



## مدل سازی شکست سد با استفاده از روش بدون شبکه پتروو- گالرکین و معادلات آب کم عمق

سعید دیمه‌ور<sup>۱</sup>، ابوالفضل اکبرپور<sup>۲\*</sup>

تاریخ ارسال: ۱۳۹۷/۰۴/۰۵

نوع مقاله: پژوهشی

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۰۹/۱۲

مقاله برگرفته از پایان نامه کارشناسی ارشد در رشته مهندسی عمران - گرایش مهندسی و مدیریت منابع آب - دانشگاه بیرجند

### چکیده

شکست سد از جمله مهمترین مسائل مرتبط با مهندسی آب است که محققین زیادی به بررسی این پدیده پرداخته‌اند. معادلات حاکم بر شکست سد، معادلات آب‌های کم عمق است. بسیاری از محققین سعی کرده‌اند پدیده شکست سد را با استفاده از روش‌های عددی، بررسی کنند. اکثر این روش‌های عددی مانند حجم محدود، معادلات دیفرانسیل را در شرایط ساده و پیچیده هندسی و با شبکه‌بندی دامنه مسئله، حل می‌کنند. اخیراً از روش‌های عددی جدیدی به نام روش‌های بدون شبکه برای حل معادلات دیفرانسیل استفاده می‌شود. در این روش‌ها نیازی به شبکه‌بندی دامنه مسئله نیست. در این پژوهش معادلات آب کم عمق با استفاده از روش بدون شبکه پتروو-گالرکین به همراه تابع شکل حداقل مربعات متحرک، مدل سازی شد. سپس با استفاده از یک مثال استاندارد به صحت سنجی مدل پرداخته شد. با محاسبه میزان خطا مشخص شد این روش از دقت مناسبی برخوردار بود به طوری که میزان جذر میانگین مربعات خطا برابر ۰/۰۰۲۴۶ بدست آمد. در نهایت با استفاده از مدل، مسئله شکست سد شبیه سازی شد و نتایج بدست آمده با نتایج حاصل از روش بدون شبکه گالرکین مقایسه شد.

واژه های کلیدی: آب‌های کم عمق، تابع شکل حداقل مربعات متحرک، روش بدون شبکه پتروو- گالرکین، شکست سد،

<sup>۱</sup> دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی عمران گرایش مهندسی و مدیریت منابع آب، دانشگاه بیرجند. [saeeddeyemvar641@birjand.ac.ir](mailto:saeeddeyemvar641@birjand.ac.ir)

<sup>۲</sup> دانشیار دانشکده مهندسی گروه عمران دانشگاه بیرجند. [Akbarpour@Birjand.ac.ir](mailto:Akbarpour@Birjand.ac.ir)



## مقدمه

از سال‌های گذشته تاکنون، محققان زیادی به بررسی پدیده شکست سد پرداخته‌اند. مدل‌های عددی تحلیل سیلاب ناشی از شکست سد با استفاده از معادلات آب کم‌عمق و غالباً به صورت یک بعدی توسعه یافته‌اند (محمدنژاد و همکاران، ۱۳۹۳). این معادلات از نوع هذلولوی یا هایپربولیک هستند. از آنجا که شکست سد با پدیده انتقال موج همراه است، روش عددی مورد نظر باید حرکت موج را طبق واقعیت شبیه‌سازی نماید و از نظر فیزیکی جواب‌های قابل قبول بدهد. به طور خاص لازم است تلاش شود تا جواب‌های عددی در خصوص سرعت انتشار، بزرگی و تغییر شکل موج (در صورت وجود) با جواب‌های واقعی برابری داشته و بدون نوسانات فیزیکی باشند (وثوقی فر و همکاران، ۱۳۹۳).

مطالعات اولیه در این زمینه در سال ۱۸۹۲ برای کانال‌های بدون اصطکاک توسط ریتر انجام گرفته است. پس از وی پژوهش‌های درس‌ر برای کانال‌های زبر و نیز معادلات استوکر دارای اهمیت بالایی هستند (وثوقی فر و همکاران، ۱۳۹۳).

نظر به اهمیت فراوان مسئله شکست سد در مهندسی آب، طی سال‌های گذشته محققان، روش‌های عددی مختلفی برای تحلیل آن ارائه کردند. از جمله این روش‌ها می‌توان به حجم محدود اشاره کرد. به عنوان نمونه علی‌پرست با روش حجم محدود و حل گر هارتن-لاکس-والر<sup>۱</sup> به تحلیل دو بعدی مسئله شکست سد پرداخت (Aliparast., 2009). اکبرپور و همکاران به مدل‌سازی معادلات آب کم‌عمق با روش حجم محدود بر روی شبکه بی‌سازمان مثلثی پرداختند و سپس مسائل مختلف مرتبط با این معادلات از جمله مسئله

شکست سد را حل کردند (اکبرپور و همکاران، ۱۳۹۲). وثوقی فر و همکاران با روش حجم محدود و شبکه‌بندی ورونوی به مدل‌سازی پدیده شکست سد پرداختند (وثوقی فر و همکاران، ۱۳۹۳). روش حجم محدود علی-رغم مزایای فراوان دارای محدودیت‌هایی می‌باشند که مهم‌ترین آنها نیازمند بودن به شبکه‌بندی دامنه حل است.

از جمله مشکلات مرتبط با شبکه‌بندی دامنه حل می‌توان به کاهش دقت محاسبات در حین انتقال اطلاعات از مش‌بندی در مرحله قبلی به مش‌بندی در مرحله جدید از المان‌های وابسته دانست، چون برای انتقال اطلاعات ناچار به استفاده از توابع میانی است لذا دقت محاسبات کاهش می‌یابد (محتشمی و همکاران، ۱۳۹۵). همچنین در مسائلی که شرایط مرزی مرتباً تغییر می‌کند نیازمند به روز شدن شبکه‌بندی دامنه حل است، که این مسئله امری زمانبر و پیچیده است. به همین دلیل اخیراً استفاده از روش‌های بدون شبکه گسترش یافته است.

اولین بار جینگولد و موناقان ایده روش‌های بدون شبکه را مطرح کردند. آن‌ها برای مدل‌سازی پدیده‌های نجومی از روش هیدرودینامیک ذرات هموار<sup>۲</sup> استفاده کردند (Gingold & Monaghan., 1977). ایده اصلی روش‌های بدون شبکه تقریب‌زنی دامنه مسئله با استفاده از گره‌ها و بدون نیاز به شبکه‌بندی دامنه حل است.

تاکنون برخی محققان سعی بر شبیه‌سازی شکست سد با استفاده از روش‌های بدون شبکه کرده‌اند. ژو و همکاران با استفاده از روش بدون شبکه که بر اساس تابع پایه شعاعی<sup>۳</sup> است، معادلات آب کم‌عمق همراه با مرز متحرک<sup>۴</sup> را مدل‌سازی کردند. آن‌ها با به کارگیری

<sup>2</sup> Radial base function  
Moving Boundary <sup>3</sup>

<sup>1</sup> Harten-Lax-va Leer (HLVL)  
<sup>2</sup> Smoothed Particle Hydrodynamics



که عمده تفاوت آن‌ها نحوه وزن‌دهی و انتخاب تابع وزن برای معادلات باقی‌مانده است (ارزانی و همکاران، ۱۳۸۶).

فرایند مدل‌سازی در کلیه این روش‌ها به این صورت است ابتدا باقی‌مانده وزنی عمدتاً بر روی حوزه انتگرال-گیری انجام شده و پس معادله باقی‌مانده وزنی حاصل برابر صفر قرار داده می‌شود (ارزانی و همکاران، ۱۳۸۶). سپس از معادلات حاصل بر روی حوزه، انتگرال-گیری شده و معادلات انتگرالی تولید می‌شود. در نهایت با استفاده از روش‌های انتگرال‌گیری عددی معادلات انتگرال‌گیری مرحله قبل به دستگاه معادلات جبری تبدیل شده و حل دستگاه معادلات منجر به دستیابی به جواب نهایی می‌شود.

در این بخش ابتدا به معرفی روش بدون شبکه پتروو-گالرکین به عنوان یکی از روش‌های زیر مجموعه باقی‌مانده‌های وزنی پرداخته شد. سپس نحوه دستیابی به معادلات تابع شکل حداقل مربعات متحرک تشریح شد. و تابع وزن بکار رفته در این پژوهش معرفی شد. در نهایت نحوه گسسته‌سازی معادلات آب کم‌عمق بیان شد.

در این پژوهش کلیه مراحل مدل‌سازی و حل معادلات در نرم افزار برنامه نویسی متلب انجام شده است.

### روش عددی بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین

این روش برای اولین بار توسط آتلوری و ژو ارائه شد (Atluri & Zhu., 1998). این روش در هیچ از یک مراحل تحلیل اعم از تقریب متغیر میدان و انتگرال-گیری عددی معادلات نیاز به شبکه‌بندی دامنه مسئله ندارد. این روش با استفاده از فرم ضعیف محلی معادلات را حل می‌کند. تابع تقریب به کار رفته در این روش

روش لاگرانژ-اویلر در فرمول‌سازی، حرکت مرز آزاد را ردیابی کرده و مسئله را تبدیل به دامنه مستقل از زمان کردند. سپس نتایج مدل را برای محاسبه جریان سیلاب ناشی از شکست سد و رواناب موج در ساحل استفاده نمودند (Zhou et al., 2004). رحمانی و فرویزی معادلات آبهای کم‌عمق را با استفاده از روش بدون شبکه گالرکین<sup>۲</sup> و تابع شکل حداقل مربعات متحرک حل کردند و نتایج حاصله را برای حل مسئله شکست سد به کار بردند (Rahmani & Farvizi., 2013)

فرزین و همکاران با استفاده از روش بدون شبکه هیدرودینامیک ذرات هموار با رویکرد لاگرانژی مسئله شکست سد را تحلیل نمودند و سپس نتایج حاصله را با رویکرد اویلری مقایسه کردند (فرزین و همکاران، ۱۳۹۳). مقصودی و شفیع‌فر با استفاده از روش هیدرودینامیک ذرات هموار مسئله شکست سد را در بستر فرسایش‌پذیر مدل‌سازی کردند (مقصودی و شفیع‌فر، ۱۳۹۳). مازیک و هلیکووا با استفاده از روش بدون شبکه پتروو-گالرکین<sup>۳</sup> و تابع پایه شعاعی به شبیه‌سازی مسئله شکست سد پرداختند (Muzik et al., 2017)

در این تحقیق با استفاده از روش بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین و تابع شکل حداقل مربعات متحرک<sup>۴</sup> به حل معادلات آبهای کم عمق پرداخته شد و سپس برای یک مثال استاندارد مورد آزمون قرار گرفت و در نهایت مسئله شکست سد در حالت یک‌بعدی و در شرایط غیر ماندگار مدل‌سازی شد سپس نتایج بدست-آمده با نتایج حاصل از روش بدون شبکه گالرکین مقایسه شد.

### مواد و روش‌ها

روش‌هایی چون گالرکین، حداقل مربعات و زیر حوزه متعلق به خانواده روش‌های باقی‌مانده وزنی است

<sup>4</sup>Moving Least Squares shape function

Lagrangian-Eulerian scheme <sup>4</sup>

<sup>5</sup>Element Free Galerkin

<sup>6</sup>Meshless local Petrov-Galerkin

حداقل مربعات متحرک است و به منظور حل معادلات انتگرالی از روش انتگرال گیری گوسی استفاده شد.

فرمول بندی روش بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین

برای یک مساله مکانیک جامدات دوبعدی با دامنه  $\Omega$  محدود به مرز  $\Gamma$  معادله تعادل و شرایط مرزی بصورت روابط (۱) و (۲) و (۳) نوشته می شود (Atluri & Zhu., 1998)

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad \text{معادله تعادل} \quad (1)$$

$$u = \bar{u} \quad \text{شرط مرزی اساسی} \quad (2)$$

$$\sigma \cdot n = \bar{t} \quad \text{شرط مرزی طبیعی} \quad (3)$$

با استفاده از روش بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین شکل ضعیف معادله (۱) روی دامنه محلی (دامنه تربیع) حول گره  $I$  ام به صورت رابطه (۴) نوشته می شود:

$$\int_{\Omega_q} (\sigma_{ij,j} + b_i) W_I d\Omega = 0 \quad (4)$$

که  $W_I$  تابع وزن است. با استفاده از انتگرال گیری جزء به جزء و قضیه دیورژانس رابطه (۴) را می توان به فرم رابطه (۵) ساده کرد:

در رابطه (۷)  $\Gamma_{q_i}$ ،  $\Gamma_{q_u}$  و  $\Gamma_{q_t}$  به ترتیب معرف مرز داخلی دامنه تربیع، مرز اساسی و مرز طبیعی هستند. از آنجایی که در این روش تابع وزن به نحوی انتخاب می شود که مقدار آن روی مرز داخلی دامنه تربیع صفر

$$\int_{\Omega_q} W_I \sigma_{ij,j} d\Omega = \int_{\Gamma_q} W_I \sigma_{ij} n_j d\Gamma - \int_{\Omega_q} W_{I,j} \sigma_{ij} d\Omega \quad (5)$$

همچنین رابطه میان تنش و کشش روی مرز به صورت زیر است:

$$\sigma_{ij} n_j = t_i \quad (6)$$

با جایگذاری معادله (۵) و (۶) در معادله (۱) رابطه (۷) حاصل می شود:

$$\int_{\Omega_q} W_{I,j} \sigma_{ij} d\Omega - \int_{\Gamma_{q_u}} W_I t_i d\Gamma - \int_{\Gamma_{q_t}} W_I t_i d\Gamma = \int_{\Gamma_{q_t}} \bar{t}_i W_I d\Gamma + \int_{\Omega_q} W_I b_i d\Omega \quad (7)$$

باشد، پس مقدار جمله سوم سمت چپ رابطه (۷) صفر است. در نهایت معادلات خطی گسسته سازی شده برای گره  $I$  ام در فرم ماتریسی به صورت رابطه (۸) است:

<sup>1</sup>Gaussian integration

<sup>2</sup> Quadrature domain



حداقل مربعات متحرک موجب شد محققان بصورت گسترده از آن برای تولید توابع شکل استفاده کنند. به طوری که بلچکو و همکاران در روش بدون شبکه گالرکین و آتلوری و ژو در روش بدون شبکه پتروو-گالرکین از تابع حداقل مربعات متحرک برای تولید تابع شکل در روش‌های بدون شبکه خود استفاده کردند (Belytschko et al., 1994; Atluri & Zhu., 1998;).

اگر  $U(X)$  یک تابع تغییرات میدانی در دامنه مورد بررسی  $\Omega$  باشد، تقریب  $U(X)$  در نقطه  $X$  با  $U^h(X)$  نشان داده می‌شود. تقریب حداقل مربعات متحرک تابع متغیر میدان را به فرم زیر معرفی می‌کند: (Belytschko et al., 1994)

$$\begin{aligned} U^h(X) &= \sum_j^m p_j(X) a_j(X) \quad (17) \\ &= P^T(X) a(X) \end{aligned}$$

که در آن  $m$  تعداد تک جمله‌ای‌های تشکیل دهنده  $P(X)$  و  $a(X)$  بردار ضرایب  $P(X)$  است که به صورت رابطه (۱۸) تعریف می‌شود:

$$a^T(X) = \{a_1(X) \ a_2(X) \ \dots \ a_m(X)\} \quad (18)$$

$P(X)$  یک بردار توابع پایه از مرتبه  $p$  است که در فضای یک بعدی و دو بعدی به صورت رابطه (۱۹) و (۲۰) می‌باشد:

$$P^T(X) = \{1 \ x \ x^2 \ \dots \ x^p\} \quad (19)$$

$$P^T(X, Y) = \{1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2 \ \dots \ y^p\} \quad (20)$$

به طور کلی بردار  $p$  بر اساس مثلث خیام پاسکال ساخته می‌شود.

$$K_I u = F_I \quad (8)$$

$$K_I = \int_{\Omega_q} V_I^T DB d\Omega - \int_{\Gamma_{qu}} W_I^T n DB d\Gamma \quad (9)$$

$$F_I = \int_{\Omega_q} W_I^T b d\Omega + \int_{\Gamma_{qt}} W_I^T t d\Gamma \quad (10)$$

در روابط (۹) و (۱۰)،  $W$  ماتریس وزن کلی و  $V$  مشتق آن و  $D$  ثابت ماده است.

$$W_I = \begin{bmatrix} W_1 & 0 & \dots & W_n & 0 \\ 0 & W_1 & \dots & 0 & W_n \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$V_I = \begin{bmatrix} W_{1,x} & 0 & \dots & W_{n,x} & 0 \\ 0 & W_{1,y} & \dots & 0 & W_{n,y} \\ W_{1,y} & W_{1,x} & \dots & W_{n,y} & W_{n,x} \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial \phi_n}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \phi_1}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial \phi_n}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial y} & \frac{\partial \phi_1}{\partial x} & \dots & \frac{\partial \phi_n}{\partial y} & \frac{\partial \phi_n}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (13)$$

در رابطه (۱۳)  $\phi$  تابع شکل است. روابط (۱۱) تا (۱۳) در حالت یک بعدی به صورت روابط (۱۴)، (۱۵) و (۱۶) می‌شود:

$$W_I = [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_n] \quad (14)$$

$$V_I = [w_{1,x} \ w_{2,x} \ \dots \ w_{n,x}] \quad (15)$$

$$B = \left[ \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \ \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \ \dots \ \frac{\partial \phi_n}{\partial x} \right] \quad (16)$$

### تابع تقریب حداقل مربعات متحرک

برای اولین بار نیرولز و همکاران از تابع حداقل مربعات متحرک برای ساخت تابع شکل و گسترش روش المان توسعه‌ای استفاده کردند (Nayroles et al., 1992). ایجاد پیوستگی در کل دامنه مسئله برای درون‌یابی تابع میدان و همچنین تقریب‌سازی با هر مرتبه دلخواه از سازگاری از مهمترین ویژگی‌های این تابع تقریب است (Liu & Gu., 2005). این ویژگی‌های تابع



$$U_s = [U_1 \ U_2 \ \dots \ U_n]^T \quad (27)$$

با جایگذاری رابطه (۲۴) در رابطه (۱۷) تقریب حداقل مربعات متحرک به صورت روابط (۲۸) و (۲۹) ارائه می‌گردد:

$$U^h(X) = \sum_I^n \sum_j^m P_j(X)(A^{-1}(X)B(X))_{jI} U_I \quad (28)$$

$$U^h(X) = \sum_I^n \phi_I(X) U_I \quad (29)$$

که در آن  $U^h(X)$  تقریب تابع  $\phi_I(X)$ ، تابع شکل و  $U_I$  پارامتر گرهی می‌باشد. به عبارتی دیگر تابع شکل به صورت رابطه (۳۰) بیان می‌گردد:

$$\phi_I(X) = \sum_j^m p_j(X)(A^{-1}(X)B(X))_{jI} = P^T A^{-1} B_I \quad (30)$$

مشتق جزئی تابع شکل به صورت رابطه (۳۱) بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} \phi_{I,x}(X) &= \sum_j^m \{ p_{j,x}(X)(A^{-1}(X)B(X))_{jI} \\ &+ p_j(X)(A^{-1}(X)_{,x} B(X) \\ &+ A^{-1}(X)B(X)_{,x} \}_{jI} \end{aligned} \quad (31)$$

در این پژوهش تعداد توابع پایه بکار رفته در بردار  $P(X)$ ، سه ( $m=3$ ) و از مرتبه دو ( $p=2$ ) می‌باشد. همچنین تعداد گره‌های موجود در دامنه حمایتی ( $n$ ) به نحوه توزیع گره‌ها و تعداد توابع پایه

برای تعیین ضرایب مجهول  $a(X)$  تابع وزن‌دار  $J(X)$  که در رابطه (۲۱) نشان داده شده مینیمم می‌شود (Liu & Gu., 2005):

$$J(X) = \sum_I^n W(X - X_I) \times [P^T(X_I)a(X) - U_I]^2 \quad (21)$$

$$W(X - X_I) = W_I(X) \quad (22)$$

در رابطه (۲۱)  $W_I(X)$  تابع وزن<sup>۱</sup> مربوط به نقطه گرهی  $I$  و مقدار داخل کروشه اختلاف بین مقدار تخمین زده شده در نقطه  $I$  و مقدار داده شده در همان نقطه می‌باشند.  $n$  نیز تعداد نقاط در دامنه حمایتی می‌باشد (Liu & Gu., 2005).

به منظور مینیمم کردن تابع  $J(X)$  رابطه (۲۲) بررسی می‌شود:

$$\frac{\partial J}{\partial a} = 0 \quad (23)$$

که در نهایت رابطه (۲۴) بدست می‌آید:

$$a(X) = A^{-1}(X)B(X)U_s \quad (24)$$

در رابطه (۲۴)،  $A(X)$ ،  $B(X)$  و  $U_s$  بصورت روابط (۲۵)، (۲۶) و (۲۷) تعریف می‌شوند:

$$A(X) = \sum_I^n W(X_I)p(X_I)P^T(X_I) \quad (25)$$

$$B(X) = [W_1 p(x_1) \ W_2 p(x_2) \ \dots \ W_n p(x_n)] \quad (26)$$

<sup>1</sup>Weight function



### گسسته‌سازی معادلات آب کم‌عمق با روش بدون

#### شبکه محلی پتروو-گالرکین

معادله آب کم‌عمق یک معادله دیفرانسیل هذلولی است که با انتگرال‌گیری از معادلات سه بعدی ناویر استوکس و با فرض‌های جریان تراکم‌ناپذیر با توزیع فشار هیدرواستاتیک و توزیع یکنواخت سرعت در عمق بدست می‌آید. حالت یک بعدی این معادلات عبارت است از:

$$(34) \quad \begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial(hu^2 + gh^2/2)}{\partial x} - gh(s_{0x}) = 0 \end{cases}$$

در رابطه (۳۴)،  $h$  (م) عمق جریان،  $u$  ( $\frac{m}{s}$ ) سرعت متوسط عمقی در راستای  $x$ ،  $g$  ( $\frac{m}{s^2}$ ) شتاب ثقل،  $s_{0x}$  شیب بستر است. رابطه (۳۴) به صورت شبه-خطی و با بردارها و ماتریس‌های زیر قابل نمایش است:

$$U_t + AU_{,x} = SU \quad (35)$$

$$U = \begin{bmatrix} h \\ hu \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -u^2 + gh & 2u \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ s_{0x} & 0 \end{bmatrix} \quad (38)$$

معادله (۳۵) با استفاده از روش ضمنی بصورت رابطه (۳۹) گسسته‌سازی می‌شود:

$$\frac{U_{n+1} - U_n}{\Delta t} + AU_{,x}^{n+1} = SU^{n+1} \quad (39)$$

که در رابطه (۳۹)  $\Delta t = t^{n+1} - t^n$  است.

معادله (۳۹) پس از بازنویسی به فرم رابطه (۴۰)

تبدیل م (۴۰) ی-شود

بستگی دارد و باید شرط وجود معکوس ماتریس  $A(X)$  در رابطه (۲۴) را ارضا نماید. به همین دلیل باید تعداد این گره‌ها از تعداد توابع پایه خیلی بیشتر باشد ( $n \gg m$ ). باید توجه داشت نظریه‌ای برای تعیین دقیق  $n$  وجود ندارد و باید آن از طریق آزمون‌های عددی بدست آورد (Liu & Gu., 2005):

### تابع وزن

تابع وزن که نقش مهمی در عمل تقریب سازی تابع شکل دارد دارای چهار ویژگی زیر است:

- مقدار تابع وزن در داخل دامنه حمایتی مثبت است.
- مقدار تابع وزن در خارج دامنه حمایتی صفر است.
- مقدار تابع وزن به صورت یکنواخت نسبت به نقطه دلخواه، کاهش می‌یابد.

- این تابع به میزان مناسبی روی مرزها نرم عمل می‌کند.

تابع وزن به صورت‌های گوناگونی از جمله تابع گوسی و اسپیلاین وجود دارد که در این پژوهش از تابع اسپیلاین به عنوان تابع وزن به صورت رابطه (۳۲) استفاده شده است:

$$(32) \quad W_i(X) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4\bar{r}_i^2 + 4\bar{r}_i^3 & \bar{r}_i \leq 0.5 \\ \frac{4}{3} - 4\bar{r}_i + 4\bar{r}_i^2 - \frac{4}{3}\bar{r}_i^3 & 0.5 < \bar{r}_i \leq 1 \\ 0 & \bar{r}_i > 1 \end{cases}$$

$$(33) \quad \bar{r}_i = \frac{d_i}{r_w} = \frac{|x - x_i|}{r_w}$$

در رابطه (۳۲) شعاع تأثیر نقطه گرهی  $x_i$  می‌باشد. برای هر نقطه،  $r_w$  باید به گونه‌ای تعیین شود که تعداد وزن‌های غیرصفر، بزرگتر از تعداد تک تک جملات موجود در چند جمله‌ای باشند ( $n > m$ ).



به منظور بررسی دقت مدل به حل معادله دیفرانسیل (۴۵) که به عنوان معادله همرفتی-پخش شناخته می‌شود، پرداخته شد:

$$U \frac{dQ}{dx} - K \frac{d^2Q}{dx^2} = 0 \quad (45)$$

شرایط مرزی معادله (۴۵) به شکل زیر می‌باشد:

$$\begin{cases} Q = 0 & \text{on } x = 0 \text{ m} \\ Q = 1 & \text{on } x = 1 \text{ m} \end{cases} \quad (46)$$

جواب دقیق این مسئله بصورت رابطه (۴۷) است

به دلیل وجود جمله همرفتی در معادله (۴۵)، این معادله به ازای عددهای پکلت  $(\frac{Uh}{K})$  که  $h$  (m) فاصله بین نقاط و  $U, K$  ضرایب موجود در معادله (۴۵) است متفاوت حل گردید و نتایج حاصله با مقدار دقیق آن مقایسه شد.

در شکل‌های ۱ تا ۴، نمودارهای مربوطه ارائه شده است. در این شکل‌ها محور افقی نمایش دهنده فاصله نقاط از مبدا مختصات و محور عمودی مقادیر مجهول ( $Q$ ) محاسبه شده توسط مدل است. در حل این معادله فاصله بین نقاط  $h=0.1$  m، و برای عددهای پکلت ۱، ۱/۵، ۳ و ۴ مقادیر  $U, K$  به صورت جدول ۱ در نظر گرفته شد.

جدول ۱- مقادیر  $U, K$  به ازای اعداد پکلت مختلف

عدد پکلت	۱	۱/۵	۳	۴
U	۳۰	۳۰	۳۰	۳۰
K	۳	۲	۱	۰/۷۵

معیارهای خطاسنجی

$$(I - S\Delta t)U^{n+1} + A\Delta tU_{,x}^{n+1} = U^n \quad (40)$$

که  $I$  نمایانگر ماتریس واحد می‌باشد.

شرط مرزی دریشله (روی  $\Gamma_1$ ) به صورت زیر است:

$$U^{n+1} - \bar{U} = 0 \quad (41)$$

$$Q_{Exact} = \frac{1 - e^{-\frac{Ux}{K}}}{1 - e^{-\frac{U}{K}}} \quad (47)$$

در صورت وزن دار کردن رابطه (۴۱) و انتگرال‌گیری بر روی دامنه  $\Omega$  معادله آب کم‌عمق به فرم ماتریسی رابطه (۴۲) در می‌آید:

$$KU^{n+1} = FU^n \quad (42)$$

$$K = \int_{\Omega} Iw_i\phi_i dx - \int_{\Omega} S\Delta tw_i\phi_i dx + \int_{\Omega} A\Delta tw_i\phi_{i,x} dx + \alpha \int_{\Gamma_1} w_i\phi_i d\Gamma \quad (43)$$

$$F = \int_{\Omega} w_i\phi_i dx + \alpha \int_{\Gamma_1} w_i\bar{U} d\Gamma \quad (44)$$

معادلات (۴۲) تا (۴۴) روابط نهایی استفاده شده برای معادلات آب کم‌عمق در این پژوهش است. با توجه به اینکه تابع شکل حداقل مربعات متحرک شرایط تابع دلتای کرونگر را ارضا نمی‌کند به همین دلیل به منظور اعمال شرط مرزی دریشله از روش جریمه استفاده شده است، که  $\alpha$  نیز ضریب جریمه می‌باشد.

حل مثال استاندارد

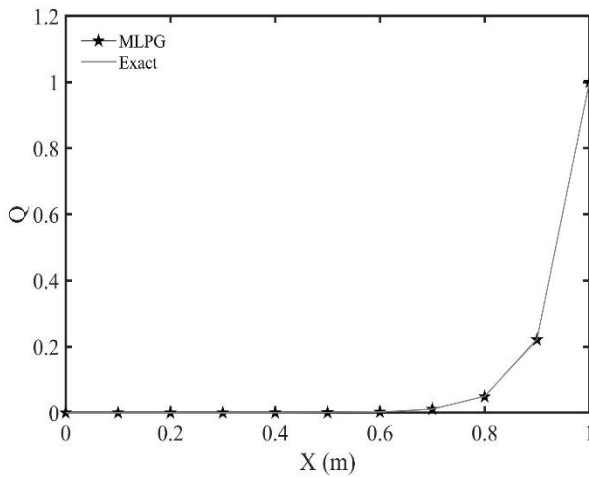




$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (Q_0 - Q_s)^2}{n}} \quad (50)$$

که در آن  $Q_0$  و  $Q_s$  به ترتیب مقدار مجهول محاسبه شده از حل دقیق و مقدار عددی محاسبه شده توسط مدل

برای هر نقطه در مدل سازی هر مسئله است. جدول ۲ مقادیر خطاهای محاسبه شده برای این مسئله را نشان می دهد. با توجه به مقادیر خطاهای محاسبه شده در جدول ۲ مشخص شد مدل از دقت و کارایی مناسبی برای حل معادلات دیفرانسیل هذلولی برخوردار است.

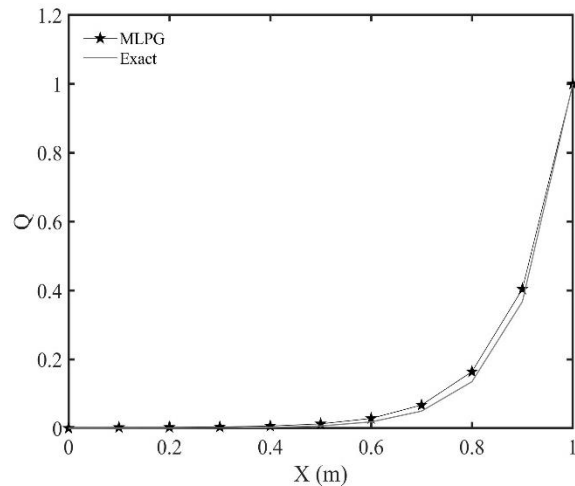


شکل ۱ مقایسه نتایج حل عددی و دقیق به ازای عدد پکلت ۱/۵

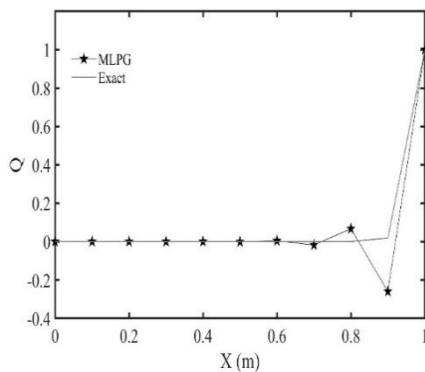
در این قسمت از میانگین خطا، میانگین مطلق خطا و جذر میانگین مربعات خطا به عنوان معیارهای سنجش عملکرد مدل استفاده شد. واحد خطاها بر اساس واحد مقادیر وارد شده در آنهاست. روابط (۴۸)، (۴۹) و (۵۰) نحوه محاسبه این خطاها را نشان می دهند:

$$ME = \frac{\sum_{i=1}^n (Q_0 - Q_s)}{n} \quad (48)$$

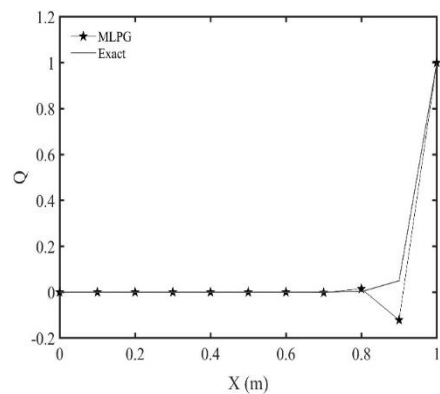
$$MAE = \frac{\sum_{i=1}^n |Q_0 - Q_s|}{n} \quad (49)$$



شکل ۲ مقایسه نتایج حل عددی و دقیق به ازای عدد پکلت ۱



شکل ۳ مقایسه نتایج حل عددی و دقیق به ازای عدد پکلت ۳



شکل ۴ مقایسه نتایج حل عددی و دقیق به ازای عدد پکلت ۴



جدول ۲- میانگین خطا، میانگین مطلق خطا و جذر میانگین مربعات خطا

عدد پکلت	۱	۱/۵	۳	۴
میانگین خطا	-۰/۰۱۱	۰/۰۰۳۶۹	۰/۱۶۱	۰/۲۲۵
میانگین مطلق خطا	۰/۰۱۱	۰/۰۰۳۶۹	۰/۱۸۶	۰/۳۶۹
جذر میانگین مربعات خطا	۰/۰۵۱	۰/۰۰۲۴۶	۰/۱۷۲	۰/۲۸۷

0.1 s در نظر گرفته شد. برای انتگرال گیری از روش گوس یک نقطه ای استفاده شد. ضریب جرمه  $\alpha = 10^6$  می باشد. شرایط اولیه مسئله به شرح زیر است:

$$h(x, 0) = \begin{cases} 2 & 0 \leq x \leq 5 \text{ m} \\ 1 & 5 < x \leq 10 \text{ m} \end{cases} \quad (51)$$

$$u(x, 0) = 0 \quad 0 \leq x \leq 10 \text{ m} \quad (52)$$

که  $h$  (m) عمق آب و  $u$  ( $\frac{m}{s}$ ) سرعت آب در راستای  $x$  است. رحمانی و فرویزی این مسئله را با روش بدون شبکه گالرکین (EFG) حل کردند. معادله استفاده شده توسط آنها، معادله (۳۵) و شرایط اولیه مسئله به صورت معادلات (۵۱) و (۵۲) بود (رحمانی و فرویزی، ۱۳۹۲).

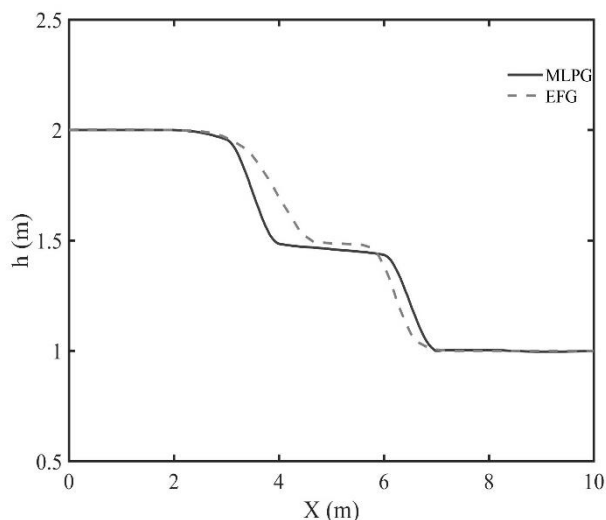
هدف بدست آوردن نمودار عمق و سرعت آب برای زمان های بعد از وقوع شکست سد با روش بدون شبکه پتروو-گالرکین و مقایسه آن ها با نتایج حاصل از روش بدون شبکه گالرکین است.

همانطور که در شکل های ۱ تا ۴ مشخص است نتایج عددی حاصل از مدل به ازای عدد پکلت ۱ و ۱/۵ به پاسخ دقیق نزدیک است به طوری که به ازای عدد پکلت ۱/۵ نمودارها کاملاً برهم منطبق است. اما در اعداد پکلت بالاتر از ۱/۵ پاسخ های عددی با ناهمواری هایی همراه است. این موضوع با توجه به معیارهای خطاسنجی در جدول ۲ نیز قابل مشاهده است.

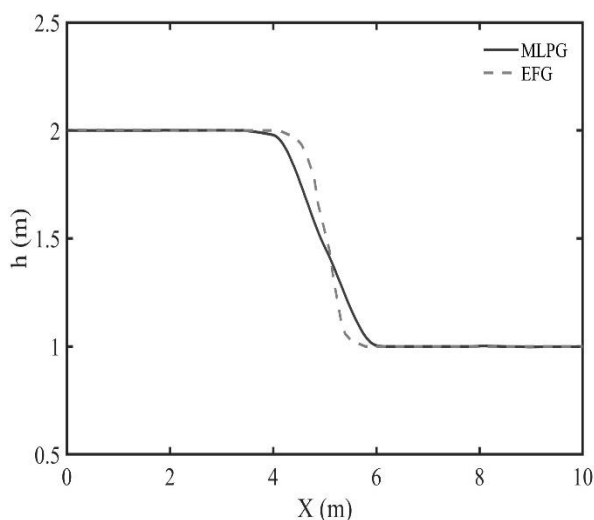
### مدل سازی مسئله شکست سد

در این بخش به مدل سازی یک بعدی مسئله شکست سد پرداخته شد. معادله استفاده شده در این قسمت همان معادله (۳۵) می باشد.

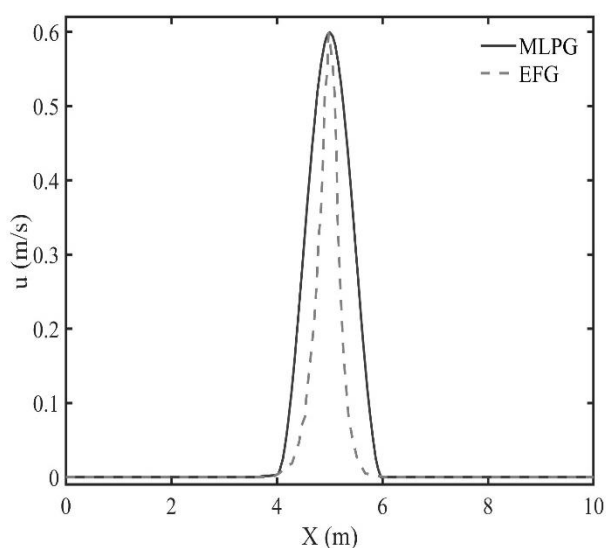
در این حالت دامنه مسئله یک خط به طول ۱۰ m با توزیع منظم گره ها در نظر گرفته شد. به طوری که فاصله گره ها در راستای  $x$  برابر یک دهم متر  $\Delta x = 0.1 \text{ m}$  و تعداد گره ها برابر ۱۰۱ است. همچنین  $\Delta t =$



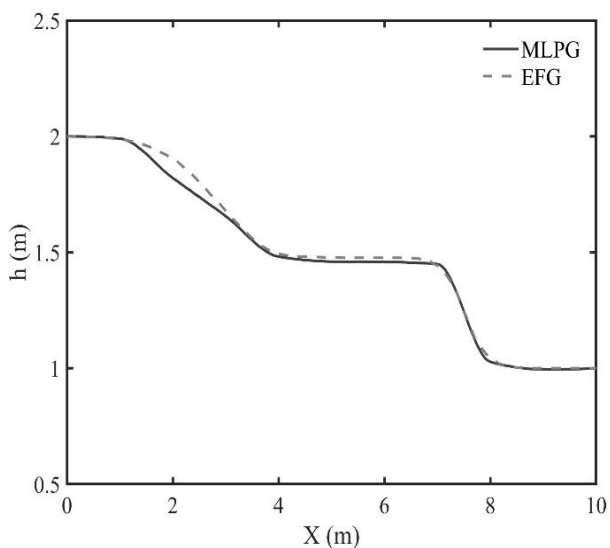
شکل ۶ مقایسه تراز سطح آب با روش MLPG و روش EFG در 1 ثانیه



شکل ۵ مقایسه تراز سطح آب با روش MLPG و روش EFG در 0.1 ثانیه



شکل ۸ مقایسه سرعت آب با روش MLPG و روش EFG در 0.1 ثانیه



شکل ۷ مقایسه تراز سطح آب با روش MLPG و روش EFG در 2 ثانیه

شبکه گالرکین (EFG) نشان داده شده است. در شکل - های ۵ تا ۷ محور افقی فاصله نقاط از مبدا مختصات و محور عمودی عمق آب را نشان می‌دهد. در شکل‌های ۸ تا ۱۰ محور افقی فاصله نقاط از مبدا مختصات و محور عمودی سرعت حرکت آب را نشان می‌دهد. همانطور که در شکل‌های ۵ تا ۱۰ مشاهده می‌شود نتایج حاصل از دو روش بدون شبکه پتروو-گالرکین (MLPG) و روش بدون شبکه گالرکین (EFG) تقریباً با یکدیگر مشابه است و روند نمودارهای تراز سطح آب

### نتایج و بحث

در این بخش به ارائه نتایج حاصل از مدل‌سازی مسئله شکست سد با استفاده از روش بدون شبکه پتروو-گالرکین و مقایسه آن با روش بدون شبکه گالرکین و همچنین بحث و بررسی آن پرداخته شد. شکل‌های ۵ تا ۱۰ نتایج حاصل از روش بدون شبکه پتروو-گالرکین (MLPG) و نتایج حاصل از روش بدون



تحقیق پس از مدل سازی معادلات آب کم عمق ابتدا به حل معادله همرفتی-پخش پرداخته شد و دقت مدل با معیارهای خطاسنجی مورد بررسی قرار گرفت که میزان میانگین خطا، میانگین مطلق خطا و میانگین جذر مربعات خطا در عدد پکلت  $1/5$  به ترتیب برابر  $0/00369$ ،  $0/00369$  و  $0/00246$  بود. که این امر نشان از دقت و کارایی مدل است. سپس مسئله شکست سد با استفاده از مدل در حالت یک بعدی حل شد. سپس نتایج بدست آمده از مدل با نتایج حاصل از روش بدون شبکه گالرکین (EFG) مقایسه شد که روند نمودارهای تراز سطح آب و سرعت آب تقریباً مشابه یکدیگر تغییر می کرد و نتایج در نقاط نزدیک به مرز به ویژه در زمان های اولیه مشابه بود. در نهایت نیز مشخص شد، این روش از کارایی مناسبی برای مدل سازی مسئله شکست سد برخوردار است.

و سرعت آب مشابه یکدیگر تغییر می کند. همانطور که مشخص است نتایج در نقاط نزدیک به مرزها به خصوص در زمان های اولیه کاملاً مشابه است. در نتیجه هر دو روش قابلیت خوبی برای مدل سازی مسئله شکست سد دارند.

### نتیجه گیری

به دلیل اهمیت مسئله شکست سد در مهندسی آب، مدل سازی عددی این پدیده و معادلات حاکم بر آن یعنی معادلات آب کم عمق امری ضروری است. در این پژوهش معادلات آب کم عمق با استفاده از روش بدون شبکه پتروو-گالرکین به همراه تابع شکل حداقل مربعات متحرک و تابع وزن اسپیلاین در نرم افزار متلب مدل شد. این روش علاوه بر حذف مشکلات مرتبط با شبکه بندی دامنه مسئله، از توانایی خوبی برای حل مسائلی با هندسه نامنظم برخوردار است. در این

### منابع

- اکبرپور، ا.، خراشادی زاده، ا.، علیپرست، م.، مهدی زاده، ح.، ۱۳۹۲، توسعه مدل دو بعدی شبیه سازی شکست سد مبتنی بر معادلات آب کم عمق بر روی شبکه بی سازمان مثلثی، مجله پژوهش آب ایران، سال ۸، شماره ۱
- رحمانی فیروزجانی، ع.، فرویزی، ف.، ۱۳۹۲، حل عددی معادلات آبهای کم عمق با استفاده از روش بدون شبکه گالرکین، هفتمین کنگره ملی مهندسی عمران، دانشکده مهندسی شهید نیکبخت، زاهدان
- فرزین، س.، حسن زاده، ی.، اعلمی، م.ت.، فاتحی، ر.، ۱۳۹۳، تحلیل مسائل شکست سد با استفاده از روش لاگرانژی اصلاح شده و مقایسه با رویکرد اویلری، تحقیقات منابع آب، سال دهم، شماره ۱
- محتشمی، ع.، اکبرپور، ا.، ملازاده، م.، ۱۳۹۶، مدل سازی جریان آب زیرزمینی در آبخوان آزاد در حالت ماندگار به روش بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین، مجله مهندسی مکانیک مدرس، دوره ۱۷، شماره ۲، صفحه ۳۹۳ تا ۴۰۳
- محمدنژاد، ب.ع.، فاطمی کیا، م.ا.، بهمنش، ج.، منتصری، م.، ۱۳۹۳، شبیه سازی عددی انتشار موج ناشی از شکست سد به صورت دو بعدی قائم، نشریه مهندسی عمران و محیط زیست، جلد ۴۴، شماره ۳
- مقصودی، م.ص.، شفیعی فر، م.، ۱۳۹۴، مدل سازی شکست سد با بستر فرسایش پذیر با استفاده از روش SPH، دوره ۱۰، شماره ۳
- وئوقی فر، ح.ر.، جلاپور، ح.ر.، تابنده، م.، ۱۳۹۳، ارائه یک مدل عددی ریاضی برای پدیده شکست سد به روش حجم - محدود با استفاده از شبکه بندی ورونوی، نشریه علمی - پژوهشی امیرکبیر (مهندسی عمران و محیط زیست)، دوره چهل و شش، شماره ۲، صفحه ۱ تا ۹

Aliparast, M. 2009. Two-dimensional finite volume method for dam-break flow simulation, international Journal of Sediment Research. 24(1): 99– 107.

Belytschko, T., Lu, Y. Y., Gu, L. (1994). Elements free Galerkin methods, International Journal for Numerical Methods in Engineering. 30(2): 229-256.

Gingold, R.A. and Monaghan, J.J. 1977. Smoothed particle hydrodynamics: Theory and applications to non-spherical stars. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 181: 375–389.



- Zhou, X., Hon, Y.C. and Cheung, K.F. 2004. A grid-free, nonlinear shallow-water model with moving boundary. *Journal of Engineering Analysis with Boundary Elements*. 28: 967-973.
- Muzik, J. and Holickova, M. 2017. Meshless simulation of dam break using MLPG-RBF and shallow water equations. *Theoretical Foundation of civil Engineering*. 117.
- Atluri, S. and Zhu, T. A. 1998. A new MESHless method (MLPG) approach in computational mechanics. *computaional mechanics*. 22(2): 117-127.
- Nayroles, N., Touzot, G. and Villon, P. 1992. Generalizing the finite element method: Diffuse approximation and diffuse elements, *Computaional Mechanics*. 10(5): 307-318.
- Liu, G. R. and Gu, Y. T. 2005. *An introduction to Meshfree Methods and Their Programming*. Singapore: Springer.
- Liu, G. 2002. *Mesh Free Methods: Moving Beyond the Finite Element Method*, Boca Raton: CRC preModeling of dam Break Using the Meshless Local Petrov-Galerkin Method and Shallow Water Equations



## Modeling of dam Break Using the Meshless Local Petrov-Galerkin Method and Shallow Water Equations

Saeed Deymevar<sup>1</sup>, Abolfazl Akbarpour <sup>\*2</sup>

### Abstract

Dam break is one of the most important problem of water engineering. many researchers have studied this phenomenon. The equations governing for dam break are shallow water equations. Many researchers have tried to investigate the dam breaking phenomenon using numerical methods. Most of these numerical methods, such as finite volume method, are being used to solve differential equation in some simple and complex case with meshing problem domain. Recently new numerical methods called Meshless methods have been developed to solve differential equations. these methods need no meshing or re-meshing on the domain the shortages of meshing disappeared. In this research, shallow water equations were modeled using a Meshless Local Petro-Galerkin method (MLPG) with Moving Least Squares (MLS) shape function. Then, using a standard example, the model's accuracy was investigating and the model error rate was calculated. it was indicated that the model has a good accuracy, so that the root mean square error was 0.00246 respectively. Finally, using the model, the dam break problem was simulated and the results were compared with the solutions of the Galerkin-free method.

**Keywords: Dam Break, Meshless Local Petrov-Galerkin, Moving Least Squares Shape Function, Shallow Water.**

---

<sup>1</sup>M.Sc. Student, Water Resources Engineering, University of Birjand. saeeddeyemevar641@birjand.ac.ir

<sup>2</sup>Associate Professor of Civil Engineering, University of Birjand. Akbarpour@Birjand.ac.ir

(\*-Corresponding Author Email: Akbarpour@Birjand.ac.ir)