0 \end{cases} \quad (19)$$

مقدار تراز کف نیز از رابطه‌ی زیر محاسبه خواهد شد:

$$-h_{i+\frac{1}{2}} = \min(-h_i, -h_{i+1}) \quad (20)$$

گسسته‌سازی معادله‌ی مومنتوم باید به گونه‌ای انجام پذیرد که علاوه بر برقراری ضوابط و شرایط گسسته‌سازی عددی، مدل‌سازی میدان جریان باید به طوری باشد که با توجه به اشتراک عبارت جابجایی در اصل بقای انرژی و مومنتوم، هر دو اصل برقرار شوند. اما با توجه به اینکه انرژی کمیت اسکالر و مومنتوم کمیت برداری است و همچنین اصل بقای انرژی مبتنی بر نیروهای داخلی و اصل بقای مومنتوم مبتنی بر نیروهای خارجی است این دو اصل تفاوت ماهیتی با یکدیگر دارند. چاو (۱۹۵۹) بیان می‌دارد در جریان‌های متغیر تدریجی افت انرژی درونی سیال معادل با افت انرژی ناشی از عوامل خارجی است به عبارتی دیگر هر دو اصل بقای انرژی و مومنتوم در جریان‌های متغیر تدریجی ضامن برقرار یکدیگر هستند. تورو (۱۹۹۷) بیان می‌کند زمانی که ناپیوستگی جریان نه به دلیل تشکیل شوک بلکه به دلیل هندسه مجرا ایجاد شود برقراری اصل بقای مومنتوم تضمین‌کننده برقراری اصل بقای انرژی نیز خواهد بود. بنابراین با توجه به مطالب فوق‌الذکر، در این تحقیق از گسسته‌سازی معادله مومنتوم برای حل معادلات استفاده شده است.

### گسسته‌سازی بر اساس برقراری اصل بقای مومنتوم

این نوع گسسته‌سازی، مبتنی بر کاربرد الگوی اختلاف محدود مرکزی برای انتگرال‌گیری مکانی تراز سطح آزاد آب و الگوی نیمه ضمنی برای گسسته‌سازی زمانی است. در نتیجه برای گسسته‌سازی گرادیان سطح آزاد آب از روش پرایزنم و برای عبارت جابجایی از الگوی صریح استفاده خواهد شد. معادله‌ی نهایی پس از گسسته‌سازی به قرار زیر خواهد بود:

$$\left(1 + \frac{\gamma^n}{A_{i+\frac{1}{2}}^n}\right) Q_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} + gA_{i+\frac{1}{2}}^n \theta \frac{\Delta t}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} (\eta_{i+1}^{n+\theta} - \eta_i^{n+\theta}) = F_{i+\frac{1}{2}}^n \quad (21)$$

که در معادله‌ی (۲۱)

$$F_{i+\frac{1}{2}}^n = Q_{i+\frac{1}{2}}^n - \Delta t \frac{(UQ)_{i+1}^n - (UQ)_i^n}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} - gA_{i+\frac{1}{2}}^n \theta \Delta t \left( \frac{\eta_{i+1}^n - \eta_i^n}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} \right) \quad (22)$$

است. در معادله‌ی (۲۲)، مقدار  $A_{i+\frac{1}{2}}^n$  از رابطه

$$A_{i+\frac{1}{2}}^n = A(x_{i+\frac{1}{2}}, \frac{\eta_{i+1}^n - \eta_i^n}{\tau})$$

که برای محاسبه‌ی F در گره‌های محاسباتی با اندیس صحیح UQ

برای روندیابی جریان غیردائمی، از داده‌های حوضه دوآب صمصامی که یکی از زیرحوضه‌های کارون بزرگ هست استفاده شده است. این حوضه آبریز با مساحتی معادل ۱۷۷ کیلومتر مربع در قسمت غربی استان چهارمحال بختیاری و در فاصله حدود ۱۰۰ کیلومتری شهرکرد واقع شده است (شکل ۲). این حوزه از لحاظ جغرافیایی در حدفاصل طول‌های شرقی  $2^{\circ} 10' 50''$  شرقی تا  $17^{\circ} 26' 50''$  و عرض‌های شمالی  $51^{\circ} 16' 5''$  تا  $33^{\circ} 15' 1''$  واقع شده است. شیب متوسط حوضه ۱۷ درصد است. دزداران و کوفی دو چشمه پر آب هستند که از به هم پیوستن آن‌ها به یکدیگر در مجاورت روستای صمصامی رودخانه دوآب صمصامی شکل می‌گیرد. طول رودخانه‌های دزداران، کوفی و دوآب صمصامی به ترتیب ۹، ۱۳ و ۱۴ کیلومتر است. در این تحقیق، از داده‌های ثبت شده در بازه‌ای از رودخانه دوآب صمصامی به طول ۳/۵ کیلومتر در حدفاصل پایین‌تر از اتصال رودخانه‌های آب کوفی و آب‌دزداران در موقعیت جغرافیایی  $3^{\circ} 18' 50''$  طول شرقی و  $55^{\circ} 9' 32''$  عرض شمالی تا مجاورت پل دزک سفلی در موقعیت جغرافیایی  $4^{\circ} 20' 50''$  طول شرقی تا  $55^{\circ} 9' 40''$  عرض شمالی استفاده شده است. بازه‌ی مورد مطالعه به لحاظ داشتن دشت‌های سیلابی وسیع و همچنین وجود اراضی کشاورزی و مزارع پرورش ماهی در حاشیه رودخانه از اهمیت خاصی برای مطالعات پخش سیلاب برخوردار است. در شکل ۳ موقعیت بازه مورد مطالعه با نقشه توپوگرافی با مقیاس ۱:۲۵۰۰۰ نشان داده شده است. این بازه به ۱۳ زیربازه با استفاده از ۱۴ مقطع عرضی به گونه‌ای تقسیم‌بندی شده است که مشخصات آن‌ها از قبیل شیب، تغییرات زبری، تغییرات عرض و ... همگن باشند. شکل ۴ موقعیت مقاطع عرضی برداشت شده در بازه مطالعاتی را نشان می‌دهد. در شکل ۵ مقاطع عرضی ابتدایی و انتهایی بازه مورد مطالعه نشان داده شده است. جدول ۱ فاصله‌ی بین مقاطع عرضی و شیب هر زیربازه را نشان می‌دهد. به منظور بستن معادلات، از روابط به دست آمده بین عمق و سایر خصوصیات هیدرولیکی جریان در قالب معادله‌ی برازش یافته‌ی نمایی  $\Phi = ay^b$  در هر مقطع استفاده شد که در معادله  $\Phi$  بیانگر خصوصیات جریان شامل مساحت مقطع عرضی، عرض سطح آب، محیط خیس شده و سرعت جریان است. ضرایب  $a$  و  $b$  برای چهارده مقطع عرضی در جدول ۲ ارائه شده‌اند.

### واسنجی و صحت‌سنجی مدل

ضریب زبری مانینگ، پارامتری بوده است که در مرحله واسنجی و صحت‌سنجی مدل‌های صریح معکوس و نیمه‌ضمنی مورد ارزیابی قرار گرفته است. بدین منظور از یک هیدروگراف همزمان ثبت شده در دو مقطع ورودی و خروجی برای واسنجی و صحت‌سنجی مدل‌ها استفاده شد. این هیدروگراف در شکل ۶ نمایش داده شده‌اند.

و بقیه منفی هستند. مقدار مجهولات را می‌توان با استفاده از روش‌های مختلف مانند روش تکرار و خطا حل نمود. بعد از اینکه مقدار  $\eta^{n+1}$  به دست آمد مقدار عبارت  $Q^{n+1}$  به راحتی برحسب مقدار  $\eta^{n+1}$  با استفاده از معادله ۱۰ قابل محاسبه خواهد بود. در کل، الگوهای عددی مرتبه اول دارای خطای میرایی و الگوهای مرتبه دوم نیز دارای خطای پراکندگی عددی غیرواقعی می‌باشند که باعث ایجاد نوساناتی بخصوص در نواحی ناپیوسته جریان خواهند شد. به منظور بهبود دقت مدل عددی برای حل پایدار بدون بررسی شرط پایداری حل اما برقراری شرط TVD از روش محدود کننده شار استفاده گردید. الگوی انتخابی در این مدل، دارای دقت مرتبه اول است. با استفاده از روش شار محدود کننده، الگوی عددی دارای دقت مرتبه اول به الگوی عددی دارای دقت مرتبه دوم ارتقا می‌یابد. به همین دلیل روش محدود کننده شار در تقریب‌سازی عبارت جابجایی، به کار گرفته شد. بر مبنای معادله گسسته شده، روش محدود کننده شار به عبارت جابجایی،  $UQ$ ، مقدار تصحیح کننده‌ای را با استفاده از تابع محدود کننده شار،  $\psi$ ، اضافه می‌کند که مقدار آن تابعی از نظم و ترتیب مقادیر عددی به دست آمده برای عبارت جابجایی است. بنابراین، تقریب عبارت جابجایی به فرم زیر بازنویسی می‌شود:

$$(UQ)_x \approx \frac{[(UQ)_{i+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta x}{2} \psi(r_{i+\frac{1}{2}}) \Delta(UQ)_{i+\frac{1}{2}}] - [(UQ)_{i-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta x}{2} \psi(r_{i-\frac{1}{2}}) \Delta(UQ)_{i-\frac{1}{2}}]}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} \quad (29)$$

که در این معادله  $(UQ)_i$  با استفاده از معادله‌ی (۲۳) به دست می‌آید. عبارت جابجایی  $(UQ)_{i+\frac{1}{2}}$  به قرار معادله‌ی زیر خواهد بود:

$$\Delta(UQ)_{i+\frac{1}{2}} = \begin{cases} (UQ)_{i+\frac{1}{2}} - (UQ)_{i-\frac{1}{2}} & \text{if } \frac{U_{i-\frac{1}{2}} + U_{i+\frac{1}{2}}}{2} \geq 0 \\ (UQ)_{i+\frac{1}{2}} - (UQ)_{i-\frac{1}{2}} & \text{if } \frac{U_{i-\frac{1}{2}} + U_{i+\frac{1}{2}}}{2} < 0 \end{cases} \quad (30)$$

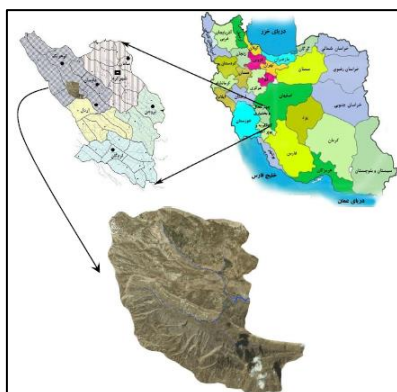
همسازی داده‌ها در نقطه‌ی  $X_{i+\frac{1}{2}}$  به فرم زیر تعریف می‌شود:

$$r_{i+\frac{1}{2}} = \begin{cases} \frac{U_{i-\frac{1}{2}} - U_{i+\frac{1}{2}}}{U_{i-\frac{1}{2}} + U_{i+\frac{1}{2}}} & \text{if } \frac{U_{i-\frac{1}{2}} + U_{i+\frac{1}{2}}}{2} \geq 0 \\ \frac{U_{i-\frac{1}{2}} - U_{i+\frac{1}{2}}}{U_{i-\frac{1}{2}} + U_{i+\frac{1}{2}}} & \text{if } \frac{U_{i-\frac{1}{2}} + U_{i+\frac{1}{2}}}{2} < 0 \end{cases} \quad (31)$$

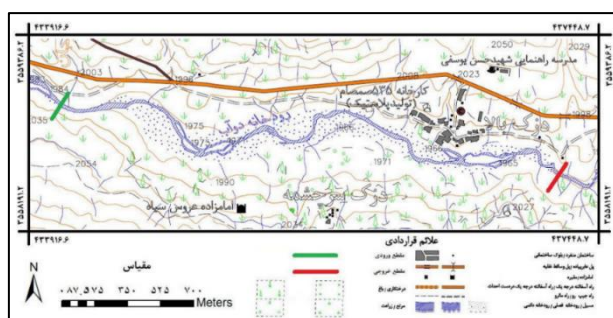
### شبیه‌سازی عددی

#### بازه‌ی مورد مطالعه

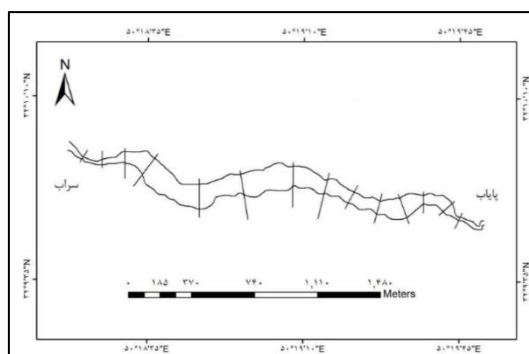
در این تحقیق، به منظور ارزیابی مدل‌های عددی صریح و ضمنی



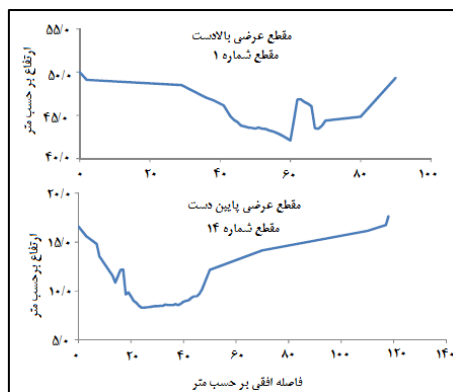
شکل ۲- موقعیت زیرحوضه دوآب صمصامی در استان چهارمحال و بختیاری



شکل ۳- بازه‌ی مورد مطالعه در رودخانه‌ی دوآب صمصامی



شکل ۴- پلان و موقعیت مقاطع عرضی بازه‌ی مورد مطالعه



شکل ۵- نقشه مقاطع عرضی سراب و پایاب در بازه مورد مطالعه

جدول ۱- خصوصیات مقاطع عرضی برداشت شده در بازه مورد مطالعه

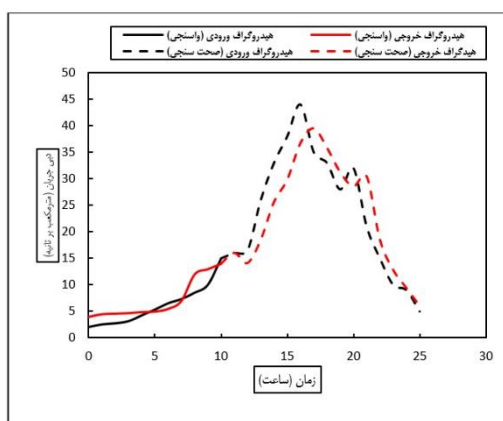
زیربازه	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳
$\Delta x$	۱۵۵	۱۹۰	۲۱۵	۴۷۰	۳۵۵	۴۱۵	۲۶۵	۳۲۵	۱۳۵	۱۹۵	۱۶۵	۲۰۰	۱۲۵
$\times 10^{-1} S_0$	۱۶/۱	۱۴/۲	۱۰/۲	۸/۵	۶/۸	۸/۴	-۰/۰۱۰۲	۱۰/۲	۸/۹	۱۰/۳	۱۴/۵	۱۴	۱۷/۶

جدول ۲- ضرایب a و b برای معادله برازش یافته نمای بین عمق جریان و پارامترهای هیدرولیکی مقاطع عرضی

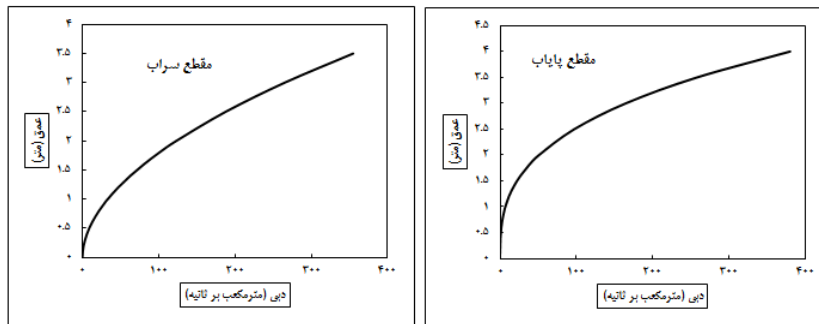
شماره مقطع	A		T		U		P	
	b	a	b	a	b	a	b	a
۱	۱/۳۴۹۴	۱۶/۷۲۶	۱۹/۶۳۳	۰/۴۸۲۱	۱/۲۶۷۴	۰/۶۸۳۷	۵۰/۶۷۶	۰/۵۳۳۵
۲	۱/۶۵۶۶	۳۲/۲۸۲	۵۰/۳۶۲	۰/۶۶۰۱	۲/۸۰۰۹	۰/۲۳۶۷	۳۹/۱۵۵	۱/۳۲۱۴
۳	۱/۹۸۴۶	۲۶/۱۰۲	۸۰/۸۷۴	۰/۱۰۰۹	۱/۷۸۹۷	۰/۹۴۲۲	۴۵۴/۶۶	۰/۵۸۶۹
۴	۲/۵۷۰۵	۳۵/۰۹۶	۱۱۰/۶۱	۱/۰۱۵۹	۰/۶۸۵۳	۲/۸۶۴	۶۴۲/۳	۱/۳۲۳۳
۵	۱/۷۸۴۴	۴۸/۸۹۹	۹۱/۳۴	۰/۶۱۶۷	۲/۳۰۰۶	۰/۵۸۱۷	۱۰/۱۰۶	۰/۹۱۹۳
۶	۲/۷۴۲۶	۱۹/۶۶۸	۹۰/۱۶۳	۰/۷۳۹	۱/۴۷۵۲	۱/۰۱۸۹	۷۶/۵۵۲	۱/۳۲۵
۷	۲/۷۲۰۲	۲/۵۷۵۳	۵۵/۶۱	۰/۸۳۸۱	۰/۶۱۳	۱/۵۷۵۴	۳۶/۳۷۴	۱/۴۶
۸	۲/۳۳۹۵	۳۲/۵۶۹	۷۸/۸۹۱	۱/۲۷۷۳	۱/۳۰۶۳	۰/۸۲۳۸	۱۶۲/۳۷	۱/۰۷۸۳
۹	۲/۰۰۹۳	۷۳/۷۰۹	۱۵۵/۲۵	۰/۷۴۶۲	۱/۷۹۹۱	۰/۹۲۸	۱۸۸/۳۹	۱/۰۶۹۹
۱۰	۴/۰۳۸۲	۱۴/۸۳۷	۱۵۱/۸۱	۱/۱۷۴۳	۰/۶۹۹۵	۲/۱۲۰۳	۱۹۴/۰۹	۱/۰۳۹۹
۱۱	۳/۲۵۳۴	۵/۳۱۴۶	۶/۲۲۸۸	۳/۴۰۳۴	۲/۲۹۳۸	۰/۱۸۴۱	۶/۱۳۲۱	۴/۰۲۷۶
۱۲	۵/۵۶۴۹	۷/۸۴۴۵	۶۲/۳۳۵	۰/۲۲۹۶	۱/۱۴۶۷	۱/۱۵۰۳	۶۴/۵۸۷	۰/۸۷۰۷
۱۳	۰/۹۵۱۳	۸/۹۶۵۳	۹/۱۰۷۵	۱/۶۴۳۱	۲/۷۶۴۹	۰/۳۴۷۳	۱۱/۸۶۸	۱/۸۷۷۶
۱۴	۲/۱۹۲۳	۳/۶۱۸۱	۱۹/۰۵۵	۰/۴۹۱۸	۱/۴۴۳۳	۰/۸۵۴۷	۱۶/۱۶۱	۱/۱۳۱۳

پایین دست به بالادست و در مدل نیمه‌ضمنی روندیابی از بالادست به پایین دست انجام شده است. در مدل صریح معکوس در مرز پایین دست و بالادست از منحنی دبی-اشل برای تعیین عمق جریان استفاده شده است که در شکل ۷ نشان داده شده‌اند. منحنی دبی-اشل مقطع پایین دست به عنوان شرط مرزی مدل نیمه‌ضمنی استفاده شد.

از قسمتی از داده‌های هیدروگراف برای واسنجی و مابقی داده‌ها برای صحت‌سنجی استفاده شدند. با اعمال تغییرات در میزان ضریب زبری مانینگ با توجه به خصوصیات مواد بستری بازه‌ی مورد مطالعه، مقدار شاخص‌های ارزیابی عملکرد مدل محاسبه می‌شود. این تغییرات تا رسیدن به بالاترین مقدار شاخص‌های ارزیابی عملکرد ادامه پیدا می‌کند. لازم به ذکر است در مدل صریح معکوس روندیابی از



شکل ۶- هیدروگراف ورودی و خروجی از بازه برای واسنجی و صحت‌سنجی دو مدل



شکل ۷- منحنی دبی-اشل در مقاطع بالادست و پایین دست بازه‌ی مورد مطالعه

اما نکته‌ای که باید به آن توجه داشت اینکه شاخص‌های ذکر شده در معادلات (۳۲) تا (۳۵) بیان کننده میزان خطای متوسط مدل هستند و هیچ گونه اطلاعاتی در خصوص توزیع خطا ارائه نمی‌دهند. بنابراین استفاده از معیاری که قابلیت ارزیابی قدرت مدل در میزان شبیه‌سازی را ارزیابی کند از اهمیت بسیار زیادی برخوردار است. بدین منظور وایت و همکاران رابطه‌ی زیر را ارائه نمودند (White et al., 1973):

$$DR = \text{Log} \left( \frac{\text{مقدار پیش بینی شده}}{\text{مقدار مشاهده شده}} \right) \quad (36)$$

این شاخص به عنوان معیاری برای خطا توسط محققین مختلفی مانند سو و چئونگ، دنگ و همکاران، کاشفی‌پور و فالکونر، تیفور و سینگ مورد استفاده قرار گرفته است (Seo and Cheong, 1998, Kashefipour and Falconer, 2002, Deng et al., 2002, Tayfurand Singh, 2005). اما یکی از محدودیت‌های این معیار عدم قابلیت آن برای مقادیر منفی است. برای غلبه بر این مشکل، شاخص اختلاف توسعه یافته‌ی نسبی<sup>(۱)</sup> (DDR) توسط نوری و همکاران ارائه شد (Noori et al., 2010):

$$DDR = \frac{\text{مقدار پیش بینی شده}}{\text{مقدار مشاهده شده}} - 1 \quad (37)$$

به منظور قضاوت بهتر بر اساس شاخص DDR، تابع گوسین مقادیر DDR محاسبه می‌شود. برای نیل به این هدف در ابتدا باید مقادیر DDR استاندارد شوند. سپس با استفاده از تابع گوسین، مقادیر استاندارد شده DDR محاسبه می‌شوند. در نهایت منحنی تغییرات مقادیر تابع گوسین استاندارد شده (روی محور عمودی) در برابر مقادیر DDR استاندارد شده (روی محور افقی) ترسیم می‌شود. تمرکز نقاط حول محور عمودی و همچنین مقادیر بیشتر روی محور عمودی نشان از دقت زیادتر مدل خواهند بود. در شکل ۸ هیدروگراف شبیه‌سازی شده برای مدل‌های صریح معکوس نشان داده شده است. این هیدروگراف به دو بخش برای انجام مراحل واسنجی و صحت‌سنجی تقسیم‌بندی شده است. در شکل ۹ توزیع خطای مدل

### شاخص‌های ارزیابی عملکرد مدل‌ها

عملکرد هر دو مدل در با استفاده از شاخص‌های ضریب ناش-سانکلیف (N.S)، ضریب تبیین ( $R^2$ )، مجذور میانگین مربعات خطا (RMSE) و مجذور میانگین مربعات خطای نرمال شده (NRMSE) با فرمول‌های زیر مورد ارزیابی قرار گرفت:

$$N.S. = 1 - \frac{\sum_{i=1}^N (X_{oi} - X_{ei})^2}{\sum_{i=1}^N (X_{oi} - \bar{X}_o)^2} \quad (32)$$

$$R^2 = \frac{[\sum_{i=1}^N (X_{oi} - \bar{X}_o)(X_{ei} - \bar{X}_e)]^2}{\sum_{i=1}^N (X_{oi} - \bar{X}_o)^2 \sum_{i=1}^N (X_{ei} - \bar{X}_e)^2} \quad (33)$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (X_o - X_e)^2}{N}} \quad (34)$$

$$NRMSE = \frac{RMSE}{\bar{X}_o} \times 100 \quad (35)$$

که در این معادلات  $X_o$  و  $X_e$  به ترتیب مقدار دبی مشاهداتی و پیش‌بینی شده،  $\bar{X}_o$  و  $\bar{X}_e$  به ترتیب مقدار متوسط دبی مشاهداتی و پیش‌بینی شده هستند. چنانچه مقدار ضریب N.S. برابر با یک باشد نشان از تناسب کامل بین داده‌های مشاهداتی و پیش‌بینی شده دارد. مقدار N.S. صفر نیز نشان می‌دهد که میانگین داده‌های اندازه‌گیری شده و شبیه‌سازی شده دارای انطباق مناسبی هستند. اگر N.S. بزرگتر از ۰/۷۵ باشد، نتایج شبیه‌سازی خوب توصیف می‌شود، اما زمانی که مقادیر N.S. بین ۰/۳۶ و ۰/۷۵ است، نتایج مدل رضایت بخش به شمار خواهد رفت. مقدار منفی این ضریب حاکی از عدم کارایی مدل می‌باشد. ضریب تبیین  $R^2$  نیز در محدوده [۰،۱] میزان انطباق داده‌های مشاهداتی و محاسباتی را نشان می‌دهد. هر چه مقدار این ضریب به ۱ نزدیک‌تر باشد به انطباق کامل‌تر داده‌ها دلالت خواهد شد. مقدار NRMSE طبق محدوده‌های زیر، دقت مدل را پیش‌بینی می‌کند (Mihob et al., 2016):

کارکرد عالی: اگر  $NRMSE < 10\%$

کارکرد خوب: اگر  $10\% < NRMSE < 20\%$

کارکرد متوسط: اگر  $20\% < NRMSE < 30\%$

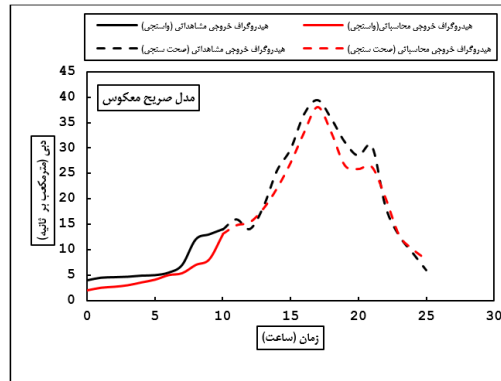
کارکرد ضعیف: اگر  $NRMSE > 30\%$

1- Developed discrepancy ratio

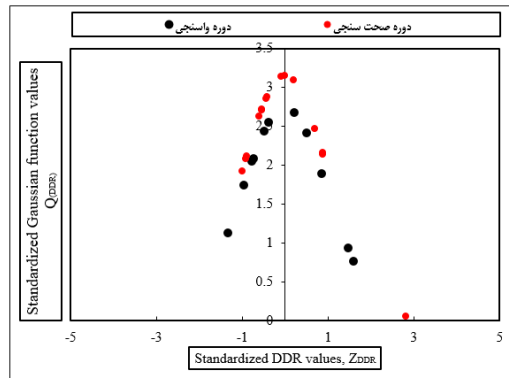


۳۵/۰۳ و ۲۴/۶ قرار گرفته است که بیانگر عملکرد ضعیف و متوسط مدل است. مقدار ضریب تبیین  $0/9233$  و  $0/9886$  برای دوره‌های واسنجی و صحت‌سنجی نیز نشان از انطباق زیاد داده‌های محاسباتی و مشاهداتی دارد. طبق بیشترین مقدار به‌دست‌آمده برای  $Q_{DDR}$ ، کارکرد مدل در دوره صحت‌سنجی با مقدار  $3/146$  بهتر از کارکرد آن در دوره واسنجی با مقدار  $2/672$  بوده است.

صریح معکوس برای هیدروگراف خروجی ارائه شده است. جدول ۳ مقادیر عددی شاخص‌های تدقیق را برای مدل صریح معکوس نشان می‌دهد. طبق این جدول، ضریب  $NS$  مدل صریح معکوس در دوره‌ی واسنجی و صحت‌سنجی به ترتیب  $0/5223$  و  $0/9352$  به‌دست‌آمده است که به ترتیب در محدوده‌ی رضایت‌بخش و خوب قرار دارند. مقدار شاخص  $NRMSE$  در دوره‌های واسنجی و صحت‌سنجی



شکل ۸- هیدروگراف خروجی شبیه‌سازی شده‌ی دوره‌های واسنجی و صحت‌سنجی بازه مورد مطالعه در مدل صریح معکوس



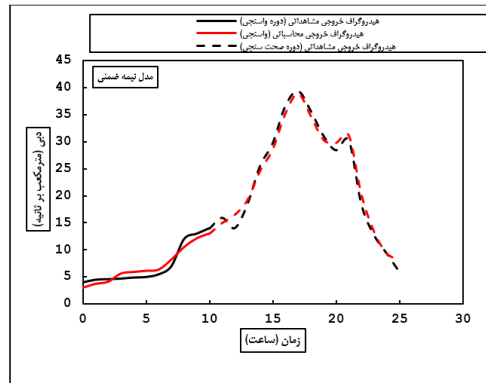
شکل ۹- تغییرات مقدار  $Q_{DDR}$  در برابر مقادیر  $Z_{DDR}$  برای مدل صریح معکوس

جدول ۳- خلاصه نتایج محاسبات فرآیند واسنجی و صحت‌سنجی مدل صریح معکوس

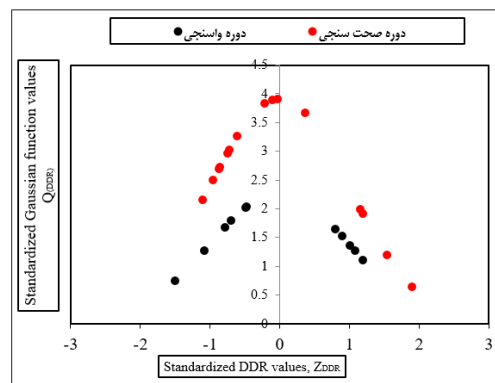
دوره واسنجی		دوره صحت‌سنجی		تعداد داده
مشاهداتی	محاسباتی	مشاهداتی	محاسباتی	
۱۵	۱۰			متوسط
۲۲/۰۳	۲۳/۵	۵/۱۲	۷/۲	ماکزیمم
۳۸	۳۹/۴۵	۱۳	۱۴	مینیمم
۸	۶	۲	۴	انحراف معیار
$8/935$	$10/59$	$3/24$	$3/823$	
$0/9352$		$0/82235$		N.S
$0/9886$		$0/9233$		$R^2$
$2/604$		$2/522$		RMSE
$24/6$		$35/03$		NRMSE
$3/146$		$2/672$		$Q_{DDR} (max)$

شکل ۹ هیدروگراف‌های شبیه‌سازی‌شده در دوره‌ی واسنجی و صحت‌سنجی را با استفاده از مدل نیمه ضمنی نمایش می‌دهد. توزیع خطای مدل نیمه ضمنی در شکل ۱۱ به نمایش در آمده است. جدول ۴ خلاصه‌ی شاخص‌های تدقیق آماری را نشان می‌دهد.

با توجه به مقادیر به‌دست‌آمده در جدول ۳ برای مدل صریح معکوس، عملکرد آن در دوره‌ی صحت‌سنجی نسبت به دوره واسنجی بهتر شده است. در مجموع می‌توان گفت عملکرد مدل صریح معکوس قابل‌قبول بوده است.



شکل ۱۰- هیدروگراف خروجی مشاهداتی و محاسباتی دوره‌های واسنجی و صحت‌سنجی بازه‌ی مورد مطالعه در مدل نیمه ضمنی



شکل ۱۱- تغییرات مقدار  $Q_{DDR}$  در برابر مقادیر  $Z_{DDR}$  برای مدل نیمه ضمنی

صحت‌سنجی شده در هر یک از زیربازه‌ها ارائه شده است. در شکل ۱۲، هیدروگراف سیلاب ورودی و خروجی مشاهداتی برای ارزیابی مدل‌ها نشان داده شده است. علاوه بر دو مدل صریح معکوس و نیمه ضمنی، شبیه‌سازی این دو هیدروگراف توسط مدل HEC-RAS نیز انجام شد. شکل‌های ۱۳ تا ۱۵ به ترتیب عملکرد شبیه‌سازی مدل‌های HEC-RAS، نیمه ضمنی و صریح معکوس را نشان می‌دهند. در این سه شکل، دبی‌های مشاهداتی و محاسباتی در یک محور مختصات ترسیم شده‌اند و پراکنش آن‌ها حول خط راست با شیب ۱:۱ نمایش داده است. شکل ۱۶ منحنی  $Q_{DDR}$ - $Z_{DDR}$  را برای هر سه مدل نشان می‌دهد. بیشترین مقدار  $Q_{DDR}$  برای مدل‌های HEC-RAS، نیمه ضمنی و صریح معکوس به ترتیب ۲/۴۹، ۱۶/۱۳ و ۲/۶۱۱ هستند.

مدل نیمه ضمنی طبق شاخص‌های تدقیق به‌دست‌آمده در جدول ۴ از دقت و عملکرد بسیار مطلوب‌تری هم در دوره واسنجی و هم در دوره‌ی صحت‌سنجی برخوردار است. مقدار ضریب NS در دوره واسنجی و صحت‌سنجی به ترتیب ۰/۹۲۳۷ و ۰/۹۸۴۳ به دست آمده است که نشان‌دهنده عملکرد بسیار مطلوب مدل است. مقادیر ۱۴/۰ و ۱۲/۱ برای شاخص NRMSE نیز به ترتیب در دوره‌های واسنجی و صحت‌سنجی مبین کارکرد خوب مدل می‌باشند. چون مقدار  $Q_{DDR}$  در فرآیند صحت‌سنجی (۳/۹۰۹) بیشتر از مقدار آن در دوره واسنجی (۲/۰۲۸) است نشان‌دهنده دقت بالای مدل نیمه ضمنی در فرآیند صحت‌سنجی نسبت به فرآیند واسنجی است. از داده‌های این جدول می‌توان نتیجه گرفت عملکرد مدل نیمه ضمنی بسیار مطلوب و قابل‌قبول بوده است. در جدول ۵ مقادیر ضریب زبری واسنجی و

جدول ۴- خلاصه نتایج محاسبات فرآیند واسنجی و صحت‌سنجی مدل ضمنی

دوره واسنجی		دوره صحت‌سنجی		تعداد داده
مشاهداتی	محاسباتی	مشاهداتی	محاسباتی	
۱۰	۱۵			
۷/۲	۲۳/۵	۲۳/۶۹	۲۳/۶۹	متوسط
۱۴	۳۹/۴۵	۲۸/۹	۲۸/۹	ماکزیمم
۴	۶	۸/۲	۸/۲	مینیمم
۳/۸۲۳	۱۰/۵۹	۹/۸۵۷	۹/۸۵۷	انحراف معیار
۰/۹۲۳۷	۰/۹۸۴۳			N.S
۰/۹۶۴۴	۰/۹۹۴۳			R <sup>2</sup>
۱/۰۱	۱/۲۸۳			RMSE
۱۴/۰	۱۲/۱			NRMSE
۲/۰۲۸	۳/۹۰۹			Q <sub>DDR</sub> (max)

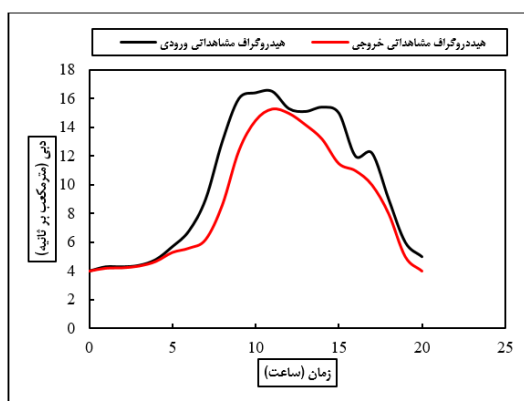
جدول ۵- ضریب زبری زیربازه‌های محدوده مورد مطالعه پس از واسنجی و صحت‌سنجی

شماره زیر بازه	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳
ضریب زبری	۰/۰۲۹	۰/۰۲۶	۰/۰۲۴	۰/۰۲۴	۰/۰۲۴	۰/۰۲۶	۰/۰۲۷	۰/۰۲۸	۰/۰۲۵	۰/۰۲۷	۰/۰۲۷	۰/۰۲۹	۰/۰۳۴

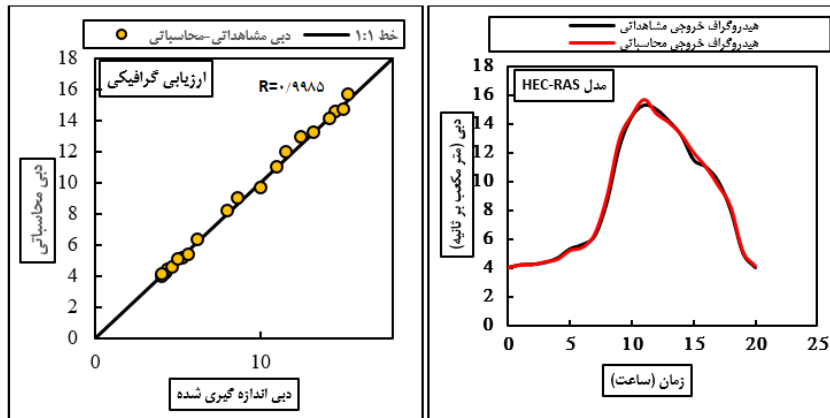
### نتیجه‌گیری

روندیابی سیلاب از طریق حل معادلات سنت‌ونانت به کمک روش‌های عددی صریح و ضمنی موضوع اصلی این پژوهش است. روش صریح مبتنی بر الگوی پرایزمن به‌صورت روندیابی معکوس مورد استفاده قرار گرفته است. مدل عددی نیمه ضمنی نیز مبتنی بر الگوی پرایزمن و به‌کارگیری الگوی Upwind ارائه شده است. همچنین برای بستن معادلات به دست آمده از این مدل، از معادلاتی که بین عمق جریان و دیگر خصوصیات هیدرولیکی جریان به دست آمد، استفاده گردید. نتایج زیر از انجام این پژوهش حاصل شد:

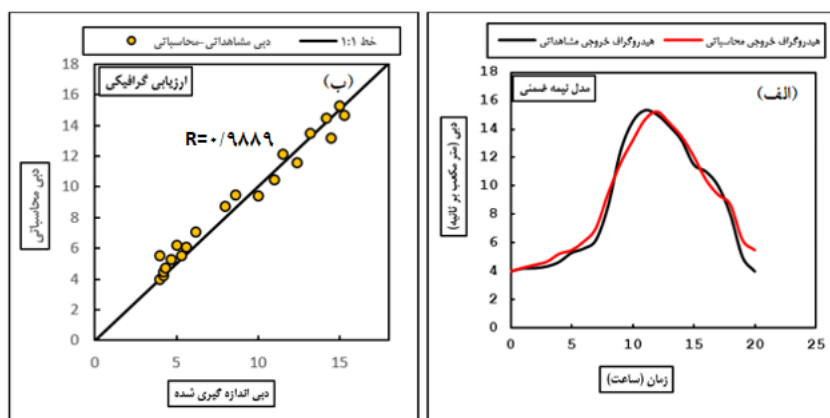
همان‌طور که مشخص هست عملکرد مدل HEC-RAS نسبت به مدل‌های نیمه ضمنی و صریح معکوس بسیار بهتر است. در مقام مقایسه، مدل نیمه ضمنی نیز کارکرد بسیار مناسب‌تری نسبت به مدل صریح داشته است. خلاصه نتایج مقادیر شاخص‌های تدقیق هیدروگراف شکل ۱۲ در جدول ۶ ارائه شده‌اند. مقدار ضریب NS در هر سه مدل بیشتر از ۰/۷۵ است. دو مدل ضمنی و صریح معکوس عملکرد مناسبی برای شبیه‌سازی هیدروگراف سیل دارند اما دقت مدل نیمه ضمنی بیشتر از مدل صریح معکوس است.



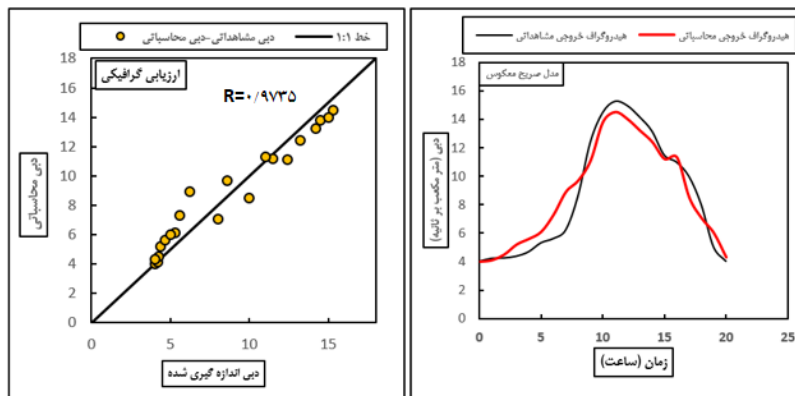
شکل ۱۲- هیدروگراف ورودی و خروجی مشاهداتی برای ارزیابی مدل‌ها بعد از واسنجی و صحت‌سنجی



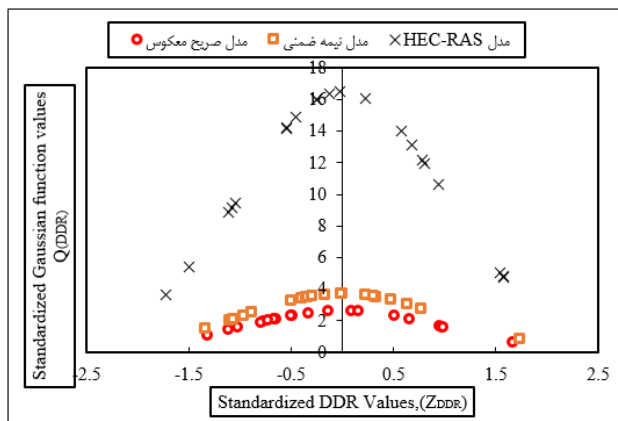
شکل ۱۳- (الف) هیدروگراف شبیه‌سازی شده توسط HEC-RAS (ب) ارزیابی گرافیکی دقت مدل



شکل ۱۴- (الف) هیدروگراف شبیه‌سازی شده توسط مدل نیمه‌ضمنی (ب) ارزیابی گرافیکی دقت مدل



شکل ۱۵- (الف) هیدروگراف شبیه‌سازی شده توسط مدل صریح معکوس (ب) ارزیابی گرافیکی دقت مدل



شکل ۱۶- منحنی توزیع نرمال استاندارد شده DDR مدل های پژوهش

جدول ۶- شاخص های توابع عملکرد مدل صریح معکوس و نیمه ضمنی

تعداد داده	مدل هیدروگراف مشاهداتی	مدل HEC-RAS	مدل نیمه ضمنی	مدل صریح معکوس
۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱
متوسط	۸/۶۳	۸/۶۳	۸/۸۴۸	۸/۷۰۳
ماکزیمم	۱۵/۳	۱۵/۶۹	۱۵/۲۵	۱۴/۵
مینیمم	۴/۰	۴/۰	۴/۰	۴/۰
انحراف معیار	۴/۲۲۵	۴/۲۷۷	۳/۸۹۲	۳/۶۲۲
N.S	-	۰/۹۹۶۶	۰/۹۷۰	۰/۹۳۳۹
R <sup>2</sup>	-	۰/۹۹۸۵	۰/۹۸۹۰	۰/۹۷۳۴
RMSE	-	۰/۲۳۹۴	۰/۷۰۵۳	۱/۰۶
NRMSE	-	۲/۷۵۱	۸/۱۷۲	۱۲/۲۸
Q <sub>DDR</sub> (max)	-	۱۶/۴۹	۳/۷۱۳	۲/۶۱۲

مدل HEC-RAS، نیمه ضمنی و صریح معکوس به ترتیب (۰/۹۹۶۶، ۰/۹۹۸۵، ۰/۲۲۹۴، ۰/۷۵۱، ۲/۴۹، ۱۶/۴۹)، (۰/۹۷، ۰/۹۸۹، ۰/۷۰۵۳، ۸/۱۷۲، ۳/۷۱۳) و (۰/۹۳۳۹، ۰/۹۷۳۴، ۱/۰۶، ۱۲/۲۸، ۲/۶۱۲) به دست آمدند. اگرچه مقادیر Q<sub>DDR</sub> مدل HEC-RAS نسبت به دو ارائه شده در این پژوهش بسیار زیاد است اما مقادیر دیگر شاخص‌ها نشان از کارایی دو مدل ضمنی و صریح معکوس در مقام مقایسه با مدل یک بعدی HEC-RAS دارد. البته باید توجه داشت که مدل نیمه ضمنی برتری بیشتری نسبت به مدل صریح معکوس دارد. پایداری حل علاوه بر راندمان محاسباتی بالا از جمله مزایای روش نیمه ضمنی است. اما منتهی شدن به معادلات غیرخطی پیچیده کویلی که باید برای تعیین مقدار دبی و سرعت جریان حل شوند از محدودیت‌های استفاده از روش نیمه ضمنی است. البته باید توجه داشت به دلیل عدم وجود محدودیت در اندازه گام زمانی، این روش از سرعت حل بیشتری برخوردار است.

### سپاسگزاری

این مقاله مستخرج از طرح پژوهشی داخلی با عنوان «توسعه

عملکرد هر دو مدل در طی فرایندهای واسنجی و صحت‌سنجی به کمک پارامتر ضریب زبری جریان در طول بازه‌ای به طول ۳/۷ کیلومتر و مشتمل بر ۱۴ مقطع عرضی با استفاده از توابع ارزیابی عملکرد (NS، R<sup>2</sup>، RMSE، NRMSE، Q<sub>DDR</sub>) از طریق شبیه‌سازی یک هیدروگراف مشاهداتی انجام شد. مقدار ضرایب تدقیق پنج‌گانه برای مدل صریح معکوس در دوره‌ی واسنجی و صحت‌سنجی به ترتیب (۰/۵۲۲۳۵، ۰/۹۲۳۳، ۲/۵۲۲، ۳۵/۰۳، ۲/۶۷۲) و (۰/۹۳۵۲، ۰/۹۸۸۶، ۲/۶۰۴، ۲۴/۶، ۳/۱۴۶) و برای مدل نیمه ضمنی نیز به ترتیب مذکور (۰/۹۲۳۷، ۰/۹۶۴۴، ۱/۰۱، ۱۴، ۲/۰۲۸) و (۰/۹۸۴۳، ۰/۹۹۴۳، ۱/۲۸۳، ۱۲/۱، ۳/۹۰۹) محاسبه شدند. با توجه به مقدار هر کدام از شاخص‌های تدقیق، هر دو مدل دارای عملکرد مناسبی در فرایندهای واسنجی و صحت‌سنجی بودند ضمن اینکه مدل نیمه ضمنی برتری محسوس نسبت به مدل صریح داشت.

برای اطمینان از کارکرد مدل‌های به دست آمده، هیدروگراف دیگری نیز در همان بازه شبیه‌سازی شد. در این مرحله از مدل یک بعدی HEC-RAS نیز برای ارزیابی نتایج شبیه‌سازی دو مدل این پژوهش استفاده شد. مقدار ضرایب تدقیق پنج‌گانه فوق‌الذکر برای

- channel streams. *Journal of Hydraulic Engineering* 128: 901-916.
- Fennema R.J., and Chaudhry M.H. 1990. Explicit Methods for 2-D Transient Free Surface Flows. *Journal of Hydraulic Engineering* 116.8: 1013-1027.
- Kashefipour M.S., and Falconer R.A. 2002. Longitudinal dispersion coefficients in natural channels. *Water Research* 36: 1596-1608.
- Kranjcevic L., Crnkovic B., and Zic N.C. 2006. Improved implicit numerical scheme for one dimensional open channel flow equation, 5th International Congress of Croatian Society of Mechanics, September 21-23, Croatia.
- Mihoub R., Chabour N., and Guermoui M. 2016. Modeling soil temperature based on Gaussian process regression in a semi-arid-climate, case study Ghardaia, Algeria. *Geomechanics and Geophysics for Geo-Energy and Geo- Resources* 2:397-403.
- Noori R., Khakpour A., Omidvar B., and Farokhnia A. 2010. Comparison of ANN and principal component analysis-multivariate linear regression models for predicting the river flow based on developed discrepancy ratio statistic. *Expert Systems with Applications* 37: 5856-5862.
- Seo I.W., and Cheong T.S. 1998. Predicting longitudinal dispersion coefficient in natural streams. *Journal of Hydraulics Engineering* 124: 25-32.
- Tayfur G., and Singh V.P. 2005. Predicting longitudinal dispersion coefficient in natural streams by artificial neural network. *Journal of Hydraulic Engineering* 131: 991-1000.
- Toro E.F. 1997. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics-A Practical Introduction*. Springer Verlag, Berlin.
- White W.R., Milli H., and Crabbe A.D. 1973. *Sediment transport: An appraisal method, Vol. 2: Performance of theoretical methods when applied to flume and field data*. Hydr. Res. Station Rep., No. 1T119, Wallingford, UK.
- Wylie E.B. 1969. Control of transient free-surface flow. *Hydr. Div. ASCE*, 95.1: 347-361.
- Yost S.A., and Rao P. 2000. A multiple grid algorithm for one-dimensional transient open channel flows. *Advances in Water Resources* 23.6: 645-651.
- مدل‌های عددی نیمه ضمنی و صریح معکوس در روندیابی سیلاب» است که نویسندگان مقاله از دانشگاه آزاد اسلامی واحد رامهرمز بابت تأمین کلیه هزینه‌های طرح، تقدیر و تشکر می‌نمایند.
- ### منابع
- اکبری، غ.م.، براتی، ر. و حسین‌نژاد، ع.ر. ۱۳۹۰. بررسی شمایهای مختلف روش ماسکینگام کونژ در آبراهه‌های طبیعی. *مجله تحقیقات منابع آب ایران*، ۳:۷-۳۰: ۶۲-۷۴.
- اکبری، غ.ح.، و فیروزی، ب. ۱۳۸۹. بررسی اثر زبری، شیب بستر و عرض رودخانه بر روی روند حرکت موج سیلاب به کمک دو الگوی عددی تفاضل محدود. پنجمین کنگره ملی مهندسی عمران، ۱۴ تا ۱۶ اردیبهشت، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد.
- براتی، ر. و اکبری، غ.ح. ۱۳۹۱. مقایسه مدل‌های هیدرولوژیکی روندیابی سیل در رودخانه‌ها. *مجله پژوهش‌های آب ایران*، ۱۱: ۶: ۱۰۵-۱۱۴.
- جاویدان، ن. و بهره‌مند، ع. ۱۳۹۵. بررسی حساسیت پارامترهای مؤثر بر روندیابی هیدروگراف سیل با روش موج پخشی دیفیوژن با مدل هیدرولوژیکی توزیعی WetSpa در حوزه آبخیز زیارت گرگان. *نشریه آب و خاک (علوم و صنایع کشاورزی)*، ۲:۳۰: ۶۸۵-۶۹۷.
- حسن‌پور، ف. و شیخعلیپور ز. ۱۳۹۳. مقایسه روش‌های هوش مصنوعی و ماسکینگام در تخمین روندیابی سیل. *مجله مهندسی آب ایران*، ۷: ۹۷-۱۰۸.
- ولی‌سامانی، ح.م.، حقیقی، ع. و فرهادی، ش. ۱۳۹۲. روندیابی هیدرولوژیکی سیل به روش ماسکینگام خطی در سیستم رودخانه‌های چند شاخه‌ای با بهینه‌یابی توسط الگوریتم ژنتیک. *مجله هیدرولیک*، ۱۰.۸: ۸۳-۹۲.
- Artichowicz W., and Szymkiewicz R. 2014. Computational issues of solving the 1D steady gradually varied flow equation. *Journal of Hydrology and Hydromechanics* 62.3: 226-233.
- Chow V.T. 1959. *Open Channel Hydraulics*. McGraw-Hill, New York.
- Deng Z.Q., Bengtsson L., Singh V.P., and Adrian D.D. 2002. Longitudinal dispersion coefficient in single-

## Developing Semi-Implicit and Reverse Explicit Numerical Models for Simulation of Hyperbolic Saint-Venant Equations

M.R. Heidari Tavani<sup>1\*</sup>, M. Fuladipناه<sup>2</sup>

Received: Mar.06, 2020

Accepted: Apr.22, 2020

### Abstract

New developed numerical models for solving hyperbolic Saint-Venant equations while having scientific and research value, play a significant role in the structural and performance management of hydraulic structures. In this paper, while developing two reverse explicit and semi-implicit numerical models based on Preissmann four points scheme, their application has been evaluated in a reach of Doab Samsami River, sub basin of Karoon. The reverse explicit has been developed based on Preissmann scheme and semi-implicit model has been developed using Preissmann scheme for distance derivatives with the Upwind scheme. Simulating of an output hydrograph using Manning roughness coefficient as setting parameter was performed with five accuracy criteria Nash-Sutcliffe (NS), R-square ( $R^2$ ), Root mean square error and its standardized value (RMSE, NRMSE) and Developed discrepancy ratio ( $Q_{DDR}$ ) for two calibration and verification periods. The amount of mentioned criteria for explicit and implicit models were calculated as (0.9352,0.9886,2.604,24.6,3.146) and (0.9843,0.9943,1.283,12.1,3.909) illustrating the reliable performance of the two models with the tangible superiority of the semi-implicit model. For more assurance of models performance, another hydrograph was simulated so that the values of NS, NRMSE and  $Q_{DDR}$  for semi-implicit and reverse explicit models were calculated (0.97,8.172,3.713) and (0.9339,12.28,2.612), respectively. These values proved the reliability and performance of the two models. The semi-implicit model had more accuracy than the explicit one in all cases. Solution stability in addition to high calculation efficiency is advantages of the semi-implicit model while leading to coupled complicated non-linear equations is its restriction.

**Keywords:** Flood Routing, Discretization, Saint-Venant Equations, Numerical Modeling, Prissmann scheme

1- Assistant Professor, Department of Mathematic, Ramhormoz Branch, Islamic Azad university, Ramhormoz, Iran

2- Assistant Professor, Department of Civil Engineering, Ramhormoz Branch, Islamic Azad university, Ramhormoz, Iran

(\*- Corresponding Author Email: m.reza.h56@gmail.com)