

## Experimental Study of Expanding Effect and Sand-Roughened Bed on Hydraulic Jump Characteristics

RASOUL DANESHFARAZ<sup>1\*</sup>, MAHDIMAJEDI ASL<sup>2</sup>, REZA MIRZAEI<sup>3</sup>

1. Associate Professor, Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, University of Maragheh
  2. Assistant Professor, Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, University of Maragheh
  3. Former Graduated Student, Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, University of Maragheh
- (Received: July. 12, 2018- Revised: Sep. 17, 2018- Accepted: Sep. 25, 2018)

### ABSTRACT

Abruptly expanding stilling basins are often used at downstream of structures such as overflows, gates and spillways to increase energy loss in hydraulic jumps. Increasing the jump length, decreasing the depth ratio and asymmetric flow are among the characteristics of jump in a sudden expanding channel. The channel bed roughness is one of the method that can reduce the secondary depth and jump length. Therefore, in this study, the effect of sand bed with median size 1.9 cm on S-jump characteristics was investigated. Whole of the experiments were performed at expansion ratios of 1, 0.67, 0.5, and 0.33 and within the range of Froude numbers; 4 to 12. The results showed that the abruptly expansion stilling basins with a rough bed in all the expansion ratios reduced the depth ratio with an average of 12 to 16 percent, compared to an abruptly expansion stilling basins with smooth bed. Also, the average jump length reduction for all expansion ratio in the abruptly expanding stilling basin with the rough bed was obtained 20 percent.

**Key word:** Suddenly expanding, rough bed, hydraulic jump, energy loss, depth ratio

## بررسی آزمایشگاهی تاثیر واگرایی و بستر زبر شده با شن بر مشخصات پرش هیدرولیکی

رسول دانشفراز<sup>۱\*</sup>، مهدی ماجدی اصل<sup>۲</sup>، رضا میرزایی<sup>۳</sup>

۱. دانشیار سازه های هیدرولیکی، گروه مهندسی عمران، دانشگاه مراغه، مراغه، ایران

۲. استادیار سازه های هیدرولیکی، گروه مهندسی عمران، دانشگاه مراغه، مراغه، ایران

۳. دانشجوی کارشناسی ارشد سازه های هیدرولیکی - گروه مهندسی عمران دانشگاه مراغه، مراغه، ایران

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۴/۲۱ - تاریخ بازنگری: ۱۳۹۷/۶/۲۶ - تاریخ تصویب: ۱۳۹۷/۷/۳)

### چکیده

از حوضچه های واگرا اغلب در پایین دست سازه هایی چون سرریزها، دریچه ها و تندآب ها برای افزایش استهلاک انرژی در پرش هیدرولیکی استفاده می شود. افزایش طول پرش، کاهش نسبت اعماق مزدوج پرش و نامتقارنی جریان از جمله ویژگی های پرش در حوضچه های با بازشدگی ناگهانی می باشد. زبری بستر کانال یکی از روش هایی است که می تواند عمق ثانویه و طول پرش را کاهش دهد. از این رو در این مطالعه تأثیر بستر شنی با قطر متوسط ۱/۹ سانتی متر بر مشخصات پرش گسسته مورد بررسی قرار گرفت. تمامی آزمایش ها به ترتیب در نسبت های بازشدگی مقطع ۰/۱۶۷، ۰/۵ و ۰/۳۳ و کانال منشوری، محدوده ی عدد فرود ۴ تا ۱۲ انجام شد. نتایج نشان داد که حوضچه های آرامش واگرای ناگهانی با بستر زبر در تمامی نسبت های بازشدگی، عمق مزدوج پرش را در مقایسه با واگرای با بستر صاف به صورت متوسط ۱۲ تا ۱۶ درصد کاهش می دهد. همچنین متوسط کاهش طول پرش برای تمامی نسبت های بازشدگی در حوضچه واگرای با بستر زبر، به صورت میانگین ۲۰ درصد بدست آمد.

**واژه های کلیدی:** بازشدگی ناگهانی، بستر زبر، پرش هیدرولیکی، استهلاک انرژی، نسبت اعماق

### مقدمه

کم تر، تمایل به جریان نامتقارن و افزایش طول پرش در مقایسه با کانال منشوری اشاره نمود. براساس مطالعات Rajaratnam and Subramanya (1968) و Bremen and Hager (1993)، انواع پرش در واگرای ناگهانی به صورت زیر تقسیم بندی می شوند: الف) پرش فرار<sup>۱</sup>: پرشی که پنجه آن در پایین دست مقطع واگرا قرار می گیرد و مشخصات آن شبیه به پرش کلاسیک می باشد. ب) پرش گسسته<sup>۲</sup>: در این پرش پنجه در محل تغییر مقطع قرار می گیرد. این پرش بیش تر شبیه به جت است و بسیار نامتقارن و نوسانی و جهت تقارن آن تصادفی و به یک سمت دیواره کانال می باشد. ج) پرش انتقالی<sup>۳</sup>: پرشی که پنجه آن بالاتر از مقطع واگرا قرار می گیرد و بسته به فاصله پنجه پرش از محل تغییر مقطع می تواند متقارن یا نامتقارن شود. د) پرش کلاسیک<sup>۴</sup>: پرشی که تمامی مشخصات پرش در کانال تنگ، بالاتر از مقطع واگرا قرار گیرد. بر این اساس مطالعات گسترده ای تا به حال در خصوص پرش در مقاطع واگرا صورت پذیرفته است که به مهم ترین آن ها در زیر اشاره شده است. Unny (1963) پرش هیدرولیکی گسسته را مورد

در کانال های روباز و پایین دست سازه هایی چون سرریزها، دریچه ها و تندآب ها، با تبدیل جریان از حالت فوق بحرانی به زیربحرانی، وقوع پرش هیدرولیکی اجتناب ناپذیر است. جهت اطمینان از تشکیل پرش هیدرولیکی و کاهش خسارات ناشی از فرسایش کانال پایین دست از حوضچه آرامش استفاده می شود. تثبیت پرش در حوضچه های آرامش به هندسه کانال، شرایط جریان ورودی و عمق آب پایین دست بستگی دارد. در مواردی که عمق آب پایین دست کانال بسیار کم باشد به گونه ای که پرش هیدرولیکی حتی به کمک ملزومات، تشکیل نیابد و به دلیل مشکلات خاکبرداری، امکان حفاری وجود نداشته باشد، استفاده از کانال های غیر منشوری (کانال هایی که در طول آن ها سطح مقطع یا شیب کانال تغییر کند) یا واگرایی مقطع می تواند یک راه حل مناسب برای مستهلک کردن انرژی جنبشی جریان فوق بحرانی باشد (Herbrand, 1973). از جمله ویژگی های واگرایی مقطع می توان به استهلاک انرژی بیشتر، نسبت اعماق مزدوج

\* نویسنده مسئول: daneshfaraz@yahoo.com

1. Repelled hydraulic jump or R-jumps  
2. Spatial hydraulic jump or S-jump  
3. Transitional hydraulic jumps or T-jump  
4. Classical hydraulic jumps

ضریب اصلاحی  $\omega$  را به صورت زیر پیشنهاد نمودند:

$$\omega = 1 - 4.23[\log(B)\log(Fr_1)] \quad (\text{رابطه ۹})$$

(2008) *Matin et al.* پرش گسسته در بازشدگی ناگهانی بر روی بستر صاف را با در نظر گرفتن سه نوع شیب مثبت و نسبت بازشدگی ۰/۸، ۰/۷، ۰/۶ و ۰/۵ و محدوده فرود ۲/۶۵ تا ۱۰ با هدف تعیین رابطه‌ای برای نسبت اعماق مزدوج مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها با در نظر گرفتن رابطه ارائه شده توسط (1998) *Matin et al.*، فرود اصلاحی زیر را ارائه نمودند:

$$E_1^2 = \frac{Fr_1}{k_1(1-k_2)\cos\theta} \quad (\text{رابطه ۱۰})$$

$$k_1 = 1 - 0.37\ln(B)(1.23 + \ln(Fr_1)) \quad (\text{رابطه ۱۱})$$

$$k_2 = 0.52(0.1 + 0.35Fr_1 - 0.05Fr_1^2)\sin\theta(\theta)^{-1} \quad (\text{رابطه ۱۲})$$

در روابط بالا  $k_1$  و  $k_2$  ضریب اصلاحی اثر بازشدگی و  $\theta$  شیب طولی کانال می‌باشد. (2004) *Alhamid* پرش گسسته را در بستر شیبدار با نسبت‌های بازشدگی ۰/۳۳، ۰/۵، ۰/۶۷ و محدوده عدد فرود ۲/۷ تا ۷/۵ مورد بررسی قرار داد. همچنین رابطه زیر را با در نظر گرفتن ضریب اصلاحی، برای تعیین نسبت اعماق مزدوج پرش هیدرولیکی گسسته در بستر صاف ارائه داد:

$$E_1^2 = \frac{Fr^2}{\cos\theta} \left( \frac{C_s}{Fr^2} + C_e \right) \quad (\text{رابطه ۱۳})$$

$$C_e = (1 + 0.25\ln(B))^{1+\ln(Fr)} \quad (\text{رابطه ۱۴})$$

$$C_s = 9.941(S_0)^2(1 - 0.441\ln B Fr_1^{-1.5}) \quad (\text{رابطه ۱۵})$$

در روابط فوق:  $C_e$  و  $C_s$  ضرایب اصلاحی اثر بازشدگی و  $S_0$  شیب طولی کف کانال می‌باشد.

با توجه به این که ابعاد حوضچه آرامش بستگی به مشخصات پرش هیدرولیکی دارد، لذا سعی شده است تا با استفاده از ضمائم مثل بلوک و آب پایه در ابتدا، انتها و میانه حوضچه آرامش، هزینه‌های اجرایی این سازه‌ها کاهش داده شود. از آنجایی که بلوک‌ها مستقیماً در مقابل جت ورودی جریان قرار می‌گیرند، باعث افزایش استهلاک انرژی و کاهش عمق ثانویه و طول پرش می‌گردند. پدیده کاویتاسیون از جمله مشکلاتی است که در سرعت‌های بالای جریان می‌تواند باعث تخریب و فرسایش این بلوک‌ها شود، از این رو (2002) *Ead and Rajaratnam* بسترهای موجدار را پیشنهاد کردند. استفاده از المان‌های زبری عاملی است که می‌تواند باعث کاهش ابعاد حوضچه و مقابله با خطر پدیده کاویتاسیون گردد. زبری‌ها، بلوک‌ها یا المان‌هایی هستند که سطح فوقانی (تاج) آن‌ها هم‌تراز کف کانال بالادست و پایین دست قرار می‌گیرد (2002) *Ead and Rajaratnam*. (1968) *Rajaratnam* اولین مطالعات در خصوص پرش هیدرولیکی بر روی بستر زبر را انجام داد و رابطه‌ای برای بیان نیروی برشی بر روی بستر زبر پیشنهاد نمود. (1991) *Mohamed*

بررسی قرار داده و معادله زیر را برای پیش‌بینی نسبت اعماق مزدوج ارائه داد.

$$D_S = \frac{1}{2}(1 + K\alpha Fr_1^2) \left[ \sqrt{1 + \frac{8Fr_1^2}{1 + K\alpha Fr_1^2}} - 1 \right] \quad (\text{رابطه ۱})$$

که در آن  $D_S = y_2/y_1$  نسبت اعماق پرش گسسته؛  $y_1$  عمق اولیه پرش و  $y_2$  عمق ثانویه پرش،  $K$  پارامتر ثابتی بوده و به نسبت بازشدگی مقطع  $B$  ( $b_1/b_2$ ) بستگی دارد؛  $b_1$  و  $b_2$  به ترتیب عرض بالادست و پایین دست کانال،  $Fr_1$  عدد فرود در پنجه پرش و  $\alpha = b_1/y_1$  می‌باشد. (1963) *Unny* مقدار  $K$  را برای نسبت بازشدگی ۰/۵ محاسبه نمود. همچنین (1968) *Subramanya* با بررسی پرش فرار در نسبت‌های بازشدگی ۰/۳ تا ۰/۹ و محدوده عدد فرود ۲ تا ۹ معادله تجربی زیر را برای پیش‌بینی نسبت اعماق ارائه کرد.

$$D_R = (Fr_1 - 0.85)[B + 0.3] + 0.75 \quad (\text{رابطه ۲})$$

در این رابطه  $D_R$  نسبت اعماق پرش فرار می‌باشد. (1973) *Herbrand* نیز برای طراحی ابعاد حوضچه‌های واگرا به بررسی پرش گسسته بر روی بستر صاف با نسبت‌های بازشدگی ۰/۱، ۰/۸۳۳، ۰/۷۱۴، ۰/۶۲۵، ۰/۵ و ۰/۲۸۸ پرداخت و رابطه ساده زیر را برای پیش‌بینی اعماق مزدوج ارائه نمود:

$$D_S = D^* \sqrt{B}, D^* = 0.5(-1 + \sqrt{1 + 8Fr_1^2}) \quad (\text{رابطه ۳})$$

(1978) *Chandra and Lal* پارامتر حساسیت  $\psi$  را برای

پرش گسسته به صورت زیر ارائه نمودند:

$$\psi = \frac{D^* - D_S}{D^* - 1}, \quad 0 \leq \psi \leq 1 \quad (\text{رابطه ۴})$$

این پارامتر بی‌بعد، حساسیت پذیری پنجه پرش به تغییرات عمق آب پایین دست را نشان می‌دهد. (1993) *Bremen and Hager* با بررسی پرش انتقالی در نسبت بازشدگی ۰/۳۳ و با در نظر گرفتن پارامتر حساسیت ارائه شده توسط (1978) *Chandra and Lal*، معادله‌ای را بین  $\psi$  و  $x_1$  ارائه نمودند.

$$\psi = (1 - \sqrt{B})[1 - \tanh(1.9X_1)] \quad (\text{رابطه ۵})$$

$$X_1 = x_1/L_r^* \quad (\text{رابطه ۶})$$

$$L_r^* = y_1(6.29Fr_1 - 3.59) \quad (\text{رابطه ۷})$$

در این معادله  $L_r^*$  طول غلتاب در پرش کلاسیک و  $x_1$  فاصله پنجه پرش تا محل تغییر مقطع می‌باشد. (1998) *Matin et al.* معادله بلانگر را با در نظر گرفتن ضریب اصلاحی  $\omega$  و تعیین فرود اصلاحی برای مقطع بازشدگی ناگهانی بر روی بستر صاف به صورت زیر پیشنهاد نمودند:

$$D_S = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1 + 8E_1^2}) \quad (\text{رابطه ۸})$$

که در آن  $E_1^2 = \frac{Fr_1^2}{\omega}$  می‌باشد. آن‌ها برای پرش گسسته

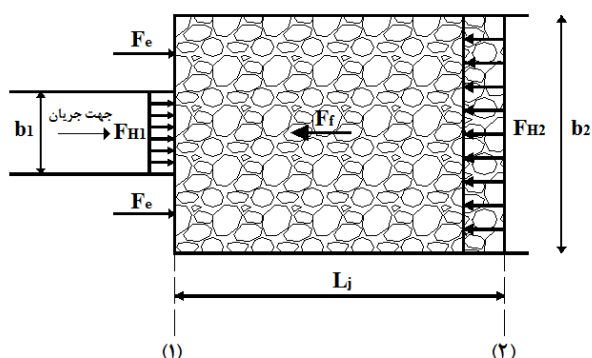
کلاسیک) داشته است. از آنجایی که بررسی تأثیر زبری‌های مصنوعی بر مشخصات پرش در کانال‌های منشوری و غیر منشوری در تحقیقات پیشین به دفعات مشاهده شده است، اما در مقطع واگرای زبر شده با شن (سنگ‌چین) مطالعات قابل توجهی صورت نگرفته است و به‌کارگیری مصالح طبیعی شنی در مقایسه با زبری‌های مصنوعی موجب کاهش حجم عملیات بتن‌ریزی و کاهش هزینه‌های اجرایی می‌شود، در این مطالعه بررسی مشخصات پرش گسسته در کانال غیر منشوری (واگرای ناگهانی) و منشوری بر روی زبری‌های طبیعی شنی با دانه‌بندی مشخص پرداخته شده است. همچنین در راستای صحت سنجی به مطالعه حاضر، نتایج آن با نتایج تحقیقات قبلی مقایسه خواهد شد.

### مواد و روش‌ها

با در نظر گرفتن طرح پرش هیدرولیکی در بازشدگی ناگهانی با بستر زبر شده با شن (شکل ۱) و نوشتن معادله مومنم قبل و بعد از پرش (مقطع ۱ و ۲) و فرض هیدرواستاتیک بودن فشار، توزیع سرعت یکنواخت و صرف نظر کردن از اصطکاک می‌توان نوشت (Neisi and Shafai, 2013):

$$D_S^3 - D_S [B(2Fr_1^2 - \varepsilon) + 1] + 2Fr_1^2 B^2 = 0 \quad (\text{رابطه ۲۰})$$

رابطه فوق براساس  $F_{H1}$  و  $F_{H2}$ : فشار هیدرواستاتیک قبل و بعد از پرش،  $F_e$ : نیروی فشاری وارد بر دیواره مقطع بازشدگی،  $F_f$ : نیروی تنش برشی کف کانال زبر و با در نظر گرفتن پرش گسسته ارائه شده است.



شکل ۱- طرح پرش هیدرولیکی گسسته بر روی بستر شنی

### - آنالیز ابعادی

پارامترهای مؤثر بر روی مشخصات پرش در بازشدگی ناگهانی بر روی بستر زبر شنی، به ترتیب عبارت‌اند از:  $P$  جرم مخصوص آب،  $\lambda$  لزوجت سینماتیکی،  $y_1$  عمق اولیه پرش،  $y_2$  عمق ثانویه پرش،  $v_1$  سرعت قبل از پرش،  $g$  شتاب گرانش،  $L_j$  طول پرش،  $K_s$  قطر متوسط دانه‌های شنی (۵۰ درصد دانه‌ها از این قطر کوچکتر

Ali طول پرش هیدرولیکی را بر روی بستر زبر با زبری غیر ممتد مکعبی شکل با تراکم ثابت ۱۰ درصد مطالعه نمود. نتایج نشان داد که طول پرش هیدرولیکی کاهش یافته و این کاهش برای اعداد فرود ۴ تا ۱۰ تقریباً  $27/4$  تا  $67/4$  درصد می‌باشد. Ead and Rajaratnam (2002) با بررسی پرش هیدرولیکی بر روی بستر موج‌دار سینوسی و محدوده فرود ۴ تا ۱۰ دریافتند که تنش برشی بر روی بستر موج‌دار ۱۰ برابر تنش برشی بر روی بستر صاف می‌باشد. همچنین آن‌ها رابطه زیر را برای تعیین ضریب تنش برشی  $\varepsilon$  (نسبت نیروی برشی بستر به نیروی فشار هیدرواستاتیکی در مقطع قبل از پرش) بر روی بستر صاف در کانال منشوری ارائه نمودند:

$$\varepsilon = 0.16Fr_1^2 - 0.8Fr_1 + 1 \quad (\text{رابطه ۱۶})$$

Carollo *et al* (2007) مشخصات پرش هیدرولیکی بر روی بستر سنگ‌دانه‌ای با قطر متوسط دانه ( $K_s$  یا  $d_{50}$ )  $0/46$ ،  $0/82$ ،  $1/46$ ،  $2/39$ ،  $3/2$  سانتی‌متر (۵۰ درصد دانه‌ها از این قطر کوچکتر می‌باشند) و محدوده فرود  $1/9$  تا  $9/9$  را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها رابطه زیر را برای محاسبه نسبت اعماق مزدوج بر روی بستر زبر سنگ‌دانه‌ای در کانال منشوری ارائه دادند:

$$\frac{y_2}{y_1} = 0.5(-1 + \sqrt{1 + 8(1 - \beta)Fr_1^2}) \quad (\text{رابطه ۱۷})$$

$$\beta = \frac{2}{\pi} \tan^{-1}(0.8(\frac{K_s}{y_1})^{0.75}) \quad (\text{رابطه ۱۸})$$

Parsamehr *et al.* (2017) پرش هیدرولیکی در شیب معکوس با بستر زبر و المان‌های لوزی شکل را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها با در نظر گرفتن تراکم  $10/67$  با دو ارتفاع زبری و دو شیب معکوس به این نتیجه رسیدند که با افزایش ارتفاع اجزای زبر و تندتر شدن شیب معکوس، عمق ثانویه و طول پرش کاهش و استهلاک انرژی افزایش می‌یابد. Neisi and Shafai (2013) برای اولین بار پرش گسسته را با بستر زبر مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها با در نظر گرفتن نسبت بازشدگی‌های مختلف، زبری مصنوعی با آرایش زیگزاگ، تراکم  $10/4$  درصد و محدوده عدد فرود بین ۲ تا ۱۰، نشان دادند که نسبت عمق مزدوج ۱۶ تا ۲۰ درصد در مقایسه با پرش هیدرولیکی کلاسیک کاهش یافته، در حالی که راندمان پرش ۲۰ درصد افزایش می‌یابد. همچنین معادله زیر را برای پیش‌بینی ضریب تنش برشی پرش (نسبت نیروی برشی ناشی از حضور زبری بر نیروی فشار هیدرواستاتیکی در مقطع قبل از پرش) در حوضچه‌های واگرای زبر ارائه نمودند:

$$\varepsilon = 0.072Fr_1^{3.103} - 3.076LnB \quad (\text{رابطه ۱۹})$$

با توجه به مطالعات پیشین و نتایج حاصل از آن‌ها مشاهده می‌شود که پرش گسسته تأثیر بسزایی در مستهلک کردن انرژی حاصل از آن‌ها دارد. در مقایسه با پرش در کانال منشوری (پرش

دانه ۱/۹ سانتی‌متر (گذرنده از الک ۰/۷۵ و مانده روی الک ۰/۵ اینچ) به طول ۱۲۰ سانتی‌متر از محل تغییر مقطع استفاده شد. دانه‌های شنی با چسب بر روی شیشه ۶ میلی‌متری چسبانده شده و به‌گونه‌ای قرار داده شدند که سطح فوقانی آن‌ها هم‌تراز کف کانال بالادست و پایین‌دست باشد. دریچه کشویی در پایین‌دست فلوم همواره به‌گونه‌ای تنظیم شد که پنجه پرش در محل تغییر مقطع رخ دهد (برای ایجاد پرش گسسته). در مجموع ۶۶ آزمایش متفاوت بر روی مدل‌های فیزیکی ساخته شده انجام پذیرفت و در تمامی آزمایش‌ها ابتدا پمپ روشن شده و پس از پایداری شرایط جریان مقادیر دبی جریان، عمق اولیه، عمق ثانویه و طول پرش گسسته اندازه‌گیری شد. دبی جریان با استفاده از روماترهای نصب شده بر پمپ با خطای نسبی ۱ تا ۲/۵ درصد اندازه‌گیری گردید. با توجه به نوسانات و تلاطم موجود در سطح جریان پرش، عمق اولیه و عمق ثانویه پرش با استفاده از گیج نقطه‌ای با دقت  $\pm 1$  میلی‌متر اندازه‌گیری شد. عمق ثانویه در محلی اندازه‌گیری شد که جریان کاملاً زیر بحرانی بوده، سطح آب تقریباً به‌صورت افقی و عمق آب نزدیک به عمق پایاب می‌باشد. لازم به ذکر است برای افزایش دقت، مقادیر ارتفاعی برداشت شده توسط گیج نقطه‌ای از طریق متوسط‌گیری سه عمق موجود در وسط و ۷/۵ سانتی‌متر فاصله از دیواره‌های کانال، محاسبه شد. همچنین برای افزایش دقت اندازه‌گیری در عمق آب در طول آزمایش‌ها، از ابزار اندازه‌گیری دیجیتال التراسونیک استفاده شد که دارای دقت ثبت ۱۴۰ داده در ثانیه می‌باشد. ثبت تعداد زیاد داده در هر ثانیه امکان درک نوسانات موجود در جریان را فراهم می‌کند. این ابزار داده‌ها را به نرم افزار اکسل فرستاده و با متوسط‌گیری از این داده‌ها عمق نهایی را ارائه می‌کرد. طول پرش هیدرولیکی که معیار اندازه‌گیری آن فاصله ابتدای پرش تا مکانی که حباب‌های هوا دیگر قابل مشاهده نبوده، جریان نسبتاً آرام و سطح آب تقریباً به صورت افقی باشد، در نظر گرفته شده و توسط اشل نواری با دقت  $\pm 1$  میلی‌متر اندازه‌گیری شد. جدول (۱) خلاصه‌ای از داده‌های آزمایشگاهی و محاسباتی را نشان می‌دهد. شکل (۲) و شکل (۳) به ترتیب طرح کلی از مدل آزمایشگاهی و پرش در واگرایی ناگهانی بر روی بستر سنگی در مطالعه حاضر را نشان می‌دهد.

هستند)،  $b_1$  عرض کانال بالادست و  $b_2$  عرض کانال پایین‌دست می‌باشند.

$$f(\rho, \nu, y_1, y_2, v_1, g, L_j, K_s, b_1, b_2) = 0 \quad (\text{رابطه ۲۱})$$

براساس روش تحلیل ابعادی پی- باکینگهام پارامترهای بدون بعد بصورت زیر استخراج شد:

$$f_1(Fr_1, Re, \frac{K_s}{y_1}, \frac{y_2}{y_1}, \frac{L_j}{y_1}, \frac{b_1}{y_1}, \frac{b_2}{y_2}) = 0 \quad (\text{رابطه ۲۲})$$

در تمامی آزمایشات،  $Re \geq 2000$  می‌باشد، بنابراین جریان کاملاً متلاطم بوده و می‌توان از اثر لزوجت صرف‌نظر نمود. با تقسیم دو پارامتر بی بعد  $\frac{b_1}{y_1}$  و  $\frac{b_2}{y_1}$  برهم می‌توان نوشت:

$$f_2(Fr_1, \frac{y_2}{y_1}, \frac{L_j}{y_1}, \frac{K_s}{y_1}, \frac{b_1}{b_2} = B) = 0 \quad (\text{رابطه ۲۳})$$

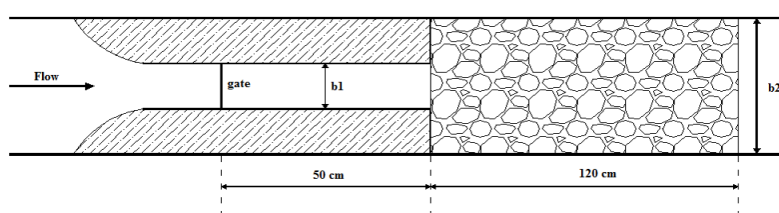
که در آن پارامتر  $K_s/y_1$  ارتفاع بی‌بعد زبری شنی می‌باشد. با ثابت بودن قطر متوسط دانه‌های شنی  $K_s$  و ثابت بودن ارتفاع بازشدگی دریچه، می‌توان نسبت بی‌بعد عمق مزدوج و طول پرش را به صورت زیر بیان نمود:

$$\frac{y_2}{y_1} = f_3(Fr_1, B) \quad (\text{رابطه ۲۴})$$

$$\frac{L_j}{y_1} = f_4(Fr_1, B) \quad (\text{رابطه ۲۵})$$

#### - معرفی مدل آزمایشگاهی

آزمایش‌های مطالعه حاضر در یک فلوم آزمایشگاهی با دیواره و کف از جنس پلکسی گلس شفاف به طول ۵ متر، عرض ۰/۳ متر و ارتفاع ۰/۴۵ متر با شیب طولی صفر انجام پذیرفت. به منظور تشکیل پرش و ایجاد جریان فوق بحرانی از دریچه فولادی به ارتفاع ۰/۶۵ متر و ضخامت ۳ میلی‌متر و ارتفاع بازشدگی دریچه ۱/۳ سانتی‌متر (برای کانال منشوری و غیر منشوری با نسبت بازشدگی ۰/۶۷ و ۰/۵ و ۱/۷) (برای کانال غیر منشوری با نسبت واگرایی ۰/۳۳) استفاده گردید. برای ایجاد اعداد فرود در محدوده ۴ تا ۱۲، ارتفاع فلوم قبل از دریچه به اندازه ۲۵ سانتی‌متر افزایش داده شد. به منظور ایجاد نسبت‌های بازشدگی متقارن ۰/۳۳، ۰/۵ و ۰/۶۷ از جعبه‌های شیشه‌ای به طول ۵۰ سانتی‌متر، ارتفاع ۲۰ سانتی‌متر و عرض‌های ۵، ۷/۵ و ۱۰ سانتی‌متری در دوطرف فلوم استفاده شد. برای زبر کردن بستر با در نظر گرفتن ابعاد فلوم و مطالعات (Carollo et al (2007)، از شن‌هایی به قطر متوسط



شکل ۲- طرح کلی از مدل آزمایشگاهی





شکل ۳- پرش هیدرولیکی نامتقارن در مقطع واگرایی زیر

جدول ۱- خلاصه‌ای از داده‌های آزمایشگاهی و محاسباتی

نوع کانال	نوع بستر						نوع کانال									
	بستر صاف			بستر زیر												
	$\epsilon$	Lj(cm)	Y2(cm)	Fr1	Y1(cm)	Q(L/min)	$\epsilon$	Lj(cm)	Y2(cm)	Fr1	Y1(cm)	Q(L/min)				
کانال منشوری	۱۱/۹۵	۲۳	۴/۵	۴/۵	-/۹	-/۶۴	۲۳	۵/۱	۴/۵	-/۹	۵۵۰ تا ۲۵۰	۱۱۲/۹	۵۳/۵	۱۰/۱	۱۱/۴۲	-/۹۹
	۵	۵	۵	۵	۵	۵	۵	۵	۵	۵	۵	۵	۵	۵	۵	۵
کانال غیر منشوری	۱۱/۵	۳۴	۴/۲	۴/۶۵	-/۸۹	-/۷۴	۴۰	۴/۸	۴/۶۵	-/۸۹	۳۵۰ تا ۱۷۵	۱۱/۵	۲۴	۴/۲	۴/۶۵	-/۸۹
	۵	۵	۵	۵	۵	۵	۵	۵	۵	۵	۵	۵	۵	۵	۵	۵
کانال غیر منشوری	۱۳/۴	۴۱	۳/۹	۴/۶	-/۹۳	-/۷۱	۴۴	۴/۳	۴/۶	-/۹۳	۲۸۴ تا ۱۵۰	۱۳/۴	۴۱	۳/۹	۴/۶	-/۹۳
	۵	۵	۵	۵	۵	۵	۵	۵	۵	۵	۵	۵	۵	۵	۵	۵
کانال غیر منشوری	۱۷/۴۵	۵۱	۴/۷	۵/۳۸	۱/۳	۱/۳۳	۶۴	۵/۲	۵/۳۸	۱/۳	۲۵۰ تا ۱۵۰	۱۷/۴۵	۵۱	۴/۷	۵/۳۸	۱/۳
	۵	۵	۵	۵	۵	۵	۵	۵	۵	۵	۵	۵	۵	۵	۵	۵
کانال غیر منشوری	۱۱۷/۷	۸۶	۶/۸	۱۰/۷۸	۱/۱۵	۱۱	۱۱۱	۸/۲	۱۰/۷۸	۱/۱۵	-/۳۳	۱۱۷/۷	۸۶	۶/۸	۱۰/۷۸	۱/۱۵
	۵	۵	۵	۵	۵	۵	۵	۵	۵	۵	۵	۵	۵	۵	۵	۵

## نتایج و بحث

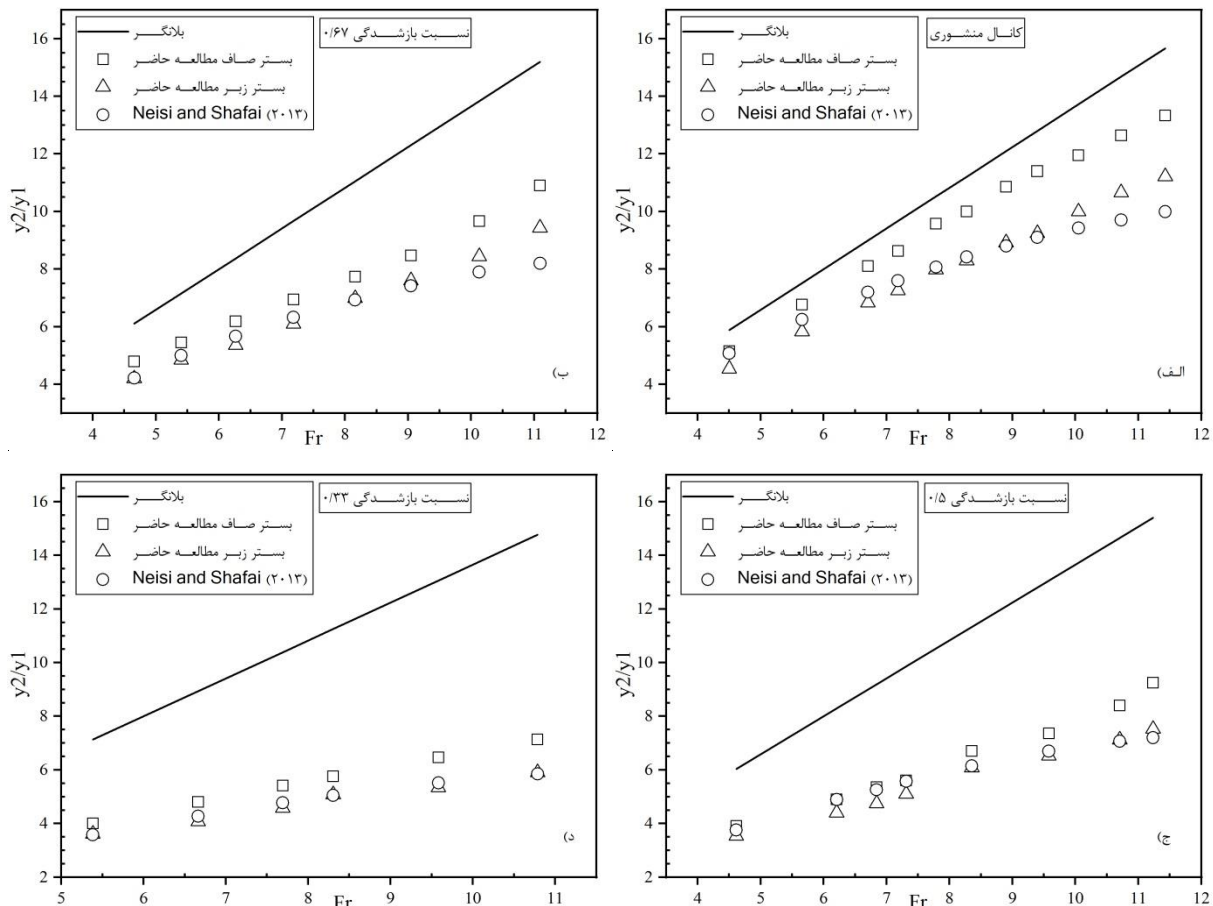
### -نسبت اعماق پرش

نسبت اعماق پرش افزایش یافته و وجود زبری بستر باعث کاهش نسبت اعماق پرش شده است. افزایش تنش برشی کف کانال باعث متلاطم شدن جریان می‌شود، این تلاطم باعث استهلاک انرژی جنبشی جریان شده و در نتیجه کاهش عمق ثانویه پرش را در پی خواهد داشت. همچنین با مقایسه نسبت اعماق پرش بر روی بستر زبر و صاف، چنین استنباط می‌شود که با افزایش فرود و تأثیر زبری بستر، نسبت اعماق پرش بر روی بستر زبر در مقایسه با نسبت اعماق پرش در بستر صاف کمتر می‌گردد. با در نظر گرفتن شکل (۴) برای کانال منشوری و غیر منشوری، نسبت‌های اعماق مطالعه حاضر بر روی بستر زبر مطابقت و نزدیکی خوبی با نتایج کار (Neisi and Shafai (2013) دارند. میزان کاهش عمق مزدوج در کانال منشوری و غیر منشوری زبر نسبت به کانال

آزمایش‌های پرش هیدرولیکی برای کانال منشوری و کانال غیر منشوری با نسبت‌های بازشدگی ۰/۶۷، ۰/۵ و ۰/۳۳ بر روی بستر صاف و زبر انجام شد. طبق آنالیز ابعادی صورت پذیرفته، نسبت اعماق پرش به عدد فرود اولیه و نسبت بازشدگی مقطع بستگی دارد. مقادیر نسبت اعماق در نسبت‌های بازشدگی مختلف برای بستر صاف و زبر مطالعه حاضر و (Neisi and Shafai (2013) در مقابل عدد فرود قبل از پرش در شکل (۴) نشان داده شده است. با توجه به شکل (۴-الف-ب-ج-د) برای کانال منشوری و غیر منشوری با بستر صاف و زبر، با افزایش عدد فرود اولیه جریان،

عمق مزدوج بر روی بستر زبر می‌باشد. مقدار متوسط کاهش عمق ثانویه برای کانال منشوری ۱۶ درصد و در کانال غیر منشوری ۱۲ تا ۱۴/۵ درصد بدست آمد.

بستر صاف مطابق رابطه  $100 \cdot \frac{y_{2B} - y_{2BR}}{y_{2B}}$  محاسبه شد که در این معادله  $y_{2B}$  عمق مزدوج پرش در بستر صاف و  $y_{2BR}$



شکل ۴- تغییرات نسبت اعماق مزدوج پرش برای مطالعه حاضر و (Neisi and Shafai (2013) الف) کانال منشوری ب) کانال غیر منشوری با نسبت بازشدگی ۰/۶۷ ج) کانال غیر منشوری با نسبت بازشدگی ۰/۵ د) کانال غیر منشوری با نسبت بازشدگی ۰/۳۳

هر دو بستر صاف و زبر می‌شود. مطابق شکل و همان‌گونه که پیش‌تر نیز بیان شد، داده‌های مربوط به مطالعه حاضر با بستر زبر همپوشانی نزدیکی با داده‌های (Neisi and Shafai (2013) دارد. میزان کاهش نسبت اعماق پرش در کانال غیر منشوری با بستر زبر، برای نسبت‌های بازشدگی ۰/۶۷، ۰/۵ و ۰/۳۳ در مقایسه با کانال منشوری با بستر صاف به ترتیب برابر ۳۶/۵، ۴۸/۵ و ۵۵/۵ درصد می‌باشد.

#### طول نسبی پرش

شکل (۶) تغییرات طول نسبی پرش هیدرولیکی  $(L_j/y_1)$  بر روی بستر صاف و زبر در نسبت‌های بازشدگی مختلف برای مطالعه حاضر را نشان می‌دهد. در این شکل طول نسبی پرش USBR از رابطه  $\frac{L_j^*}{y_1} = 220 \cdot \tanh\left(\frac{Fr_1 - 1}{22}\right)$  محاسبه شده است (Peterka, 1978). با توجه به شکل (۶) در کانال غیر منشوری

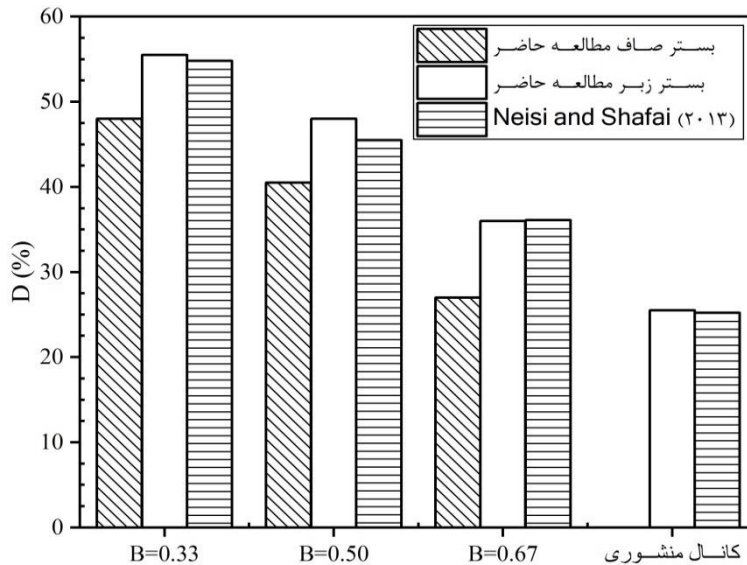
همچنین برای تعیین تأثیر واگرایی مقطع بر نسبت اعماق پرش، پارامتر درصد کاهش نسبت اعماق پرش مطابق با مطالعات (Ead and Rajaratnam (2002) و رابطه (۲۶) محاسبه شد.

$$D(\%) = \left(1 - \frac{D_{BR}}{D^*}\right) \cdot 100 \quad \text{(رابطه ۲۶)}$$

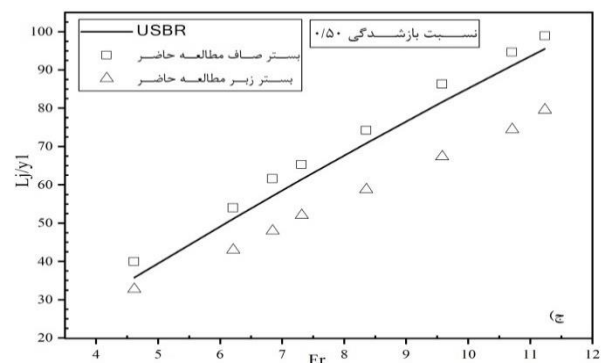
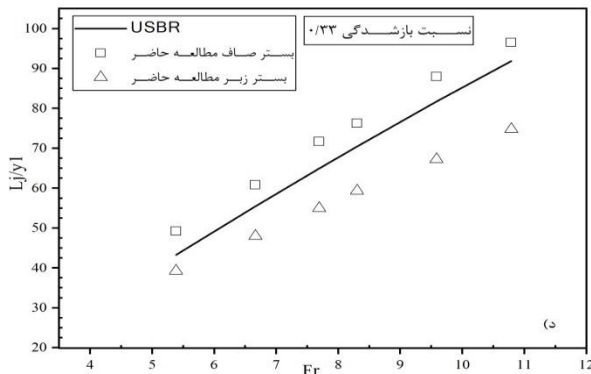
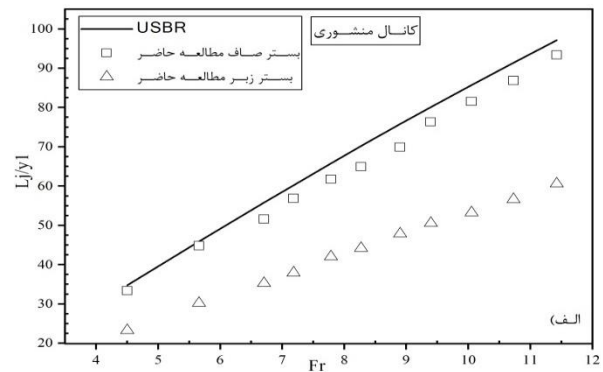
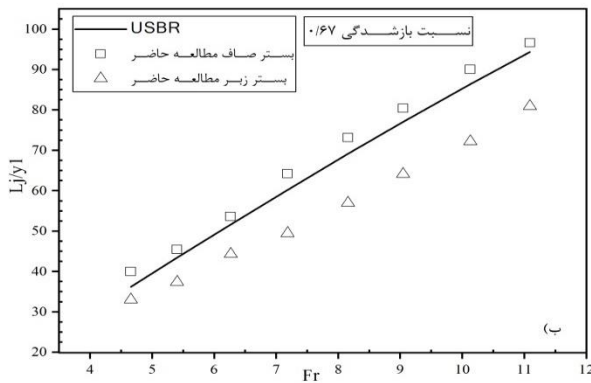
در رابطه بالا،  $D_{BR}$  نسبت اعماق پرش در بستر زبر و صاف و  $D^*$  نسبت اعماق حاصل از معادله بلانگر می‌باشد. شکل (۵) متوسط مقادیر محاسبه شده پارامتر درصد کاهش نسبت اعماق پرش برای مطالعه حاضر با بستر صاف و زبر و Neisi and Shafai (2013) در تمامی نسبت‌های بازشدگی را نشان می‌دهد. با توجه به شکل (۵) چنین استنباط شد که کانال‌های غیر منشوری با بستر صاف و زبر، باعث کاهش نسبت اعماق پرش در مقایسه با کانال‌های منشوری با بستر صاف و زبر می‌شوند. به گونه‌ای که کاهش نسبت بازشدگی مقطع، باعث کاهش عمق ثانویه پرش در

نسبت‌های بازشدگی با بستر زبر کمتر از مقدار متناظر آن در کانال منشوری با بستر صاف می‌باشد. مطابق شکل کاهش طول پرش برای اعداد فرود پایین کمتر بوده و با افزایش عدد فرود طول پرش در کانال منشوری و غیر منشوری با بستر زبر کاهش می‌یابد. زبری بستر باعث کاهش طول نسبی پرش در کانال غیر منشوری به صورت متوسط در حدود ۲۰ درصد گردیده است. حداکثر مقدار متوسط کاهش طول نسبی پرش در کانال منشوری رخ داده و مقدار آن ۳۳ درصد می‌باشد.

(واگرای ناگهانی) با بستر صاف، با کاهش نسبت بازشدگی و افزایش عدد فرود قبل از پرش، طول نسبی پرش در مقایسه با کانال منشوری افزایش می‌یابد. به گونه‌ای که در نسبت‌های بازشدگی مقطع ۰/۶۷، ۰/۵ و ۰/۳۳ با افزایش عدد فرود به ترتیب ۲ تا ۱۰، ۴ تا ۱۱ و ۵ تا ۱۴ درصد افزایش یافته است. گستردگی کم جت ورودی جریان و بزرگی آب ساکن در بازشدگی که موجب نامتقارن شدن پرش می‌باشد می‌تواند عامل اصلی این افزایش باشد. مقادیر طول نسبی پرش در کانال منشوری در تمامی



شکل ۵- پارامتر کاهش نسبت اعماق برای مطالعه حاضر و (Neisi and Shafai (2013)



شکل ۶- تغییرات طول نسبی پرش (الف) کانال منشوری (ب) کانال غیر منشوری با نسبت بازشدگی ۰/۶۷ (ج) کانال غیر منشوری با نسبت بازشدگی ۰/۵ (د) کانال غیر منشوری با نسبت بازشدگی ۰/۳۳



تنش برشی بستر زبر مطابق با تئوری مسئله و رابطه (۲۰) تعیین گردید. مقادیر محاسبه شده مطابق شکل (۷) نشان می‌دهد ضریب تنش برشی به عدد فرود اولیه جریان و نسبت بازشدگی مقطع وابسته است. با افزایش عدد فرود اولیه جریان و کاهش نسبت بازشدگی، تنش برشی بستر افزایش می‌یابد. مقدار متوسط ضریب تنش برشی بستر زبر در مطالعه حاضر برای کانال منشوری و غیر منشوری با نسبت‌های بازشدگی ۰/۶۷، ۰/۵ و ۰/۳۳ به ترتیب ۱۰/۰۷، ۱۰/۴۶، ۱۱/۵ و ۱۱/۶۳ برابر ضریب تنش برشی کانال منشوری با بستر صاف بدست آمد.

طبق مطالعات Rajaratnam (1968) بین ضریب تنش برشی بستر و عدد فرود اولیه جریان، رابطه نمایی به صورت  $\varepsilon = aFr_1^b$  برقرار می‌باشد. مقادیر ضرایب a و b رابطه ارائه شده برای مطالعه حاضر در تمامی نسبت‌های بازشدگی در جدول (۳) آورده شده است.

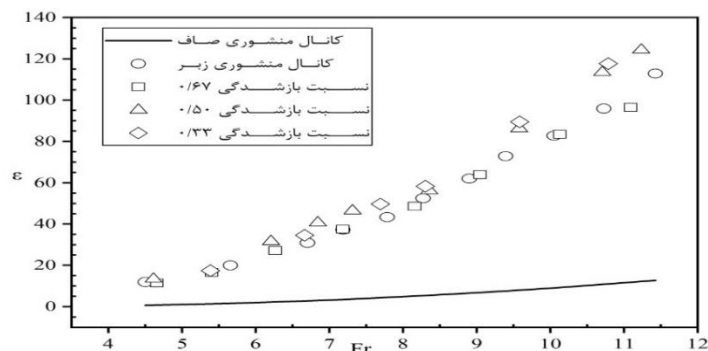
با در نظر گرفتن داده‌های آزمایشگاهی مطالعه حاضر، روابط پیش‌بینی طول پرش در کانال منشوری و غیر منشوری با بستر زبر در جدول (۲) آورده شده است. مطابق جدول (۲) معیارهای ارزیابی ضریب همبستگی ( $R^2$ ) و خطای جذر میانگین مربعات نرمال سازی شده (NRMSE)، مقادیر قابل قبولی را دارا می‌باشند و می‌توانند پیش‌بینی دقیقی از طول پرش در کانال منشوری و غیر منشوری با بستر زبر شده با شن را ارائه دهند.

**-ضریب تنش برشی**

افزایش تنش برشی بستر از جمله دلایل کاهش نسبت اعماق مزدوج و کاهش طول نسبی پرش بر روی بستر زبر می‌باشد. شکل (۷) تغییرات ضریب تنش برشی برای کانال منشوری با بستر صاف و زبر و کانال غیر منشوری زبر با نسبت‌های بازشدگی ۰/۶۷، ۰/۵ و ۰/۳۳ در مقابل عدد فرود را نشان می‌دهد. ضریب تنش برشی بستر صاف مطابق با رابطه (۱۶) محاسبه شده و ضریب

جدول ۲- رابطه ارائه شده برای پیش‌بینی طول پرش بر روی بستر زبر

نوع کانال	$K_s / y_1$	روابط ارائه شده	$R^2$	NRMSE (%)
کانال منشوری	۱/۹۲۴-۲/۱۱۷	$\frac{L_j}{y_1} = 5.3587Fr_1 - 0.3581$	۰/۹۹۸۵	۱
کانال غیر منشوری	۱/۴۶۵-۲/۱۴	$\frac{L_j}{y_1} = 7.076Fr_1 - 0.2164Ln(B) - 0.2316$	۰/۹۹۶۲	۱/۶



شکل ۷- مقایسه ضریب تنش برشی در نسبت‌های بازشدگی

جدول ۳- مقادیر ضرایب a و b معادله ارائه شده توسط راجاراتنام (۱۹۶۸) برای مطالعه حاضر

نوع کانال	$K_s / y_1$	a	b	$R^2$
منشوری	۱/۲-۹۲۴/۱۱۷	۰/۲۸۴۶	۲/۴۶۲۲	۰/۹۹۸
کانال غیر منشوری با نسبت بازشدگی ۰/۶۷	۱/۲-۹/۱۴	۰/۲۵۸۲	۲/۵۰۴۱	۰/۹۹۴
کانال غیر منشوری با نسبت بازشدگی ۰/۵	۱/۲-۷۳/۰۴۸	۰/۴۷۷	۲/۲۹۴	۰/۹۹۵
کانال غیر منشوری با نسبت بازشدگی ۰/۳۳	۱/۱-۴۶۵/۶۵۶	۰/۱۸۵۹	۲/۷۲۵۸	۰/۹۹۳

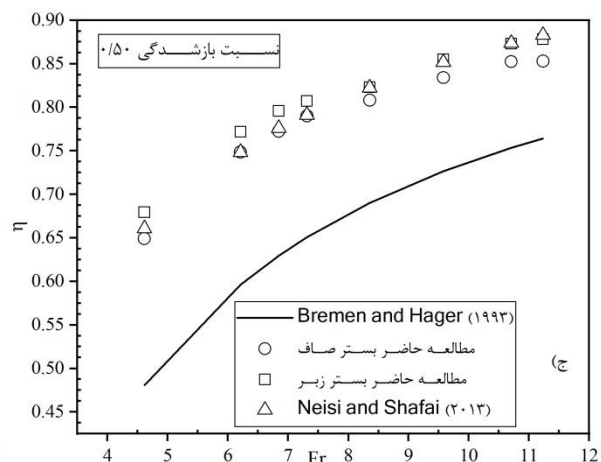
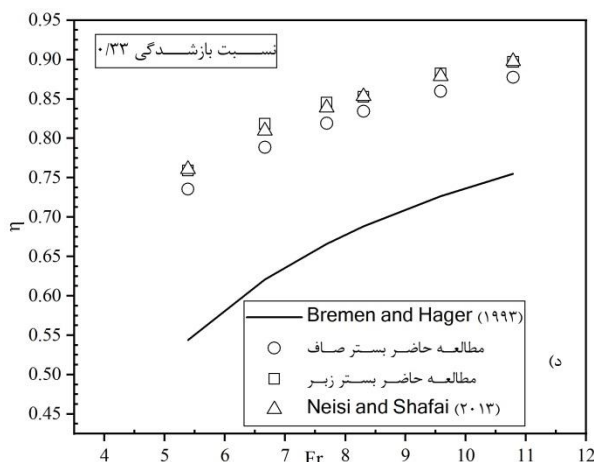
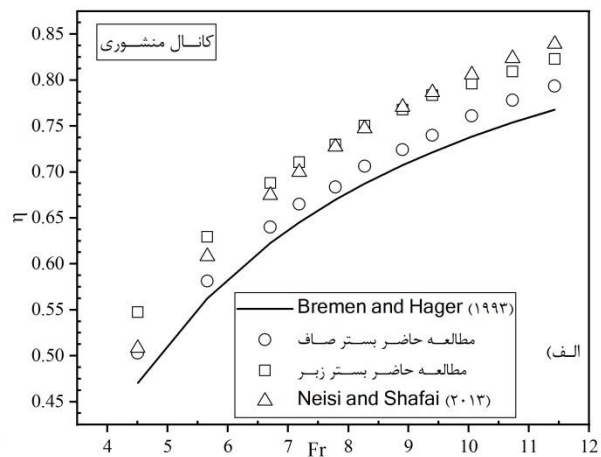
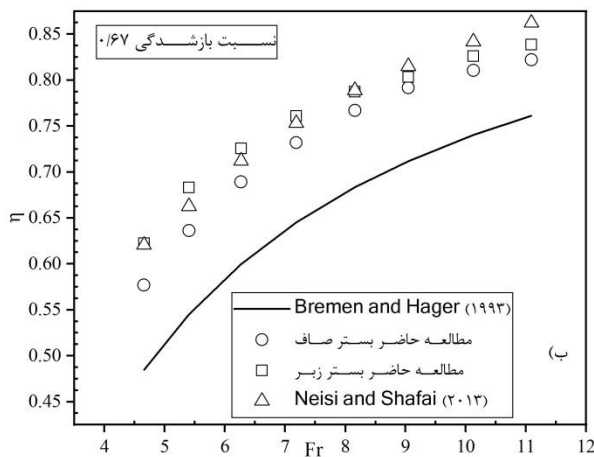
منشوری و غیر منشوری، راندمان پرش مطالعه حاضر بر روی بستر زبر همپوشانی نزدیکی با مقادیر راندمان پرش Neisi and Shafai (2013) دارد. با مقایسه راندمان پرش بستر زبر و بستر صاف مطالعه حاضر این چنین استنباط می‌شود که تأثیر واگرایی در راندمان پرش بیشتر از تأثیر حضور زبری بر راندمان می‌باشد، به گونه‌ای که زبری بستر باعث افزایش راندمان پرش به طور متوسط کمتر از ۵ درصد می‌شود. نسبت بازشدگی ۰/۳۳ در مقایسه با سایر نسبت‌های بازشدگی بیشترین مقدار راندمان را دارا بوده که حداقل و حداکثر مقدار آن به ترتیب برابر ۷۶ و ۹۰ درصد می‌باشد. همچنین نسبت‌های بازشدگی ۰/۶۷، ۰/۵ و ۰/۳۳ با بستر زبر در مقایسه با Bremen and Hager (1993) (کانال منشوری بستر صاف)، راندمان پرش را بطور متوسط و به ترتیب ۱۷/۸، ۲۳/۶ و ۲۷ درصد بهبود بخشیده است.

راندمان پرش

افت انرژی ( $E_L$ ) و راندمان پرش هیدرولیکی ( $\eta$ ) به صورت زیر قابل بیان می‌باشند:

$$\eta = \frac{E_L}{E_1} = \frac{E_1 - E_2}{E_1} \quad (\text{رابطه ۲۷})$$

در این رابطه  $E_1$  و  $E_2$  به ترتیب انرژی جریان قبل و بعد از پرش هیدرولیکی می‌باشند. شکل (۸) راندمان پرش هیدرولیکی برای نسبت‌های بازشدگی مختلف بر روی بستر زبر و صاف مطالعه حاضر و Neisi and Shafai (2013) را نشان می‌دهد. در این شکل راندمان حاصله از مطالعات Bremen and Hager (1993) برای کانال منشوری با بستر صاف توسط رابطه  $\eta = (1 - \sqrt{2}/Fr_1)^2$  محاسبه شد. با توجه به شکل (۸) مشاهده شد که با کاهش نسبت بازشدگی و افزایش عدد فرود اولیه جریان، راندمان پرش گسسته بر روی بستر صاف و زبر افزایش می‌یابد. مطابق شکل در کانال



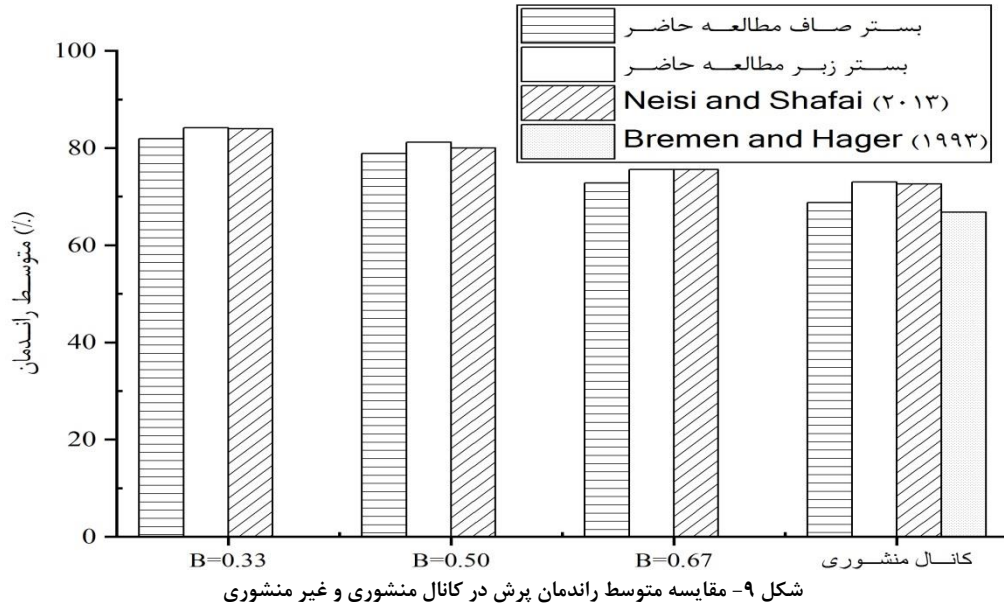
شکل ۸- راندمان پرش مطالعه حاضر با بستر صاف و زبر و محققین گذشته (الف) کانال منشوری (ب) کانال غیر منشوری با نسبت بازشدگی ۰/۶۷ (ج) کانال غیر منشوری با نسبت بازشدگی ۰/۵ (د) کانال غیر منشوری با نسبت بازشدگی ۰/۳۳

است. براساس شکل (۹) در کانال منشوری و غیر منشوری با تمامی نسبت‌های بازشدگی مقادیر متوسط راندمان پرش مطالعه

متوسط راندمان پرش مطالعه حاضر برای تمامی نسبت‌های بازشدگی در مقایسه با سایر محققین در شکل (۹) نشان داده شده

راندمان پرش در نسبت بازشدگی ۰/۳۳ و برابر ۸۴/۲ درصد می‌باشد.

حاضر مطابقت خوبی با مقادیر کار Neisi and Shafai (2013) داشته و در مقایسه با مقادیر کار Bremen and Hager (1993) بیش تر بوده و بهبود داده شده است. بیش‌ترین مقدار متوسط



پارامتر کاهش عمق نسبی در نسبت‌های بازشدگی ۰/۶۷، ۰/۵ و ۰/۳۳ به صورت میانگین و به ترتیب ۳۶/۵، ۴۵/۵ و ۵۵/۵ درصد به دست آمد. طول پرش برای نسبت‌های بازشدگی ۰/۶۷، ۰/۵ و ۰/۳۳ در مقایسه با کانال غیر منشوری با بستر صاف به صورت میانگین ۲۰ درصد کاهش نشان داد. راندمان پرش نیز در کانال غیر منشوری با نسبت‌های بازشدگی ۰/۶۷، ۰/۵ و ۰/۳۳ در مقایسه با کانال منشوری با بستر صاف به طور متوسط و به ترتیب ۱۷/۸، ۲۳/۶ و ۲۷ درصد بهبود یافت. نتایج مطالعه حاضر نشان دادند که به کارگیری حوضچه‌های واگرایی ناگهانی با بستر شنی در مقایسه با واگرایی ناگهانی با بستر صاف، می‌تواند با کاهش ابعاد حوضچه آرامش، نتایج مطلوب‌تر و اقتصادی‌تری داشته و برحسب نیاز جایگزین مناسبی برای کانال‌های منشوری با بستر صاف باشد.

### نتیجه گیری

در تحقیق حاضر ۶۶ آزمایش بر روی مدل‌های فیزیکی با نسبت‌های بازشدگی مختلف، برای تعیین مشخصات پرش گسسته و ضریب تنش برشی بستر انجام گردید. نتایج نشان داد که ضریب تنش برشی بستر با کاهش نسبت بازشدگی مقطع، افزایش یافت به گونه‌ای که در نسبت‌های بازشدگی ۱، ۰/۶۷، ۰/۵ و ۰/۳۳ در مقایسه با کانال منشوری صاف به ترتیب و به صورت میانگین ۱۰/۰۷، ۱۰/۴۶، ۱۱/۵ و ۱۱/۶۳ برابر گردید. افزایش تنش برشی بستر باعث بهبود مشخصات پرش گردید به طوری که متوسط کاهش عمق مزدوج نسبی برای تمامی نسبت‌های بازشدگی ۱۲ تا ۱۶ درصد در مقایسه با کانال غیر منشوری با بستر صاف به دست آمد. همچنین در مقایسه با کانال منشوری،

### REFERENCES

Alhamid, A. A. (2004). S-jump characteristics on sloping basins. *Journal of Hydraulic research*, 42(6), 657-662.

Bremen, R., & Hager, W. H. (1993). T-jump in abruptly expanding channel. *Journal of Hydraulic research*, 31(1), 61-78.

Carollo, F. G., Ferro, V., & Pampalone, V. (2007). Hydraulic jumps on rough beds. *Journal of Hydraulic Engineering*, 133(9), 989-999.

Chandra, J., & Lal, P. B. (1978). Spatial Hydraulic Jump at Axis-Symmetrical Sudden Expansions in Rectangular Channels. *Indian J. of Power & River Valley Development*, 28, 183-188.

Ead, S. A., & Rajaratnam, N. (2002). Hydraulic jumps on corrugated beds. *Journal of Hydraulic Engineering*, 128(7), 656-663.

Matin, M. A., Hasan, M. R., & Islam, M. A. (2008). Experiment on hydraulic jump in sudden expansion in a sloping rectangular channel. *Department of Water Resources Engineering, Bangladesh University of Engineering and Technology, Dhaka, 1000*, 65-77.

Matin, M. A., Alhamid, A. A., & Negm, A. M. (1998). Prediction of Sequent Depth Ratio of Hydraulic

- Jump in Abruptly Expanding Channel. . *Egyptian Journal for Engineering Sciences & Technology*, 2(1), 31-36.
- Mohamed Ali, H. S. (1991). Effect of roughened-bed stilling basin on length of rectangular hydraulic jump. *Journal of Hydraulic Engineering*, 117(1), 83-93.
- Neisi, K., & SHAFAI, B. M. (2013). Characteristics of S-jump on Roughened Bed Stilling Basin. *Journal of Water Sciences Research*, 5(2), 25-34.
- Parsamehr, P., Farsadizadeh, D., Hosseinzadeh Dalir, A., Abbaspour, A., & Nasr Esfahani, M. J. (2017). Characteristics of hydraulic jump on rough bed with adverse slope. *ISH Journal of Hydraulic Engineering*, 23(3), 301-307.
- Rajaratnam, N. (1968). Hydraulic jump on rough bed. *Transaction of the Engineering Institute of Canada*, 11 (A-2), 1-8.
- Rajaratnam, N., & Subramanya, K. (1968). Hydraulic jumps below abrupt symmetrical expansions. *Journal of the Hydraulics Division*, 94(2), 481-504.
- Peterka, A. J. (1978). *Hydraulic design of stilling basins and energy dissipators* (No. 25). Department of the Interior, Bureau of Reclamation.
- Unny, T. E. (1963). "The spatial hydraulic jump." Proc. 10th Congress of IAHR, London, 32-42.