تحقیقات آب و خاک ایران، دورهٔ ۴۷، شمارهٔ ۳، پاییز ۱۳۹۵ (ص ۵۶۰-۵۵۱)

ارزیابی عملکرد تابع مفصل در پهنه‌بندی کیفی آب‌های زیرزمینی، مطالعه موردی دشت‌های کرمان و راور

معین گنجعلیخانی [۱]، محمد ذونعمت کرمانی [۲*]، محسن رضاپور [۳]، محمدباقر رهنما [۴]
۱. فارغ‌التحصیل کارشناسی ارشد مهندسی منابع آب، بخش مهندسی آب، دانشگاه شهید باهنر کرمان
۲. دانشیار، بخش مهندسی آب، دانشگاه شهید باهنر کرمان
۳. استادیار، بخش آمار، دانشگاه شهید باهنر کرمان
۴. دانشیار، بخش مهندسی آب، دانشگاه شهید باهنر کرمان

(تاریخ دریافت: ۱۸/ ۱/ ۱۳۹۴ – تاریخ تصویب: ۳/ ۱۲/ ۱۳۹۴)

چکیده

پژوهش حاضر به ارائه روشی برای درون‌یابی با استفاده از تابع مفصل به‌منظور پهنه‌بندی کیفی آب زیرزمینی می‌پردازد. در این راستا داده‌های مربوط به غلظت بی‌کربنات در ۸۷ چاه مشاهده‌ای مربوط به دشت‌های کرمان و راور مربوط به شهریورماه سال ۱۳۹۲ موردبررسی قرار گرفته است. برای این منظور از چهار تابع مفصل ارشمیدسی شامل توابع کلایتون، فرانک، گامبل و جو بهره‌گیری شده است. تحلیل ضریب همبستگی جفت چاه‌ها، فاصله مکانی بیش از ۱۷ کیلومتر را به‌عنوان فاصله مستقل نشان می‌دهد. در ادامه به‌منظور ارزیابی عملکرد توابع مفصل، نتایج به‌دست‌آمده با نتایج حاصل از روش‌های متداول پهنه‌بندی مورد مقایسه قرار گرفت. تحلیل نتایج با توجه به معیار جذر میانگین مربعات خطا در پهنه‌بندی با استفاده از تابع مفصل بر اساس میانه ۱/۸۴ و بر اساس میانگین ۱/۹۵ میلی‌اکی‌والان بر لیتر به دست آمد که در مقایسه با دو روش کریگینگ با خطای ۲/۲۱، کریگینگ با تبدیل باکس کاکس با خطای ۲/۱۴، کریگینگ با تبدیل لگاریتمی ۱/۹۸ و روش معکوس فاصله موزون با خطای ۲/۸۳ میلی اکی‌والان بر لیتر عملکرد مناسب‌تری را نشان داد.

واژه‌های کلیدی: توابع مفصل ارشمیدسی، درون‌یابی کریگینگ، مدل‌سازی بی‌کربنات، پیش‌بینی مکانی، زمین آمار

مقدمه

در بررسی کیفیت و کمیت آب‌های زیرزمینی معمولاً تعداد محدودی چاه، معرف اطلاعات سطح وسیعی از منطقه می‌باشد و این چاه‌ها اغلب به‌صورت نامنظم در سطح منطقه پراکنده شده‌اند. معمولاً به‌منظور تخمین مقادیر کمی و کیفی آب زیرزمینی در مناطق فاقد برداشت داده در بین چاه‌ها، از روش‌های آمار کلاسیک و زمین‌آماری استفاده می‌شود. در بررسی‌های آمار کلاسیک، نمونه‌هایی که از کل جامعه به‌منظور شناخت آن برداشت می‌شود، فاقد اطلاعات موقعیتی در فضا بوده و درنتیجه مقادیر اندازه‌گیری شدهٔ یک کمیت در یک نمونه خاص هیچ‌گونه اطلاعاتی در مورد مقدار همان کمیت در نمونه دیگری به فاصله معلوم را در بر نخواهد داشت و نتایج به‌دست‌آمده مستقل از موقعیت فضایی مورد تجزیه‌وتحلیل قرار می‌گیرند. در مقابل، روش‌های زمین‌آماری بر این چالش فائق آمده به‌طوری‌که علاوه بر مقدار یک کمیت معین در یک نمونه، موقعیت فضایی نمونه‌ها همراه با مقدار کمیت به‌صورت توأم مورد تجزیه‌وتحلیل قرار می‌گیرند. این تجزیه‌وتحلیل‌ها غالباً به کمک واریوگرام و یا تابع کوواریانس بیان می‌شود. این روش در کنار محاسن مذکور، معایبی نیز دارد. مهم‌ترین ضعف این روش، شرط گاوسی بودن داده‌هاست که در شرایط طبیعی کمتر مشاهده می‌شود. داده‌های آب زیرزمینی اغلب دارای چولگی هستند که در آن‌ها فرض گاوسی بودن داده‌های رعایت نمی‌شود. حساسیت این روش به داده‌های پرت نیز از دیگر معایب این روش است. (Bárdossy, 2006; HasaniPak, 2007).

در سال‌های اخیر تابع مفصل در زمینه هیدرولوژی آماری کاربرد گسترده‌ای پیدا کرده است. Wong *et al*. (2009) با به‌کارگیری تابع مفصل سه متغیره بر روی مدت، شدت حداکثر و شدت متوسط خشک‌سالی اقدام به تحلیل خشک‌سالی نمودند. پژوهش آن‌ها به‌منظور مدل‌سازی تابع مفصل سه متغیره برای شدت، مدت و دوره بازگشت خشک‌سالی و همچنین تأثیر پدیدهای النینو و لانینا بر روی این سه پارامتر خشک‌سالی در منطقه شرقی استرالیا صورت گرفت. Omidi *et al*. (2010) با استفاده از توابع مفصل اقدام به بررسی احتمالاتی توأم شدت مدت و فراوانی خشک‌سالی در استان تهران پرداختند. Reddy

* نویسنده مسئول: Zounemat@uk.ac.ir

and Ganguli (2012) با به‌کارگیری توابع ارشمیدسی دومتغیره بر روی پیک، حجم و مدت سیلاب به‌صورت جفتی، به تحلیل سیلاب با دوره بازگشت‌های مختلف پرداختند. نتایج این پژوهش حاکی از توانایی بالای مدل تابع مفصل در تخمین مناسب‌تر ساختار شرطی دوره بازگشت سیلاب داشت که می‌تواند در تصمیم‌سازی‌های در طراحی‌های هیدرولوژیکی پروژه‌های منابع آب بسیار مؤثر واقع گردد. در تحقیقی دیگر،Ariff *et al.* (2012) با استفاده از توابع مفصل دومتغیره، موفق به دست آوردن منحنی IDF شدند. همچنین Samaniego *et al.* (2010) به پیش‌بینی سیلاب در حوضه‌های فاقد ایستگاه هیدرومتری نمودند. پژوهش دیگری نیز توسط Moazami *et al.* (2014) نیز صورت گرفته است. آن‌ها بر روی میزان خطای حاصل از تخمین بارش با استفاده از تصاویر ماهواره‌ای تجزیه‌وتحلیل عدم قطعیت انجام دادند. همچنین پژوهشی در مورد تخمین مقدار بارش در ایستگاه‌های مفقود توسط Bárdossy and Pegram (2014) صورت گرفته است. در این پژوهش مقدار داده در ایستگاه مفقود بر اساس ایستگاه‌های مجاور با استفاده از تابع مفصل تخمین زده شد و نتایج این روش با روش‌هایی ازجمله نزدیک‌ترین همسایگی، کریجینگ و فازی مقایسه شد که نتایج حاکی از دقت بالای این مدل نسبت به سایر مدل‌های مذکور بود.

در این پژوهش سعی شده که روشی برای درون‌یانی با استفاده از تابع مفصل[1] ارائه گردد. بدین منظور از داده‌های کیفی مربوط به ۸۷ چاه مشاهده‌ای دشت کرمان و راور استفاده گردید. تابع مفصل ابزاری برای مدل کردن وابستگی چند متغیر تصادفی به‌صورت مستقل از توابع توزیع حاشیه‌ای آن‌ها می‌باشد که در ابتدا توسط Sklar (1959)معرفی گردید. اخیراً تحقیقاتی نیز درزمینه پهنه‌بندی کمی و کیفی آب‌های زیرزمینی به‌وسیله تابع مفصل صورت گرفته است که ازجمله آن‌ها می‌توان به پژوهش‌های Bárdossy (2006)، Bárdossy and Li (2008) و Kazianka and Pilz (2011) اشاره کرد؛ اما در پژوهش‌های ذکرشده عمدتاً از توابع مفصل خاص مانند تابع مفصل گوسی و با استفاده از روش‌های حل عددی استفاده‌شده است که علاوه بر محدودیت‌های تابع مفصل گوسی، نیاز به زمان محاسبه نسبتاً زیادی دارد. Gräler and Pebesma (2011) رویکرد جدیدی برای درون‌یابی به کمک تابع مفصل بر اساس روش ارائه‌شده توسط Aas *et al.* (2009) برای تبدیل تابع مفصل n متغیره به n(n-1)/2 تابع مفصل دومتغیره پیش رو قراردادند و پهنه‌بندی عنصر روی را به‌دقت بالاتری نسبت به روش کریگینگ ارائه کردند. این رویکرد امکان ترکیب توابع مفصل با خانواده‌های مختلف را فراهم می‌کند. در پژوهش حاضر سعی گردیده که با ارائه این رویکرد امکان استفاده از سایر خانواده‌های تابع مفصل نظیر خانواده ارشمیدسی که انعطاف‌پذیری بالایی دارند در مقوله کیفیت آب‌های زیرزمینی فراهم آید. برای این منظور پهنه‌بندی کیفی دشت کرمان و راور با استفاده از داده‌های مربوط به غلظت بی‌کربنات در ۸۷ چاه مشاهده‌ای مربوط به دشت‌های کرمان و راور مربوط به شهریورماه سال ۱۳۹۲ موردبررسی قرار گرفته است و درنهایت نتایج روش مذکور با نتایج حاصل از روش‌های کریگینگ و معکوس فاصله موزون[2] مقایسه گردید.

مواد و روش‌ها

منطقه موردمطالعه

آب‌های زیرزمینی منبع اصلی تأمین‌کننده آب شرب و کشاورزی دشت کرمان می‌باشند. این امر توجه به کیفیت این منابع را بسیار حائز اهمیت ساخته است. از طرفی افزایش فعالیت‌های کشاورزی در سال‌های اخیر منجر به کاهش تراز آب زیرزمینی دشت و همچنین افزایش آلودگی آب‌های زیرزمینی در اثر استفاده از سموم و کودهای شیمیایی شده است. به‌طورکلی ۹۰/۳۸ درصد تخلیه آب زیرزمینی در استان کرمان از طریق چاه‌ها و مابقی از طریق چشمه‌ها و قنات‌ها صورت می‌گیرد که از این مقدار ۹۵/۸۶ درصد آن در بخش کشاورزی، ۳/۳۴ درصد برای شرب و ۰/۸ درصد در بخش صنعت مصرف می‌گردد (Shahidasht and Abbasnejad, 2013). بهره‌برداری از منابع آب در این استان گسترش چشمگیری داشته و با توجه به اینکه رودخانه‌های پرآب و دائمی در این استان بسیار کم است، عمده بهره‌برداری از آب‌های زیرزمینی است. درنتیجه اکثر دشت‌ها و آبخوان‌های استان با کاهش حجم مخزن و افت فزاینده سطح آب زیرزمینی روبرو هستند. در شهرستان کرمان به دلیل بهره‌برداری بسیار زیاد از آب‌های زیرزمینی، میزان افت سالانه به‌طور متوسط سالانه ۹۰ سانتی‌متر می‌باشد (Shahidasht and Abbasnejad, 2013).

در جدول (۱) میزان تخلیه سالانه آب زیرزمینی استان کرمان قابل ملاحظه است.

در حال حاضر متوسط هدایت هیدرولیکی آب چاه‌های استان حدود ۲۸۶۰ میکروموس بر سانتی‌متر می‌باشد که بهترین

1. Copula

2. Inverse Distance Weighting

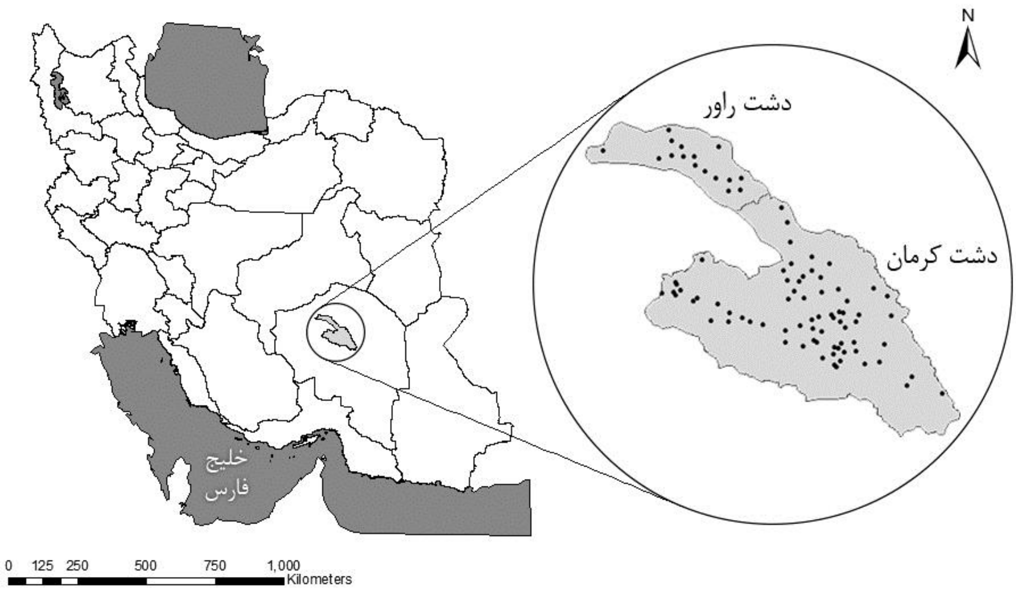
کیفیت در دشت‌های صوغان، ساردوئیه، دهکهان، بافت، سلطانی، رابر و بزنجان وجود دارد و بدترین کیفیت آب زیرزمینی مربوط به دشت‌های راور، سیریز- طغرالجرد، کرمان، رفسنجان، زرند و سیرجان است. بر اساس مطالعات انجام‌گرفته شوری آب برخی مناطق در دشت‌های استان مانند دشت سیرجان، نوق و انار در رفسنجان و سیریز، به حدی بالاست که مشکلات جدی را برای ساکنین این مناطق ایجاد کرده است و حتی حیات گیاهان و جانوران را نیز در معرض خطر جدی قرار داده است (Mahmoudi *et al*. 2013).

در این تحقیق به‌منظور بررسی کیفیت آب‌های زیرزمینی دشت کرمان و راور، تعداد ۸۷ چاه مشاهده‌ای انتخاب گردید و غلظت بی‌کربنات موجود در آن‌ها موردبررسی قرار گرفت. در شکل (۱) موقعیت چاه‌های مشاهده‌ای موردمطالعه مشاهده می‌گردد. جدول (۲) نیز نشان‌دهنده پارامترهای آماری داده‌های موردمطالعه می‌باشد. همان‌گونه که مشاهده می‌گردد داده‌های موجود دارای چولگی مثبت نسبتاً بالایی می‌باشند.

جدول ۱- میزان تخلیه سالانه آب زیرزمینی استان کرمان طی سال‌های ۸۱ تا ۸۹

سال آبی	چاه عمیق		چاه نیمه عمیق		قنات		چشمه	
	تعداد (حلقه)	تخلیه سالانه	تعداد (حلقه)	تخلیه سالانه	تعداد (رشته)	تخلیه سالانه	تعداد (دهنه)	تخلیه سالانه
۸۱-۸۲	۸۷۱۸	۳۸۵۲/۳	۱۲۵۳۱	۱۳۰۷/۸۲	۱۷۲۶	۱۱۶۱/۵	۴۸۰	۱۲۹/۴
۸۲-۸۳	۸۷۱۸	۳۸۵۲/۳	۱۲۵۳۱	۱۳۰۷/۸۲	۱۷۲۶	۱۱۶۱/۵	۴۸۰	۱۲۹/۴
۸۳-۸۴	۸۷۱۱	۳۸۵۲/۳	۱۲۵۳۱	۱۳۰۷/۸۲	۱۷۲۶	۱۱۶۱/۵	۴۸۰	۱۲۹/۴
۸۴-۸۵	۱۱۶۸۹	۴۲۸۴/۱	۱۷۴۸۲	۱۵۷۸/۱	۱۹۲۸	۷۲۶/۳	۱۱۷۲	۱۵۰/۰
۸۵-۸۶	۱۱۶۳۰	۴۲۹۳/۴	۱۷۴۴۵	۱۵۸۶/۷	۱۹۲۷	۷۲۱/۰	۱۱۷۰	۱۵۰/۰
۸۶-۸۷	۱۱۶۴۷	۴۲۹۶/۸	۱۷۴۴۶	۱۵۸۶/۵	۱۹۵۷	۷۳۰/۸	۱۱۷۳	۱۵۰/۶
۸۷-۸۸	۱۱۷۹۰	۴۳۸۸/۸	۱۷۵۴۰	۱۵۹۵/۵	۲۰۲۵	۷۵۶/۲	۱۱۷۳	۱۵۰/۶
۸۸-۸۹	۱۱۶۳۰	۴۲۹۳/۷	۱۷۴۴۵	۱۵۸۶/۵	۱۹۲۷	۷۲۱/۴	۱۱۷۰	۱۵۰/۰

مآخذ: شرکت سهامی آب منطقه‌ای استان کرمان



شکل ۱. موقعیت چاه‌های مشاهده‌ای موردمطالعه

جدول ۲- پارامترهای آماری غلظت بی‌کربنات در چاه‌های منطقه موردمطالعه (واحد: میلی‌اکی‌والان بر لیتر)

آماره	کمینه	بیشینه	میانگین	میانه	انحراف معیار	چولگی
مقدار	۱/۲۵	۱۴	۴/۷۶	۳/۶۵	۳/۵۵	۳/۶۲

تابع مفصل

تابع مفصل در ابتدا توسط اسکلار (۱۹۵۹) به‌منظور توصیف توابع توزیع در فضای $[0,1]^n$ که توزیع‌های چندمتغیره را به حاشیه‌های یک متغیره آن ارتباط می‌دهد، بیان شد (Nelsen, 2007). اسکلار بیان کرد که بجای بیان تابع توزیع دومتغیره F به‌صورت تابعی از چندک‌ها، می‌توان آن را به‌صورت تابعی از حاشیه‌ها یا احتمالات تجمعی u_i و u_j نوشته شود. همچنین نشان داد که اگر F کاملاً پیوسته باشد، تابع یکه‌ای به‌صورت $C:[0,1]^2 \to [0,1]$ وجود دارد به‌نحوی‌که:

$$C(u_i, u_j) = F(F_i^{-1}(u_i), F_j^{-1}(u_j)) \qquad \text{(رابطه ۱)}$$

تابع C را تابع مفصل گویند. این نام به دلیل تأکید بر روشی که توابع توزیع مشترک را به حاشیه‌های تک متغیری آن متصل می‌کند، انتخاب گردیده است. تابع مفصل n–متغیره به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$H(x_1,\ldots,x_n) = C(F_1(x_1),\ldots,F_n(x_n)) \qquad \text{(رابطه ۲)}$$

در این رابطه، C تابع مفصل، H یک تابع توزیع n–متغیره و F_1 تا F_n توابع توزیع حاشیه‌ای یک متغیره آن می‌باشد. در حقیقت، تابع مفصل، یک تابع توزیع n–متغیره که توابع توزیع حاشیه‌ای آن یکنواخت است، تعریف می‌گردد (Schmidt, 2007).

در حالت دومتغیره و زمانی که تابع توزیع H به‌صورت حاصل‌ضرب توابع توزیع حاشیه‌ای باشد و یا به‌عبارت‌دیگر متغیرها به‌صورت کامل از یکدیگر مستقل باشند، تابع مفصل متناظر با H به‌صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$\Pi(u_1,u_2) = u_1.u_2 \qquad \text{(رابطه ۳)}$$

که Π تابع مفصل حاصل‌ضرب می‌باشد (Schmidt, 2007). در حالتی که داده‌ها همبستگی کامل مثبت داشته باشند، تابع مفصل مربوط به آن‌ها به‌صورت زیر می‌باشد و آن را تابع مفصل مینیمم می‌نامند.

$$M(u_1,u_2) = Min(u_1,u_2) \qquad \text{(رابطه ۴)}$$

که M تابع مفصل مینیمم می‌باشد. تابع مفصل شرطی دومتغیره به‌صورت زیر تعریف می‌گردد که تابعی برحسب u_1 به ازای $U_2=u_2$ می‌باشد.

$$C(u_1|u_2) = \lim_{\Delta u_2\to 0}\frac{C_\theta(u_1,u_2+\Delta u_2)-C_\theta(u_1,u_2)}{\Delta u_2} = \frac{\partial}{\partial u_2}C_\theta(u_1,u_2)|_{U_2=u_2} \qquad \text{(رابطه ۶)}$$

در این رابطه، C تابع مفصل می‌باشد. همچنین تابع مفصل n– متغیره شرطی u_1 به‌شرط $U_2=u_2$،...،$u_n=U_n$ به‌صورت زیر بیان می‌شود.

(رابطه ۷)

$$C(u_1|u_2,\ldots,u_n) = \frac{\dfrac{\partial^n C(u_1,u_2,\ldots,u_n)}{\partial u_2\ldots\partial u_n}}{\dfrac{\partial^{n-1} C(u_2,\ldots,u_n)}{\partial u_2\ldots\partial u_n}}$$

در این رابطه، u_1 تا u_n متغیرهای حاشیه‌ای می‌باشند. مشابه توابع توزیع دومتغیره، تابع مفصل نیز دارای تابع چگالی است که به‌صورت زیر بیان می‌گردد.

$$c_{12}(u_1,u_2) = \frac{\partial^2 C(u_1,u_2)}{\partial u_1\partial u_2} \qquad \text{(رابطه ۸)}$$

تابع چگالی مفصل n– متغیره نیز به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

(رابطه ۹)

$$c_{1\ldots n}(u_1,\ldots,u_n) = \frac{\partial^n C(u_1,\ldots,u_n)}{\partial u_1\ldots\partial u_n}$$

بنابراین تابع چگالی مفصل شرطی $C_{ij|\mathbf{h}}$ که $\boldsymbol{h}=\{1,\ldots,n\}\setminus\{i,j\}$ به‌صورت زیر می‌باشد.

(رابطه ۱۰)

$$c_{ij|\mathbf{h}}(u_1,\ldots,u_n) = \frac{\dfrac{\partial^{n-2} C(u_1,\ldots,u_n)}{\partial u_1\ldots\partial u_{i-1}\partial u_{i+1}\ldots\partial u_{j-1}\partial u_{j+1}\partial u_n}}{\dfrac{\partial^{n-2} C(u_1,\ldots,u_{i-1},u_{i+1},\ldots,u_{j-1},u_{j+1},\ldots,u_n)}{\partial u_1\ldots\partial u_{i-1}\partial u_{i+1}\ldots\partial u_{j-1}\partial u_{j+1}\partial u_n}}$$

که پارامترها مشابه رابطه ۹ می‌باشند. تابع مفصل دارای خانواده‌های متعددی است که تعدادی از آن‌ها توسط نلسن (۲۰۰۷) بیان‌شده‌اند. در این میان توابع مفصل ارشمیدسی[1] دارای بیشترین کاربرد خصوصاً در علوم هیدرولوژی می‌باشند. دلیل این امر نیز توانایی پوشش همبستگی مثبت و منفی داده‌ها، سهولت ایجاد آن‌ها و همچنین تعداد زیاد این خانواده از تابع مفصل می‌باشد (Serinaldi & Grimaldi, 2007). تابع مفصل ارشمیدسی به‌صورت زیر بیان می‌گردد (Nelsen, 2007).

(رابطه ۱۱)

$$C_\theta(u_1,u_2) = \phi^{-1}\{\phi(u_1)+\phi(u_2)\}, \quad 0<u_1,u_2<1$$

در این رابطه، $u\in(0,1)$، θ پارامتر تابع مفصل و ϕ تابع مولد مفصل است که تابعی نزولی، محدب و دارای خواص زیر است.

$$\phi:[0,1]\to[0,\infty) \\ \phi(0)=\infty \quad , \quad \phi(1)=0 \qquad \text{(رابطه ۱۲)}$$

1. Archimedean

که ϕ^{-1} به‌صورت $\phi^{-1}(x)=\sup\{y: \leq x\}$ تعریف می‌شود.

در این پژوهش از ۴ تابع مفصل ارشمیدسی به نام‌های کلایتون[1]، فرانک[2]، گامبل[3] و جو[4] استفاده گردیده است که به‌تفصیل در جدول (۳) قابل‌مشاهده است (Nelsen, 2007). برای برازش یک تابع مفصل به داده‌های n- متغیره، ابتدا توابع توزیع تک متغیره حاشیه‌ای مناسب به داده‌ها برازش داده می‌شود. سپس مقدار تابع توزیع تجمعی حاشیه‌ای برای آن‌ها محاسبه گردیده و درنهایت بهترین تابع مفصل بر روی داده‌های تبدیل یافته برازش داده می‌شود.

1. Clayton
2. Frank
3. Gumbel
4. Joe

جدول ۳- توابع مفصل ارشمیدسی مورداستفاده در تحقیق حاضر

نام	$C_\vartheta(u,v)$	تابع مولد (ϕ)	محدوده پارامتر ($\vartheta\in$)
کلایتون	$\max\left(\left[u^{-\theta}+v^{-\theta}-1\right]^{-1/\theta},0\right)$	$\frac{1}{\theta}\left(t^{-\theta}-1\right)$	$[-1,\infty)\setminus\{0\}$
فرانک	$-\frac{1}{\theta}\ln\left(1+\frac{\left(e^{-\theta u}-1\right)\left(e^{-\theta v}-1\right)}{\left(e^{-\theta}-1\right)}\right)$	$-\ln\frac{e^{-\theta t}-1}{e^{-\theta}-1}$	$(-\infty,\infty)\setminus\{0\}$
گامبل	$\exp\left(-\left[(\ln u)^{\theta}+(\ln v)^{\theta}\right]^{1/\theta}\right)$	$(-\ln t)^{\theta}$	$[1,\infty)$
جو	$1-\left[(1-u)^{\theta}+(1-v)^{\theta}-(1-u)^{\theta}(1-v)^{\theta}\right]^{1/\theta}$	$-\ln\left[1-(1-t)^{\theta}\right]$	$[1,\infty)$

تابع مفصل و توصیف ساختار متغیرهای فضایی

به‌منظور توصیف و تحلیل ساختارهای فضایی می‌توان از تابع مفصل به‌عنوان تابع توزیع دومتغیره برای نقاطی بافاصله مشخص استفاده نمود. بدین منظور لازم است که تابع توزیع حاشیه‌ای که بر متغیرهای ناحیه‌ای برازش یافته برای تمامی نقاط در میدان تصادفی یکسان باشد (Li, 2010). استفاده از روش‌های مرسوم زمین‌آمار این محدودیت را دارد که توابع توزیع حاشیه‌ای حتماً بایستی گاوسی باشد؛ اما در بررسی ساختار فضایی به‌وسیله تابع مفصل رعایت این شرط الزامی نیست (Bárdossy, 2006). بدین منظور ابتدا تابع توزیع حاشیه‌ای مناسب برای متغیرهای ناحیه‌ای Z به داده‌ها برازش داده می‌شود. سپس تابع مفصل نیز بر جفت داده‌های بافاصله h+Δh برازش می‌یابد که در آن h فاصله مکانی دلخواه و Δh دامنه نوسان می‌باشد. اعمال دامنه نوسان با توجه به پراکندگی نامنظم چاه‌ها و اینکه احتمال یافتن چند زوج نمونه بافاصله دقیقاً مساوی بسیار کم است، الزامی است. لازم به ذکر است که شرط متغیر ناحیه‌ای بایستی بر داده‌ها صدق کند. بدین معنی که مقدار متغیرها در هر نقطه از فضا باید مستقل از مختصات آن نقطه باشد (HasaniPak, 2007). درنتیجه تابع مفصل را برای هر جفت داده بافاصله h+Δh می‌توان به‌صورت زیر در نظر گرفت.

$$\begin{aligned}C_h(u_1,u_2)&=P\left[F_z\left(Z(x)\right)<u_1,F_z\left(Z(x+h)\right)<u_2\right]\\&=C\left(F_z\left(Z(x)\right),F_z\left(Z(x+h)\right)\right)\end{aligned} \quad \text{(رابطه ۱۳)}$$

در این رابطه، F_z تابع توزیع متغیر ناحیه‌ای Z است که برای تمامی نقاط x یکسان می‌باشد. درنتیجه وابستگی هر دو نقطه از فضا را که دارای فاصله h از یکدیگر می‌باشند، می‌توان به‌وسیله تابع مفصل دومتغیره فوق بیان کرد (Haslauer et. Al. 2010). به‌منظور توصیف ساختار فضایی، دو شرط دیگر نیز به‌صورت زیر بایستی اعمال گردد.

۱. به ازای $||h||\rightarrow\infty$ باید $C_h(u)\rightarrow\prod^2(u)$، نشان‌دهنده آن است که در فواصل زیاد دو متغیر کاملاً از دیگر مستقل می‌باشند.

۲. به ازای $||h||\rightarrow 0$ باید $C_h(u)\rightarrow M^2(u)$، این شرط نیز بیانگر آن است که در فواصل بسیار کم دو متغیر به‌طور کامل به یکدیگر وابسته‌اند.

با توجه به اینکه با تغییر فاصله، تابع مفصل برازش یافته به داده‌ها تغییر می‌یابد، جهت برازش یک مدل مناسب به داده‌ها ابتدا بر روی فواصل بهترین تابع مفصل برازش داده می‌شود. در

ادامه با طبقه‌بندی فاصله، برای هر طبقه از تابع مفصل ترکیبی که از ترکیب دو تابع مفصل ابتدا و انتهای طبقه فاصله به دست می‌آید، در نظر گرفته می‌شود. همچنین با توجه با شرط‌های ۱ و ۲، توابع مفصل مربوط به نقطه ابتدای طبقه اول M و تابع مفصل مربوط به نقطه انتهایی طبقه آخر Π در نظر گرفته می‌شود.

(رابطه ۱۴)

$$C_h(u_1,u_2) := \begin{cases} \lambda_1 . M(u_1,u_2) + (1-\lambda_1) C_{1,h}(u_1,u_2) & if \quad 0 \le h < h_1 \\ \vdots & \vdots \\ \lambda_i . C_{i-1,h}(u_1,u_2) + (1-\lambda_i) C_{i,h}(u_1,u_2) & if \quad h_{i-1} \le h < h_i \\ \vdots & \vdots \\ \lambda_n . C_{n-1,h}(u_1,u_2) + (1-\lambda_n) \Pi(u_1,u_2) & if \quad h_{n-1} \le h < h_n \end{cases}$$

که λ_i بر اساس فواصل هر نقطه از کران‌های طبقات به‌صورت زیر بیان می‌گردد.

(رابطه ۱۵)
$$\lambda_i = \frac{(h_i - h)}{(h_i - h_{i-1})}$$

در این رابطه، h نشان‌دهندهٔ فاصله می‌باشد. Bárdossy (2006) به‌منظور درون‌یابی داده‌های کیفی آب زیرزمینی از تابع چگالی مفصل گوسی استفاده کرد. رویکرد ارائه‌شده در پژوهش مذکور استفاده از تابع مفصل n- متغیره بر اساس نزدیک‌ترین n نقطه‌به‌نقطه مجهول بود. با توجه به وجود معادله صریح برای مفاصل شرطی گوسی در ابعاد بالا، Bárdossy (2006) تنها از تابع مفصل گوسی و با استفاده از روش‌های حل عددی به‌منظور درون‌یابی استفاده کرد که علاوه بر محدودیت‌های تابع مفصل گوسی، نیاز به زمان محاسبه نسبتاً زیادی دارد. رویکرد ارائه‌شده در این مقاله بر اساس روش ارائه‌شده توسط Aas *et al*. (2009) می‌باشد. این روش علاوه بر اینکه زمان محاسبات را کاهش می‌دهد، امکان استفاده از سایر خانواده‌های تابع مفصل نظیر ارشمیدسی را که انعطاف بالایی را دارند، میسر می‌سازد. Aas *et al*. (2009) روشی به‌منظور تبدیل تابع مفصل n متغیره به n(n-1)/2 تابع مفصل دومتغیره ارائه کردند. این رویکرد امکان ترکیب توابع مفصل با خانواده‌های مختلف را فراهم می‌کند. در مقاله فوق از دو نوع ساختار مختلف استفاده گردید که در این پژوهش از مدل موسوم به ساختار درختی متعارف[1] استفاده گردید که به‌صورت خلاصه در زیر بیان می‌گردد.

فرض شود که $\mathbf{X}=(x_1,\ldots,x_n)$ دارای تابع توزیع مرتبط به مفصل C به‌صورت زیر باشد.

(رابطه ۱۶)
$$F(x_1,\ldots,x_n) = C\left(F_1(x_1),\ldots,F_n(x_n)\right)$$

که F_1 تا F_n توابع توزیع حاشیه‌ای بردار $\mathbf{X}$ هستند. اگر $\mathbf{X}$ یک متغیر تصادفی پیوسته باشد، آنگاه:

(رابطه ۱۷)
$$f(x_1,\ldots,x_n) = c_{1\ldots n}\left(F_1(x_1),\ldots,F_1(x_1)\right) . f_1(x_1)\ldots f_n(x_n)$$

در این رابطه، $f(x_1)$ تا $f(x_n)$ توابع چگالی حاشیه‌ای متغیر $\mathbf{X}$ می‌باشند. اگر $f(x_i|x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)$ تابع چگالی شرطی متغیر تصادفی باشد، آنگاه طبق قاعده زنجیره‌ای داریم:

(رابطه ۱۸)

$$f(x_1,\ldots,x_n) = f_n(x_n) . f(x_{n-1}|x_n) . f(x_{n-2}|x_{n-1},x_n)\ldots f(x_1|x_2,\ldots,x_n)$$

همچنین با توجه با ویژگی‌های تابع مفصل و قاعده زنجیره‌ای می‌توان بیان داشت که

(رابطه ۱۹)
$$f(x_1,\ldots,x_n) = c_{1\ldots n}\left\{F_1(x_1),\ldots,F_1(x_1)\right\} . f_1(x_1)\ldots f_n(x_n)$$

در این رابطه، $c_{1\ldots n}$ تابع چگالی مفصل شرطی n-متغیره می‌باشد. همچنین برای توابع چگالی مفصل شرطی داریم:

(رابطه ۲۰)

$$f(x_1|x_2) = c_{12}\left\{F_1(x_1),F_2(x_2)\right\} . f_1(x_1)$$

$$f(x_i|x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n) = c_{ij|\mathbf{k}}\left\{F(x_i|x_{\mathbf{k}-j}),F(x_j|x_{\mathbf{k}-j})\right\} . f(x_i|x_{\mathbf{k}-j})$$

که $\mathbf{k}=\{1,\ldots,n\}\backslash i$ و x_j یک عضو انتخابی از x و

(رابطه ۲۱)

$$F(x_i|x_{\mathbf{k}}) = \frac{\partial C_{i,j|\mathbf{k}}\left\{F(x_i|v_{\mathbf{k}-j}),F(x_j|x_{\mathbf{k}-j})\right\}}{\partial F(x_j|x_{\mathbf{k}-j})}$$

در این رابطه، $C_{i,j|\mathbf{k}}$ تابع مفصل شرطی می‌باشد. با استفاده از معادلات فوق می‌توان توابع چگالی مفصل چند متغیره را که در رابطه ۹ مشاهده می‌گردند، با استفاده از توابع چگالی مفصل جفتی محاسبه کرد. ساختار کلی تابع چگالی مفصل ساختار درختی متعارف به‌صورت زیر می‌باشد (Aas *et al*. 2009).

(رابطه ۲۲)

$$\prod_{k=1}^{n} f(x_k) \prod_{j=1}^{n-1}\prod_{i=1}^{n-j} c_{j,j+i|1,\ldots,j-1}\left\{F(x_j|x_1,\ldots,x_{j-1}),F(x_{j+i}|x_1,\ldots,x_{j-1})\right\}$$

برای ارزیابی یک نقطه با استفاده از n نقطه اطراف آن Bárdossy (2006) از تابع مفصل شرطی استفاده نمود و میانه تابع مفصل شرطی را به‌عنوان برآوردی از تابع توزیع در نقطه مجهول به‌صورت زیر در نظر گرفت (Bárdossy, 2006).

(رابطه ۲۳)
$$C^{-1}\left(U_1|F(x_2),\ldots,F(x_{k+1})\right)\big|_{U_1=0.5}$$

در این رابطه، C^{-1} تابع معکوس مفصل می‌باشد. حال اگر F تابع توزیع متغیر ناحیه‌ای باشد، برآورد نقطه مجهول به‌صورت معکوس تابع F در نقطهٔ مجهول می‌باشد (رابطهٔ ۲۴). همچنین

1. Canonical vine

تخمین نقطه‌ای مقدار متوسط از مقدار نامشخص با استفاده از رابطه ۲۵ قابل‌محاسبه است (Bárdossy, 2006).

$$Z_{median}\left(x_1\right)=F^{-1}\left(C_{k+1}^{-1}\left(0.5\,|\,F\left(x_2\right),\ldots,F\left(x_{k+1}\right)\right)\right) \quad \text{(رابطه ۲۴)}$$

$$Z_{mean}\left(x_1\right)=\int_0^1 F^{-1}\left(u\right)c\left(u\,|\,F\left(x_2\right),\ldots,F\left(x_{k+1}\right)\right)du \quad \text{(رابطه ۲۵)}$$

در این رابطه، F^{-1} معکوس توابع توزیع حاشیه‌ای می‌باشد.

معیارهای اعتبارسنجی

به‌منظور اعتبارسنجی دقت روش‌های مورداستفاده در پهنه‌بندی کیفیت آب منطقه از معیارهای جذر میانگین مربعات خطا[1] (RMSE)، میانگین قدر مطلق خطا[2] (MAE) و ضریب همبستگی (R^2) استفاده شد که مقادیر آن‌ها به ترتیب به‌صورت زیر می‌باشد.

$$RMSE=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-Y_i\right)^2}{n}} \quad \text{(رابطه ۲۶)}$$

$$MAE=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left|X_i-Y_i\right|}{n} \quad \text{(رابطه ۲۷)}$$

$$R^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\bar{Y}\right)\left(X_i-\bar{X}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\bar{Y}\right)^2\left(X_i-\bar{X}\right)^2}} \quad \text{(رابطه ۲۸)}$$

که در آن X_i و Y_i به ترتیب i مین داده‌های مشاهداتی و محاسباتی و n تعداد داده‌ها می‌باشند.

نتایج و بحث

به‌منظور ایجاد تابع مفصل فضایی، بهترین تابع توزیع حاشیه‌ای بر داده‌ها برازش داده شد. بهترین تابع توزیع حاشیه‌ای بر اساس سه آزمون کلموگروف- اسمیرنف[3]، آندرسون- دارلینگ[4] و کای اسکوئر[5] انتخاب گردید. نتایج مربوط به این آزمون‌ها در جدول (۴) مشاهده می‌گردد.

در نتیجه با توجه به نتایج جدول (۴) تابع بور با پارامترهای شکل ۰/۵۲ و ۴/۸۳ و همچنین پارامتر مقیاس ۳/۱۸ به‌عنوان تابع توزیع برتر انتخاب گردید. سپس برای فواصل مشخص جفت چاه‌ها جدا و ضریب همبستگی پیرسون برای تمامی دسته‌ها محاسبه گردید که نتایج در جدول ۵ مشاهده می‌گردد. لازم به ذکر است با توجه به این‌که حداقل فاصله چاه‌ها در محدوده موردمطالعه ۲/۵ کیلومتر بود، حداقل فاصله برای برازش تابع مفصل، ۳ کیلومتر در نظر گرفته شد.

همان‌گونه که مشاهده می‌گردد از فاصله مکانی ۱۹ کیلومتر و بیش از آن همبستگی خاصی میان داده‌ها مشاهده نمی‌گردد و می‌توان داده‌ها را کاملاً مستقل از هم در نظر گرفت. به همین دلیل برازش تابع مفصل تا فاصله ۱۷ کیلومتر صورت گرفت و برای فواصل بالاتر تابع مفصل Π که نشان‌دهنده استقلال کامل داده‌های یکدیگر می‌باشد، استفاده گردید. در پژوهش حاضر به‌منظور برازش تابع مفصل مناسب از بسته[6] copula تحت نرم‌افزار آماری R استفاده گردید. این بسته توسط هوفرت[7] و همکاران ارائه شده است (Hofert et. Al. 2014). در جدول (۵) بهترین توابع مفصل برازش داده‌شده با استفاده از روش برآورد درست‌نمایی حداکثر و یا MLE[8] و پارامترهای مربوط به آن‌ها مشاهده می‌گردند. لازم به ذکر است که کم بودن شاخص MLE در فاصله ۳ کیلومتر به دلیل کمتر بودن تعداد جفت نقاط نسبت به فاصله‌های بیشتر است که در جدول (۵) تعداد این جفت نقاط مشخص گردیده است.

پس از برازش توابع مفصل، با استفاده از روش پیشنهادی توسط Aas *et al*. (2009) توابع مفصل پنج متغیره ساخته شدند. درنهایت اقدام به تهیه نقشه میانه و مقدار متوسط داده‌ها گردید که این نقشه‌ها در شکل (۲) مشاهده می‌گردند.

به‌منظور مقایسه روش پیشنهادی با سایر روش‌های متداول، دقت مدل با روش‌های کریگینگ و روش معکوس فاصله موزون یا به‌اختصار IDW مقایسه گردید. روش IDW مقدار متغیر را در نقطه مجهول بر اساس وزن‌دهی به نقاط اطراف محاسبه می‌کند که این وزن بر اساس معکوس فاصله نقاط معلوم تا نقطه مجهول محاسبه می‌گردد. روش کریگینگ نیز بر اساس محاسبه تغییر نما[9] به‌دست‌آمده از داده‌های معلوم، مقدار متغیر را در نقطه مجهول محاسبه می‌کند. جدول (۶) نیز نشان‌دهنده دقت روش‌های مختلف با توجه به معیار RMSE و MAE و R^2 می‌باشد. لازم به ذکر است که در پژوهش حاضر، مدل برتر واریوگرام در روش کریگینگ، مدل دایره‌ای با ضریب ۱/۳۶ انتخاب گردید.

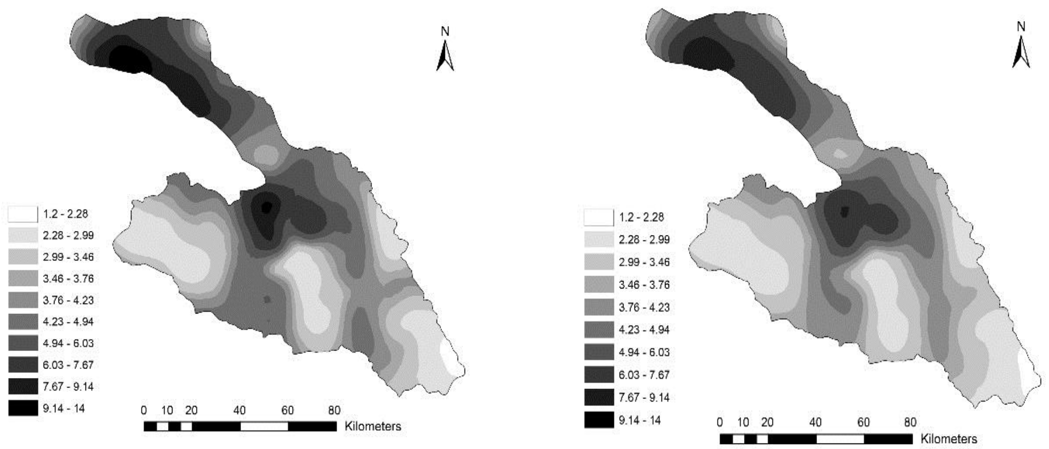
1. Root Mean Square Error
2. Mean Absolute Error
3. Kolmogorov–Smirnov
4. Anderson-Darling
5. Chi-Squared
6. Package
7. Hofert
8. Maximum Likelihood Estimation
9. Variogram

جدول ۴. نتایج مربوط به سه آزمون کلموگروف- اسمیرنف، آندرسون- دارلینگ و کای اسکوئر برای انتخاب بهترین تابع توزیع حاشیه‌ای

تابع توزیع حاشیه‌ای	مقدار آماره در آزمون کلموگروف- اسمیرنف	مقدار آماره در آزمون آندرسون- دارلینگ	مقدار آماره در آزمون کای اسکوئر
بور سه متغیره	۰/۰۶۷۷	۰/۲۲۶۹	۸/۲۲۴
بور چهار متغیره	۰/۰۶۸۹	۰/۲۲۸۰	۸/۲۴۰۶
لوگ لوجستیک	۰/۰۷۰۲	۰/۲۸۰۳	۹/۳۹۸۴

جدول ۵- توابع مفصل مربوط به فواصل مختلف و پارامترهای آن

فاصله (کیلومتر)	تعداد جفت چاه	ضریب همبستگی پیرسون	تابع مفصل	مقدار شاخص MLE	پارامتر تابع مفصل (θ)
۳	۱۲	۰/۶۷۳	فرانک	۸/۳۷	۶/۴۲۶
۵	۵۶	۰/۶۴۴	جو	۱۰/۸۵	۲/۹۳۵
۷	۹۵	۰/۶۳۱	فرانک	۱۹/۶۴	۵/۲۵۴
۹	۱۱۹	۰/۴۸۳	فرانک	۱۶/۶۵	۴/۳۷۶
۱۱	۱۴۱	۰/۳۲۷	فرانک	۱۱/۸۳	۳/۴۴۸
۱۳	۱۲۹	۰/۲۳۴	فرانک	۶/۲۲	۲/۶۰۰
۱۵	۱۵۸	۰/۲۲۹	جو	۳/۱۴	۱/۴۳۳
۱۷	۱۶۱	۰/۱۴۱	جو	۳/۰۵	۱/۲۴۱
۱۹	۱۷۳	۰/۰۰۴	مستقل	-	-
۲۱	۱۳۶	۰/۰۰۹	مستقل	-	-



شکل ۲-نقشه پهنه‌بندی کیفی آب‌های زیرزمینی دشت با استفاده از تابع مفصل، سمت راست بر اساس میانه و سمت چپ بر اساس میانگین

جدول ۶- مقدار خطای مربوط به روش‌های مختلف

مدل	*RMSE*	*MAE*	R^2
تابع مفصل (میانه)	۰/۹۵	۰/۶۹	۰/۷۱
تابع مفصل (میانگین)	۱/۰۹	۰/۸۶	۰/۶۷
کریگینگ	۱/۱۵	۰/۹۳	۰/۶۳
کریگینگ (با تبدیل باکس کاکس)	۱/۱۳	۰/۹۲	۰/۶۸
کریگینگ (با تبدیل لگاریتمی)	۱/۰۸	۰/۸۲	۰/۶۷
IDW	۱/۲۸	۱/۱۲	۰/۶۱

همان‌گونه که در جدول (۶) مشاهده می‌گردد، توابع مفصل علی‌الخصوص با استفاده از میانه توانایی بیشتری را در پهنه‌بندی کیفی آب زیرزمینی نسبت به دو روش کریگینگ و IDW بروز دادند. از مهم‌ترین دلایل این امر می‌توان به امر توانایی برازش بهترین تابع توزیع حاشیه‌ای بر داده‌ها می‌باشد که در مدل کریگینگ بدین گونه نیست. همچنین توانایی بیان همبستگی بین داده‌ها در چندک‌های مختلف به‌صورت جداگانه و همچنین حساسیت بسیار کمتر نسبت به داده‌های پرت از

دلایل دیگر بالاتر بودن دقت مدل مذکور می‌باشد. نتایج حاصل از این تحقیق نشان‌دهندهٔ دقت بالای روش تابع مفصل نسبت به روش‌های کریگینگ و IDW است که با نتایج تحقیقات محققین ازجمله Bárdossy (2006)، Li (2010) و Gräler and Pebesma (2011) همسو می‌باشد.

نتیجه‌گیری

در بررسی‌های زمین‌آماری، یکی از مهم‌ترین مشکلات پیش رو عدم امکان بررسی وابستگی پارامترها در مقادیر مختلف و یا به عبارتی چندک‌های مختلف داده‌هاست. از طرفی نیاز به داده‌هایی با توزیع گاوسی که در طبیعت کمتر یافت می‌شود، به مشکلات آن می‌افزاید. رویه پیش رو در این تحقیق، مشکلات ذکرشده را برطرف می‌کند. تابع مفصل با توجه به اینکه نسبت به تبدیل‌های یکنواخت حاشیه‌ای تغییر نمی‌کند و به‌طور کامل وابستگی احتمالاتی را بیان می‌کند، می‌تواند در این زمینه مورداستفاده قرار گیرد. همچنین حساسیت کمتر تابع مفصل به داده‌های پرت نسبت به مدل کریگینگ از دیگر مزایای این روش می‌باشد. در پهنه‌بندی با استفاده از روش کریگینگ یکی از مهم‌ترین نکاتی که بایستی رعایت گردد، مسئله عدم وجود چولگی در داده‌ها و به‌عبارت‌دیگر گاوسی بود آن‌ها می‌باشد که در طبیعت مشاهده می‌گردد. در پژوهش حاضر پهنه‌بندی کیفی آب زیرزمینی به کمک تابع مفصل موردبررسی قرار گرفت و نتایج حاصل از این روش با روش‌های کریگینگ و IDW مقایسه گردید. با توجه به چولگی مثبت داده‌ها مدل کریگینگ حتی باوجود استفاده از تبدیل‌های لگاریتمی و باک کاکس[1] دقت کمتری را نسبت به مدل تابع مفصل دارا می‌باشد. علاوه بر موارد فوق ویژگی مهم دیگر تابع مفصل که در مطالعات پهنه‌بندی و درون‌یابی می‌تواند موردتوجه قرار گیرد، ارائه مجزای همبستگی برای چندک‌های مختلف داده‌هاست. ویژگی‌های فوق بیانگر توانایی تابع مفصل به‌عنوان جایگزینی برای روش‌های مرسوم زمین‌آماری می‌باشد. با توجه به نتایج حاصله از این تحقیق می‌توان به توانایی تابع مفصل در پهنه‌بندی کیفی آب زیرزمینی پی برد که صحت این امر با عنایت به یافته‌های حاصل از پژوهش سایر محققین مورد تأیید قرار می‌گیرد.

1. Box-Cox

REFERENCES

Aas. K., Czado, C., Frigessi, A. and Bakken, H. (2009). Pair-copula constructions of multiple dependence. Insurance: Mathematics and economics. 44(2), 182-198.

Ariff, N. M., Jemain, A. A., Ibrahim, K. and Wan Zin, W.Z. (2012). IDF relationships using bivariate copula for storm events in Peninsular Malaysia. Journal of Hydrology. 470(1), 158-171.

Bárdossy, A. and Li, J. (2008). Geostatistical interpolation using copulas. Journal of Water Resources Research. 44(7), 1-15.

Bárdossy, A. (2006). Copula-based geostatistical models for groundwater quality parameters. Journal of Water Resources Research, 42(11), 1-12.

Bárdossy, A. and Pegram, G. (2014). Infilling missing precipitation records – A comparison of a new copula-based method with other techniques. Journal of Hydrology. 519, Part A(0): 1162-1170.

Gräler, B. and Pebesma, E. (2011). The pair-copula construction for spatial data: a new approach to model spatial dependency. Procedia Environmental Sciences. 7(1), 206-211.

HasaniPak, A. (2007). Geostatistic. Tehran University Press, 341pp.

Haslauer, C. P., Li, J. and Bárdossy, A. (2010). Application of copulas in geostatistics. In tkinson PM and Lloyd CD (Eds.). geoENV VII– Geostatistics for Environmental Applications. Springer pp. (395-404)

Hofert, M., Yan, J. and Maechler, M.M. (2014). Package ‘copula’. R Package Manual.

Kazianka, H. and Pilz, J. (2011). Bayesian spatial modeling and interpolation using copulas. Journal of Computers & Geosciences. 37(3), 310-319.

Li, J. (2010). Application of copulas as a new geostatistical tool, University of Stuttgart. Ph.D. Dissertation.

Mahmoudi, Z. F., Nasirimehr, S. and Tahmasbipour, N. (2013). The importance and role of water resources management in Kerman province. In: Proceedings of 12th conference on irrigation and evaporation reduce. Shahid Bahonar university of Kerman. Kerman. Iran. (In Farsi)

Moazami, S., Golian, S., Kavianpour, M. R. and Hong, Y. (2014). Uncertainty analysis of bias from satellite rainfall estimates using copula method. Atmospheric Research. 137(0): 145-166.

Nelsen, R. B. (2007). An introduction to copulas.2nd Ed. Springer.

Omidi, M., Mohammadzade, M. and Morid, S. (2010). Probabilistic analysis of drought severity in Tehran province using copula. Journal of Soil and Water Research. 41(1): 95:101.

Reddy, M.J. and Ganguli, P. (2012). Bivariate flood frequency analysis of upper Godavari River Flows using Archimedean copulas. Journal of Water Resources Management. 26(14), 3995-4018.

Samaniego, L., Bárdossy, A. and Kumar, R. (2010). Streamflow prediction in ungauged catchments using copula-based dissimilarity measures. Journal of Water Resources Research, 46(2), 1-22.

Schmidt, T. (2007). Coping with copulas. In: Rank J (Ed.). Copulas-From Theory to Application in Finance. Risk Books. (pp. 3-34).

Serinaldi, F., Grimaldi, S. (2007). Fully nested 3-copula: procedure and application on hydrological data. Journal of Hydrologic Engineering. 12(4), 420-430.

Shahidasht, A. and Abbasnejad, A. (2013). Provide guidelines for groundwater resources management in Kerman Province. Journal of Applied Geology. 7(2), 131-146 (In Farsi)

Sklar, A. (1959). Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges. Université Paris.

Wong, G., Lambert, M. F., Leonard, M. and Metcalfe, A. V. (2009). Drought analysis using trivariate copulas conditional on climatic states. Journal of Hydrologic Engineering. 15(2), 129-141.