

Modeling of Velocity and Hydraulic Gradient in Non-Darcian Flows Using the Concept of Conformable Fractional Derivatives

NOOSHIN ESLAHI¹, ALIREZA VATANKHAH^{1*}, MOHAMMAD SEDGHI-ASL²

1. Department of Irrigation and Reclamation Engineering, College of Agriculture and Natural Resources, University of Tehran, Karaj, Iran.

2. Soil Science Department, Faculty of Agriculture, Yasouj University, Yasouj, Iran.

(Received: March. 18, 2020- Revised: Nov. 3, 2020- Accepted: Nov. 14, 2020)

ABSTRACT

The increase of flow velocity and Reynolds number in coarse porous media and the subsequent violation of Darcy's law, force to analyze the flow based on nonlinear relations of hydraulic slope and flow velocity. So, it is necessary to study nonlinear relationships more accurately. The purpose of this study was to investigate the performance of fractional-order model and the effect of conformable derivatives on improving the relationship between flow velocity and hydraulic gradient. Therefore, by determining the acceptable range for the fractional-order model, a nonlinear model based on conformable derivatives of the Izbash equation for the fully developed turbulent flow was presented and solved analytically and the parameters of the proposed model were determined using laboratory data analysis. The optimal values of the model parameters including coefficient a and the order of fractional derivative α , which can be varied in the range of (0-2), were calculated for each laboratory data set. The results were compared with the experimental data and the analytical solution of Izbash equation and a good agreement was found to the non-Darcian flow laboratory data. Moreover, using dimensional analysis method, Reynolds number was introduced as an effective factor on α coefficient and a suitable relationship was observed between the order of fractional derivative α and Reynolds number indicating the hydraulic concept of fractional-order model. According to the present study, the fractional order α is not only a fitting coefficient, but it represents a physical concept.

Keywords: Conformable Derivatives, Fractional Order, Fully Developed Turbulent Flow, Non-Darcian Flow, Analytical Solution.

مدل سازی سرعت و شیب هیدرولیکی در جریان های غیرداری با استفاده از مفهوم مشتقات کسری سازگار

نوشین اصلاحی^۱، علیرضا وطن خواه^{۲*}، محمد صدقی اصل^۲

۱. گروه مهندسی آبیاری و آبادانی، پردیس کشاورزی و منابع طبیعی، دانشگاه تهران، کرج، ایران.

۲. گروه علوم خاک، دانشکده کشاورزی، دانشگاه یاسوج، یاسوج، ایران.

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۱۲/۲۸ - تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۸/۱۳ - تاریخ تصویب: ۱۳۹۹/۸/۲۴)

چکیده

با افزایش سرعت جریان و عدد رینولدز در محیط های متخلخل درشت دانه و نقض قانون داری، تجزیه و تحلیل جریان بر اساس روابط غیرخطی شیب هیدرولیکی و سرعت جریان صورت می گیرد. لذا بررسی هر چه دقیق تر روابط غیرخطی امری ضروری می باشد. در این تحقیق، از مشتقات سازگار جهت بررسی رابطه شیب هیدرولیکی و سرعت جریان در شرایط جریان آشفته کاملاً توسعه یافته در پدیده های جریان های غیرداری در محیط متخلخل استفاده گردیده است. هدف از تحقیق حاضر مطالعه تاثیر مشتقات سازگار بر بهبود ارتباط بین سرعت جریان و شیب هیدرولیکی و بررسی عملکرد مرتبه کسری مدل است. لذا با تعیین بازه قابل قبول برای مرتبه کسری مدل، مدلی غیرخطی بر مبنای مشتقات سازگار از معادله افت فشار ایزباش برای جریان آشفته کاملاً توسعه یافته، ارائه و به صورت تحلیلی حل شد و پارامترهای مدل پیشنهادی با استفاده از تجزیه و تحلیل داده های آزمایشگاهی تعیین گردید و مقادیر بهینه پارامترهای مدل شامل ضریب α و مرتبه مشتق کسری α که در این تحقیق، در دامنه صفر تا دو قابل تغییر است، برای هر مجموعه داده آزمایشگاهی محاسبه شدند. نتایج به دست آمده با داده های آزمایشگاهی و حل تحلیلی معادله ایزباش مورد مقایسه قرار گرفت و تطابق مناسبی با داده های آزمایشگاهی مربوط به جریان های غیرداری حاصل شد. همچنین با استفاده از تحلیل ابعادی، عدد رینولدز جریان به عنوان پارامتر موثر بر ضریب α معرفی گردید و ارتباط مناسبی میان مرتبه کسری α و عدد رینولدز جریان مشاهده شد که نشان دهنده مفهوم هیدرولیکی مرتبه کسری مدل می باشد. مطابق تحقیق حاضر، مرتبه کسری α فقط یک ضریب برازشی نبوده و بیانگر مفهوم فیزیکی می باشد.

واژه های کلیدی: مشتقات سازگار، مرتبه کسری، جریان آشفته کاملاً توسعه یافته، جریان غیرداری، حل تحلیلی.

مقدمه

حال انجام است. نتیجه این مطالعات ارائه روابطی است که از طریق آن بتوان هیدرولیک جریان در محیط های متخلخل را شبیه سازی نمود. رفتار جریان در این محیط ها به دلیل بروز سرعت های بالا، غیرداری می باشد. به عبارتی رابطه بین سرعت و شیب هیدرولیکی غیرخطی می گردد. تاکنون پژوهشگران بسیاری سعی کرده اند برای بررسی دقیق خصوصیات جریان از جنبه های نظری، روابطی را ارائه دهند که دربرگیرنده همه حالات جریان و از نظر کاربرد ساده باشند. بنابراین از روابط دیگری که بیانگر یک ارتباط غیرخطی بین سرعت و شیب هیدرولیکی در این نوع محیط ها است و به روابط غیرداری معروف هستند، استفاده می شود. این روابط را می توان در دو گروه روابط توانی با معادله شاخص Izbash (1931) یا Wilkins و یا روابط دوجمله ای با معادله شاخص فرشه ایمر طبقه بندی نمود.

روابط دوجمله ای: Forchheimer (1901) اولین کسی بود که به لحاظ نظری ارتباط بین سرعت جریان و شیب هیدرولیکی

رابطه داری یک رابطه تجربی-تحلیلی است و تا به حال به طور گسترده مورد استفاده قرار گرفته است و رابطه اساسی و ساختاری جریان در محیط های متخلخل به شمار می رود. در مواردی مانند عبور آب از یک ستون ماسه ای، جریان یک بعدی بوده و در شرایطی که هدایت هیدرولیکی و ابعاد هندسی ستون خاک معلوم باشد از رابطه داری برای تخمین میزان جریان استفاده می گردد. از آنجا که کاربرد قانون داری محدود به شرایط خاصی از جمله خطی بودن ارتباط بین شیب هیدرولیکی و سرعت جریان و آرام بودن جریان و ماندگار بودن آن می باشد، لذا باید در هنگام کاربرد این رابطه به محدودیت های آن توجه داشت چرا که در صورت عدول از شرایط ذکر شده، رژیم جریان از حالت داری خارج و به مرحله ای که اصطلاحاً غیرداری نامیده می شود، وارد می گردد. مطالعات گسترده ای در زمینه هیدرولیک جریان در محیط های متخلخل درشت دانه صورت گرفته و هم اکنون نیز در

که در آن i شیب هیدرولیکی، V سرعت جریان، a و b ضرایب تجربی هستند که به خصوصیات سیال و مصالح بستگی دارند. در رابطه (۲) اگر توان b برابر با یک در نظر گرفته شود، بیان‌کننده قانون دارسی و شرایط جریان آرام است و هنگامی که توان b برابر دو در نظر گرفته شود نشان‌دهنده جریان آشفته کاملاً توسعه یافته می‌باشد (Venkataraman and Rao, 1998).

تاکنون تحقیقاتی نیز به منظور مقایسه روابط دو جمله‌ای و توانی صورت گرفته است به عنوان مثال، Soni et al. (1978) گزارش دادند که معادله ایزباش کاملاً تجربی می‌باشد و پایه نظری ندارد. اما Watanabe (1982) توضیح داد که معادله ایزباش یک معادله نظری می‌باشد. Wilkins (1956) با انجام آزمایش‌هایی در یک دستگاه پرماتر، رابطه‌ای توانی میان سرعت و شیب هیدرولیکی ارائه نمود. همچنین تحقیقات دیگری توسط محققین دیگر از جمله Parkin (1963)، Estephenson (1979)، Martins (1990)، Li et al. (1998)، Sarkhosh et al. (2017) صورت پذیرفت. Bordier and Zimmer (2000) به صورت آزمایشگاهی رویکرد فرشه‌ایمر و رویکرد ایزباش را با استفاده از محیط‌های متخلخل زبر با عدد رینولدز بزرگتر از ۱۰، ارزیابی کردند. هرچند که هر دو رویکرد توانستند رابطه معنی‌داری را بین میزان جریان و افت فشار توضیح دهند، تناسب رویکرد ایزباش از رویکرد فرشه‌ایمر بهتر بود.

از ویژگی‌های روابط درجه دوم کاربرد آن‌ها در محدوده وسیعی از رژیم‌های جریان می‌باشد. همچنین تفکیک آثار خصوصیات جریان و ویژگی‌های مصالح متخلخل و حتی خواص سیال تنها در رابطه دوجمله‌ای امکان‌پذیر است. اما به دلیل کاربرد آسانتر روابط توانی نسبت به روابط درجه دوم که ناشی از تک جمله‌ای بودن آن‌هاست، بیشتر مهندسان مایل به استفاده از روابط توانی می‌باشند.

همان‌گونه که اشاره گردید با افزایش سرعت جریان و عدد رینولدز در سازه‌های هیدرولیکی متخلخل درشت‌دانه و نقض قانون دارسی، تجزیه و تحلیل جریان بر اساس روابط غیرخطی شیب هیدرولیکی و سرعت جریان صورت می‌گیرد. لذا به دلیل اهمیت بررسی هر چه بیشتر روابط غیرخطی، استفاده از روش‌های جدید برای ارائه معادلات دقیق‌تر، امری ضروری می‌باشد. یکی از روش‌های نوین ریاضی که در سال‌های اخیر بر آن توجه بسیاری شده است، انتگرال و مشتقات مرتبه‌ی کسری می‌باشد. از جمله تحقیقاتی که با این روش در سال‌های اخیر در زمینه مدل‌سازی ارتباط شیب هیدرولیکی و سرعت جریان صورت گرفته است تحقیق Zhou and Yang (2018) می‌باشد. آن‌ها مدلی کسری برای معادله دارسی ارائه کردند که جریان‌های غیرداری را بسیار

جریان درون مصالح سنگریز را به صورت یک رابطه درجه دوم (رابطه ۱) ارائه و رابطه دارسی را اصلاح کرد (Zeng and Grigg, 2006). او جمله مرتبه دوم سرعت را به معادله اصلی دارسی اضافه کرد که نشان‌دهنده اثر میکروسکوپی اینرسی در آب‌های زیر زمینی است (Hansen, 1992).

$$i = AV + BV^2 \quad (\text{رابطه ۱})$$

در رابطه فوق، i ، شیب هیدرولیکی؛ V ، سرعت جریان و A و B ضرایبی ثابت هستند. ضریب A در معادله فرشه‌ایمر به خواص محیط متخلخل و سیال بستگی دارد که نشان‌دهنده تلفات انرژی به علت نیروهای چسبنده در برخورد جامد با مایع است و برابر عکس هدایت هیدرولیکی در قانون دارسی است و ضریب B به خصوصیات محیط متخلخل وابسته است که به نیروهای اینرسی مربوط است. بر این اساس شیب هیدرولیکی جریان درون محیط متخلخل با لزجت سیال و اینرسی در ارتباط است. به عبارتی افت انرژی در محیط متخلخل درشت‌دانه از دو بخش تشکیل شده است. اگر سرعت جریان بسیار کم باشد جمله اینرسی معادله فرشه‌ایمر قابل چشم‌پوشی است، لذا افت انرژی تنها ناشی از لزجت سیال در محیط متخلخل خواهد بود. تا کنون مطالعات بسیاری به منظور توصیف ضرایب A و B در رابطه دو جمله‌ای فرشه‌ایمر انجام شده و عبارات مختلفی بدین منظور توسط محققین مختلف پیشنهاد گردیده است.

بعد از Forchheimer (1901) نیز تحقیقات بسیاری توسط محققین دیگر در این زمینه صورت گرفت و روابط متعددی نیز به دست آمد. Ergun (1952) با بررسی جریان‌های یک بعدی رابطه‌ای درجه دوم برای محاسبه افت فشار برای رژیم جریان دارسی و غیرداری ارائه داد. Ward (1964) معادلاتی برای برآورد ضرایب معادله فرشه‌ایمر ارائه نمود و رابطه درجه دومی بین سرعت و شیب هیدرولیکی جریان ارائه داد. Ahmed and sunada (1969) با بکاربردن روابط نایر-استوکس برای توسعه جریان غیرداری با تعیین روابطی برای برآورد ضرایب رابطه دوجمله‌ای، به رابطه دوجمله‌ای جدیدی دست یافتند. همچنین محققان دیگری همچون Parkin (1963)، Kovacs (1977)، Herrera, Estephenson, McCorquodale et al. (1978)، Sedghi-Asl and Li et al. (1998)، and Felton (1991) و Rahimi (2011) نیز با مطالعه بر روی ضرایب معادله دو جمله‌ای فرشه‌ایمر، چندین روابط دو جمله‌ای معرفی نمودند.

روابط توانی: در این حالت روابطی توانی از شیب هیدرولیکی و سرعت ارائه می‌شوند. معادله شاخص این دسته از روابط را ایزباش (۱۹۳۱) به شکل کلی رابطه (۲) بیان کرد.

$$i = aV^b$$

بهتر از معادله داری پیش‌بینی می‌کند.

$$\frac{di}{dV} = 2aV \quad (\text{رابطه ۵})$$

با جایگزینی مشتق مرتبه اول با مشتق سازگار در معادله (۵) خواهیم داشت:

$$T_\alpha i = 2aV \quad (\text{رابطه ۶})$$

از طرفی طبق رابطه (۴) داریم:

$$T_\alpha i = V^{1-\alpha} \frac{di}{dV} \quad (\text{رابطه ۷})$$

با مساوی قرار دادن طرفین روابط (۶) و (۷) و بازنویسی آن، رابطه (۸) به دست می‌آید:

$$\frac{di}{dV} = 2aV^\alpha \quad (\text{رابطه ۸})$$

به منظور دستیابی به یک حل جامع، با اعمال عملگر انتگرال به دو طرف معادله (۸) مدلی از مشتقات سازگار از مرتبه $\alpha+1$ برای معادله ایزبازش در $\alpha \in (0,1]$ مطابق معادله (۹) استخراج می‌گردد:

$$i = 2a \frac{V^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad (\text{رابطه ۹})$$

همانگونه که مشاهده می‌شود، حل ارائه شده رابطه (۹) به ازای $\alpha=1$ به معادله (۳) تبدیل می‌شود. مدل ارائه شده توسط رابطه (۹) نسبت به معادله (۳) دارای یک پارامتر بیشتر است. در واقع مدل‌سازی رابطه درجه دوم (معادله ۳) توسط مشتقات سازگار، آن را به معادله توانی ولی با تفسیر فیزیکی بهتر (همانطور که نشان داده خواهد شد) تبدیل می‌کند.

Birgani et al. (2019) به تکمیل برخی از نتایج Khalil et al. (2014) پرداختند و بیان کردند، در صورتی که $\alpha \in (n, n+1]$ و $n \in \mathbb{N}$ باشد، مشتقات مرتبه α به صورت زیر خواهد بود:

$$T_\alpha f(x) = x^{n+1-\alpha} \frac{d^{n+1}f(x)}{dx^{n+1}} \quad (\text{رابطه ۱۰})$$

با توجه به رابطه فوق، برای یک تابع $f(x)$ هنگامی که مرتبه α در بازه یک تا دو می‌باشد ($n=1$)، طبق رابطه (۱۰) خواهیم داشت:

$$T_\alpha f(x) = x^{2-\alpha} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \quad (\text{رابطه ۱۱})$$

با توجه به رابطه (۱۱) و با انجام روندی مشابه $\alpha \in (0,1]$ مدلی از مشتقات سازگار از مرتبه α برای معادله ایزبازش در دامنه $\alpha \in [1,2]$ قابل استخراج است. لازم به ذکر است که در این مطالعه، با توجه به تعریف مشتقات سازگار و مشتق مرتبه سوم برابر صفر در معادله (۳)، α در بازه $(0,2]$ قابل قبول و معنی‌دار می‌باشد و در نهایت مدل پیشنهادی این تحقیق طبق رابطه (۱۲)

مشتقات سازگار نوع خاصی از مشتقات مرتبه کسری هستند. Khalil et al. (2014) مشتق جدیدی از مرتبه‌ی اعداد طبیعی به نام مشتق سازگار پیشنهاد کردند. مشتقات سازگار با توجه به ویژگی‌های آن‌ها و ارتباطشان با مشتقات مرتبه اول، باعث علاقه‌مندی محققان زیادی گردیده است (Dong et al., 2017). همچنین به دلیل کاربردهای مهم آن در علوم مختلف، علاقه به مشتقات سازگار در سال‌های اخیر رو به افزایش است.

از آنجاییکه یک الزام برای مدل‌سازی دقیق جریان غیرداری در محیط متخلخل، ارتباط مناسب بین سرعت جریان و شیب هیدرولیکی می‌باشد (Zhou and Yang, 2018)، این تحقیق، سعی در مطالعه تاثیر کاربرد مشتقات مرتبه کسری بر بهبود توصیف جریان‌های غیرداری در محیط‌های متخلخل با نفوذپذیری زیاد با استفاده از مشتقات سازگار را دارد. که در نتیجه‌ی آن، رابطه‌ی غیرداری ایزبازش در شرایط جریان آشفته‌ی کاملاً توسعه یافته از مرتبه کسری α با مفهوم هیدرولیکی و تفسیر فیزیکی مشخص بررسی گردیده است.

مواد و روش‌ها

با فرض توان b برابر با دو، در معادله کلی ایزبازش (معادله (۲))، معادله ایزبازش در شرایط جریان آشفته کاملاً توسعه یافته به دست می‌آید.

$$i = aV^2 \quad (\text{رابطه ۳})$$

به منظور تعیین محدوده قابل قبول مرتبه کسری α در مطالعه رابطه (۳)، ابتدا معادله مذکور در بازه $\alpha \in (0, 1]$ با استفاده از مشتقات سازگار مدل و حل می‌گردد.

به منظور دستیابی به یک حل با استفاده از مشتقات سازگار در $\alpha \in (0,1]$ ابتدا به بیان ارتباط بین مشتق سازگار و مشتق مرتبه‌ی اول پرداخته می‌شود و سپس رابطه (۳)، در بازه‌ی $(0,2]$ $\alpha \in$ مورد بررسی قرار می‌گیرد.

برای یک تابع $f(x)$ هنگامی که مرتبه‌ی مشتق یعنی α در بازه صفر تا یک می‌باشد، طبق رابطه‌ی (۴) خواهیم داشت (Khalil et al., 2014):

$$T_\alpha f(x) = x^{1-\alpha} \frac{df(x)}{dx} \quad (\text{رابطه ۴})$$

رابطه (۴) مشتق سازگار از مرتبه α می‌باشد بدیهی است در صورتی که $\alpha=1$ باشد، مشتق سازگار با مشتق مرتبه‌ی اول برابر است. با استفاده از این ویژگی معادله (۳)، بررسی می‌شود. مشتق مرتبه اول رابطه (۳)، به صورت رابطه (۵) می‌باشد.

(2014)، شامل یک ستون بسته آزمایشگاهی به قطر ۳۰۰ میلیمتر و طول ۱۱۵۰ میلیمتر، به منظور مطالعه جریان با سرعت بالا در میان محیط متخلخل می باشد که نمای شماتیک مدل آزمایشگاهی در شکل (۱) نشان داده شده است. مصالح مورد استفاده شامل ۶ نمونه آزمایشی از مواد گرد گوشه به قطرهای ۲/۸۳، ۵/۵، ۸/۷، ۱۵/۶، ۳۱/۱ و ۵۶/۸ میلیمتر، که به ترتیب دارای تخلخل ۰/۳۲، ۰/۳۳، ۰/۳۵، ۰/۳۲، ۰/۳۶ و ۰/۴۰ می باشند. در هر آزمایش، سیلندر آزمایشگاهی با اندازه مشخص از مصالح آزمایشگاهی پر گردید و با نیروی یکسانی که به طور یکنواخت به سطح مقطع دایره ای سیلندر آزمایشگاهی وارد می شد فشرده گردید. همچنین سیلندر در هر انتها به دو مخزن آب با سطح قابل تنظیم وصل شد و با تنظیم سطح آب در مخزن فوقانی، پس از رسیدن به حالت ماندگار جریان، به ازای سرعت های مختلف جریان، شیب های هیدرولیکی متفاوتی برقرار شد (Sedghi-Asl et al., 2014).

معرفی می گردد.

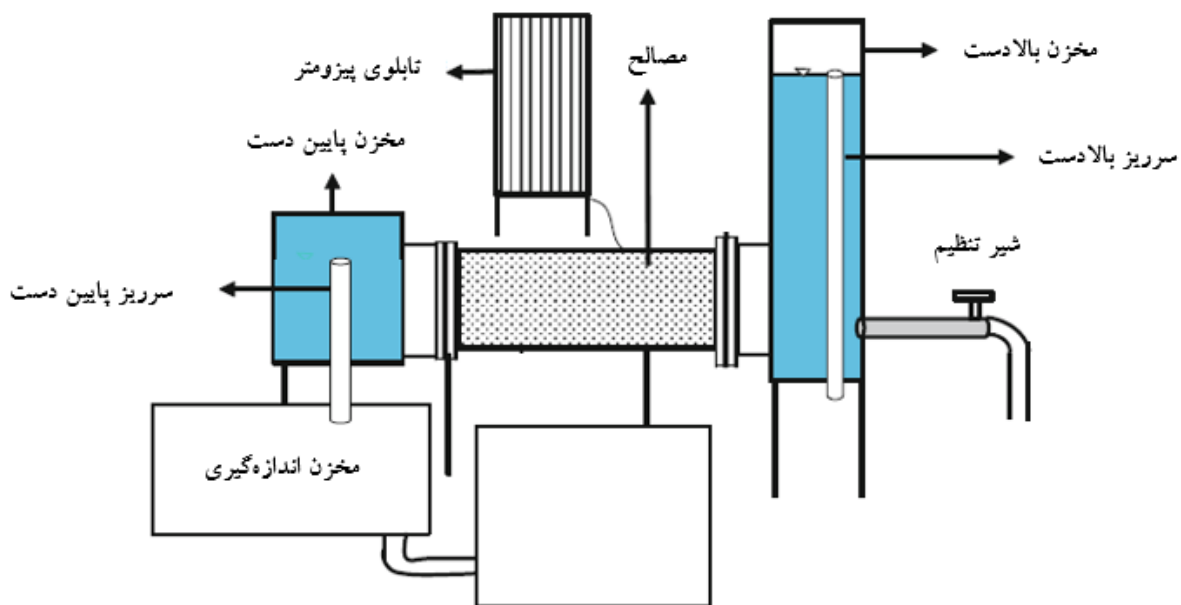
$$i = \begin{cases} 2a \frac{V^{\alpha+1}}{\alpha+1}, & 0 < \alpha \leq 1 \\ 2a \frac{V^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)}, & 1 < \alpha \leq 2 \end{cases} \quad (\text{رابطه } 12)$$

همانطور که ملاحظه می گردد معادله (۱۲) با پیوستگی در همسایگی α برابر یک، نسبت به معادله (۳) علاوه بر ضریب a دارای ضریب α با مفهوم کاملاً مشخص در حسابان کسری است. این ضریب می تواند وابسته به قطر متوسط مصالح و سرعت جریان (دارای مفهوم فیزیکی) در نظر گرفته شود که در ادامه توضیح داده می شود.

به منظور بررسی و تعیین مقدار بهینه $\alpha \in (0, 2]$ در شرایط واقعی، از ۶ مجموعه داده ای آزمایشگاهی که توسط Sedghi-Asl et al. (2014) برداشت شده است، استفاده گردید.

تجهیزات آزمایشگاهی

مدل آزمایشگاهی مورد استفاده توسط Sedghi-Asl et al.



شکل ۱- طرح شماتیک ستون بسته آزمایشگاهی (Sedghi-Asl et al., 2014c)

هیدرولیکی آزمایشگاهی و i_{Cal} شیب هیدرولیکی محاسبه شده شده توسط مدل می باشد.

$$e(\%) = \left(\frac{i_{Exp} - i_{Cal}}{i_{Exp}} \right) \times 100 \quad (\text{رابطه } 13)$$

نتایج و بحث

در این بخش از مقاله پارامترهای محاسبه شده مدل پیشنهادی ارائه می گردند و سپس به ارزیابی نتایج حاصل از مدل و مقایسه با داده های آزمایشگاهی پرداخته می شود. همچنین خطای نتایج به دست آمده نسبت به داده های آزمایشگاهی از معادله (۱۳) محاسبه می شود، که در آن، $e(\%)$ درصد خطای نسبی، i_{Exp} شیب

تعیین پارامترهای مدل

در مرحله واسنجی پارامترهای مدل، شامل ضریب a و بهترین مقدار مرتبه‌ی کسری α در بازه صفر تا دو، با برازش نسبت به ۷۰ درصد از داده‌های آزمایشگاهی که به طور تصادفی انتخاب شدند و با استفاده از تابع هدف که میانگین قدر مطلق خطای نسبی بین شیب هیدرولیکی واقعی و شیب هیدرولیکی محاسبه شده از مدل پیشنهادی را حداقل می‌کند، تعیین شده و برای هر قطر ذره در جدول (۱) ارائه شده‌اند. لازم به ذکر است که با توجه به دو ضابطه‌ای بودن مدل پیشنهادی، در هر قطر مورد بررسی دو مقدار α به دست آمد اما مقادیری از α به عنوان جواب معرفی شده‌اند که به ازای آن‌ها تابع هدف کمترین مقدار را دارد. مطابق جدول

(۱) در مرحله واسنجی پارامترهای a و α ، تمامی مقادیر بهینه α

در دامنه صفر تا یک قرار دارند، بنابراین در این حالت مدل پیشنهادی بهینه مطابق معادله (۱۴) و تنها دارای ضابطه تعریف شده در دامنه صفر تا یک معرفی می‌گردد.

$$i = 2a \frac{V^{\alpha+1}}{\alpha + 1} \quad \text{(رابطه ۱۴)}$$

همانطور که مشاهده می‌شود ضریب a با افزایش قطر ذرات کاهش می‌یابد. این مساله نشان می‌دهد که رژیم جریان به حالت آشفته کاملاً توسعه یافته نزدیک می‌شود چرا که رژیم جریان در سرعت‌های بالا مستقل از زبری دانه‌هاست.

جدول ۱- واسنجی پارامترهای مدل پیشنهادی (بر اساس ۷۰ درصد داده‌ها)

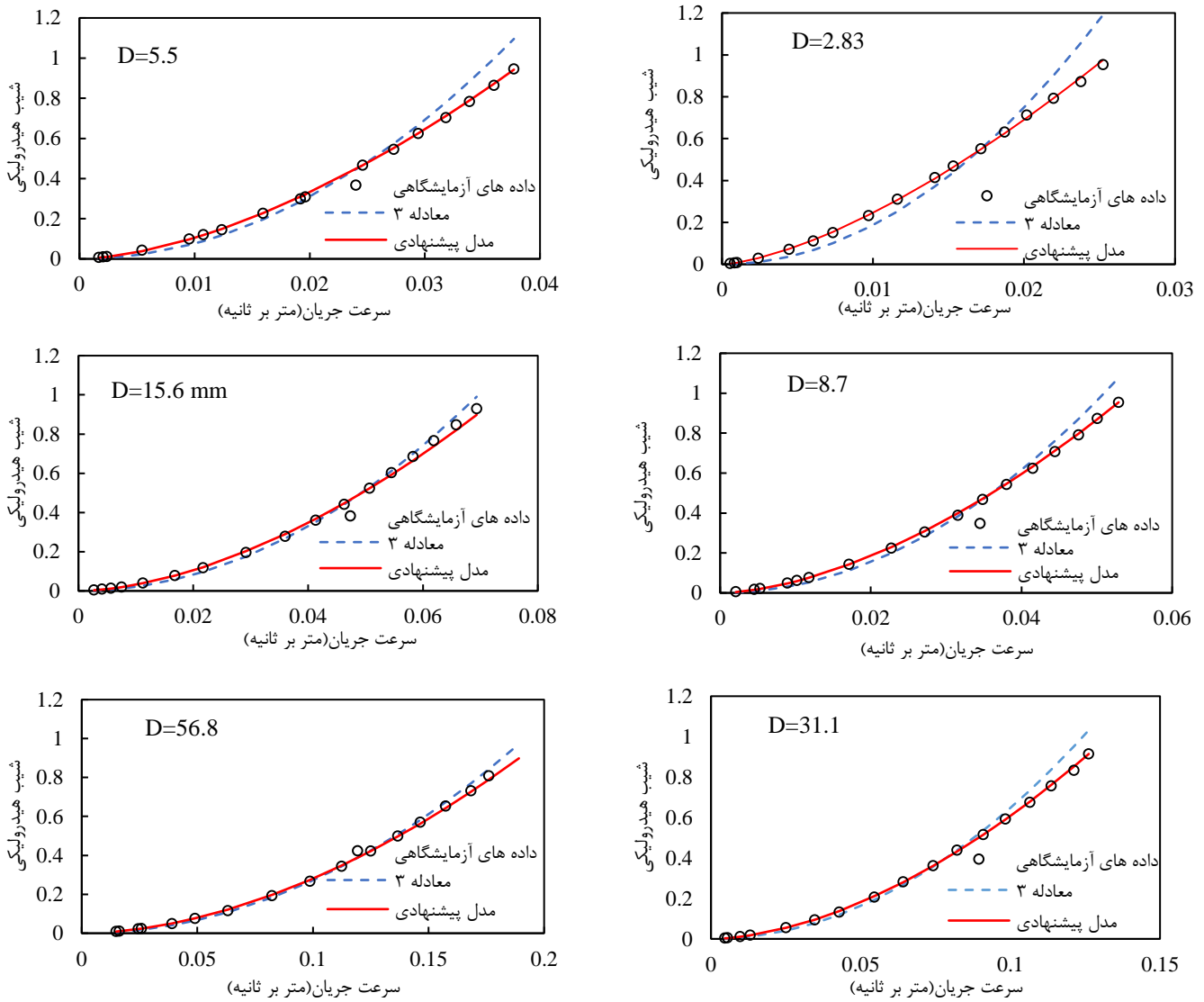
متوسط خطای معادله (۱۴) برحسب درصد	α	a	عدد رینولدز	تخلخل	قطر ذرات (میلی‌متر)
۲/۲۶	۰/۴۸۵	۱۶۹/۸۶	۲۴۰-۵	۰/۳۲	۲/۸۳
۲/۵۱	۰/۵۷۹	۱۲۷/۲۷	۷۲۰-۳۱	۰/۳۳	۵/۵
۲/۵۵	۰/۶۴۹	۹۷/۸۹	۱۵۱۰-۶۰	۰/۳۵	۸/۷
۳/۸۵	۰/۶۸	۶۶/۰۴	۳۹۲۰-۱۵۱	۰/۳۲	۱۵/۶
۲/۳۲	۰/۷۱	۲۶/۶۳	۱۲۵۰۰-۴۶۰	۰/۳۶	۳۱/۱
۱/۴۳	۰/۸۲	۱۷	۳۰۷۵۰-۲۴۰۰	۰/۴۰	۵۶/۸

از آنجایی که مدل مرتبه کسری ارائه شده تعمیمی از معادله ایزباش می‌باشد، عملکرد آن باید با این مدل مقایسه شود. بدین منظور نتایج مدل پیشنهادی با ۳۰ درصد داده‌های آزمایشگاهی باقی‌مانده و حل تحلیلی معادله ایزباش در حالت جریان آشفته کاملاً توسعه یافته (معادله ۳) مورد مقایسه قرار گرفت که نمودارهای مربوط به این بررسی در هر قطر ذره مورد آزمایش در شکل (۲) نشان داده شده است. همچنین مقدار

متوسط خطای تخمین در هر قطر مورد بررسی برای هر دو مدل افت ایزباش (معادله ۳) و مدل کسری پیشنهادی (معادله ۱۴) در جدول (۲) بیان گردیده است. تحلیل نتایج حاصل از شکل (۲) و جدول (۲) نشان می‌دهد که مدل پیشنهادی به ازای مقادیر بهینه α ارائه شده در جدول (۱) با داده‌های آزمایشگاهی تطابق بسیار خوبی دارد. نتایج جدول (۲) مربوط به اعتبارسنجی مدل‌ها و شکل (۲) نتایج حاصل از تمام داده‌ها می‌باشد.

جدول ۲- مقادیر متوسط خطای مدل معمولی و مدل کسری پیشنهادی (اعبار سنجی بر اساس ۳۰ درصد داده‌ها)

متوسط خطای معادله (۱۴) برحسب	متوسط خطای معادله (۳) برحسب درصد	قطر ذرات (میلی‌متر)
۱/۹۷	۲۱	۲/۸۳
۳/۷۶	۱۲/۷۶	۵/۵
۱/۶۴	۱۲/۲۲	۸/۷
۴/۶۶	۹/۴۱	۱۵/۶
۱/۶۸	۱۰/۸۶	۳۱/۱
۲/۴۵	۷/۲۹	۵۶/۸



شکل ۲- مقایسه نتایج مدل پیشنهادی و معادله (۳) با داده های آزمایشگاهی در قطرهای مختلف

افزایش می یابد (Barr, 2001).

با بررسی نمودارها و همچنین محاسبه میزان متوسط اختلاف مدل پیشنهادی نسبت به معادله ۳ (جریان آشفته کاملاً توسعه یافته) در قطرهای ۲/۸۳، ۵/۵، ۸/۷، ۱۵/۶، ۳۱/۱ و ۵۶/۸ میلی متر که به ترتیب برابر با ۸۱، ۴۰، ۳۲/۲، ۳۱/۶، ۲۶/۸ و ۱۳/۵ درصد می باشد، مشاهده می شود که نمودار شیب-سرعت مدل پیشنهادی به نمودار مربوط به معادله ۳ (جریان آشفته کاملاً توسعه یافته) در قطرهای بزرگتر نزدیکتر می شود. دلیل این پدیده مستقیماً به رفتار پیچیده جریان به علت بزرگی اندازه ذرات و منافذ و بروز سرعت های بالا و آشفته گی جریان مربوط است.

با بررسی مقادیر جدول (۱) و با توجه به ارتباط مستقیم مرتبه کسری α با قطر متوسط ذرات و تخلخل محیط متخلخل، مشاهده می شود که با افزایش قطر متوسط ذرات و در نتیجه افزایش تخلخل، مرتبه کسری α ، افزایش می یابد. علت این

رابطه بین شیب هیدرولیکی و سرعت جریان معیار مهمی برای ارزیابی رژیم جریان داری یا غیرداری در میان محیط های متخلخل می باشد (Sedghi et al., 2014). به طوریکه اگر رابطه شیب هیدرولیکی و سرعت جریان خطی باشد، رفتار جریان داری و اگر غیرخطی باشد، رفتار جریان به عنوان جریان غیرداری یا غیر خطی در نظر گرفته می شود.

بررسی نمودارها نشان می دهد که در تمام قطرهای مورد بررسی رفتار جریان غیرخطی است. چرا که با بزرگتر شدن اندازه ذرات و منافذ، سرعت جریان بالا می رود و سطح تلاطم جریان افزایش می یابد. به عبارتی افزایش سرعت جریان، بی نظمی ها و انتقال بیش از حد مومنت، باعث تغییر جریان از خطی به غیر-خطی می شود. معمولاً اگر سیال مورد نظر گاز و یا سیال با لزجت پایین باشد، احتمال آرام بودن جریان کم است. به طور کلی اگر شیب هیدرولیکی در محیط زیاد شود، احتمال شروع آشفته گی

است که برای این پارامترهای روابط مناسبی ارائه شود. این کار (مدلسازی پارامترهای مدل پیشنهادی) با استفاده از تحلیل ابعادی ممکن است که در ادامه به آن پرداخته می شود.

تحلیل ابعادی پارامترهای موثر بر رژیم جریان

پارامترهای هیدرولیکی موثر بر رژیم جریان در محیط متخلخل درشت‌دانه عبارتند از: $V, \rho, \mu, D, n, g, \Delta H, L, S$ که به ترتیب نشان دهنده‌ی سرعت جریان، لزجت دینامیکی، جرم مخصوص، قطر متوسط ذرات گرد گوشه، تخلخل، شتاب ثقل، افت سطح آب درون محیط متخلخل، طول محیط متخلخل و شیب بستر می- باشند که در جدول (۳) ابعاد و واحدهای این متغیرها معرفی گردیده است.

افزایش، مستقیماً به رژیم جریان وابسته است به طوریکه با افزایش قطر ذرات و بزرگ شدن منافذ و افزایش نیروهای مومنتم، رژیم غالب جریان به سمت آشفته شدن میل می‌کند. بنابراین می‌توان نقش α در مدل پیشنهادی را مشابه توان b در معادله توانی ایزباز در نظر گرفت و فرض کرد که مقدار α به خصوصیات سیال و رژیم جریان بستگی دارد. به منظور اثبات درستی این فرض به بررسی تاثیر پارامترهای موثر بر رژیم جریان بر اساس روش تحلیل ابعادی پرداخته می‌شود. با استفاده از تحلیل ابعادی می‌توان متغیرهای موثر بر پدیده را به صورت‌های بدون بعد بیان کرد. در بخش قبل بدون مدل‌سازی پارامترهای a و α به واسنجی این عددی پارامترها برای هر قطر متوسط ذره پرداخته شد و روند کلی تغییرات این پارامترها مشخص گردید. در عمل بسیار مناسب

جدول ۳- ابعاد و واحدهای متغیرهای موثر بر رژیم جریان

متغیرها	ابعاد اصلی	نماد	واحدها (متریک)
سرعت جریان عبوری	LT^{-1}	V	m/s
قطر متوسط ذرات	L	D	m
جرم مخصوص	ML^{-3}	ρ	Kg/m^3
لزجت دینامیکی	$ML^{-1}T^{-1}$	μ	$Kg/(m.s)$
تخلخل	-	n	-
شتاب ثقل	LT^{-2}	g	m/s^2
افت سطح آب درون محیط متخلخل	L	ΔH	m
طول محیط متخلخل	L	L	m
شیب بستر	L	S	-

تعیین متغیرهای بی‌بعد

با توجه به قضیه پای-باکینگهام، از آنجایی که در متغیرهای معرفی شده در جدول شماره (۳)، مجموعاً ۳ بعد اصلی وجود دارد، لذا لازم است ۳ متغیر مستقل V, D, ρ به عنوان متغیرهای تکرار شونده انتخاب گردد. با انتخاب این متغیرهای تکرار شونده، ۶ پارامتر بی‌بعد به صورت زیر حاصل خواهد شد.

$$\Pi_1 = \frac{\mu}{\rho V D} \quad \text{(رابطه ۱۵)}$$

$$\Pi_2 = n \quad \text{(رابطه ۱۶)}$$

$$\Pi_3 = \frac{gD}{V^2} \quad \text{(رابطه ۱۷)}$$

$$\Pi_4 = \frac{L}{D} \quad \text{(رابطه ۱۸)}$$

$$\Pi_5 = \frac{\Delta H}{D} \quad \text{(رابطه ۱۹)}$$

$$\Pi_6 = S \quad \text{(رابطه ۲۰)}$$

عدد بی‌بعد اول معرف (عکس) عدد رینولدز جریان و عدد

بی‌بعد سوم معرف (عکس مجذور) عدد فرود می‌باشد. همچنین با تقسیم عدد بی‌بعد Π_5 به Π_4 شیب هیدرولیکی $i (= \Delta H/L)$ به دست می‌آید. لازم به ذکر است گروه‌های بی‌بعد می‌توانند با یکدیگر ترکیب شوند تا گروه‌های بی‌بعد جدید بوجود آید. بنابراین متغیرهای بی‌بعد را می‌توان به صورت تابعی زیر نوشت:

$$f(R_e, n, Fr, i, S) = 0 \quad \text{(رابطه ۲۱)}$$

لازم به ذکر است تمام متغیرهای موثر اولیه در گروه‌های بی‌بعد بیان شده در معادله (۲۱) وجود دارند.

با توجه به اینکه در این تحقیق، مدل آزمایشگاهی یک ستون بسته بوده و شیب صفر است، با حذف پارامتر S ، رابطه (۲۱) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$f_1(R_e, n, Fr, i) = 0 \quad \text{(رابطه ۲۲)}$$

با در نظر گرفتن شیب هیدرولیکی به عنوان متغیر وابسته، می‌توان نوشت:

$$i = a_1 R_e^{a_2} Fr^{a_3} n^{a_4} \quad \text{(رابطه ۲۳)}$$

محاسبه شدند که نتیجه نهایی به صورت زیر است.

$$\alpha = 0.555 R_e^{0.074} \quad (\text{رابطه } ۳۰)$$

$$a = \frac{5.96}{n^{1.44} (gD)^{\frac{\alpha+1}{2}}} \quad (\text{رابطه } ۳۱)$$

طبق تحلیل برازشی انجام شده، از اثرات تخلخل و عدد فرود در معادله (۲۸) و از اثرات اعداد فرود و رینولدز در معادله (۲۹) بدون ایجاد خطای قابل ملاحظه در شیب هیدرولیکی (تابع هدف) می توان صرف نظر کرد. لازم به ذکر است از اثرات لزجت (عدد رینولدز) در رابطه (۳۰) علی رغم آنکه توان این متغیر در معادله (۳۰) کوچک است، نمی توان صرف نظر کرد و حذف آن با افزایش خطا در شیب هیدرولیکی همراه خواهد بود. معادلات (۳۰) و (۳۱) در محاسبه شیب هیدرولیکی در مرحله واسنجی (۷۰ درصد داده های تحقیق حاضر) متوسط خطای ۳/۸۰ درصد ایجاد می کنند، همچنین متوسط خطای این معادلات در محاسبه شیب هیدرولیکی در مرحله اعتبار سنجی (۳۰ درصد داده های تحقیق حاضر) برابر ۳/۴۰ درصد است.

در ادبیات موضوع، به لحاظ کمی، وابستگی ضریب جمله دوم معادله فرشه ایمر (یکسان با ضریب a در مدل پیشنهادی) به عدد رینولدز گزارش نشده است و روابط پیشنهادی محققان برای تعیین ضریب اینرسی معادله فرشه ایمر تابعی از خصوصیات فیزیکی ذرات می باشد. حال آنکه با توجه به رابطه (۳۰) و وابستگی مرتبه کسری α به عدد رینولدز جریان، مشاهده می شود که ضریب a علاوه بر خصوصیات محیط متخلخل، به صورت غیرمستقیم به عدد رینولدز جریان نیز وابسته است.

به منظور بررسی تاثیر خصوصیات فیزیکی محیط متخلخل و مشخصات جریان در تعیین شیب هیدرولیکی، با جایگزینی روابط (۳۰) و (۳۱) در رابطه (۱۲)، مدلی بر پایه خصوصیات فیزیکی محیط متخلخل و رژیم جریان حاصل خواهد شد که از لحاظ ابعادی کاملاً همگن است و در آن عدد رینولدز مطابق رابطه $VD/(\mu/\rho)$ می باشد.

از آنجایی که مدل ارائه شده توسط روابط (۱۲)، (۳۰) و (۳۱) وابسته به پارامترهای فیزیکی مانند قطر متوسط ذرات و تخلخل محیط متخلخل می باشد (مدل با ضرایب فیزیکیال مینا)، لازم است عملکرد آن با مدل ارائه شده توسط رابطه (۱۴) با ضرایب بهینه ارائه شده در جدول (۱) مقایسه شود. بدین منظور نمودار این مدل ها جهت مقایسه گرافیکی نتایج در هر قطر ذره ی مورد آزمایش به همراه داده های آزمایشگاهی در شکل (۳) ارائه شده است. همچنین مقدار متوسط خطای تخمین در هر قطر برای معادله (۱۴) و مدل حاصل از روابط (۱۲)، (۳۰) و (۳۱) برای تمام داده های حاصل از این تحقیق در جدول (۴) ارائه شده است.

با مساوی قرار دادن طرف راست روابط (۱۴) و (۲۳) خواهیم داشت:

$$a_1 R_e^{a_2} Fr^{a_3} n^{a_4} = 2a \frac{\left(V^2 \frac{gD}{gD} \right)^{\frac{\alpha+1}{2}}}{\alpha+1} \quad (\text{رابطه } ۲۴)$$

یا

$$a_1 R_e^{a_2} Fr^{a_3} n^{a_4} = 2 \frac{\left(a^{\frac{2}{\alpha+1}} gD \right)^{\frac{\alpha+1}{2}} Fr^{\frac{\alpha+1}{4}}}{\alpha+1} \quad (\text{رابطه } ۲۵)$$

از رابطه فوق، روابط تابعی زیر برای α و a قابل استنباط هستند:

$$\alpha = g_1(R_e, Fr, n) \quad (\text{رابطه } ۲۶)$$

$$a = \frac{1}{(\sqrt{gD})^{\alpha+1}} g_2(R_e, Fr, n) \quad (\text{رابطه } ۲۷)$$

روابط فوق نشان می دهند که مرتبه کسری α ، بی بعد و تابعی از عدد رینولدز جریان، عدد فرود و تخلخل محیط متخلخل می باشد (این رابطه درستی فرض وابستگی مرتبه کسری α به رژیم جریان را اثبات می کند) و ضریب a دارای بعد $[L^{-\alpha-1} T^{\alpha+1}]$ است که بررسی ابعادی رابطه (۱۴) نیز آن را تایید می کند.

ارائه روابط برای تخمین مرتبه کسری α و ضریب a

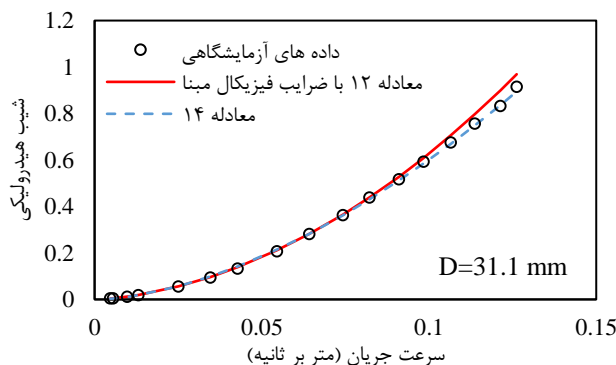
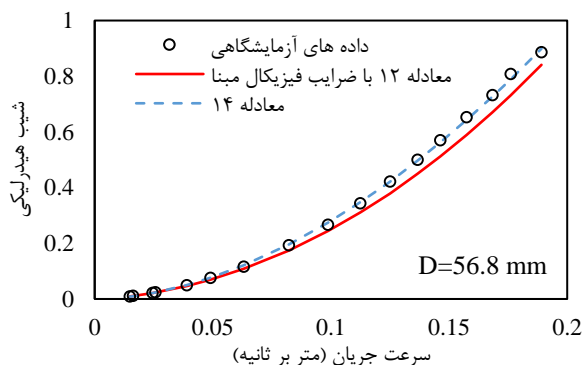
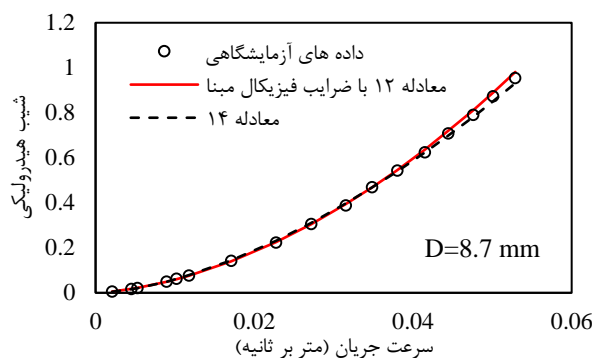
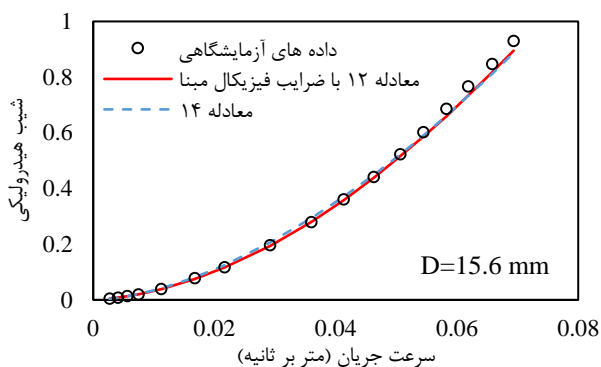
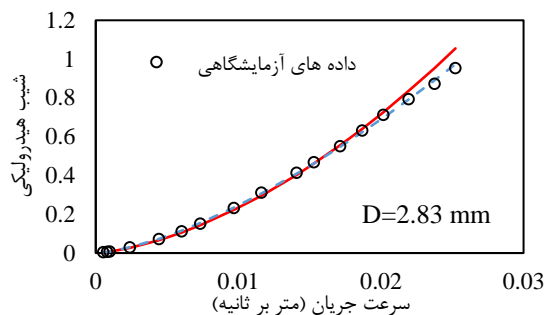
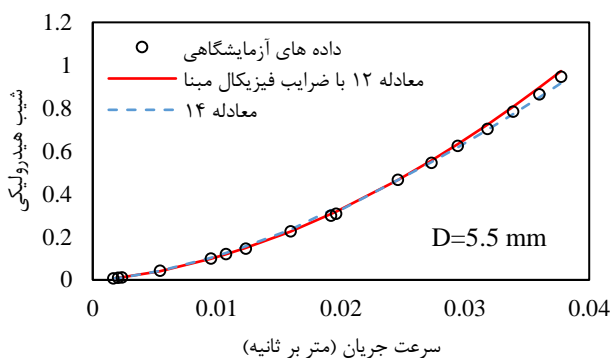
به منظور مطالعه مفهوم فیزیکی مرتبه کسری α ، بر اساس رابطه (۲۶)، رابطه ای کلی به شکل رابطه (۲۸) پیشنهاد شده است:

$$\alpha = b_1 \cdot R_e^{b_2} Fr^{b_3} n^{b_4} \quad (\text{رابطه } ۲۸)$$

که در آن b_1, b_2, b_3, b_4 مقادیر ثابت هستند و با استفاده از روش برازش منحنی و مقادیر واقعی داده ها قابل تعیین هستند. همچنین بر اساس رابطه (۲۷) که وابستگی ضریب a را به عدد رینولدز، عدد فرود و خصوصیات فیزیکی محیط متخلخل همچون تخلخل و قطر ذرات نشان می دهد، رابطه ای به شکل کلی رابطه (۲۹) در سیستم آحاد متریک جهت تعیین ضریب a در مدل کسری پیشنهادی ارائه گردید.

$$a = \frac{1}{(gD)^{\frac{\alpha+1}{2}}} c_1 R_e^{c_2} Fr^{c_3} n^{c_4} \quad (\text{رابطه } ۲۹)$$

که در آن c_1, c_2, c_3, c_4 نیز مشابه با رابطه (۲۸) مقادیر ثابت می باشند و از طریق روش برازش منحنی تعیین می شوند. در نهایت، با در نظر گرفتن ۷۰ درصد از داده های آزمایشگاهی موجود و بر اساس حداقل کردن مجموع مربعات خطای شیب هیدرولیکی، مقادیر ثابت معادلات پیشنهادی



شکل ۳- مقایسه نتایج معادله (۱۴) و مدل حاصل از روابط (۱۲)، (۳۰) و (۳۱) معادله (۳۲) با داده‌های آزمایشگاهی در قطرهای مختلف

جدول ۴- مقادیر متوسط خطای معادله (۱۴) و مدل حاصل از روابط (۱۲)، (۳۰) و (۳۱)

قطر ذرات (میلی‌متر)	متوسط خطای مدل حاصل از روابط (۱۲)، (۳۰) و (۳۱) بر حسب درصد	
	متوسط خطای معادله (۱۴)	متوسط خطای معادله (۱۴) بر حسب درصد
۲/۸۳	۱/۹۷	۴/۲۷
۵/۵	۳/۷۶	۲/۴۱
۸/۷	۱/۶۴	۱/۷۶
۱۵/۶	۴/۶۶	۲/۴۵
۳۱/۱	۱/۶۸	۳/۸۱
۵۶/۸	۲/۴۵	۷/۱۲

شرایط جریان و خصوصیات فیزیکی محیط متخلخل می‌باشد. همانطور که ملاحظه می‌شود بهترین عملکرد مدل با ضرایب فیزیکی مینا برای قطرهای بین ۵/۵ تا ۳۱ میلی‌متر می‌باشد.

با بررسی و تحلیل نتایج حاصل از شکل (۳) و جدول (۴) مشاهده می‌شود که مقدار متوسط خطای تخمین شیب هیدرولیکی از مدل حاصل از روابط (۱۲)، (۳۰) و (۳۱) در محدوده ۱/۷۶ تا ۷/۱۲ درصد برای قطرهای مختلف متغیر است که نشان‌دهنده مدل‌سازی مناسب شیب هیدرولیکی بر اساس

نتیجه گیری

جریان و میل به ایجاد رژیم جریان آشفته در قطرهای بزرگ است. لذا با توجه به این پدیده، تاثیر پارامترهای موثر بر رژیم جریان بررسی شد و بر اساس تحلیل ابعادی و داده های آزمایشگاهی موجود، روابطی به منظور برآورد مرتبه کسری α و پارامتر a پیشنهاد گردید. همچنین نتایج حاصل از تحلیل ابعادی نشان داد که ضریب مقاومت a در مدل پیشنهادی، علاوه بر خصوصیات محیط متخلخل نظیر قطر ذره و تخلخل محیط به به رژیم جریان نیز از طریق ضریب α وابسته است.

در حالت کلی می توان نتیجه گرفت که مرتبه کسری مدل ارائه شده در این تحقیق، دارای مفهومی کاملاً هیدرولیکی است و مقدار آن تا حدودی وابسته به عدد رینولدز جریان می باشد که نسبت به معادله ایزباش در شرایط جریان آشفته کاملاً توسعه یافته، ارتباط مناسب تری بین سرعت و شیب هیدرولیکی برقرار می کند.

"هیچ گونه تعارض منافع بین نویسندگان وجود ندارد"

هدف از تحقیق حاضر مطالعه و بررسی مفهوم فیزیکی مرتبه مشتقات کسری توسط مشتقات سازگار با تاکید بر رابطه توانی سرعت و شیب هیدرولیکی جریان در شرایط جریان آشفته کاملاً توسعه یافته بود. بدین منظور با تعیین دامنه قابل قبول مرتبه کسری در معادله مورد بررسی، مدلی غیرخطی بر مبنای مشتقات سازگار از معادله (درجه دوم) افت فشار ایزباش برای جریان آشفته کاملاً توسعه یافته ارائه شد و پارامترهای بهینه مدل پیشنهادی شامل ضریب a و مرتبه α با استفاده از تجزیه و تحلیل داده های آزمایشگاهی به دو صورت عددی و همچنین مدلسازی تعیین گردید.

به منظور مطالعه مفهوم مرتبه کسری مدل، با بررسی رفتار مرتبه کسری نسبت به پارامترهایی نظیر قطر ذرات، تخلخل محیط متخلخل و عدد رینولدز مشاهده شد که با افزایش مقادیر این پارامترها مرتبه α افزایش می یابد. علت این پدیده آشفتهگی

REFERENCES

- Ahmed, N. and Sunada, D. K. (1969). Non-linear Flow in Porous Media. Journal of Hydraulic Division ASCE, 95(6), 1847.
- Barr, D. W. (2001). Turbulent Flow through Porous Media. Ground Water. 39(5), 646-650.
- Birgani, O. T. Chandok, S. Dedovic, N., and Radenovic, S. (2019). A note on some recent results of the conformable fractional derivative. Advances in the Theory of Nonlinear Analysis and its Application, 3(1), 11-17.
- Bordier, C. Zimmer, D. (2000). Drainage equations and non-Darcian modeling in coarse porous media or geosynthetic materials. Journal of Hydrology, 228 (3-4), 174-187.
- Dong, X. Bai, Z. and Zhang, S. (2017). Positive solutions to boundary value problems of p-Laplacian with fractional derivative. Boundary Value Problems, 2017(1), 1-15.
- Ergun, S. (1952). Fluid flow through packed columns. Chemical Engineering Progress, 48(2), 89-94.
- Forchheimer, P. (1901). Wasserbewegung durch boden. Zeit. Ver. Deutsch, Ing., 45, 1782-1788.
- Hansen, D. (1992). The Behavior of Flow through Rockfill Dams. Ph.D. dissertation, Department of Civil Engineering, University of Ottawa, Ottawa, Ontario.
- Herrera, N. M. and Felton, G. K. (1991). Hydraulics of flow through a rockfill dam using sediment-free water. Transactions of the ASAE, 34(3), 871-8875.
- Izbash, S. (1931). O Filtracii kropnozernstom materiale. Leningrad: USSR.
- Khalil, R. Al Horani, M. Yousef, A. and Sababheh, M. (2014). A new definition of fractional derivative. Journal of Computational and Applied Mathematics, 264, 65-70.
- Kovacs, G. (1977) Developments in water science. Seepage Hydraulics, Elsevier.
- Li, B. Garga, V. K. and Davies, M. H. (1998). Relationships for non-Darcy flow in rockfill. Journal of Hydraulic Engineering, 124(2), 206-212.
- Martins, R. (1990). Turbulent seepage flow through rockfill structures. Journal of water power dam construction 90, 41-45.
- McCorquodale J. A., Hannoura A., and Nasser M. S. (1978). Hydraulic conductivity of rockfill. Journal of Hydraulic Research, 16(2), 123-137.
- Parkin, A.K. (1963). Rockfill dams with inbuilt spillways: Stability characteristics. Water Research Foundation of Australia, Melbourne.
- Sarkhosh, P. Samani, J. M. V. and Mazaheri, M. (2017). A one-dimensional flood routing model for rockfill dams considering exit height. Proceedings of the Institution of Civil Engineers-Water Management, 171(1), 42-51.
- Sedghi-Asl, M. and Rahimi, H. (2011). Adoption of Manning's equation to 1D non-Darcy flow problems. Journal of Hydraulic Research, 49(6), 814-817.
- Sedghi-Asl, M. Rahimi, H. and Salehi, R. (2014). Non-Darcy flow of water through a packed column test. Transport in porous media, 101(2), 215-227.
- Soni, J. P. Islam, N. and Basak, P. (1978). An experimental evaluation of non-Darcian flow in porous media. Journal of Hydrology, 38(3-4), 231-241.
- Stephenson, D. (1979). Rockfill in hydraulic engineering. Elsevier Scientific, Amsterdam.
- Venkataraman, P. and Rao, P. R. M. (1998). Darcian, transitional, and turbulent flow through porous media. Journal of hydraulic engineering, 124(8)

840-846.

Ward, J. C. (1964). Turbulent flow in porous media. *Journal of the hydraulics division*, 90(5), 1-12.

Watanabe, H. (1982). Comment on Izbash's equation. *Journal of Hydrology*, 58(3-4), 389-397.

Wilkins, J. K. (1956). Flow of water through rockfill and its application to the design of dams. *Proceedings of the 2nd Australia-New Zealand Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*,

Canterbury University College, Christchurch, New Zealand, pp. 141-149.

Zeng, Z. and Grigg, R. (2006). A criterion for non-Darcy flow in porous media. *Transport in Porous Media*. 63(1), 57-69.

Zhou, H. W. and Yang, S. (2018). Fractional derivative approach to non-Darcian flow in porous media. *Journal of hydrology*, 566, 910-918.